ریاضی تکمیلی

پایه اول (هفتم) - دوره اول متوسطه

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مؤلفان: محمدحسین احمدی، علیرضا تاج‌بخش، عبدالرضا زارع شحنه، سعید صدری، علی قصاب

ویراستار: محمدحسین مشتاق

حروف‌چینی : پارسی-TEX

شابک: ISBN:

پیش‌گفتار

ریاضیات (اِنگارش یا مَزداهیک) را بیش‌تر دانش بررسی کمیت‌ها، ساختارها، فضا و دگرگونی (تغییر) تعریف می‌کنند. دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم (دیدگاه‌های دیگری نیز در فلسفه ریاضیات بیان شده است). ریاضیات خود یکی از علوم طبیعی به‌شمار نمی‌رود، ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی‌دانان می‌پژوهند بیشتر از دانش‌های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه گسترش پیدا می‌کند طوری‌که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند. علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی گاه ریاضی‌دانان به دلایل صرفاً (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.[۱]

با وقوف بر تغییرات بنیادین کتاب هفتم، ارائه‌ی این **کتا**بت با**بی** را که سال هاست در مدارس استعدادهای درخشان **بر**گشوده شده است، همچنان مفتوح نگاه می‌دارد. کتاب حاضر که بخش عمده‌ی آن حاصل تلفیق و تلطیف دو کتاب اول و دوم راهنمایی سمپاد است، حاصل فرایند تألیفی پنج ساله می‌باشد؛ فراین**دی** که با گذشت زمان بر استحکام آموزشی‌اش افزوده گردیده است. با این همه، **تیز**بینی همه‌ی صاحب‌نظران در هنگام تدریس، در نقد منصفانه‌ی این کتاب که به اجرای بخشی از سند تحول بنیادین آموزش و پرورش پرداخته است، بسیار ضروری می‌نماید؛ زیرا بی هیچ هیا**هو**یی، بی نقصی این کتاب هیچ گاه در تصور نبوده است. زیبایی کتابت و فرمول‌نویسی پیش روی‌تان اتفاقی نیست. برای نخستین بار کتابی از دفتر تألیف با نرم‌افزار نگار**ش** تِکِ پارسی(TeX-پارسی) نگاشته شده است. **دیر**زمانی است که مقوله‌ی کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند، و در این کتاب نیز متناسب با موضوع، چند کارگاه آموزشی گنجانده شده است. توصیه می‌شود که زمان و مکانی مناسب برای اجرای آن در نظر بگیرید. زمانی یک یا دو جلسه‌ای، و مکا**نی** که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاس درس باشد.

... و اینک متواضعانه پیش روی شما یک کتاب است؛ کتابی برای تیزهوش ایرانی!

۱) برگرفته از ویکی‌پدیا، دانش‌نامه‌ی آزاد

فهرست مطالب

فصل اول ـ اعداد صحیح ۱

معرفی عددهای علامت‌دار ۲

جمع و تفریق عددهای صحیح ۴

کارگاه بازی ـ دوز با اعداد صحیح ۷

ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات ۹

ضرب و تقسیم عددهای صحیح ۱۱

فصل دوم ـ هندسه و استدلال ۱۳

روابط بین پاره‌خط‌ها ۱۴

روابط بین زاویه‌ها (۱) ۱۷

روابط بین زاویه‌ها (۲) ۱۹

رسم دایره ۲۱
رسم مثلث ۲۲
همنهشتی مثلث‌ها ۲۴

فصل سوم ـ جبر و معادله ۳۷

الگوهای عددی ۳۸
جانگهدار ۳۹
عبارت‌های جبری ۴۰
مقدار عددی یک عبارت جبری ۴۳
نکاتی در مورد عبارت‌های جبری ۴۴
ساده کردن عبارت‌های جبری ۴۵
معادله ۵۰
حل معادله ۵۱
تعداد جواب‌های یک معادله ۵۴
بقّالی ۵۶
پیتزا ۶۰
رستوران ۶۶
چند خاصیت تساوی ۶۹
روش حل معادله ۷۱

فصل چهارم ـ شمارنده‌ها و اعداد اول ۷۷

کارگاه بازی ـ شمارنده بازی ۷۸
شمارنده ۷۹
داستان ۸۱
مسابقه‌ی تیراندازی ۸۵

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد ۸۷
کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۹۱
کارگاه بازی ـ نقطه بذار شلیک کن ۹۳
روش تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک ۹۶

فصل پنجم ـ بردار و مختصات ۹۹

کارگاه بازی ـ نبرد دریایی ۱۰۰
مختصات جغرافیایی ۱۰۳
صفحه‌ی مختصات ۱۰۷
روپاد ۱۰۹
بردار انتقال ۱۱۲
نمایش بردار انتقال ۱۱۴

فصل ششم ـ توان و جذر ۱۱۹

ترتیب عمل‌ها در محاسبات ۱۲۰
تعریف توان ۱۲۳
محاسبه عبارت‌های توان‌دار ۱۲۷
جذر و ریشه ۱۲۹

فصل هفتم ـ آمار و احتمال (اختیاری) ۱۳۵

دسته‌بندی داده‌ها ۱۳۶
کارگاه بازی ـ پرتاب سکه ۱۳۷
میانگین داده‌ها ۱۳۸
احتمال ریاضی ۱۴۰

فصل هشتم ـ ترسیم‌های هندسی و توازی (اختیاری) ۱۴۳

مثلث و اجزای آن ۱۴۴

عمود و عمودمنصف ۱۴۴
مثلث متساوی‌الساقین ۱۴۷
ترسیم‌های هندسی ۱۵۰
توازی ۱۵۲
قضیه زاویه‌های متبادل درونی ۱۵۴
قضیه دو خط عمود بر یک خط ۱۵۶
زاویه‌ی خارجی ۱۵۸
قضیه زاویه‌ی خارجی ۱۵۸
قضیه ض‌زز ۱۶۰
قضیه وتر و یک زاویه‌ی تند ۱۶۲
قضیه وتر و یک ضلع ۱۶۳
اصل ۱۶۵
اصل توازی ۱۶۶
گزاره سه خط موازی ۱۶۷
گزاره دو خط موازی و یک عمود ۱۶۸
قضیه دو خط موازی و یک مورّب ۱۷۱
دقت کنید ۱۷۲
منابع و مراجع ۱۷۵

فصل ۱

اعداد صحیح

معرفی عددهای علامت‌دار

۱. از یک روزنامه، برگ وسط آن را برداشته‌ایم. این برگ چهار صفحه دارد که شماره‌ی آن‌ها ۲۳، ۲۴، ۲۵ و ۲۶ است. این روزنامه چند صفحه دارد؟

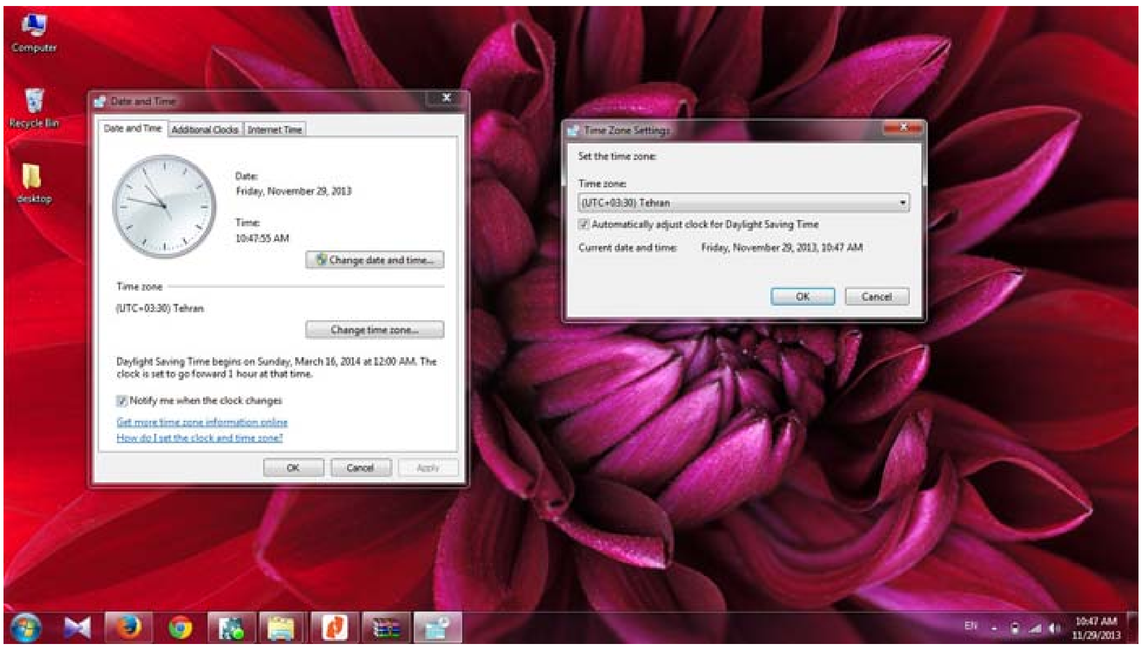
۲. از یک روزنامه فقط یک برگ آن در دست است که شماره‌ی صفحات ۱۱، ۱۲، ۲۹ و ۳۰ روی آن دیده می‌شود.

الف) آیا می‌توانید بگویید این روزنامه چند صفحه‌ای است؟

ب) صفحه‌های برگ وسط چه شماره‌هایی دارند؟

۳. نصرت‌آقا نقاش روی پله‌ی وسط نردبانش ایستاده است. او سه پله بالا می‌رود و سپس هشت پله پایین می‌آید، بعد چهار پله بالا می‌رود. اکنون اگر نصرت‌آقا هفت پله بالا برود روی آخرین پله‌ی نردبانش می‌ایستد. نردبان نصرت‌آقا چند پله دارد؟

۴. در محیط سیستم‌عامل ویندوز پنجره‌ی «Date and Time» را بیابید. روی گزینه‌ی «Change time zone..» کلیک کنید. در نوار «Time zone» تفاوت ساعت برخی از شهرها با مبدا (گرینویچ) آمده است.



الف) تفاوت ساعت چه شهرهایی با گرینویچ ۳ : ۳۰ است؟

ب) در آمریکا چند ساعت رسمی وجود دارد؟

ج) تفاوت ساعت رسمی ایران را با ساعت‌های رسمی آمریکا حساب کنید.

د) اگر یک تاجر فرش ایرانی بخواهد به ساعت ۱۰ صبح پاریس با شریک تجاری‌اش مکالمه‌ی تلفنی انجام دهد، چه ساعتی در ایران باید به او زنگ بزند؟

۵. کدام یک از این دو عدد، به −۵۱ نزدیک‌تر است؟ −۴۸ یا −۵۵؟

۶. کدام یک از این دو عدد، از قرینه‌ی ۱۰− کوچک‌تر است؟ ۳ یا ۳−؟

۷. درست یا غلط؟

«پنج عدد صحیح منفی بزرگ‌تر از ۵−، وجود دارد.»

جمع و تفریق عددهای صحیح

۱. جدول روبه‌رو، تعداد گل‌های زده و گل‌های خورده‌ی چند تیم فوتبال را در ۱۹ دوره‌ی قبلی جام‌های جهانی، نشان می‌دهد.
با توجه به گل‌زده، گل خورده و تفاضل گل هر تیم، خانه‌های خالی جدول روبه‌رو را پر کنید.

پرچم	نام تیم	گل زده	گل خورده	تفاضل گل
	هلند	۷۱	۴۴	۲۷+
	آفریقای جنوبی	۱۱	۱۶	۵−
	انگلیس	۷۷	۵۲	
	روسیه	۶۴		۱۹+
	چین		۹	۹−
	ایرلند جنوبی		۱۰	۰
	کره جنوبی	۲۸		۳۳−
	مکزیک	۵۲	۸۹	
	مجارستان		۵۷	۳۰+
	سوئیس	۳۸	۵۲	

۲. جدول روبه‌رو تفاضل گل تیم‌های لیگ برتر فوتبال ایران در پایان فصل ۹۲-۹۱ را نشان می‌دهد. مجموع تفاضل گل این تیم‌ها را به‌دست آورید.

نام تیم	گل زده	گل خورده	تفاضل گل
استقلال	۴۲	۱۸	
تراکتورسازی	۵۵	۳۲	
سپاهان	۶۰	۳۳	
فولاد	۵۲	۳۵	
نفت تهران	۴۲	۲۹	
مس	۳۳	۲۲	
پرسپولیس	۴۱	۳۱	
راه‌آهن	۳۲	۳۵	
صبا	۳۷	۳۳	
سایپا	۳۷	۳۳	
داماش	۳۶	۴۳	
فجر سپاسی	۴۲	۳۸	
ملوان	۳۴	۳۹	
ذوب‌آهن	۳۶	۴۰	
آلومینیوم	۲۶	۴۰	
نفت آبادان	۳۱	۶۰	
پیکان	۲۶	۶۶	
گهر درود	۲۴	۵۹	

۳. جاهای خالی را با علامت‌ها «+» یا «−» طوری پر کنید که

$$(-۱۱)\ \square\ ۷\ \square\ (-۳)\ \square\ ۶$$

الف) حاصل کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

ب) حاصل بیش‌ترین مقدار ممکن باشد.

ج) اختلاف حاصل قسمت «الف» و «ب» چه‌قدر است؟

۴. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول زیر را با **عددهای طبیعی** طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر صفر شود؟

۵	
	−۳

ب) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول بالا را با **عددهای صحیح** طوری پر کنید که مجموع هر ستون برابر صفر شود؟

ج) آیا می‌توانید جدول زیر را با چهار عدد صحیح **متفاوت** طوری پر کنید که مجموع هر سطر و هر ستون برابر صفر شود؟

۵. عبارت زیر را طوری پرانتزگذاری کنید تا تساوی برقرار شود؟

$$۱۸ + (-۱۳) - (-۳) - ۷ + ۴ = ۱۱$$

۶. در جدول زیر جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

کارگاه بازی ـ دوز با اعداد صحیح

در جدول زیر، دسته‌های سه‌تایی عددها را به‌صورت افقی، عمودی یا مورب در نظر بگیرید. می‌توان بین برخی از این دسته‌های سه‌تایی با استفاده از علامت‌های «+» یا «−»، یک رابطه‌ی تساوی برقرار کرد.

−۳	−۱	−۳	۲	۶	−۴	۳	۱	۵	۱
−۳	۲	−۴	−۱	۵	−۳	۴	۲	−۱	۳
−۲	۲	−۴	۳	۱	۰	−۵	۷	۰	۴
۴	−۱	−۲	۶	**۷**	۰	−۳	**۳**	−۴	−۲
−۱	−۳	−۵	**۲**	۳	−۱	۱	**۱**	۰	۳
−۲	۷	**−۵**	۱	۰	−۴	۴	**−۲**	−۳	۱
−۳	۱	۳	۴	۵	۶	−۶	۰	۵	۷
−۷	−۱	۶	−۸	۱	−۶	−۵	۲	۲	۶
۲	−۵	−۶	−۳	−۱	۱	۳	۲	−۵	۲
−۱	−۴	۳	۰	−۳	−۱	−۲	۵	−۲	−۳

مثلاً در جدول، سه‌تایی ۳ و ۱ و ۲− با هم این تساوی را می‌سازند:

$$۱ - ۳ = -۲$$

و سه‌تایی ۵−، ۲ و ۷ این تساوی را:

$$۷ + (-۵) = ۲$$

مرحله‌ی اول. با یکی از دوستان خود بازی کنید و در هر نوبت یک تساوی بنویسید. هرکس نتواند در کمتر از ۳۰ ثانیه یک تساوی بیابد، نوبتش را از دست می‌دهد.

امتیاز هر بازیکن تعداد تساوی‌های درستی است که نوشته است.

مرحله‌ی دوم. هر بازیکن جدول زیر را با عددهای ۵−، ۴−، ۳−، ۲−، ۱−، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در مدت

چهار دقیقه پر کند، طوری که عددهای همسایه‌های هر خانه متفاوت باشند. هر بازیکن جدولی را که پر کرده به حریفش می‌دهد تا او مانند مرحله‌ی اول تساوی‌ها را پیدا کند و پایین جدول بنویسد. بازیکنی که در جدول حریفش تساوی‌های بیش‌تری پیدا کند، برنده است. برای مثال، در جدول زیر، عددهای همسایه‌ی خانه‌ی ۱ متفاوت هستند.

−۳	−۱	−۲
۲	۱	−۵
−۴	۳	۵

هر بازیکن جدول زیر را پر می‌کند و به حریفش می‌دهد.

ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۳۴ - ۱۸ + ۲$

ب) $۸ \div ۴ \div ۲$

ج) $۱۲ - ۸ \div ۲ + ۱$

د) $۱۰ - ۴ \times ۲ + ۳$

ه) $۷ + ۹ \times (۳ + ۸)$

و) $۶۳ \div (۱۰ - ۳) \times ۳$

ز) $۱۲ \times ۶ \div ۳ - ۲ \times ۴$

ح) $۲۱ \div (۳ + ۴) \times ۳ - ۸$

ط) $۵۵ \div ۱۱ + ۷ \times (۲ + ۱۴)$

ی) $۲۷ \div (۳ + ۶) \times ۵ - ۱۲$

ک) $۱۲ + ۶ \div ۳ \times (۱۸ + ۳ \times ۲)$

ل) $۲۸۰ - ۴۰ \times (۱۲ - ۱۰ \div ۲)$

۲. در زیر، عبارت $۱ + ۳ \times ۲$ را طوری پرانتزگذاری کرده‌ایم که حاصلِ آن برابر ۸ شود.

$$۲ \times (۳ + ۱) = ۸$$

هر یک از عبارت‌های زیر را طوری پرانتزگذاری کنید تا تساوی برقرار شود.

ب) $۲۸ \div ۲ \times ۳ + ۱ = ۴$

ب) $۲۴ + ۶ \div ۳ + ۲ = ۶$

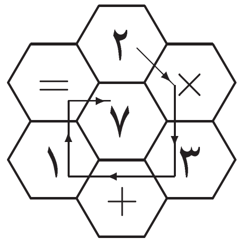
ج) $۱۸ + ۳ \times ۲۵ \div ۱۵ - ۳ = ۲۰$

د) $۳ \times ۴۰ \div ۸ + ۱۲ \div ۶ = ۱$

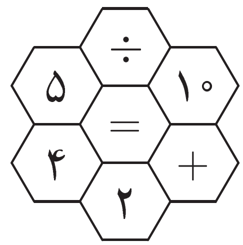
درکدام یک از موارد بالا، نیازی به پرانتزگذاری نیست؟

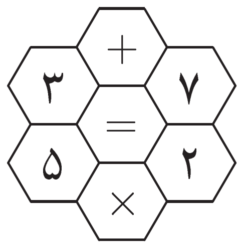
۳. در شکل زیر، از عدد ۲ شروع به حرکت کرده‌ایم و در هرگام به یکی از خانه‌های همسایه رفته‌ایم. اگر به ترتیب ورود به هر خانه، عددها و عمل‌ها را پشت سر هم بنویسیم، یک رابطه‌ی تساوی به‌دست می‌آید.

