

اعداد مختلط

تساوی اویلر

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی  آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی  آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 -  ساده جهت تثبیت مطالب
 -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
 -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

اگر P و Q در عدد حقیقی مثبت و $i = \sqrt{-1}$ شاخص عدد موهومی باشند، رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\sqrt{P+iQ} = \sqrt{\frac{R+P}{2}} + i\sqrt{\frac{R-P}{2}}$$

که در آن $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ می باشد.

۲ روش حل مسئله

😊 پاسخ: عبارت زیر رادیکال به صورت قطبی نمایش داده می شود. ابتدا مولفه شعاع و سپس زاویه عدد مختلط با محور حقیقی تعیین می شود.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

عدد زیر رادیکال به صورت زیر قابل نمایش است:

$$P + iQ = Re^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{P+iQ} &= \sqrt{Re^{i\theta}} \\ &= \sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{R}\left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

در عبارت فوق از تساوی اویلر ($e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$) استفاده شد.

$$\sqrt{P+iQ} = \sqrt{R}\left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad (۱)$$

با توجه به رابطه فوق نیاز است $\cos \frac{\theta}{2}$ و $\sin \frac{\theta}{2}$ تعیین شوند. برای زاویه θ رابطه زیر برقرار است:

$$\tan \theta = \frac{Q}{P}$$

در نتیجه برای نسبت کسینوس روابط زیر برقرار می باشد:

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

این نسبت را می توان در عبارت زیر ساده کرد:

$$\cos \theta = \frac{P}{R}$$

چون به دو نسبت سینوس و کسینوس نصف قوس نیاز است، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{R + P}{2R}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{R - P}{2R}}$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۱)؛

$$\begin{aligned}\sqrt{P + iQ} &= \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \sqrt{R} \left(\sqrt{\frac{R + P}{2R}} + i \sqrt{\frac{R - P}{2R}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{R + P}{2}} + i \sqrt{\frac{R - P}{2}}\end{aligned}$$

۳ مثال‌های مرتبط

با دانستن رابطه ذکر شده می‌توان برخی اعداد مختلط زیر رادیکال به خصوص اعدادی که زاویه عدد با

محور موهومی به طور دقیق مشخص نمی‌شود را ساده نمود. به عنوان مثال

$$\sqrt{4 + 3i} = \sqrt{\frac{5 + 4}{2}} + i \sqrt{\frac{5 - 4}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{8}i} = \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} + i \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = \sqrt{2} + i$$

$$\sqrt{5 + 12i} = \sqrt{\frac{13 + 5}{2}} + i \sqrt{\frac{13 - 5}{2}} = 3 + 2i$$

رادیکال‌های فوق مانند $\sqrt{1 + i}$ نیستند که زاویه قطبی عبارت مختلط ساده و مشخص (مثلا در اینجا

$\theta = \frac{\pi}{4}$) باشد. در نتیجه می‌توان از روش اشاره شده استفاده نمود.

هیچ وقت برای چیزهایی که می‌توانی
خودت به دست بیاری به کسی التماس
نکن!



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com