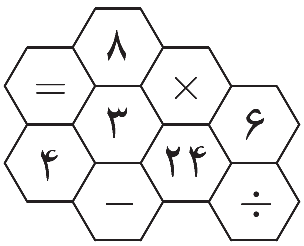
$$۲ \times ۳ + ۱ = ۷$$



الف) در هر یک از شکل‌های زیر، مسیری بیابید تا یک رابطه‌ی تساوی به‌دست آید.







ب) در مثالی که آورده‌ایم، اگر از خانه‌ی عدد ۷ در جهت عکس مسیر حرکت کنیم، باز هم رابطه‌ی تساوی به‌دست می‌آید ($۲ \times ۳ + ۱ = ۷$). کدام‌یک از مسیرهایی که در سه شکل بالا پیدا کرده‌اید، در جهت عکس هم رابطه‌ی تساوی دارد؟

ضرب و تقسیم عددهای صحیح

۱. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $[-۲-(-۸)]\times[-۲۴\div ۴]=$

ب) $[(-۲)-(+۳)]+[-(-۴)-(+۶)]=$

ج) $(-۱۰+۵)(-۹+۵)(-۸+۵)\ldots(-۲+۵)(-۱+۵)=$

د) $\dfrac{۷۵\times(-۷۲)}{(-۵۰)\times(-۲۷)}=$

هـ) $\dfrac{(-۷۰)\times(-۴۸)}{(-۴۲)\times(۴۰)}=$

و) $-۱+۲-۳+۴-۵+\ldots+۹۸-۹۹+۱۰۰=$

۲. در دنباله‌های زیر، ۲ عدد بعدی را بگویید.

الف) $-۱,۴,-۹,۱۶,\ldots$

ب) $۱,-۲,۳,-۵,۸,\ldots$

۳. کدام یک از این دو عدد، به -۵۱ نزدیک‌تر است؟ -۴۸ یا -۵۵؟

۴. کدام یک از این دو عدد، از قرینه‌ی -۱۰ کوچک‌تر است؟ ۳ یا -۳؟

۵. الف) جاهای خالی را با دو عدد پر کنید به طوری که تساوی درست شود.

$$(\square\times(+۳))-(\square\times(-۲))=۸$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۶. درست یا غلط؟

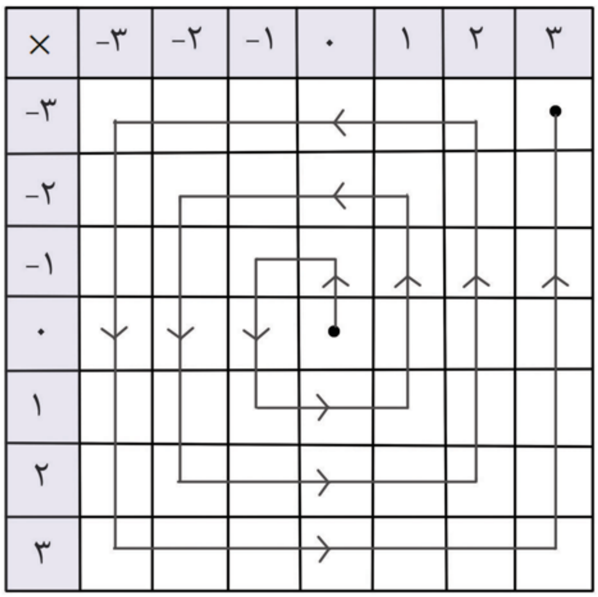
«پنج عدد صحیح منفی بزرگ‌تر از -۵، وجود دارد.»

۷. در یک آزمون تستی، برای هر پاسخ درست ۴ نمره مثبت و برای هر پاسخ نادرست، ۲ نمره منفی در نظر می‌گیرند. دانش‌آموزی از ۷۰ سوال امتحان، به ۵۶ سؤال پاسخ درست داده. ۵ سؤال را هم جواب نداده. نمره‌ی نهایی آزمون این دانش‌آموز چند می‌شود؟ این نمره چقدر از نمره کامل کمتر است؟

۸. تمام جفت عددهای صحیحی را پیدا کنید که حاصل‌ضرب آنها ۱۸ باشد.

۹. اختلاف دمای دو جسم، ۸ درجه است اگر مجموع دمای این دو جسم ۲۰ − درجه باشد، دمای هر یک چند درجه است؟

۱۰. ابتدا جدول ضرب زیر را کامل کنید. سپس در مسیر نشان داده شده، اگر اعداد را با یکدیگر جمع بزنیم، حاصل جمع به‌دست آمده چند خواهد شد.



×	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
−۳							
−۲							
−۱							
۰							
۱							
۲							
۳							

فصل ۲

هندسه و استدلال

روابط بین پاره‌خط‌ها

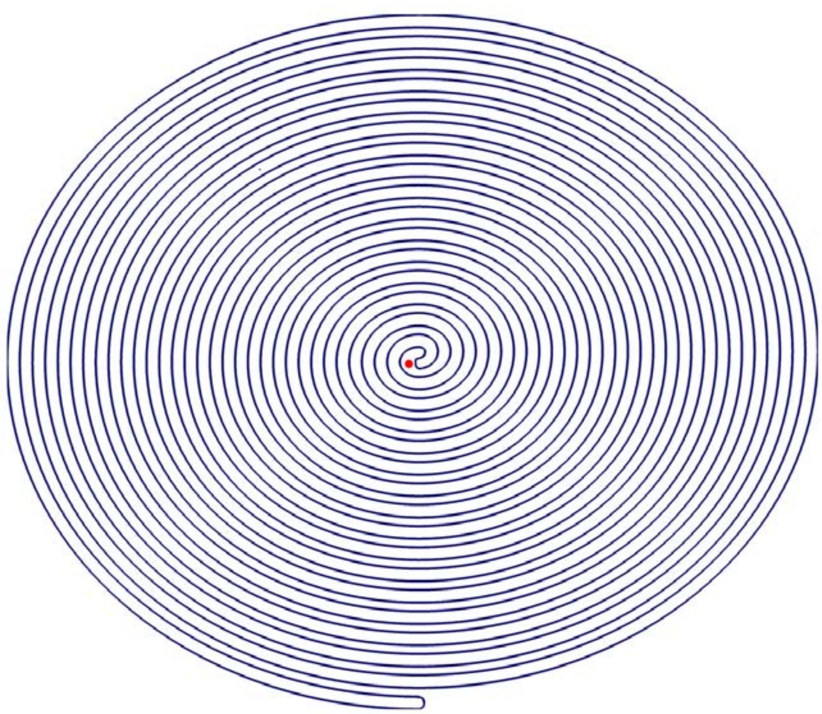
۱. خطوط خواسته شده در هر قسمت را رسم و نقاط برخورد آن‌ها را نام‌گذاری کنید.

الف) ۶ خط که فقط ۹ نقطه‌ی برخورد داشته باشند.

ب) ۶ خط که فقط ۱۱ نقطه‌ی برخورد داشته باشند.

ج) با ۶ خط حداکثر چند نقطه‌ی برخورد می‌توان به وجود آورد؟

۲. موشی در پیچ‌پیچک زیر گیر افتاده است. آیا این موش می‌تواند بدون این که از روی دیواری بپرد از این پیچ‌پیچک بیرون بیاید؟ (نقطه‌ی وسط شکل همان موش است!)



۳. اطلاعات زیر از خط xy و نقطه‌های A، B، C و D روی این خط در دست است.

الف) نقطه‌ی B بین دو نقطه‌ی A و C است.

ب) نقطه‌ی C روی نیم‌خط Ax است.

ج) نقطه‌ی D روی پاره‌خط BC است.

خط xy را رسم کنید و نقاط روی آن را مشخص نمایید.

۴. اطلاعات زیر از دو خط xy و zw، و نقطه‌های A، B، C، D و E روی آن‌ها در دست است.

الف) نقطه‌ی A روی خط xy قرار دارد.

ب) نقطه‌ی B روی نیم‌خط Ax است.

ج) نقطه‌ی B روی پاره‌خط AC است.

د) هیچ‌کدام از نقطه‌های A، B و C روی نیم‌خط Dy قرار ندارند.

ه) خط zw، خط xy را در نقطه‌ی E قطع می‌کند.

و) نقطه‌ی E هم روی نیم‌خط Bx است و هم روی نیم‌خط Cy.

خط‌های xy و zw را بکشید و نقطه‌های A، B، C، D و E را روی آن‌ها مشخص کنید.

۵. در شکل زیر $PQ = RS$. آیا دو پاره‌خط PR و QS با هم برابرند؟

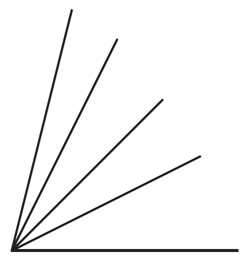
۶. دو پاره‌خط AB و CD روی یک خط راست قرار دارند و نقطه‌ی O وسط هر دو پاره‌خط است.

الف) اندازه‌ی دو پاره‌خط AC و BD را با هم مقایسه کنید.

ب) اندازه‌ی دو پاره‌خط AD و BC را با هم مقایسه کنید.

روابط بین زاویه‌ها (۱)

۱. در شکل زیر، چند زاویه‌ی تند وجود دارد؟ هر یک از آن‌ها را با سه حرف، نام‌گذاری کنید.



۲. اطلاعات زیر از دو خط xy و zw و نقاط روی این دو خط در دست است.

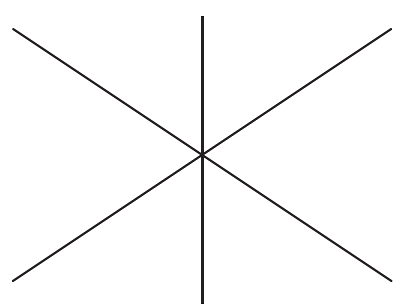
الف) محل تقاطع xy و zw نقطه‌ی O است.

ب) $A\widehat{O}B$ و $C\widehat{O}D$ متقابل به رأس‌اند.

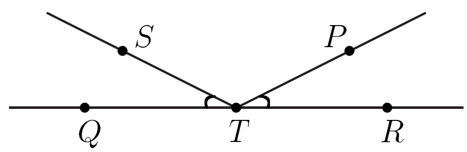
ج) نقطه‌ی F روی نیم‌خط Ay، و نقطه‌ی O روی پاره‌خط BD قرار دارد.

دو خط xy و zw را رسم کنید و نقاط روی این دو خط را مشخص نمایید.

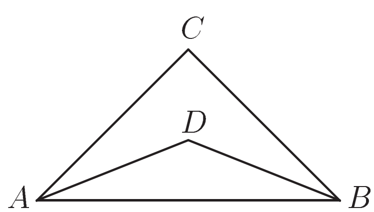
۳. در شکل زیر، حداقل چهار جفت زاویه‌ی متقابل به رأس بیابید و هر یک از آن‌ها را با نام‌گذاری کنید.



۴. در شکل زیر $S\widehat{T}Q = P\widehat{T}R$. ثابت کنید $P\widehat{T}Q = S\widehat{T}R$.



۵. اگر در شکل زیر، $C\widehat{A}B = C\widehat{B}A$ و $D\widehat{A}B = D\widehat{B}A$ باشد، ثابت کنید $C\widehat{A}D = C\widehat{B}D$ است.

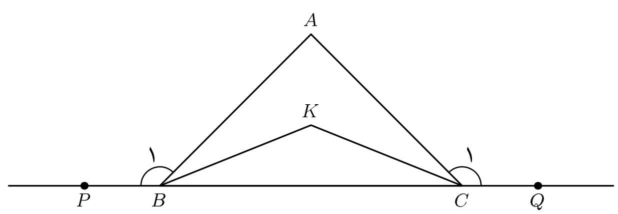


۶. دو زاویه‌ی $A\widehat{O}B$ و $D\widehat{O}C$ متقابل به رأس‌اند. خط ℓk از نقطه‌ی O می‌گذرد و نیم‌ساز زاویه‌ی $A\widehat{O}B$ است.

الف) با توجه به اطلاعات بالا شکلی رسم کنید و در آن نقاط A، B، C، D و O را مشخص نمایید.

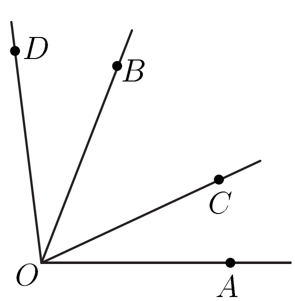
ب) ثابت کنید ℓk نیم‌ساز زاویه‌ی $D\widehat{O}B$ نیز هست.

۷. در شکل زیر، نقطه‌های P، B، C و Q روی یک خط قرار دارند و $\widehat{B}_۱ = \widehat{C}_۱$. هم‌چنین BK نیم‌ساز $A\widehat{B}C$ و CK نیم‌ساز $A\widehat{C}B$ است. ثابت کنید $K\widehat{B}C = K\widehat{C}B$.



روابط بین زاویه‌ها (۲)

۱. در شکل زیر اندازه‌ی $A\widehat{O}B$ برابر ۷۰ درجه، اندازه $D\widehat{O}C$ برابر ۷۰ درجه و اندازه‌ی $A\widehat{O}D$ برابر ۱۰۰ درجه است. اندازه‌ی $C\widehat{O}D$ چه‌قدر است؟



۲. زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار ساعت ۵:۰۰، با زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار چه ساعت‌های دیگری مکمل است؟

۳. در طول شبانه‌روز، چند بار زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار ۹۰ درجه می‌شود؟

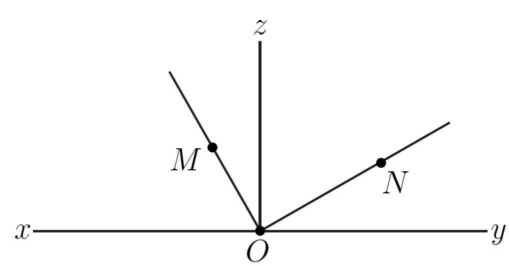
۴. الف) اختلاف مکمل و متمم زاویه‌ی ۱۸ درجه را به‌دست آورید.

ب) اختلاف مکمل و متمم زاویه‌ی ۷۷ درجه را به‌دست آورید.

ج) به‌نظر شما اختلاف مکمل و متمم هر زاویه‌ی تند، عددی ثابت است؟ چرا؟

۵. دو زاویه‌ی $A\widehat{O}B$ و $B\widehat{O}C$ مکمل هستند. اگر Ox نیم‌ساز زاویه‌ی $A\widehat{O}B$ و Oy نیم‌ساز زاویه‌ی $B\widehat{O}C$ باشد، زاویه‌ی $x\widehat{O}y$ چند درجه است؟

۶. در شکل زیر، نقطه‌ی O روی خط xy قرار دارد و زاویه‌ی $z\widehat{O}y$ قائمه است. اگر $z\widehat{O}M$ و $z\widehat{O}N$ متمم یکدیگر باشند، ثابت کنید $x\widehat{O}M = z\widehat{O}N$.



رسم دایره

در زیر، یک نقطه پیدا کنید که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی A برابر ۵ سانتی‌متر باشد و آن را B بنامید.

A

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A برابر ۲ سانتی‌متر باشد.

۲. نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از B برابر ۱ سانتی‌متر باشد.

۳. آیا نقطه‌ای وجود دارد که فاصله‌ی آن از A برابر ۲ سانتی‌متر و از B برابر ۱ سانتی‌متر باشد؟

۴. نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A برابر ۲ سانتی‌متر و از B برابر ۳ سانتی‌متر باشد.

۵. نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A برابر ۲ سانتی‌متر و از B برابر ۳/۵ سانتی‌متر باشد.

۶. آیا نقطه‌ای وجود دارد که فاصله‌ی آن از A برابر ۲ سانتی‌متر و از B برابر ۸ سانتی‌متر باشد؟

رسم مثلث

۱. مثلث ABC را با معلومات $BC = ۶cm$ و $AC = AB = ۵cm$ رسم کنید. سپس نقطه‌ای روی ضلع BC به‌دست آورید که فاصله‌ی آن تا A مساوی $۴cm$ باشد.

۲. دو ضلع مثلثی ۵ و ۹ سانتی‌متر است. ضلع سوم باید بزرگ‌تر از ... و کوچک‌تر از ... باشد.

۳. با یک مثال، نشان دهید که نمی‌توان در حالت دو ضلع و زاویه‌ی غیر بین آن دو ضلع، فقط یک مثلث رسم کرد.

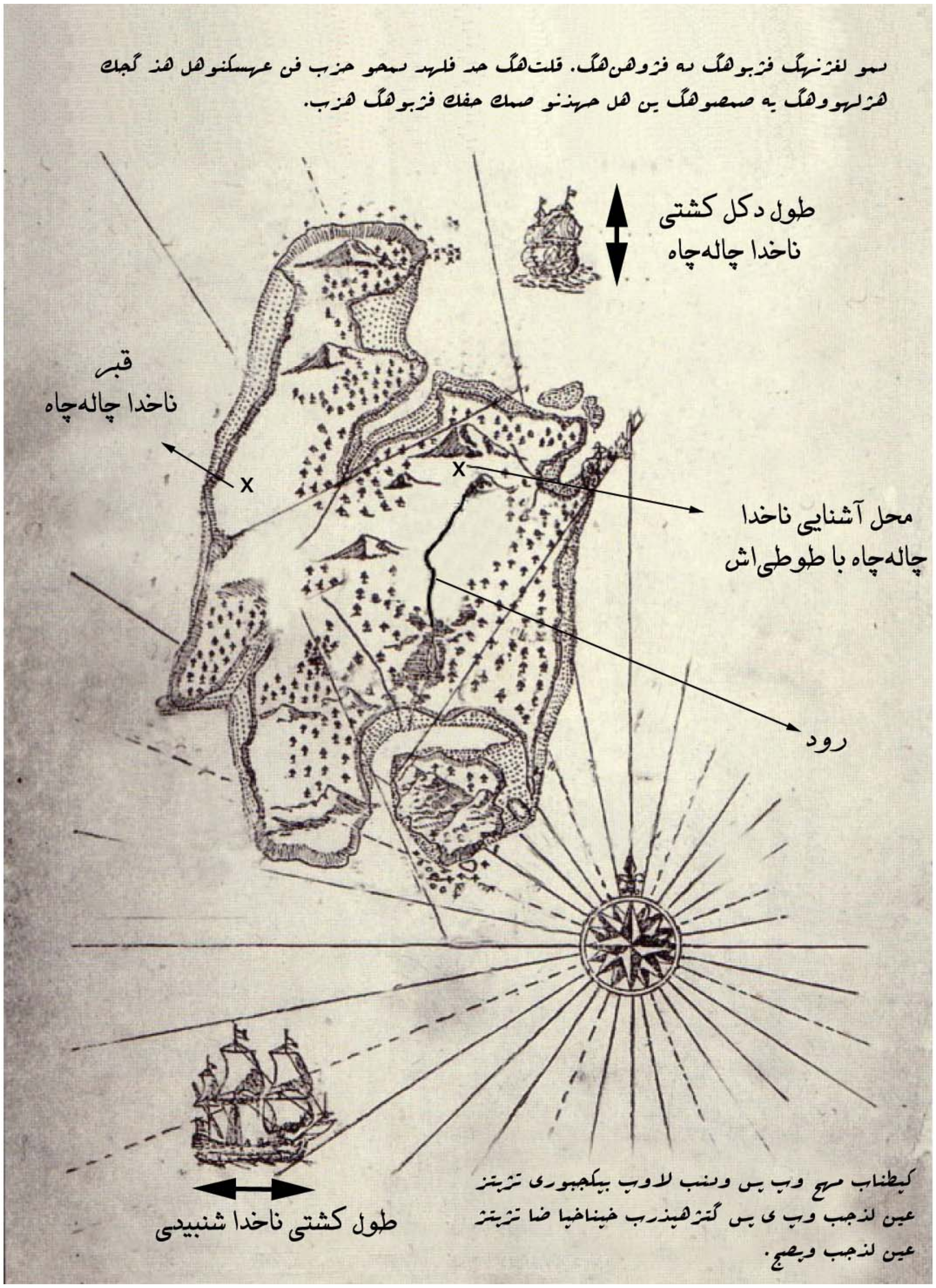
۴. در سال‌های دور ناخدا چاله‌چاه با کشتی خود وارد جزیره‌ی آب‌اِشکن[۱] شد. او گنجی با خود داشت که آن را دور از چشم افرادش در چاله‌ای پنهان کرد. ناخدا چاله‌چاه قبل از مرگش، محل گنج را به‌صورت رمز روی نقشه‌ی جزیره نوشت. سال‌ها گذشت ولی هیچ‌کس نتواست گنج ناخدا چاله‌چاه را پیدا کند تا نقشه به‌دست ناخدای جوانی به‌نام شَنبیدی افتاد. او توانست نوشته‌ی رمزی ناخدا چاله‌چاه را بخواند. ناخدا نوشته بود:

روی نقشه‌ام کشتی‌ام را کشیده‌ام. گنج‌ام در کنار رودی است که فاصله‌ی آن از محل آشنایی‌ام با طوطی‌ام به اندازه‌ی طول دکل کشتی‌ام است.

ناخدا شنبیدی گنج را پیدا کرد ولی در همان زمان به جزیره حمله شد و شنبیدی برای این‌که دشمنان به این گنج دست پیدا نکنند دوباره آن را در جزیره پنهان کرد و روی نقشه ــ باز هم به رمز ــ نشانی گنج را نوشت. معنی نوشته‌ی شنبیدی این بود:

فاصله‌ی گنج ما از محلی که ما یافتیم دو برابر طول کشتی ما و از قبر ناخدا چاله‌چاه سه برابر طول کشتی ماست.

۱) جزیره‌ای در دریای مازندران



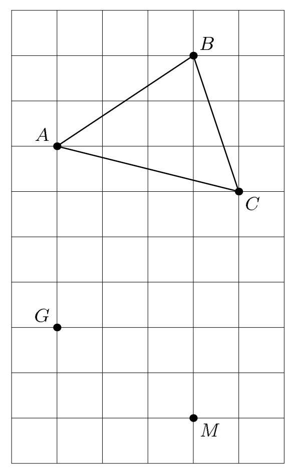
اگر به شما یک خط‌کش نامدرج و یک پرگار داده باشند، با توجه به متن بالا، توضیح دهید که چگونه محل گنج را مشخص می‌کنید.

همنهشتی مثلث‌ها

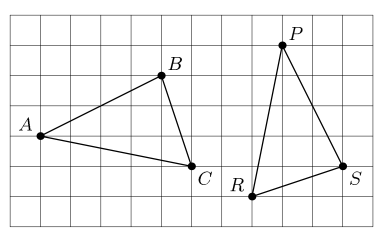
۱. در شکل زیر،

الف) پاره‌خط GM با کدام ضلع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است؟

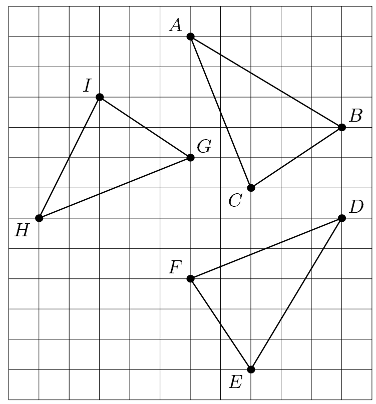
ب) نقطه‌ی N را چنان بیابید که دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{GMN}$ برابر باشند.



۲. آیا دو مثلث زیر همنهشتند؟ اجزای برابر این دو مثلث را مشخص کنید.

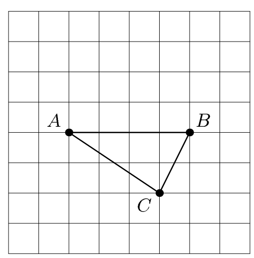


۳. در شکل زیر، کدام مثلث‌ها همنهشتند. برای ههمنهشت بودن یا نبودن آن‌ها دلیل بیاورید.

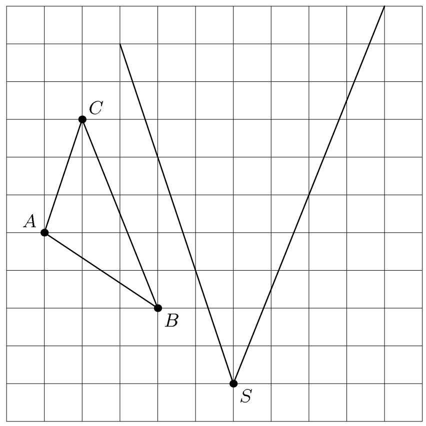


۴. در شکل زیر چند نقطه مانند D می‌توان یافت طوری که مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ با مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ همنهشت باشد؟

در همه‌ی حالت‌ها اجزای برابر را مشخص کنید.



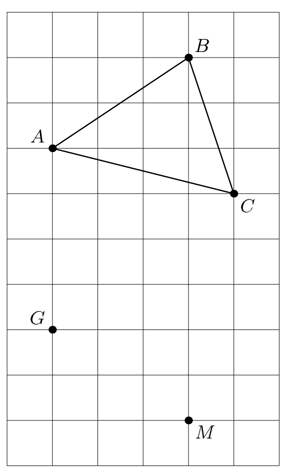
۵. در شکل زیر، دو نقطه‌ی P و Q را روی اضلاع زاویه‌ی $\widehat{S}$ طوری بیابید که دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{PRS}$ همنهشت شوند.



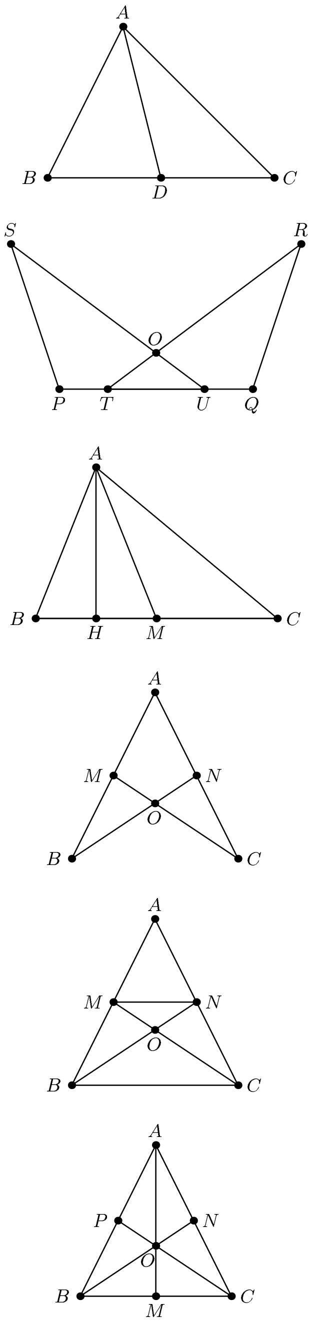
۶. در شکل زیر،

الف) پاره‌خط GM با کدام ضلع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است؟

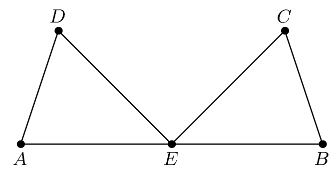
ب) نقطه‌ی N را چنان بیابید که دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{GMN}$ همنهشت باشند.



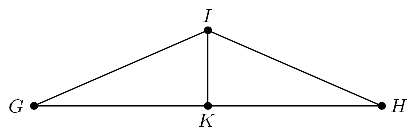
۷. همه‌ی مثلث‌های موجود در هر یک از شکل‌های زیر را نام ببرید.



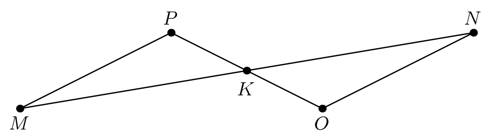
۸. در هر یک از شکل‌های صفحه‌ی بعد دقیقاً یک جفت مثلث همنهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و اجزای برابر آن‌ها را مشخص کنید.



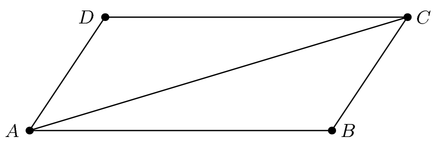
(الف)



(ب)

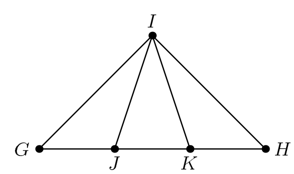


(ج)

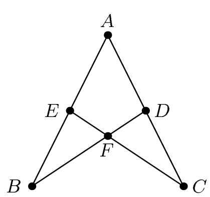


(د)

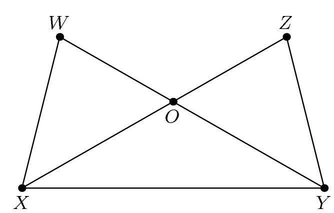
۹. در هر یک از شکل‌های زیر، دقیقاً دو جفت مثلث همنهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و اجزای برابر آن‌ها را مشخص کنید.



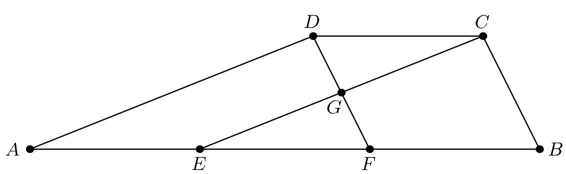
(الف)



(ب)



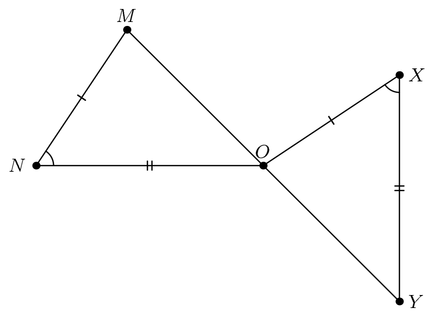
(ج)



(د)

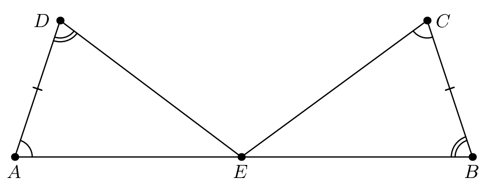
۱۰. در هر یک از شکل‌های زیر علامت‌های مشابه اجزای برابر را نشان می‌دهد. همنهشتی مثلث‌های خواسته شده را با استفاده از یکی از حالت‌های «ض‌زض»، «زض‌ز» یا «ض‌ض‌ض» ثابت کنید. سپس دیگر اجزای برابر مثلث‌ها را در جای خالی بنویسید.

الف)



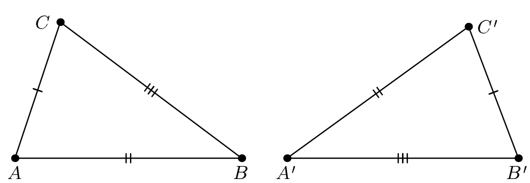
$$\left.\begin{array}{ll} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Longrightarrow M\overset{\triangle}{O}N = O\overset{\triangle}{Y}X \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ب)



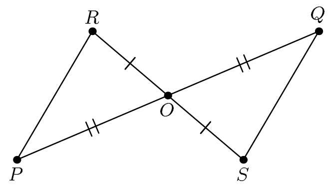
$$\left.\begin{array}{ll} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Longrightarrow A\overset{\triangle}{D}E = C\overset{\triangle}{B}E \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ج)



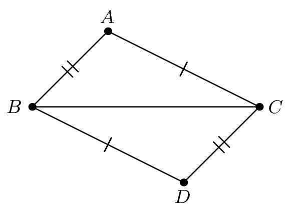
$$\left.\begin{array}{ll} \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \Longrightarrow A\overset{\triangle}{B}C = C'\overset{\triangle}{A'}B' \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

د)



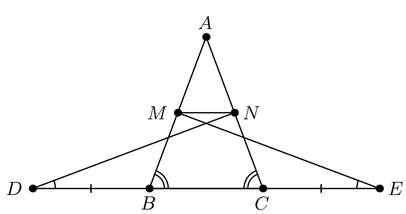
$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{POR} = \overset{\triangle}{QOS} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

ه)



$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DCB} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

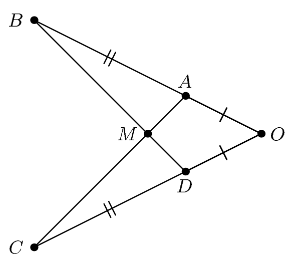
ز)



$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots \Longrightarrow BE = CD$$

$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{BEM} = \overset{\triangle}{CDN} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

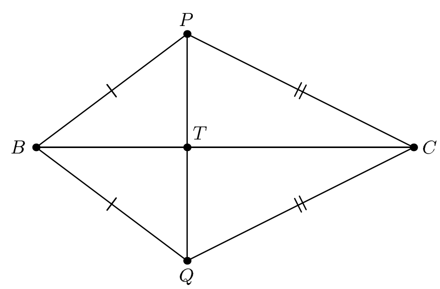
ح)



$$\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots \Longrightarrow OB = OC$$

$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{OAC} = \overset{\triangle}{ODB} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

ط)

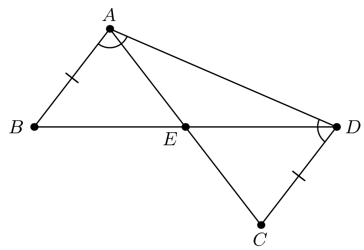


$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{BPC} = \overset{\triangle}{BQC} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{BPT} = \overset{\triangle}{BQT} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Longrightarrow \widehat{BTQ} = ۹۰^\circ$$

ی)

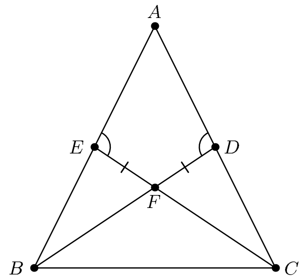


$$\left.\begin{array}{ll} \dotfill & \dotfill \\ \dotfill & \dotfill \\ \dotfill & \dotfill \end{array}\right\} \Longrightarrow A\overset{\triangle}{B}D = A\overset{\triangle}{C}D \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dotfill \\ \dotfill \\ \dotfill \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots \Longrightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CDE}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dotfill & \dotfill \\ \dotfill & \dotfill \\ \dotfill & \dotfill \end{array}\right\} \Longrightarrow A\overset{\triangle}{B}E = D\overset{\triangle}{C}E \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dotfill \\ \dotfill \\ \dotfill \end{array}\right.$$

ک)



$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Longrightarrow \widehat{CEB} = \widehat{BDC}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{ACD} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$BD = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots + \ldots\ldots = CE$$

$$\left.\begin{array}{ll} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{ACE} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

۱۱. درباره‌ی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ می‌دانیم $AC = DF$ و $BC = EF$. آیا دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ برابرند؟ چرا؟

۱۲. از دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ اطلاعات زیر در دست است.

$$BC = DE \text{،} AB = EF \text{ و } \widehat{A} = \widehat{E}$$

آیا می‌توان گفت دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ برابرند؟ چرا؟

۱۳. از دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{EFD}$ اطلاعات زیر در دست است.

$$\widehat{B} = \widehat{F} \text{،} AB = EF \text{ و } \widehat{A} = \widehat{E}$$

آیا می‌توان گفت دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{EFD}$ برابرند؟ چرا؟

۱۴. درباره‌ی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ می‌دانیم $AB = DE$، $AC = DF$ و $BC = EF$. چرا این دو مثلث برابرند؟ اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.

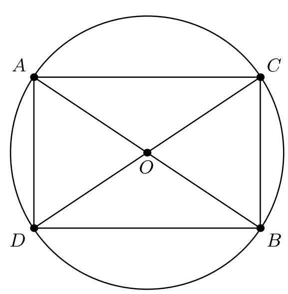
۱۵. دو پاره‌خط AC و BD یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند طوری که $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ و $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$. آیا دو مثلث $\overset{\triangle}{AOB}$ و $\overset{\triangle}{COD}$ برابرند؟ چرا؟

۱۶. پاره‌خط‌های PQ و RS در نقطه‌ی O با هم برخورد کرده و همدیگر را نصف کرده‌اند. ثابت کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{QOS}$ و $\overset{\triangle}{POR}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.

۱۷. در شکل زیر، نقطه‌ی O مرکز دایره و AB و CD قطر هستند.

الف) ثابت کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{AOD}$ و $\overset{\triangle}{COB}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.

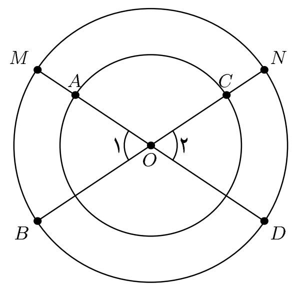
ب) ثابت کنید $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{CDB}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.



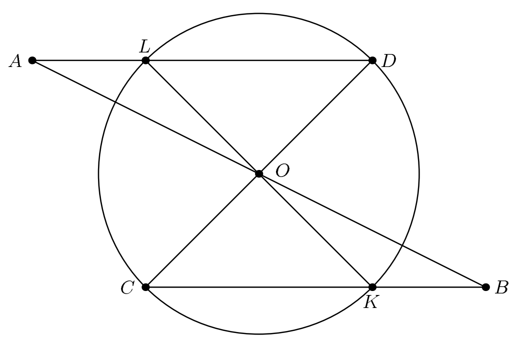
۱۸. در شکل زیر، نقطه‌ی O مرکز هر دو دایره است و BN و MD دو قطر از دایره‌ی بزرگ هستند.

الف) ثابت کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{AOB}$ و $\overset{\triangle}{COD}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.

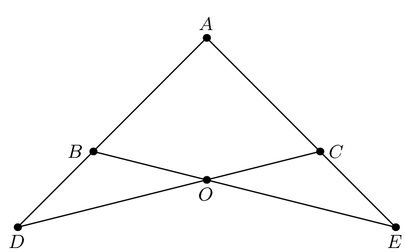
ب) دلیل تساوی دو مثلث $\overset{\triangle}{ABM}$ و $\overset{\triangle}{CDN}$ را بیان کنید و اجزای برابر آن‌ها را مشخص کنید.



۱۹. اگر O مرکز دایره و روی پاره‌خط AB بوده و نیز CD و KL قطرهای دایره باشند، ثابت کنید $AL = BK$.



۲۰. در شکل زیر $AC = AB$ و $BD = CE$. نشان دهید که $OD = OE$.



فصل ۳

جبر و معادله

الگوهای عددی

۱. بین اعداد و عبارات ردیف اول و دوم جدول‌های زیر رابطه‌ای برقرار است. این رابطه را کشف کنید و سپس جاهای خالی را با اعداد و عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف)

۰	۱	۲	۳	۴	...	۱۳	۱۴		x
۰	۳	۶	۹	۱۲	...				

ب)

۰	۱	۲	۳	۴	...	۲۱	۲۲		x
۳	۴	۵	۶	۷	...				

ج)

x		−۸	−۷	...	−۴	−۳	−۲	−۱	۰
				...	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

د)

x		−۸	−۷	...	−۴	−۳	−۲	−۱	۰
				...	۱۶	۹	۴	۱	۰

جانگهدار

می‌خواهیم مفهومی را تعریف کنیم به نام «جانگهدار».

جانگهدار موجودی است که جا نگه می‌دارد!! این تعریف ساده‌تر از آن است که بخواهیم آن را شرح دهیم.

در زیر چند مثال از جانگهدار را می‌آوریم.

داریوش کاپیتان فوتبال کلاس باید یک تیم برای شرکت در مسابقات فوتبال به مسئولین مدرسه معرفی کند. ولی او در انتخاب دروازه‌بان تیم دچار مشکل شده است. داریوش برای پست دروازه‌بانی باید یک نفر را معرفی کند؛ ولی تعداد کسانی که می‌توانند در این پست بازی کنند زیاد است. او باید از بین سهند، هومن، سروش و محمد یکی را انتخاب کند. مسئولین مدرسه هم گفته‌اند داریوش سریع‌تر تیم خود را معرفی کند. بنابراین داریوش تیم را بدون دروازه‌بان معرفی کرد و از مسئولین مدرسه درخواست کرد که بعداً دروازه‌بان را معرفی کند.

دروازه‌بان	X
دفاع آخر	داریوش
هافبک	بردیا
هافبک	احسان
نوک حمله	علی‌رضا
ذخیره ۱	فرشاد
ذخیره ۲	محسن

در مثال بالا X جانگهدار است. کسانی که می‌توانند در جای X قرار بگیرند عبارت‌اند از سهند، هومن، سروش و محمد. بنابراین X یک جانگهدار اسمی است. یعنی موجوداتی که می‌توانند به جای X قرار بگیرند اسامی دانش‌آموزان هستند.

در ریاضیات معمولاً جانگهدارها با حروف انگلیسی نشان داده می‌شوند. به این جانگهدارها «متغیر» می‌گوییم.

عبارت‌های جبری

۱. در هر قسمت باتوجه‌به قانون گفته شده، جاهای خالی را پر کنید.

الف) هر عدد را در ۵ ضرب کنید، سپس از حاصل ۲ تا کم نمایید.

−۸	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...	۱۱
	...						...	

ب) هر عدد را در ۴ ضرب کنید، سپس حاصل را با ۲ جمع بزنید.

−۷	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...	۹
	...						...	

ج) هر عدد را با توان دوم آن عدد جمع بزنید.

−۹	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...	۸
	...						...	

د) عدد ۱ را با مربع هر عدد جمع بزنید، سپس حاصل را قرینه کنید.

−۶	...	−۲	−۱	۰	۱	۲	...	۶
	...						...	

۲. در هر یک از قسمت‌های بالا، اگر عدد صحیح x در ردیف بالا باشد، زیر آن چه عبارتی بر حسب x باید بنویسیم؟

۳. اگر در عبارت جبری $۲x^۲ + ۲۹$ به جای متغیر x اعداد $\{۰, ۱, ۲, \cdots, ۲۸\}$ را قرار دهید، حاصل آن یک عدد اول خواهد شد. اما اگر به جای x عدد ۲۹ را قرار دهید، یک عدد مرکب به‌دست می‌آید. به جای x اعداد خواسته شده را قرار دهید و حاصل را به‌دست آورید.

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۰}$$

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۱}$$

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۳}$$

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۱۰}$$

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۲۹}$$

$$۲x.x + ۲۹ \xrightarrow{x=۳۰}$$

۴. فرض کنید دو عدد دو رقمی داریم مانند x و y. ابتدا «متمّم» x و y را از عبارت‌های جبری $a = ۱۰۰ - x$ و $b = ۱۰۰ - y$ به‌دست می‌آوریم. a را متمّم x و b را متمّم y می‌نامیم.

به عنوان مثال اگر $x = ۹۴$ و $y = ۹۷$ باشند، آنگاه می‌توان نوشت:

$$a = ۱۰۰ - ۹۴ = ۶ \quad \text{و} \quad b = ۱۰۰ - ۹۷ = ۳$$

یعنی متمّم ۹۴ عدد ۶ و متمّم ۹۷ عدد ۳ خواهد شد.

اگر بخواهیم $x \times y$ را محاسبه کنیم، می‌توان از عبارت جبری زیر استفاده کرد.

$$xy = (۱۰۰ - a - b) \times ۱۰۰ + ab$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم ۹۴×۹۷ را حساب کنیم می‌توانیم از عبارت جبری بالا کمک بگیریم.

$$۹۴ \times ۹۷ = (۱۰۰ - ۶ - ۳) \times ۱۰۰ + ۶ \times ۳ = ۹۱ \times ۱۰۰ + ۱۸ = ۹۱۱۸$$

الف) حاصل‌ضرب‌های زیر را با استفاده از عبارت جبری بالا به‌دست آورید.

$۹۶ \times ۹۱ =$

$۸۸ \times ۹۳ =$

$۷۶ \times ۹۲ =$

ب) اگر می‌خواهید بدانید رابطه‌ی $xy = (۱۰۰ - a - b) \times ۱۰۰ + ab$ از کجا آمده است، می‌توانید مقاله‌ی «یک رابطه برای حاصل‌ضرب دو عدد» را از روی وب‌گاه ریاضی مطالعه کنید.

۵. کرایه‌ی یک تاکسی به این ترتیب حساب می‌شود. ۵۰۰ تومان ورودی و برای هر دقیقه ۵۰ تومان. اگر شخصی n دقیقه سوار تاکسی باشد، کرایه‌اش چقدر می‌شود؟

۶. عدد دلخواهی را در نظر بگیرید. آن را در ۲۲ ضرب کنید و به آن ۴ را اضافه کنید. سپس عدد به‌دست آمده را در ۳ ضرب کنید و حاصل را با ۱۴ جمع کنید. عدد به‌دست آمده را تقسیم بر ۶۶ کنید. باقیمانده تقسیم برابر ۲۶ خواهد شد. چرا؟

۷. از یک نفر بخواهید رقم دهگان سن خود را در ۵ ضرب کند و عدد ۳ را به آن اضافه کند. نتیجه را در عدد ۲ ضرب کند و سپس رقم یکان سن خود را به آن اضافه کند و نتیجه را به شما بگوید. شما حاصل به‌دست آمده را در ذهن خود منهای ۶ کنید و نتیجه را به عنوان سن آن شخص به وی اعلام کنید. با استفاده از عبارت‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه چنین نتیجه‌ای به‌دست می‌آید.

۸. از یک نفر بخواهید دو رقم سمت راست سال تولدش را در ۲۰ ضرب کند و سپس جواب را با ۷۷ جمع کند. حاصل را ۵ برابر کند و با عددی که ماه تولدش را نشان می‌دهد جمع کند. سپس حاصل به‌دست آمده را ۲۰ برابر کند و دوباره با ۷۷ جمع کند. نتیجه را در ۵ ضرب کند و روز تولدش را به آن اضافه کند؛ و نتیجه را به شما اعلام کند. شما هم حاصل به‌دست آمده را در ذهن خود منهای ۳۸۸۸۵ کنید. با عدد به‌دست آمده به راحتی می‌توانید تاریخ تولد آن شخص را به وی بگویید. با استفاده از عبارت‌های جبری توضیح دهید که چرا چنین کاری ممکن است.

مقدار عددی یک عبارت جبری

۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، باتوجه‌به ستون اول، جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	...	۱۲	۱۳
$۲x - ۱$						...		

ب)

x	۳	۴	۵	۶	۷	...	۲۳	۲۴
$x(x - ۱)$						...		

ج)

x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۹	۱۰
$۴x.x + ۲$						...		

د)

x	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۲	۱۳
$x.x + x$						...		

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید مساحت هر شکل بر حسب چه متغیرهایی بیان شده است و هر متغیر نشان‌دهنده چیست؟

الف) مساحت مستطیل : xy

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع : ah

ج) مساحت لوزی : $\frac{ab}{۲}$

د) مساحت ذوزنقه : $\frac{۱}{۲}(a + b)h$

۳. برای مقادیر داده شده در هر قسمت، مساحت خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) مساحت مستطیلی که طول و عرض آن به‌ترتیب ۵ و ۳ است.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی با طول قاعده ۲ و ارتفاع ۵.

ج) مساحت یک لوزی با طول قطرهای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۴}$.

د) مساحت ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۱۲ و ۴ و ارتفاع ۳.

نکاتی در مورد عبارت‌های جبری

در فصل عددهای صحیح، نکاتی را در مورد چهار عمل اصلی و همچنین ترتیب عمل‌ها در محاسبات یاد گرفتید.

تمام آنچه که در آن فصل در مورد عددهای صحیح گفته شد، می‌توان در این فصل و در مورد عبارت‌های جبری تکرار کرد.

عبارت جبری زیر را در نظر بگیرید.

$$۱۵x.x + ۶x - ۵$$

این عبارت در واقع به این صورت است.

$$۱۵ \times x \times x + ۶ \times x - ۵$$

می‌دانیم x یک متغیر عددی است. یعنی x یک جانگهدار عددی است. یعنی x جای یک عدد را نگه داشته است، پس زمانی که بخواهیم در یک عبارت جبری به محاسبات عددی بپردازیم، تمام آنچه که در فصل دوم در مورد چهار عمل اصلی و ترتیب عمل‌ها در محاسبات گفته شد، در اینجا هم می‌توان گفت.

فرض کنید در عبارت $۱۵x.x + ۶x - ۵$ به جای x مقدار ۲ را قرار دهیم. در نتیجه خواهیم داشت:

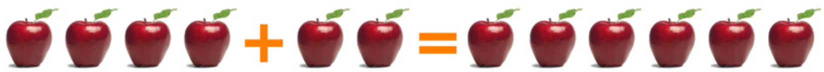
$$۱۵x.x + ۶x - ۵ = ۱۵ \times x \times x + ۶ \times x - ۵ \xrightarrow{x=۲} ۱۵ \times ۲ \times ۲ + ۶ \times ۲ - ۵$$

$$= ۶۰ + ۱۲ - ۵$$

$$= ۶۷$$

ساده کردن عبارت‌های جبری

وقتی ۴ تا سیب داشته باشیم و ۲ تای دیگر به آن‌ها اضافه کنیم، ۶ تا سیب خواهیم داشت.



وقتی ۴ تا x داشته باشیم و ۲ تای دیگر به آن‌ها اضافه کنیم، ۶ تا x خواهیم داشت.

$$(x+x+x+x)+(x+x)=(x+x+x+x+x+x)$$

۴ تا x را با $۴x$ نشان می‌دهیم. زیرا:

$$x+x+x+x=۴\times x=۴x$$

۲ تا x را هم با $۲x$ نشان می‌دهیم. زیرا:

$$x+x=۲\times x=۲x$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$۴x+۲x=۶x$$

حال فرض کنید ۴ تا سیب و ۲ تا پرتقال داشته باشیم و از آنها ۲ تا سیب برداریم و ۳ تا پرتقال به آنها اضافه کنیم. در نهایت ۲ تا سیب و ۵ تا پرتقال خواهیم داشت.

۴ تا x و ۲ تا y داریم و از آنها ۲ تا x کم می‌کنیم و به آنها ۳ تا y اضافه می‌کنیم. در نهایت ۲ تا x و ۵ تا y خواهیم داشت.

$$۴x+۲y-۲x+۳y=۲x+۵y$$

عبارت جبری $۴x + ۲y - ۲x + ۳y$، چهار جمله دارد که آن جملات عبارت‌اند از $۴x$، $۲y$، $۲x$ و $۳y$. از طرفی عبارت جبری $۲x + ۵y$ دارای دو جمله است که عبارت هستند از $۲x$ و $۵y$. زمانی که بتوانیم تعداد جملات یک عبارت جبری را کاهش دهیم، در واقع آن عبارت را «ساده» کرده‌ایم.

در مثال بالا $۲x + ۵y$ ساده شده‌ی عبارت جبری $۴x + ۲y - ۲x + ۳y$ است.

تنها نکته‌ای که در ساده کردن عبارت‌های جبری باید به آن توجه شود، این است که تشخیص دهیم کدام جمله‌ها شبیه هم هستند. پیدا کردن جمله‌های شبیه هم (یا متشابه) در یک عبارت جبری کار دشواری نیست. در عبارت $۴x + ۲y - ۲x + ۳y$، جمله‌های $۴x$ و $۲x$ باهم متشابه هستند. همچنین $۲y$ و $۳y$ نیز باهم متشابه هستند. بنابراین برای ساده کردن عبارت جبری $۴x + ۲y - ۲x + ۳y$، جمله‌ی $۴x$ را از $۲x$ کم می‌کنیم و سپس $۲y$ را با $۳y$ جمع می‌کنیم که حاصل آن می‌شود $۲x + ۵y$.

در واقع برای ساده کردن یک عبارت جبری، سیب‌ها را باهم ساده می‌کنیم و پرتقال‌ها را باهم!!

واقعیت امر این است که در واقع ساده کردن یک عبارت جبری به کمک فاکتورگیری انجام می‌شود.

$$\begin{aligned}
۴x + ۲y - ۲x + ۳y &= ۴x - ۲x + ۲y + ۳y \\
&= (۴x - ۲x) + (۲y + ۳y) \\
&= (۴ - ۲)x + (۲y + ۳y) \\
&= (۴ - ۲)x + (۲ + ۳)y \\
&= ۲x + ۵y
\end{aligned}$$

تمرین

۱. کدام یک از جملات زیر با هم متشابه‌اند؟

$$۶x \ , \ ۶x.y \ , \ ۸x \ , \ ۳ \ , \ ۴x.y.y \ , \ -۲x.y \ , \ -۱۰۰ \ , \ ۱۵x.y.y$$

$$۳x.x.y \ , \ ۱۹x \ , \ -x.y \ , \ x \ , \ ۹y \ , \ ۲y \ , \ ۱۶x.y \ , \ ۰$$

۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $۱۸x + ۱۰y - ۸x + y - ۳x$

ب) $۹۴x + ۱۳x.y - ۴۴x - ۹x.y + ۸y$

ج) $\frac{۳}{۷}x - \frac{۳}{۷}y - \frac{۲}{۵}x + \frac{۲}{۵}y$

د) $۸(a - ۲y) + ۴(۴y - ۲a)$

ه) $۳(x - ۲z) - (۸x - ۴z) - ۳(x - ۲z)$

و) $۹(x - x.x + ۱) + ۶x(۲x - ۴) + ۱۶$

۳. جاهای خالی را به‌طور مناسب پر کنید.

الف) $۱۲m + \cdots - ۳k + \cdots = ۳m + ۳k$

ب) $۶(۲x + \ldots) - ۲(\cdots + ۳y) = ۶x + ۶y$

۴. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل‌ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به‌دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل‌ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۵. سه رقم انتخاب کنید به‌طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

۶. از مدرسه حلی تا شهرک بهار ۱۲۰۰ متر، از مدرسه علامه تا شهرک بهار ۹۰۰ متر و از مدرسه حلی تا مدرسه علامه ۶۰۰ متر است.

الف) اگر صبح‌ها a دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسه حلی و b دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسه علامه بروند، در مجموع در یک صبح چند متر پیاده‌روی توسط همه دانش‌آموزان صورت می‌گیرد؟

ب) اگر در عصر $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان حلی به سمت علامه بروند و از آنجا به شهرک برگردند و بقیه دانش‌آموزان حلی به شهرک برگردند و همچنین تمام دانش‌آموزان علامه به شهرک برگردند، در مجموع در یک بعدازظهر چند متر پیاده‌روی توسط همه دانش‌آموزان صورت می‌گیرد؟

۷. در پارکینگ لاله، تعداد دوچرخه‌ها را x، تعداد سه‌چرخه‌ها را y و تعداد ماشین‌ها را z در نظر می‌گیرند.

الف) تعداد وسائل نقلیه‌ای که در پارکینگ لاله موجود است را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ب) اگر در پارکینگ لادن ۳ برابر پارکینگ لاله دوچرخه، ۲ برابر پارکینگ لاله سه‌چرخه و نصف پارکینگ لاله ماشین موجود باشد، تعداد وسائل نقلیه‌ای که در هر دو پارکینگ موجود است را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ج) در کل در هر دو پارکینگ چند چرخ موجود است؟

۸. در شهر عجایب، قیمت هر بار استفاده از میوه x، هر بار استفاده از غذا y و هر بار استفاده از نوشیدنی z است. جدول زیر سفارشات آقای شیکمو در مدت ۳ روز است.

ابتدا جدول زیر را کامل کنید و سپس بگویید که آقای شیکمو در طی ۳ روز چقدر پول بابت شکم خرج کرده است؟

نوع کالا	تعداد دفعات مصرف	قیمت کل
سیب	۴ دفعه	۴x
چلوکباب	۲ دفعه	
شربت	۶ دفعه	
نوشابه	۹ دفعه	
پیتزا	۱۳ دفعه	
گلابی	۱ دفعه	
خیار	۱۸ دفعه	
آب پرتقال	۳ دفعه	
موز	۵ دفعه	
املت	۱۵ دفعه	

معادله

هرگاه یک عبارت جبری مساوی یک عبارت جبری دیگر (و یا یک عدد) شود، معادله تشکیل می‌شود. در زیر چند نمونه معادله می‌بینید.

$$۱۵x - ۴ = ۵$$

$$۱۸x.x - ۳x.y = ۱۲x - ۴y.x$$

$$z = ۱۸x.x.x.x - ۴t$$

هر کدام از تساوی‌های بالا یک معادله است. معادله یعنی «معادل شدن» یک عبارت جبری با یک عبارت جبری دیگر (و یا یک عدد). در تساوی $۱۵x - ۴ = ۵$، عبارت جبری $۱۵x - ۴$ معادل است با ۵. این معادله دارای یک متغیر x است.

در تساوی $۱۸y.y - ۳x.y = ۱۲x - ۴y.x$، عبارت جبری $۱۸y.y - ۳x.y$ معادل است با عبارت جبری $۱۲x - ۴y.x$. این معادله دارای دو متغیر x و y است.

۱. درکدام یک از موارد زیر معادله نمی‌بینید؟ در معادله‌هایی که وجود دارند، تعیین کنید چه چیزی معادل چه چیزی است. همچنین تعیین کنید که هر معادله چند متغیر دارد.

الف) $۱۱x.x + x = ۸x - ۳x.x.x$

ب) $۱۲x + ۹y = ۰$

ج) $۱۳x - ۴x.x$

د) $۸x - ۴ = ۲x + ۶$

ه) $۴x - ۲ = ۲x + ۴z = ۵x + ۲y$

و) $۵x + ۴y - z = ۲۰m - ۲x + ۴y = ۲t - ۵k = x$

حل معادله

از اینجا به بعد درباره‌ی معادله‌هایی صحبت می‌کنیم که فقط یک متغیر دارند.

تساوی $۲x.x + ۵x = x.x.x - ۱۲$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که این تساوی یک معادله است. در این معادله عبارت جبری $۲x.x + ۵x$ معادل شده است با عبارت جبری $x.x.x - ۱۲$.

در این معادله x یک متغیر عددی است. یعنی به جای x باید یک عدد قرار بگیرد.

به نظر شما آیا در تساوی یا معادله‌ی بالا به جای x می‌توان هر عددی را قرار داد؟

به عنوان نمونه در معادله‌ی بالا مقدار x را برابر با ۲ قرار می‌دهیم. در این صورت آیا تساوی بین دو عبارت جبری $۲x.x + ۵x$ و $x.x.x - ۱۲$ برقرار می‌ماند؟

$$
\begin{aligned}
۲x.x + ۵x = x.x.x - ۱۲ \quad & \xrightarrow{x=۲} ۲ \times ۲ \times ۲ + ۵ \times ۲ \stackrel{?}{=} ۲ \times ۲ \times ۲ - ۱۲ \\
& \longrightarrow ۸ + ۵ \times ۲ \stackrel{?}{=} ۸ - ۱۲ \\
& \longrightarrow ۱۸ \stackrel{?}{=} -۴
\end{aligned}
$$

آیا تساوی به‌دست آمده برقرار خواهد بود؟!!!

واضح است که $۱۸ \neq -۴$؛ یعنی ۱۸ مساوی -۴ نیست. پس ما مجاز نیستیم به جای x مقدار ۲ را قرار دهیم. یعنی عدد ۲ اجازه ندارد به جای x قرار بگیرد. حال این سؤال مطرح می‌شود:

به جای x چه عدد (و یا اعدادی) را مجاز هستیم قرار دهیم؟

۱. در معادله‌ی $۲x.x + ۵x = x.x.x - ۱۲$ همانند نمونه حل شده، به جای x مقدارهای خواسته شده را قرار دهید و بررسی کنید که آیا تساوی به‌دست آمده درست است یا نه؟

$$x = -۲ \longrightarrow ۲ \times (-۲)(-۲) + ۵ \times (-۲) \stackrel{?}{=} (-۲)(-۲)(-۲) - ۱۲ \longrightarrow ۲ \times ۴ + (-۱۰) \stackrel{?}{=} -۸ - ۱۲$$
$$\longrightarrow ۸ - ۱۰ \stackrel{?}{=} -۸ - ۱۲ \rightarrow -۲ \neq -۲۰$$

$x = ۰ \longrightarrow$

$x = ۱ \longrightarrow$

$x = ۳ \longrightarrow$

$x = \frac{۱}{۲} \longrightarrow$

$x = ۴ \longrightarrow$

اگر تمرین قبل را به‌طورکامل انجام دهید، ملاحظه خواهید کرد که تساوی $۲x.x + ۵x = x.x.x - ۱۲$ به‌ازای $x = ۴$ برقرار خواهد بود. یعنی اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، توانسته‌ایم بین دو عبارت $۲x.x + ۵x$ و $x.x.x - ۱۲$ ایجاد تعادل کنیم.

حل معادله یعنی «ایجاد تعادل». ایجاد تعادل بین سمت چپ و سمت راست تساوی.

مثال. می‌خواهیم معادله‌ی $x.x.x - ۶x.x = ۶ - ۱۱x$ را حل کنیم. یعنی باید عددهایی را پیدا کنیم که اگر آن عددها را به جای x قرار دهیم، تساوی بین دو عبارت جبری $x.x.x - ۶x.x$ و $۶ - ۱۱x$ برقرار بماند.

ابتدا به جای x مقدار ۱− را قرار می‌دهیم.

$$x = -۱ \longrightarrow (-۱)(-۱)(-۱) - ۶ \times (-۱)(-۱) \stackrel{?}{=} ۶ - ۱۱ \times (-۱) \longrightarrow -۷ \neq ۱۷$$

بنابراین $x = -۱$ بین دو عبارت جبری $x.x.x - ۶x.x$ و $۱۱x - ۶$ ایجاد تعادل نمی‌کند. بنابراین $x = -۱$ نمی‌تواند جواب معادله‌ی $x.x.x - ۶x.x = ۶ - ۱۱x$ باشد.

به جای x مقدار ۰ را قرار می‌دهیم.

$$x = ۰ \longrightarrow ۰ \times ۰ \times ۰ - ۶ \times ۰ \times ۰ \stackrel{?}{=} ۶ - ۱۱ \times ۰ \longrightarrow ۰ \neq ۶$$

$x = ۰$ هم نمی‌تواند جواب معادله باشد.

به جای x، مقدار ۱ را قرار می‌دهیم.

$$x = ۱ \longrightarrow ۱ \times ۱ \times ۱ - ۶ \times ۱ \times ۱ \stackrel{?}{=} ۶ - ۱۱ \times ۱ \longrightarrow -۵ = -۵$$

اگر $x = ۱$ باشد، بین دو عبارت جبری $x.x.x - ۶x.x$ و $۱۱x - ۶$ تعادل ایجاد شده است. پس $x = ۱$ یک جواب برای معادله‌ی $x.x.x - ۶x.x = ۶ - ۱۱x$ است.

به جای x مقدار ۲ را قرار می‌دهیم.

$$x = ۲ \longrightarrow ۲ \times ۲ \times ۲ - ۶ \times ۲ \times ۲ \stackrel{?}{=} ۶ - ۱۱ \times ۲ \longrightarrow -۱۶ = -۱۶$$

$x = ۲$ هم یک جواب برای معادله‌ی $x.x.x - ۶x.x = ۶ - ۱۱x$ است.

آیا می‌توانید باز هم برای این معادله جواب پیدا کنید؟ به نظر شما معادله‌ی $x.x.x - ۶x.x = ۶ - ۱۱x$ چند جواب خواهد داشت؟

تعداد جواب‌های یک معادله

بعضی معادله‌ها هستند که اصلاً نمی‌توان برای آنها جواب پیدا کرد. برای مثال معادله‌ی زیر، از این نوع است.

$$x + ۴ = x - ۲$$

بعضی معادله‌ها هستند که فقط یک جواب دارند. معادله‌هایی که در زیر می‌آیند، از این نوع هستند.

$$-۲x - ۴ = x + ۶$$

$$۳x - ۲ = ۷$$

$$(x - ۱)(x - ۱) = ۰$$

$$x.x + ۶x - ۴ = x.x + ۵x + ۶$$

بعضی معادله‌ها هستند که فقط دو جواب دارند؛

$$(x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

بعضی معادله‌ها هستند که فقط سه جواب دارند. بعضی معادله‌ها هستند که فقط چهار جواب دارند و همین جور تا آخر!!

بعضی معادله‌ها هستند که به تعداد نامتناهی جواب دارند. معادله‌هایی که در زیر می‌آیند، از این نوع هستند.

$$x(x - ۱) + x = x.x$$

$$۳x + ۴ - x = ۵x - ۲ + x - ۴x + ۶$$

پس تکلیف ما چیست؟ از کجا بفهمیم که یک معادله چند جواب دارد؟ جواب‌های یک معادله را چگونه باید پیدا کنیم؟ اینها سؤالاتی است که به همه‌ی آنها نمی‌توان امسال پاسخ داد. چند سال برای جواب دادن به این سؤالات وقت لازم است. کمی صبور باشید!!

معادله‌هایی که امسال باید با آنها آشنا شوید و حل آنها را یاد بگیرید، معادله‌هایی هستند که فقط یک متغیر دارند و توان متغیر در آنها یک است. در زیر چند نمونه از این معادلات را مشاهده می‌کنید.

$$۳x = ۱۸$$

$$۶x + ۵x = ۱۱$$

$$۲x - ۶ = ۵$$

$$۱۲y - ۹ = ۳y - ۶$$

آیا می‌توانید چند نمونه از این معادله‌ها را خودتان بسازید؟

بقّالی

حاج‌رحمان از اهالی محله‌شان و از معتمدین صِنف[1] بقّال‌ها به حساب می‌آید. او چند روز پیش به سفر حجِ تَمتُّع[2] رفت و اداره‌ی بقالی خود را به‌دست محسن پسر کوچکش سپرد. حاج‌رحمان قبل از رفتن به سفر به محسن کلی سفارش کرده بود که در حساب و کتاب به دقت عمل کند تا خدایی نکرده مدیون کسی نشوند. محسن هم به حاج‌رحمان قول داده بود که تمام نیروهای خود را در اداره بقالی به کار گیرد.

محسن در حساب و کتاب روش خاص خودش را داشت و به‌گونه‌ای خاص به مشتری‌ها جنس می‌فروخت. روش کار محسن این‌گونه بود که او هنگام تحویل جنس به مشتری‌ها مقداری پول هم به روی جنس آنها قرار می‌داد. بعضی از مشتری‌ها که از حساب و کتاب سر در می‌آوردند، متوجه کار محسن می‌شدند و مشکلی پیش نمی‌آمد. بعضی دیگر از مشتری‌ها از کار محسن سر در نمی‌آوردند؛ ولی به او اعتماد می‌کردند و بدون اینکه حرفی بزنند مغازه را ترک می‌کردند. اما بعضی از مشتری‌ها که زیاد اهل حساب و کتاب‌های پیچیده نبودند، احساس می‌کردند که محسن گران‌فروشی می‌کند و به شدت به او اعتراض می‌کردند. مهری‌خانم از جمله‌ی این افراد بود.

مهری‌خانم آمد و شش عدد تخم‌مرغ خواست. محسن هم بعد از چند لحظه کیسه‌ی تخم‌مرغ‌ها را گذاشت روی کفه‌ی ترازو تا مهری‌خانم آن را بردارد.

محسن: امر دیگه‌ی باشه مهری‌خانم؟

مهری‌خانم: نه... دستت درد نکنه... پولش چقدر میشه؟

محسن: قابل شما رو نداره... شما باید ۹۰۰ تومان به من بدید.

مهری‌خانم که به شدت عصبانی شده بود شروع کرد به داد و فریاد...

۱) شغل
۲) حج واجب

مهری‌خانم: هنوز هیچی نشده داری گرون‌فروشی می‌کنی؟ بچه‌جون چرا آبروی چندین و چندساله‌ی حاج‌رحمان رو می‌بری؟ اون بنده‌ی خدا یک ذره تا حالا حلال رو حروم نکرده. تو یک دفعه برای چی قیمت تخم‌مرغ رو گرون کردی؟ حاج‌رحمان هیچ‌وقت بابت شش‌تا تخم‌مرغ از من ۹۰۰ تومان نمی‌گرفت. یادمه پول شش تا تخم‌مرغ کمتر از این می‌شد.

مهری‌خانم با اکراه ۹۰۰ تومان پول به محسن داد و همچنان که مشغول غُرولُند[1] بود، کیسه‌ی تخم‌مرغ‌ها را از کفه‌ی ترازو برداشت و خواست که برود. اما یک دفعه متوجه مقداری پول داخل کیسه شد.

مهری‌خانم: این پول‌ها چیه داخل کیسه‌ی تخم‌مرغ‌ها؟ مال کیه این پول‌ها؟

محسن: این ۶۰ تومان مال خودتونه مهری‌خانم.

۱) زیر لب شکایت کردن

مهری‌خانم: یعنی چی بچه؟

محسن: مهری‌خانم؛ من قیمت چیزی رو گرون نکردم. شما یه خورده زود قضاوت کردی.

مهری‌خانم که از کار محسن چیزی سر در نیاورده بود، نگاه آرامی به محسن انداخت...

مهری‌خانم: یعنی الان تو به همون قیمت قبل به من تخم‌مرغ فروختی؟

محسن: بله مهری‌خانم... خیالتون راحت.

مهری‌خانم: خب؛ حساب و کتابت چه‌جوری بوده پسرجان؟ الان از کجا قیمت هر تخم‌مرغ رو من می‌تونم بفهمم؟

محسن: بذارین براتون حساب و کتاب کنم. ببینین مهری‌خانم؛ من به شما شش تا تخم‌مرغ به همراه ۶۰ تومان پول دادم. شما هم به من ۹۰۰ تومان پول دادی. خب... از این رابطه می‌تونید قیمت هر تخم‌مرغ رو حساب کنید.

$$۶t + ۶۰ = ۹۰۰$$

در این رابطه، t یعنی قیمت هر تخم‌مرغ.

مهری‌خانم: تی‌تی می‌تی دیگه چیه پسر. من که حالیم نمیشه چی می‌گی... باشه قبولت دارم.

محسن: گوش کن مهری‌خانم... بذارین بقیه‌اش رو هم بگم. شما ۹۰۰ تومان پول دادین و من ۶۰ تومان پس دادم. این یعنی در واقع شما بابت شش تا تخم‌مرغ ۶۰-۹۰۰ تومان به من پول دادین؛ یعنی ۸۴۰ تومان.

$۶t = ۹۰۰ - ۶۰$

$۶t = ۸۴۰$

خب... الان ۶، ضرب در یک عددی شده ۸۴۰ تومان. حالا باید دنبال اون عدد باشیم. قبول دارین اگه ۸۴۰ رو تقسیم کنیم به ۶، اون عدد به‌دست می‌یاد؟

مهری‌خانم: هان؟ ... چی می‌گی؟

محسن: هیچی مهری‌خانم؛ مثل اینکه من دارم برای خودم حرف می‌زنم. t می‌شه ۱۴۰ ($t = ۱۴۰$). یعنی قیمت هر تخم‌مرغ ۱۴۰ تومنه؛ دیدین که من گرون‌فروشی نکردم.

مهری‌خانم: چی‌چی می‌شه ۱۴۰؟ تی‌تی؟

محسن: نه مهری‌خانم؛ t ... t می‌شه ۱۴۰؛ یعنی قیمت هر تخم‌مرغ.

مهری‌خانم: ها؟ چی؟... من رفتم ... خداحافظ.

پیتزا

نصرت‌خان جلوی تلویزیون روی کاناپه[1] نشسته بود و مشغول دیدن فوتبال بود. نصرت‌خانم همسر نصرت‌خان یک استکان چای ریخت و آمد اتاق پذیرایی و با کنترل از راه‌دور، کانال تلویزیون را عوض کرد و سپس رفت و کنار نصرت‌خان نشست.

نصرت‌خان: اِاِاِ . . . چی کار کردی؟ داشتم فوتبال می‌دیدم.

نصرت‌خانم: الان سریال شروع می‌شه. قسمت آخرشه. می‌خوام ببینم آخرش عروسی می‌شه یا نه!

نصرت‌خان: کدوم سریال؟ همون . . .

نصرت‌خانم: آره . . . همون سریال دَرِ پیته[2].

---

۱) صندلی راحتی

۲) در اصطلاح به چیزهای کم ارزش گویند.

نصرت‌خان: باشه؛ چاره‌ای نیست... وقتی شما می‌خوای سریال ببینی، ما هم می‌بینیم. اصلا چه کاری از سریال دیدن بهتر؟ ... دستت درد نکنه؛ چای خوش رنگیه. برای خودت چرا نریختی؟

نصرت‌خانم استکان چای را برداشت و یک قُلُپ هم از آن خورد.

نصرت‌خانم: چای شما داخل قوریه...

نصرت‌خان: بله خب... چای داخل قوری تازه‌تره ...

نصرت‌خان رفت داخل آشپزخانه تا برای خودش چای بریزد ...

نصرت‌خان: نصرت‌جان... شام چی داریم؟

نصرت‌خانم: نصرت‌جان... شام چیزی نداریم.

نصرت‌خان: من گرسنه هستم. یعنی چی که شام چیزی نداریم.

نصرت‌خانم: یعنی اینکه هم من گرسنه هستم، هم نصیر، هم ناصر. اگه یه خورده دیر بِجُنبی پیتزافروشی سر خیابون هم تعطیل می‌کنه.

نصرت‌خان: نصیر، ناصر... بلند بشین برین سر خیابون شام بگیرین و بیاین. من تا حالا اونجا نرفتم. شما برین که زیاد رفتین. زباله‌ها رو هم بذارین دم در. مأمورین شهرداری الان میان.

نصرت‌خانم: کار خودته. اونا نشستن پای کامپیوتر و دارن بازی می‌کنن. فکر نکنم بتونی بلندشون کنی...

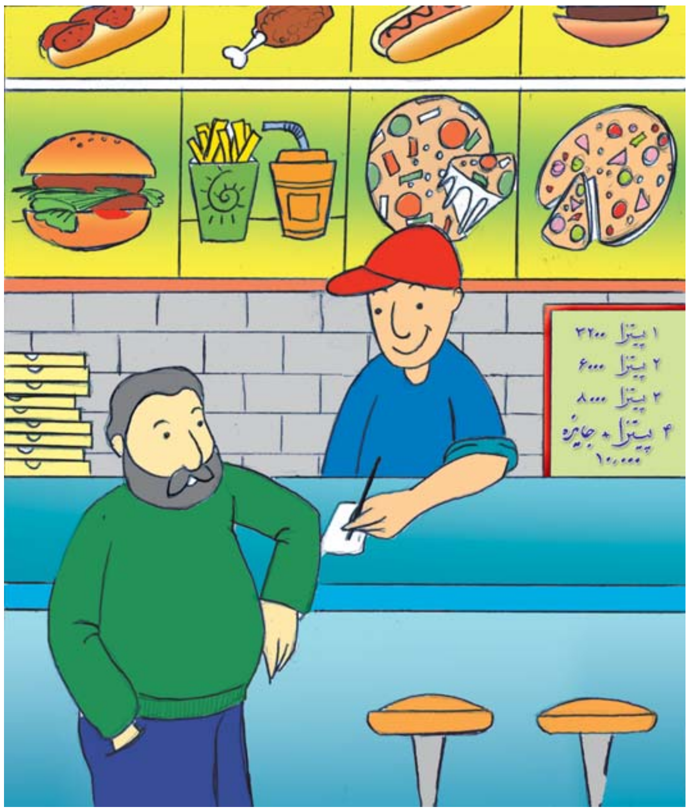
نصرت‌خان: مگه دست خودشونه؛ الان میرم بلندشون می‌کنم.

نصرت‌خان رفت داخل اتاق بچه‌ها و بعد از چند لحظه برگشت...

نصرت‌خان: خب.. بذار بچه‌ها بازی‌شون رو بکنن. چی کارشون داری آخه زن؟ خودم میرم غذا می‌گیرم و میام. اصلاً خوب نیست این وقت شب بچه بره بیرون...

نصرت‌خانم: زباله‌ها رو هم بی‌زحمت بذار دم در. مأمورین شهرداری الان میانا...

چند دقیقه بعد، نصرت‌خان مشغول دیدن تابلویی بود که پشت سر فروشنده نصب شده بود.



نصرت‌خان: سلام آقا... خسته نباشید. چهار تا پیتزا لطف کنید.

فروشنده: سلام بر شما... سلامت باشید. چهار تا پیتزا... امر دیگه‌ای نیست؟ نوشابه؟ سالاد؟ سیب‌زمینی؟

نصرت‌خان: خیر... فقط چهارتا پیتزا ... بفرمایید؛ اینم ۱۰۰۰۰ تومان پول.

فروشنده: قابل شما رو نداره... دست شما درد نکنه.

نصرت‌خان: این جایزه که اینجا نوشتید چی هست حالا؟

فروشنده: معلومه که شما اولین باره که از ما خرید می‌کنید. چون از جایزه‌ی ما اطلاعی ندارین.

نصرت‌خان: بله... همین‌طوره. همیشه بچه‌ها میان برای خرید.

فروشنده: پس تحمل بفرمایید. جایزه رو به همراه غذاها به شما تحویل می‌دیم.

نصرت‌خان با خودش مشغول فکرکردن شد که حالا جایزه چه چیز می‌تواند باشد؟ با خودش گفت: «فوقِش یه جاکلیدی یا یه تقویم روی پیتزاها قرار می‌دن و اسمش رو هم جایزه گذاشتن.» بعد با خودش فکر کرد که قیمت هر پیتزا چند است. ولی تا از محتوای جایزه باخبر نمی‌شد نمی‌توانست قیمت هر پیتزا را در بیاورد. قیمت هر پیتزا بستگی داشت به ارزش و قیمت جایزه‌ای که قرار بود دریافت کند. نصرت‌خان با خودش فکر کرد که اگر قیمت جایزه‌ای که قرار بود بگیرد را از ۱۰۰۰۰ تومانی که به فروشنده داده، کم کند، می‌شود قیمت چهارتا پیتزا.

نصرت‌خان رابطه‌ی زیر را پشت رسیدی که از فروشنده گرفته بود، نوشت:

$$۴ \times P = ۱۰۰۰۰ - \text{قیمت جایزه}$$

نصرت‌خان P را قیمت تمام شده‌ی هر پیتزا برای خودش در نظر گرفته بود.

چند دقیقه بعد، فروشنده نصرت‌خان را صدا زد و پنج عدد پیتزا به او تحویل داد.

نصرت‌خان: فکر کنم اشتباهی رخ داده. اولاً من چهارتا پیتزا می‌خواستم. ولی شما یک پیتزا اضافه برای من آورده‌اید. ثانیاً جایزه رو هم فراموش کردید بدید.

فروشنده: اشتباهی رخ نداده. در این مغازه در واقع اگه کسی چهار پیتزا سفارش بده، ما یک پیتزای دیگه به عنوان جایزه به او می‌دهیم.

نصرت‌خان: خب... این کار شما اسراف است. چون من چهارتا پیتزا احتیاج دارم و به پیتزای پنجم احتیاجی ندارم. همه‌ی ما باید یاد بگیریم به اندازه‌ای که احتیاج داریم مصرف کنیم. با تمام این حرف‌ها، من از شما تشکر می‌کنم. پیتزای اضافی رو هم که به من دادید، فردا می‌برم سرکار و به عنوان نهار اون رو می‌خورم. دست شما درد نکنه. خدانگهدار.

نصرت‌خان رسید منزل و اهل منزل را صدا زد.

نصرت‌خان: نصرت‌جان؛ بچه‌ها رو صدا بزن بیان. غذا سرد میشه.

نصرت‌خانم: احتیاجی نیست صداشون بزنیم. خودشون الان میان.

نصرت‌خان: آره دیگه. اون برای خرید کردنه که باید بری بلندشون کنی. برای خوردن خودشون بلند می‌شن... راست می‌گی.

نصرت‌خانم: دیدی گفتم آخر سریال اون دوتا عروسی می‌کنن!

نصرت‌خان: خسته نباشی؛ واقعاً هنر کردی که تونستی این اتفاق رو پیش‌بینی کنی.

نصرت‌خانم: حالا چرا پنج‌تا پیتزا گرفتی؟ دستت درد نکنه. می‌دونستم که به فکر غذای فردا ظهر من هستی. بچه‌ها که مدرسه هستن. تو هم که سرکار هستی. خدا عمرت بده چه شوهر خوبی هستی.

نصرت‌خان رسیدِ خرید را از جیبش در آورد تا محاسبات خود را کامل کند. او رابطه‌ی «$۴P = ۱۰۰۰۰ -$ قیمت جایزه» را این‌گونه اصلاح کرد.

$$۴P = ۱۰۰۰۰ - P$$

ولی هر چقدر فکر کرد، نتوانست بفهمد که P باید چند باشد.

نصرت‌خانم آمد بالای سر نصرت‌خان.

نصرت‌خانم: چی کار داری می‌کنی؟

نصرت‌خان: می‌خوام ببینم قیمت هر پیتزا چند در اومده.

نصرت‌خانم: مگه پنج‌تا پیتزا نگرفتی؟

نصرت‌خان: بله.

نصرت‌خانم: مگه ۱۰۰۰۰ تومان پول ندادی؟

نصرت‌خان: بله.

نصرت‌خانم: الان تو توو چی گیر کردی؟

نصرت‌خان با خودش گفت: راست میگه‌ها. این که خیلی ساده است. پنج‌تا پیتزا گرفتم. ۱۰۰۰۰ تومان هم پول دادم. یعنی $5P = 10000$.

پس رابطه‌ی $4P = 10000 - P$ به راحتی تبدیل میشه به رابطه‌ی $5P = 10000$.

خب؛ ۵ ضرب‌در یک عددی، شده ۱۰۰۰۰. پس اون عدد باید ۲۰۰۰ باشه. یعنی ۱۰۰۰۰ تقسیم بر ۵. پس $P = 2000$ می‌شه. یعنی هر پیتزا شده دونه‌ای ۲۰۰۰ تومان.

نصرت‌خانم: چی شد؛ مشکلت حل شد؟

نصرت‌خان: پس این بچه‌ها چرا نیومدن!!!

رستوران

امین می‌خواهد به مناسبت ازدواجش به دوستانش شام بدهد. برای همین امین تصمیم می‌گیرد این کار را در یک رستوران انجام دهد. او به یکی از رستوران‌های شهر رفت تا برای هفته‌ی بعد چند میز را رزرو کند و نوع غذا و نوع پذیرایی را هم تعیین کند. امین تصمیم گرفت از دوستانش به صورت منوی باز[1] پذیرایی کند. یعنی از مدیر رستوران درخواست کرد تا برای روز مهمانی ۲۴ کیلو از انواع غذاهای گوشتی را برایشان آمده کند و در یک میز جدا بچینند تا مهمان‌ها خودشان غذایشان را انتخاب کنند.

مدیر رستوران یک برگه را برای عقد قرارداد، به امین داد و به امین گفت که تمام موارد داخل قرارداد را مطالعه کند. امین هم به صورت خیلی سریع نگاهی به قرارداد انداخت و پایین آن را امضاء کرد. سپس مدیر رستوران به عنوان بیعانه[2] مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان از امین دریافت کرد و به امین اطمینان داد تا به نحو احسن سفارش آن روز را تدارک ببینند.

روز مهمانی امین کمی زودتر از مهمان‌ها رفت رستوران تا مطمئن شود مشکلی وجود ندارد. کارگران رستوران سفارش امین را روی میزها چیده بودند و همه چیز آماده بود تا مهمان‌ها برسند. امین رفت پیش مدیر رستوران برای تسویه‌حساب و تشکّر.

امین: دست شما درد نکنه. واقعاً زحمت کشیدید.

مدیر رستوران: خواهش می‌کنم. انجام وظیفه کردیم.

امین: بفرمایید برای تسویه‌حساب چقدر باید تقدیم کنم؟

مدیر رستوران: قابل شما رو نداره... شما ۵۰۰۰۰ تومان داده بودید.

سپس از داخل دخل رستوران ۸۰۰۰ تومان پول به امین داد و گفت:

مدیر رستوران: حالا برای تسویه باید مبلغ ۲۰۰۰۰۰ تومان بپردازید.

۱) یکی از انواع پذیرایی که در آن، مهمان‌ها می‌توانند غذایی را که می‌خواهند از میز غذا انتخاب کنند.
۲) پیش پرداخت

بعد از اینکه امین باقیمانده‌ی پول را با کارت هوشمند بانکی خود پرداخت کرد، مدیر رستوران یکی از کارگرها را صدا زد و گفت برود و سهم غذای کارگرها را از میز غذای مهمان‌ها بردارد.

امین: ببخشید؛ غذای کارگرها رو از میز غذای ما برمی‌دارید؟

مدیر رستوران: بله؛ طبق بند آخر قرارداد که امضا کردید، رستوران در مهمانی‌هایی که به صورت منوی باز برگزار می‌شه، ۲ کیلو از غذاها رو به منظور غذای کارگرها برمی‌داره.

امین نگاهی به بند آخر قرارداد انداخت و دید که حق با مدیر رستوران است و او این بند را موقع عقد قرارداد نخوانده است.

امین از مدیر رستوران تشکر کرد و وارد سالن رستوران شد تا با اولین دوستش که وارد رستوران شده بود، احوال‌پرسی کند.

زمانی که مهمان‌ها مشغول خوردن غذا بودند، امین با خودش مشغول حساب و کتاب شد که هر کیلو از غذاها، برایش چقدر در آمده است.

امین رابطه‌ی زیر را پشت برگه‌ی قراردادش نوشت و با خود گفت سمت چپ تساوی ارزش چیزهایی است که من از رستوران دریافت کرده‌ام. و سمت راست تساوی ارزش چیزهایی است که من به رستوران داده‌ام.

$$۲۴x + ۸۰۰۰ = ۵۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰۰ + ۲x$$

در رابطه‌ی بالا امین x را قیمت هر کیلو غذا در نظر گرفته بود.

امین گفت رابطه را می‌توان ساده‌تر کرد.

من ابتدا ۲۴ کیلو غذا دریافت کرده بودم که ۲ کیلو رو پس دادم. یعنی ۲۲ کیلو غذا دریافت کرده‌ام.

از طرفی ۲۵۰۰۰۰تومان پول دادم و ۸۰۰۰ تومان پول پس گرفتم. یعنی ۲۴۲۰۰۰ تومان پول داده‌ام.

پس من بابت ۲۲ کیلو غذا، ۲۴۲۰۰۰ تومان پول داده‌ام.

در نتیجه رابطه‌ی $۲۴x + ۸۰۰۰ = ۵۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰۰ + ۲x$ تبدیل می‌شه به رابطه‌ی $۲۲x = ۲۴۲۰۰۰$.

۲۲ ضرب‌در یک عددی شده ۲۴۲۰۰۰. پس اون عدد از تقسیم ۲۴۲۰۰۰ بر ۲۲ به‌دست می‌یاد.

یعنی x برابر می‌شه با ۱۱۰۰۰؛ یعنی $x = ۱۱۰۰۰$؛ یعنی هر کیلو غذا ۱۱۰۰۰ تومان شده است.

چند خاصیت تساوی

قبل از اینکه روش حل معادله را بگوییم، چند خاصیت تساوی را مرور می‌کنیم.

اولین خاصیت تساوی: به طرفین یک تساوی می‌توان یک مقدار مساوی را اضافه کرد.

$$۱۲ = ۱۲ \xrightarrow[\text{عدد ۴ اضافه می‌شود}]{\text{به دو طرف تساوی}} ۱۲ + ۴ = ۱۲ + ۴$$

$$۶ + ۱ = ۷ \xrightarrow[\text{عدد ۳ اضافه می‌شود}]{\text{به دو طرف تساوی}} ۶ + ۱ + ۳ = ۷ + ۳$$

$$۴x - ۲ = ۳x + ۴ \xrightarrow[\text{مقدار } x \text{ اضافه می‌شود}]{\text{به دو طرف تساوی}} ۴x - ۲ + x = ۳x + ۴ + x$$

دومین خاصیت تساوی: از طرفین یک تساوی می‌توان یک مقدار مساوی را کم کرد.

$$۱۲ = ۱۲ \xrightarrow[\text{عدد ۴ کم شده است}]{\text{از دو طرف تساوی}} ۱۲ - ۴ = ۱۲ - ۴$$

$$۶ + ۱ = ۷ \xrightarrow[\text{عدد ۳ کم شده است}]{\text{از دو طرف تساوی}} ۶ + ۱ - ۳ = ۷ - ۳$$

$$۴x - ۲ = ۳x + ۴ \xrightarrow[\text{مقدار } x \text{ کم شده است}]{\text{از دو طرف تساوی}} ۴x - ۲ - x = ۳x + ۴ - x$$

سومین خاصیت تساوی: دو طرف یک تساوی را می‌توان در یک مقدار مساوی ضرب کرد.

$$۱۲ = ۱۲ \xrightarrow[\text{در ۴ ضرب می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} ۱۲ \times ۴ = ۱۲ \times ۴$$

$$۶ + ۱ = ۷ \xrightarrow[\text{در ۳ ضرب می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} (۶ + ۱) \times ۳ = ۷ \times ۳$$

$$۴x - ۲ = ۳x + ۴ \xrightarrow[\text{در } x \text{ ضرب می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} (۴x - ۲) \times x = (۳x + ۴) \times x$$

چهارمین خاصیت تساوی: دو طرف یک تساوی را می‌توان بر یک مقدار مساوی به غیر از صفر تقسیم کرد.

$$۱۲ = ۱۲ \xrightarrow[\text{بر ۴ تقسیم می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} \frac{۱۲}{۴} = \frac{۱۲}{۴}$$

$$۶ + ۱ = ۷ \xrightarrow[\text{بر ۳ تقسیم می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} \frac{۶ + ۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$۴x - ۲ = ۳x + ۴ \xrightarrow[\text{بر } x \text{ تقسیم می‌شود}]{\text{دو طرف تساوی}} \frac{۴x - ۲}{x} = \frac{۳x + ۴}{x}$$

روش حل معادله

برای حل معادله ابتدا باید عبارت‌های جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کرد. سپس از خواص تساوی باید به گونه‌ای استفاده شود تا پس از به کار بردن خواص تساوی، در یک طرف تساوی فقط عدد داشته باشیم و در سمت دیگر یک جمله که دارای متغیر است داشته باشیم و در نهایت باز هم با استفاده از خاصیت‌های تساوی می‌توانیم به جواب معادله برسیم. با این همه در این بخش تنها روش حل معادلاتی که پس از ساده شدن در آنها تنها یک نماد متغیر ظاهر می‌شوند، توضیح داده می‌شود. همچنین خواهید دید که این معادلات تنها یک جواب دارند.

در زیر چند معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱. $۵x + ۲ = ۳x + ۱۴ - x$

باید به دنبال عددی باشیم که اگر آن عدد را به جای متغیر x قرار دهیم، تعادل بین سمت چپ و سمت راست تساوی برقرار بماند. اولین کاری که باید انجام دهیم این است که عبارات جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کنیم.

$$۵x + ۲ = ۲x + ۱۴$$

سپس از خواص تساوی باید به‌گونه‌ای استفاده کنیم تا در یک طرف فقط یک عدد داشته باشیم و در طرف دیگر یک جمله که دارای متغیر است، داشته باشیم.

در تساوی بالا می‌خواهیم عدد ۲ را از سمت چپ حذف کنیم. پس دو طرف تساوی را منهای ۲ می‌کنیم.

$$۵x + ۲ - ۲ = ۲x + ۱۴ - ۲$$
$$\longrightarrow \; ۵x = ۲x + ۱۲$$

حال می‌خواهیم جمله‌ی $۲x$ را از سمت راست حذف کنیم. برای این کار دو طرف تساوی را منهای $۲x$ می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&۵x - ۲x = ۲x + ۱۲ - ۲x \\
&\longrightarrow\ ۳x = ۱۲
\end{aligned}$$

حالا به یک تساوی رسیده‌ایم که در یک طرف آن فقط عدد داریم و در طرف دیگر یک جمله که دارای متغیر است داریم.

حال اگر دو طرف تساوی را به عدد ۳ تقسیم کنیم، جواب معادله به‌دست می‌آید. جواب معادله یعنی عددی که مجاز هستیم در معادله به جای متغیر قرار دهیم.

$$\frac{۳x}{۳} = \frac{۱۲}{۳} \longrightarrow\ x = ۴$$

پس در معادله‌ی $۵x + ۲ = ۳x + ۱۴ - x$ اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$۵ \times ۴ + ۲ \stackrel{?}{=} ۳ \times ۴ + ۱۴ - ۴ \longrightarrow ۲۰ + ۲ \stackrel{?}{=} ۱۲ + ۱۴ - ۴ \longrightarrow ۲۲ \stackrel{\checkmark}{=} ۲۲$$

مثال ۲.

$$\frac{۳x + ۵}{۴} + ۲ = x - ۳$$

ابتدا هر دو طرف تساوی را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر از بین برود و سپس دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&۴\left(\frac{۳x + ۵}{۴} + ۲\right) = ۴(x - ۳) \\
&\longrightarrow\ ۳x + ۵ + ۸ = ۴x - ۱۲ \\
&\longrightarrow\ ۳x + ۱۳ = ۴x - ۱۲
\end{aligned}$$

سپس برای اینکه عدد ۱۲ را از سمت راست تساوی از بین ببریم، هر دو طرف تساوی را با عدد ۱۲ جمع می‌کنیم.

$$3x + 13 + 12 = 4x - 12 + 12$$
$$\longrightarrow\ 3x + 25 = 4x$$

بعد از آن از دو طرف تساوی $3x$ را کم می‌کنیم تا در سمت چپ تساوی $3x$ از بین برود.

$$3x + 25 - 3x = 4x - 3x$$
$$\longrightarrow\ 25 = x$$

همان‌طور که می‌بینید، مقدار x به‌دست آمد. اگر در معادله به جای x مقدار ۲۵ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$\frac{3 \times 25 + 5}{4} + 2 \overset{?}{=} 25 - 3 \longrightarrow \frac{80}{4} + 2 \overset{?}{=} 22 \longrightarrow\ 22 \overset{\checkmark}{=} 22$$

تمرین

۱. الف) در داستان بقّالی، معادله‌ای که محسن برای مهری‌خانم نوشت به صورت $۶t + ۶۰ = ۹۰۰$ بود. این معادله را حل کنید و قیمت هر تخم‌مرغ را به‌دست آورید.

ب) در داستان پیتزا، معادله‌ای که نصرت‌خان برای نصرت‌خانم نوشت به صورت $۴P = ۱۰۰۰۰ - P$ بود. این معادله را حل کنید و قیمت هر پیتزا را به‌دست آورید.

ج) در داستان رستوران، معادله‌ای که امین به‌دست آورد به صورت زیر بود.

$$۲۴x + ۸۰۰۰ = ۵۰۰۰۰ + ۲۰۰۰۰۰ + ۲x$$

این معادله را حل کنید و قیمت هر کیلو غذا را به‌دست آورید.

۲. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۵t - ۴ = ۱۶$

ب) $-۳m - ۲ = ۱۳$

پ) $-۱۲x + ۱۳ = ۱$

ت) $۱۲ = ۶ - ۲x$

ث) $۲b = ۸b - ۱۸$

ج) $۵z + ۲ = ۳z - ۵$

چ) $x+۲x+۳x+\ldots+۱۰x+۱۱=۶۶$

ح) $۴x+۸x+۱۲x+\ldots+۴۸x+۴=۷۸۴$

خ) $۳g + ۴ - g + ۱ = ۳ - ۴g$

د) $\frac{۲k - ۲}{۶} = k - ۳$

ذ) $\frac{۸y - ۳}{۵} = \frac{۶y + ۱۰}{۴}$

ر) $\frac{۴a - ۶}{۲} + ۳a = ۱۱ - ۲a$

۳. سگی به دنبال خرگوشی که با آن ۱۵۰ متر فاصله دارد، شروع به دویدن می‌کند. خرگوش در هر ثانیه ۲ متر و سگ در هر ثانیه ۴ متر می‌دود. بعد از چند ثانیه سگ به خرگوش می‌رسد؟

۴. چنانچه عدد ۷۲ به سه قسمت متناسب با عددهای ۲، ۴ و ۶ تقسیم شود، کوچک‌ترین قسمت برابر چه عددی خواهد شد؟

۵. فرض کنید $x = yz - ۴$ باشد. اگر $z = ۸$ باشد، آنگاه $x = ۲۰$ خواهد بود. اگر $z = ۱۰$ باشد، آنگاه x برابر چه عددی خواهد شد؟

۶. در یک بازی، جریمه‌ی هر خطا سه برابر جریمه‌ی خطای قبلی است. اگر یک بازیکن چهاربار خطا کند و در کل ۴۰۰۰۰ تومان جریمه شود، جریمه‌ی اولین خطا چقدر بوده است؟

۷. دو ماشین هم زمان از تهران به سمت زاهدان حرکت کردند. اگر ماشین اول با سرعت ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت و ماشین دوم با سرعت ۱۳۵ کیلومتر بر ساعت حرکت کنند، بعد از چند ساعت فاصله‌ی این دو ماشین از هم ۱۳۵ کیلومتر خواهد شد؟

۸. نینا و مینا و مینو سه خواهر هستند که یک بسته شکلات را تا آخر خورده‌اند. تعداد شکلات‌هایی که نینا خورده است، یکی بیشتر از دو برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. تعداد شکلات‌هایی که مینو خورده است، پنج تا کمتر از سه برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. اگر مینو و نینا به‌طور مساوی شکلات خورده باشند، مینا چندتا شکلات خورده است؟ مینو و نینا چندتا شکلات خورده‌اند؟

۹. علی و رضا در مغازه‌ی پدرشان سبدهای حصیری درست می‌کنند. علی پسر بزرگ‌تر، روزی ۵ تا بیشتر از رضا سبد درست می‌کند. اگر علی ۳ روز و رضا ۶ روز کار کند، روی هم ۶۰ عدد سبد تولید می‌کنند. تعیین کنید هر کدام روزی چند سبد تولید می‌کنند.

۱۰. اگر یک لاک‌پشت یک کیلومتر را در ۲۰ ساعت بپیماید، ۵۰ متر را در چه زمانی طی می‌کند؟

۱۱. یک نفر تعدادی جعبه دارد و در آن جعبه‌ها می‌خواهد کتاب‌هایش را قرار دهد. اگر در هر جعبه ۴۰ کتاب قرار دهد، ۱۸۰ کتاب روی زمین می‌ماند. اگر در هر جعبه ۶۰ کتاب قرار دهد، ۳ جعبه‌ی خالی برایش باقی می‌ماند. تعیین کنید او چند جعبه و چند کتاب دارد.

۱۲. عدد ۱۰ را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاوت آن‌ها برابر ۵ باشد.[۱]

۱) این مسأله منتسب به شیخ بهایی است. مزار او در مشهدالرضا در کنار صحن آزادی واقع است.

فصل ۴

شمارنده‌ها و اعداد اول

کارگاه بازی ـ شمارنده بازی

این بازی، یک بازی دو نفره است. نفر اول یک عدد از جدول زیر انتخاب می‌کند و همه شمارنده‌های آن عدد را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز کسب می‌کند. نفر دوم عددی خط نخورده را انتخاب کرده و همه‌ی شمارنده‌های خط نخورده‌ی آن‌را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است امتیاز می‌گیرد. این کار به نوبت ادامه پیدا می‌کند تا همه‌ی عددهای جدول خط بخورند. در پایان کسی که امتیاز بیش‌تری دارد، برنده است.

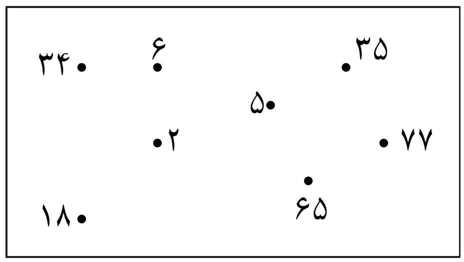
توجه: اگر بازیکنی عددی انتخاب کند و شمارنده‌های آن عدد را به اشتباه خط بزند، رقیب او می‌تواند در نوبت خود دو عدد انتخاب کند!

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

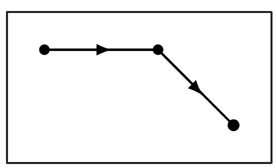
شمارنده

۱. تعدادی عدد طبیعی متفاوت روی کاغذ می‌نویسیم. دو عدد از آنها را در نظر می‌گیریم. اگر یکی از آنها شمارنده دیگری باشد، عدد اولی را به عدد دومی با یک پیکان وصل می‌کنیم. در ادامه از این به‌عنوان «نمودارکشیدن» یاد می‌کنیم.

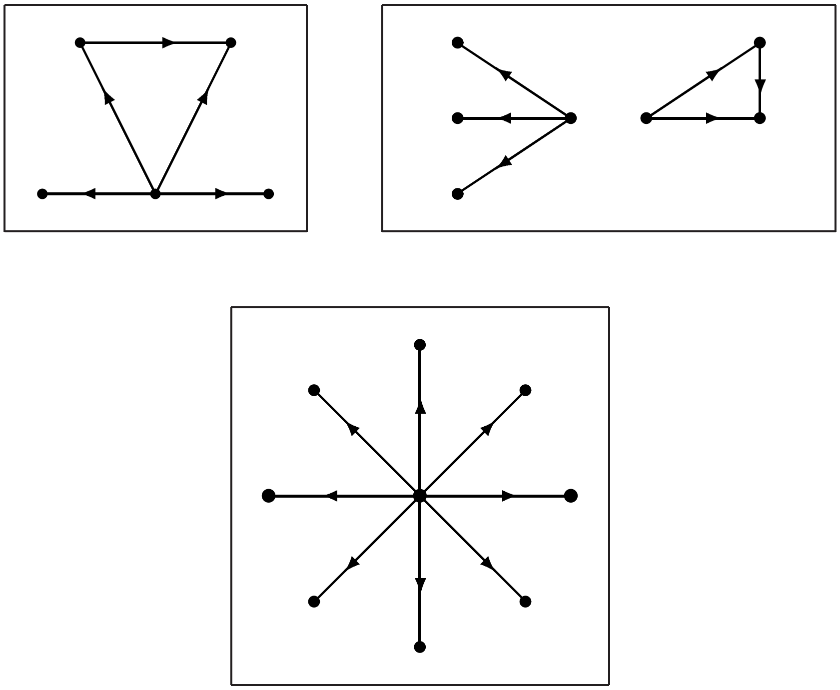
برای عددهای زیر، نمودار بکشید.



۲. بَهادُر نمودار زیر را رسم کرد. بعد هر چه سعی کرد سه عدد پیدا کند که این نمودار برای آن سه عدد درست باشد، به در بسته خورد! چرا تلاش بهادر بی‌فایده بود؟



۳. هر یک از نمودارهای زیر را با عددهای طبیعی مناسب پر کنید.



۴. اگر P عددی اول باشد، آن‌گاه عبارت جبری $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times (P - ۱) + ۱$ بر عدد P بخش‌پذیر است. به عنوان مثال اگر $P = ۵$ باشد، آن‌گاه $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ + ۱$ یعنی ۲۵ بر ۵ بخش‌پذیر است.

این قضیه را برای اعداد اول زیر بررسی کنید.

الف) $P = ۷$

ب) $P = ۱۱$

ج) $P = ۱۳$

۵. به عددی که مجموع همه‌ی شمارنده‌های آن (به‌جز خود عدد) برابر آن عدد شود، «عدد کامل» گویند. به عنوان مثال ۶ و ۲۸ اعداد کامل هستند.

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳ \quad \text{و} \quad ۲۸ = ۱ + ۲ + ۴ + ۷ + ۱۴$$

آیا می‌توانید عدد کاملی پیدا کنید که مضرب ۱۶ باشد؟

داستان

مهران ای بابا! چرا این رونالدو گل نمی‌زنه؟!

مهران دسته‌ی بازی را به گوشه‌ای انداخت و دست‌هایش را پشت سرش گذاشت و به پنکه‌ی سقفی که می‌چرخید خیره شد. همه‌ی هندوانه‌ای که مادرش برایش آورده بود را هم خورده بود. یاد دایی منوچهر افتاد. از وقتی که امتحاناتش تمام شده بود هنوز سری به دایی نزده بود. مادر مهران آمد تا ظرف خالی هندوانه را ببرد.

مهران مامان! چرا دایی منوچهر بیشتر وقت‌ها در حال مطالعه و نوشتن است؟

مامان برای این‌که دایی‌ات یک ریاضی‌دان است و سال‌هاست که در دانشگاه‌ها و مدرسه‌ها مشغول تحقیق و تدریس است. البته هم‌سن و سال تو که بود به اندازه‌ی تو بازیگوش بود!

مهران اجازه می‌دهید امروز بروم خانه‌ی دایی؟

مامان حتماً. حالا که داری می‌روی، یک شیشه از آبغوره‌ای که گرفته‌ام، برای دایی‌ات ببر. قبل از تاریکی هم برگرد.

[در خانه دایی منوچهر]

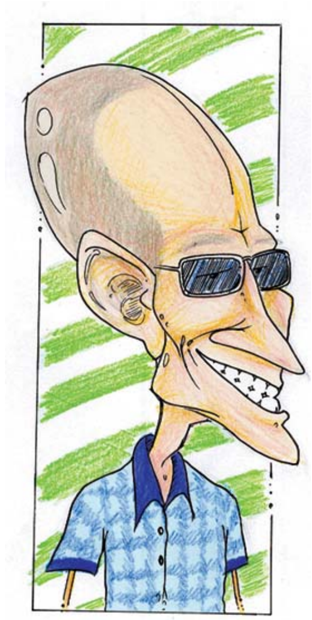
مهران سلام دایی.

دایی منوچهر [در حالی که مطلبی می‌خواند] سلام پسر خوب! خوشی؟!

مهران بد نیستم، حوصله‌ام سر رفته، «PES» را حفظ شدم از بس بازی کردم! می‌توانم چشم‌بسته هم بازی کنم! دنبال یک تفریح تازه می‌گردم، ولی همه چیز تکراریست.

دایی منوچهر [خنده‌کنان] عجب!

مهران دایی! من حرف خنده‌داری زدم؟



دایی منوچهر نه، مطلبی در مورد «الکساندر گروتندیک»[1] خواندم. نوشته یک روز در حال سخنرانی می‌گوید: «یک عدد اول در نظر بگیرید، مانند ۵۱!!»

مهران الکساندر چی‌چی؟

دایی منوچهر الکساندر گروتندیک. نمی‌شناسی‌اش؟

مهران نه! من فقط «الکساندر گراهام بل» را می‌شناسم. ولی معلوم است که این آقای دلوتندیک زیاد ریاضی بلد نیست!

دایی منوچهر دلوتندیک نه، گروتندیک. اتفاقاً او یکی از بزرگ‌ترین و مؤثرترین ریاضی‌دانان قرن بیستم است!

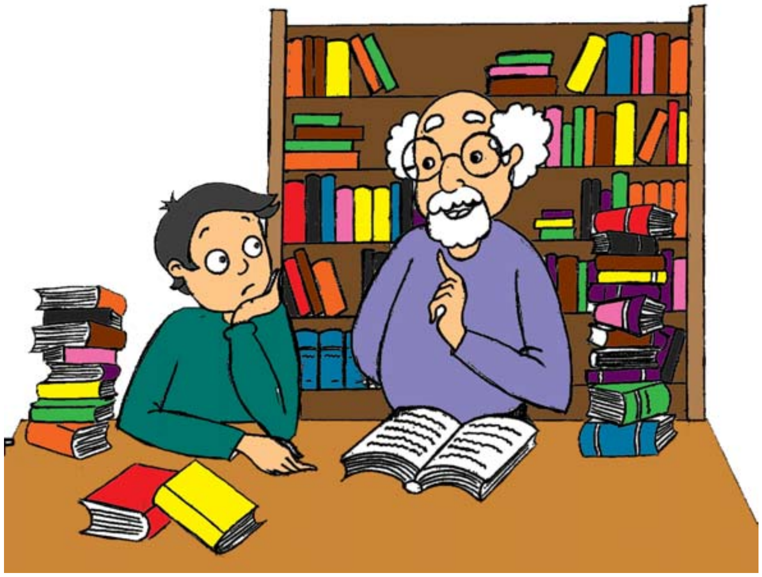
مهران ولی تا جایی که من می‌دانم عددی اول است که فقط دو تا شمارنده داشته باشه، نه بیش‌تر. اما ۵۱ مساویست با ۱۷ ضرب‌در ۳. این یعنی ۵۱ چهار تا شمارنده دارد.

دایی منوچهر آفرین! البته گروتندیک هم این را بلد بوده، ولی خب! او هم آدم است و جایزالخطا. الان بشر عددهای اول زیادی را می‌شناسد، عددهای اولی که میلیون‌ها رقم دارند! کارهای گروتندیک و خیلی از ریاضی‌دان‌ها و عالمان کامپیوتر در قرن پیش باعث شده که امروزه بشر بتواند عددهای اول به این بزرگی را پیدا کند.

مهران میلیون‌ها رقم؟ باورم نمی‌شود، این عددهای اول به چه درد می‌خورند؟

دایی منوچهر به درد می‌خورند. مثلاً شناختن عددهای اولِ خیلی بزرگ، نقش مهمی در امنیت شبکه‌ها و بانک‌داری مُدرن دارند. البته قدیم این‌طوری نبوده، مثلاً در قرن هجدهم میلادی شخصی به‌نام «فلکن»، شمارنده‌های همه‌ی عددهای از ۱ تا ۴۰۸,۰۰۰ را نوشت و عددهای اول تا ۴۰۸,۰۰۰ هم مشخص کرد. این عددها در سال ۱۷۷۶ به خرج خزانه‌داری سلطنتی اتریش چاپ شد، اما چون مشتری زیادی نداشت، خزانه‌داری تقریباً همه‌ی کتاب‌ها را جمع‌آوری کرد و کاغذ آن را به فشنگ تبدیل کرد تا در جنگ برای کشتن ترک‌های عثمانی از آن استفاده کنند.

مهران [با تعجب] دایی! مگر با فشنگِ کاغذی می‌شود کسی را کشت؟!



دایی منوچهر نه دایی جان! فشنگ‌ها که کاغذی نبودند. کاغذ را به مقوا تبدیل می‌کردند و از آن در ساختار فشنگ که شاملِ باروت، گلوله و چیزهای دیگر بود استفاده می‌کردند. خُب، حالا که تو این‌قدر خوب عددهای اول را می‌شناسی و خیلی هم دقیقی، بیا با هم «هُپِ عدد اولی» بازی کنیم.

مهران من بلد نیستم. چه جوری باید بازی کنیم؟

دایی منوچهر ساده است! من می‌گویم ۱، تو به‌جای ۲ باید بگویی هُپ، من به‌جای ۳ که اول است می‌گویم هپ. تو می‌گویی چهار، من می‌گویم هپ. خلاصه هر کسی به عدد اول برسد و هپ نگوید یا اشتباهی بگوید هپ، می‌بازد. برو به زن دایی‌ات هم بگو بیاید تا سه نفری بازی کنیم. هپ عدد اولی دو نفره خیلی بی‌مزه است.

آن‌ها شروع کردند به بازی و اولین بار مهران به خاطر این‌که به جای ۵۱، هپ گفت، باخت!

سؤال. آیا مهران هم ریاضی‌دان بزرگی مثل گروتندیک خواهد شد؟

بعد از این‌که آن سه نفر چند بار هپ عدد اولی بازی کردند، دایی منوچهر مسأله‌ی زیر را به مهران داد تا در راه خانه آن را حل کند.

تمرین.

۱. چرا هپ عدد اولی دو نفره خیلی بی‌مزه است؟

۲. عددهای ۱ تا ۲۵ (و هرکدام یک بار) را در ۲۵ خانه‌ی جدول زیر طوری قرار دهید که همه جا مجموع هر دو عدد همسایه، عدد اول شود. دو عدد را همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آن‌ها در یک ضلع مشترک باشند.

۱	۲۲	۱۵		۲۱
۱۸				
	۱۲	۷		
	۵			
۲۳	۱۴		۶	۲۵

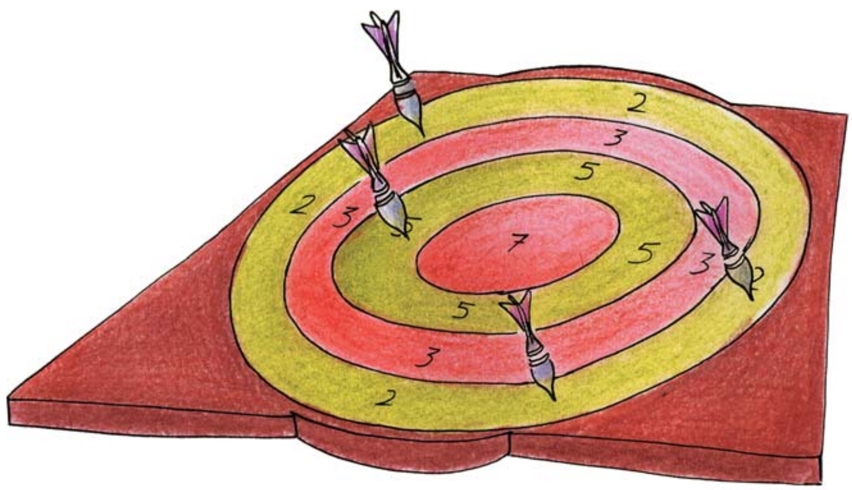
تعدادی اعداد اول جالب و بزرگ را می‌توانید در وب‌گاه webmath.ir بیابید.

مسابقه‌ی تیراندازی

در یک مسابقه‌ی تیراندازی، در تخته‌ی هدف امتیازهای ۲، ۳، ۵ و ۷ وجود دارد. هر شرکت کننده می‌تواند حداکثر ۵ تیر شلیک کند. حاصل‌ضرب محدوده‌ی عددهایی که به آن‌ها شلیک شده، امتیاز یک نفر را نشان می‌دهد. اگر حاصل‌ضرب عددها مساوی ۷۰ یا بیش‌تر از آن شود، امتیاز آن فرد صفر محسوب می‌شود! اگر تیر شلیک شده به خارج از تخته‌ی هدف برخورد کند، امتیاز یک محسوب می‌شود.

گُردآفرید[۱] و آرتمیس[۲] در این مسابقه‌ی تیراندازی شرکت کرده‌اند. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱. اگر تیرهای گُردآفرید به محدوده‌های ۵، ۲، ۲، ۲ برخورد کرده باشد، او چند امتیاز می‌گیرد؟



۲. اگر آرتمیس، ۵۰ امتیاز گرفته باشد، چند تیر شلیک کرده و هر تیر او به محدوده‌ی کدام عدد برخورد کرده است؟

۳. کدام یک از عددهای زیر می‌توانند امتیاز نهایی یک شرکت کننده باشد؟ برای هر کدام دلیل بیاورید.

الف) ۱۷ ب) ۵۴ ج) ۴۴ د) ۷۲ هـ) ۵۷ و) ۶۸ ز) ۵۱

۱) یکی از شخصیت‌های زن شاهنامه‌ی فردوسی

۲) اولین دریانورد زن ایرانی که در حدود ۲۵۰۰ سال پیش از طرف خشایارشاه هخامنشی به مقام دریاسالاری رسید.

۴. اگر آرتمیس بخواهد (و بتواند!) به محدوده‌ی هر عدد حداکثر یک‌بار شلیک کند، بیش‌ترین امتیازی که به‌دست می‌آورد، چند است؟

۵. گُردآفرید بعد از چهار بار تیراندازی، امتیازی کم‌تر از ۴۰ به‌دست آورد و فهمید اگر تیر بعدی او به هدف بخورد، حتماً می‌بازد. تیرهای گردآفرید به کدام عددها برخورد کرده است؟

۶. بیش‌ترین امتیازی که می‌توان در این مسابقه کسب کرد، چه‌قدر است؟

۷. بیش‌ترین عدد زوجی که می‌تواند امتیاز یک تیرانداز باشد، چیست؟

۸. اگر یک نفر ۵ تیرش به هدف برخورد کند و نبازد، چه امتیازهایی می‌تواند بگیرد؟

۹. در این مسابقه، آرتمیس ادعا می‌کند که ۴۶ امتیاز گرفته است ولی گُردآفرید می‌گوید که آرتمیس، ۴۵ امتیاز کسب کرده است. آرتمیس جِرزَن است یا گُردآفرید؟ چرا؟

۱۰. چه عددهایی نمی‌توانند امتیاز یک تیرانداز باشند؟ همه‌ی آن‌ها را بنویسید.

۱۱. اگر شلیک اول یک تیرانداز به عدد ۲ برخورد کرده باشد، آیا ممکن است پس از پنج شلیک، امتیاز این تیرانداز عددی فرد باشد؟ چرا؟

۱۲. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) حاصل ضرب دو عدد زوج، عددی زوج است.

ب) حاصل ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

ج) حاصل ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی فرد است.

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد

۱. حاصل ب.م.م‌های زیر را به روش تجزیه به‌دست آورید.

الف) (۲ × ۱۵, ۲ × ۶)

ب) (۲ × ۵, ۳ × ۷)

ج) (۴ × ۶, ۱۲ × ۸)

د) (۳ × ۱۵, ۵ × ۹)

ه) (۹۱ × ۳۱, ۳۹ × ۹۳)

و) (۱۸ × ۱۲, ۲۴ × ۵۱)

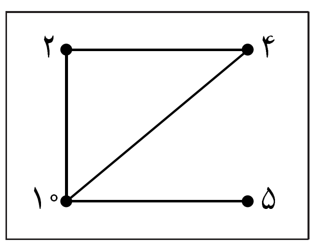
ز) (۲۰۲, ۷۸)

ح) (۱۰۵, ۷۷)

۲. الف) به نظر شما منظور از (۲, ۴, ۶) چیست؟

ب) حاصل (۴۵, ۶۳, ۹۰) را به‌دست آورید.

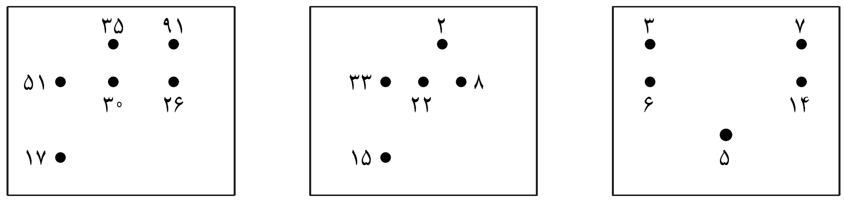
۳. به شکل زیر توجه کنید.



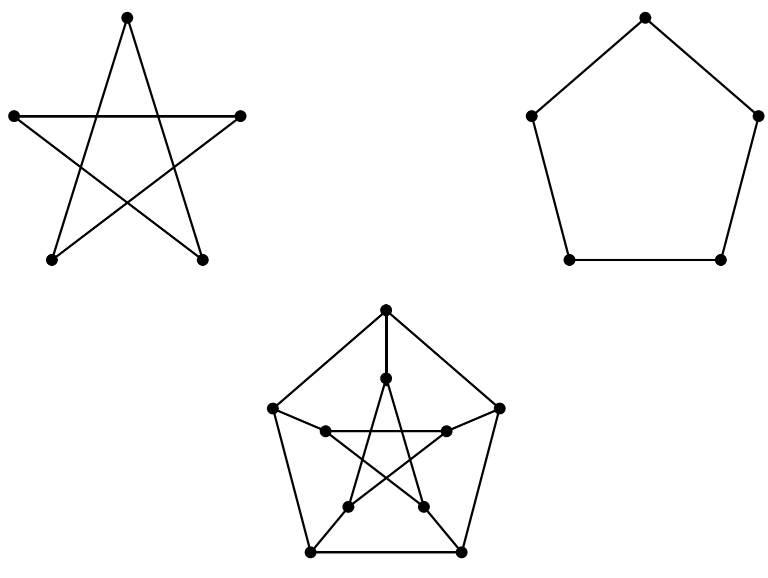
هر دو عدد که ب.م.م آن‌ها بزرگ‌تر از یک بوده را به هم وصل کرده‌ایم.

هر دو عدد که ب.م.م آن‌ها برابر یک بوده را به هم وصل نکرده‌ایم.

الف) قانون‌های گفته شده را برای هر دسته از عددهای زیر اجرا کنید.



ب) در هر یک از شکل‌های زیر خطوطی رسم شده است. با قانون‌هایی که گفتیم، برای هرنقطه عددی مناسب بیابید.



۴. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) ب.م.م دو عدد زوج، عددی زوج است.

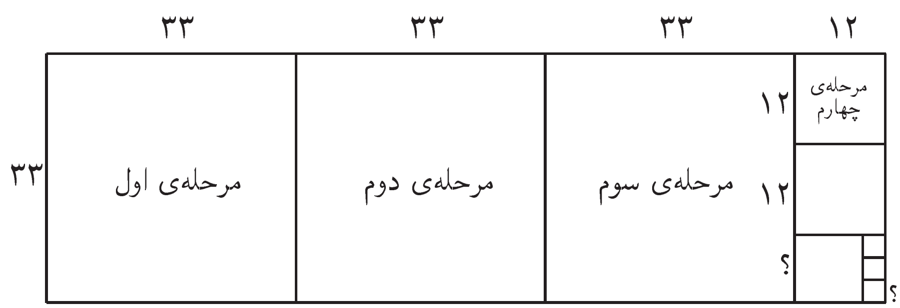
ب) ب.م.م دو عدد فرد، عددی فرد است.

ج) ب.م.م یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

۵. شکل زیر مستطیلی به ابعاد ۳۳ و ۱۱۱ را نشان می‌دهد. در هر مرحله، بزرگ‌ترین مربع ممکن را از آن جدا می‌کنیم.

در مرحله‌ی اول مربعی به طول ضلع ۳۳ از آن جدا می‌کنیم و یک مستطیل به ابعاد ۷۸ و ۳۳ باقی می‌ماند. در مرحله‌ی دوم و سوم هم مربعی به طول ۳۳ از باقی‌مانده‌ی شکل برمی‌داریم. در مرحله‌ی چهارم طول ضلع بزرگ‌ترین مربع ممکن ۱۲ است.

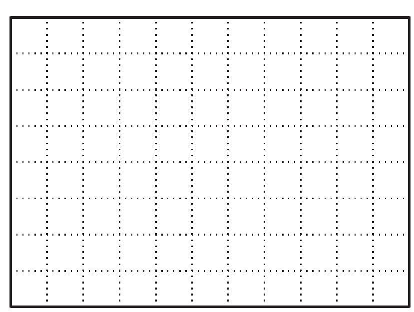
این کار را ادامه می‌دهیم تا تمام مستطیل با مربع‌های مختلف پوشیده شود.



الف) طول ضلع‌هایی که با علامت سؤال مشخص شده‌اند، چه‌قدر است؟

ب) طول ضلع مربعِ آخرین مرحله، چه نسبتی با ب.م.م دو عدد ۱۱۱ و ۳۳ دارد؟

۶. در شکل زیر، مستطیلی به ابعاد ۶۶ و ۴۸ را با نقطه‌چین، به مربع‌های برابر تقسیم کرده‌ایم.



با روشی که در سؤال قبل گفته شد، هر بار بزرگ‌ترین مربع ممکن را از مستطیل شبکه‌بندی شده‌ی بالا جدا کنید. طول ضلع مربعِ آخرین مرحله چه‌قدر است؟

۷. جدول زیر را با دقت ببینید.

سطر اول ←

	۱۲	۱۰
۱۵	۳	۵
۴	۴	۲

↑ ستون اول

در سطر اول عددهای ۱۰ و ۱۲، و در ستون اول عددهای ۱۵ و ۴ را قرار داده‌ایم. سپس در محل تقاطعِ هر عدد از سطر اول با عددی از ستون اول، ب.م.م آن دو عدد را نوشته‌ایم.

الف) با توجه به قانون بالا، جدول زیر را کامل کنید.

	۵۱	۱۰۵	۳۹
۸۵			
۹۱			

ب) با توجه به قانونی که گفتیم و ب.م.م‌های داده شده در جدول زیر، هر یک از جاهای خالی را با کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن پر کنید.

	۱	۵	۷۷
	۱۸	۹	۱
	۴	۱	۹۱

ج) آیا می‌توانید جدول زیر را با کوچک‌ترین عددهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که قانون بالا برقرار باشد؟

		۶۶	
	۵۲		۸۴
۴۸			
	۹۸		۷۲

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

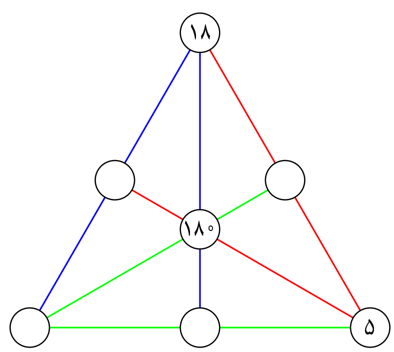
۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $[۲۱, ۵۵]$	ب) $[۵۴, ۳۶]$	ج) $[۲۴, ۳۹]$
د) $[۳۹, ۶۵]$	هـ) $[۹۱, ۱۴]$	و) $[۵۱, ۱۷]$
ز) $[۱۶, ۲۰]$	ح) $[۳۳, ۲۲]$	ط) $[۴۰, ۶۰]$
ی) $[۲۷, ۱۲, ۴۵]$	ک) $[۱۵, ۲۵, ۷۵]$	ل) $[۹, ۱۲, ۱۵]$

۲. در هر قسمت، x را طوری بیابید که کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن باشد.

الف) $[۶, x] = ۲۴$	ب) $[۸, x] = ۱۶$	ج) $[۶, x] = ۱۲$
د) $[۱۵, x] = ۷۵$	هـ) $[۱۸, x] = ۵۴$	و) $[۹, x] = ۵۴$
ز) $[۳۶, x] = ۷۲$	ح) $[۵۱, x] = ۱۵۳$	ط) $[۳۵, x] = ۱۰۵$

۳. در شکل زیر، روی هر خطِ راست سه دایره وجود دارد. ک.م.م عددهای داخل دایره‌های ابتدا و انتهای هر خط را در دایره‌ی میانی می‌نویسیم. هر یک از دایره‌های خالی را با کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن پر کنید.



۴. مادربزرگه دو خروس به نام‌های «حنایی» و «نوک‌سیاه» دارد. آن‌ها از ساعت ۴ تا ۶ صبح قوقولی‌قوقو می‌کنند. حنایی هر ۸ دقیقه یک‌بار قوقولی‌قوقو می‌کند و نوک‌سیاه هر ۱۴ دقیقه یک‌بار. زمانی که

آن‌ها هم‌زمان با هم می‌خوانند، مَخمل (گربه‌ی مادربزرگه) از خواب می‌پرد، کمی غُرغُر می‌کند و دوباره می‌خوابد. اگر خروس‌ها از ساعت ۴ صبح، هم‌زمان با هم شروع به خواندن کنند، تا ساعت ۶ صبح، چند بار مخمل از خوابِ ناز می‌پرد؟ در چه ساعت‌هایی؟

۵. چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که هم بر ۶ بخش‌پذیر است و هم بر ۹؟

۶. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که هم بر ۱۸ بخش‌پذیر است هم بر ۸۱؟

۷. راهزنان «گرگ‌دره» تعدادی گوسفند دزدیدند. دزدها ۱۸ نفر بودند. سردسته‌ی آن‌ها «حسام‌بیگ»، گوسفندها را به‌طور مساوی بین همه‌ی اعضای دسته تقسیم کرد و ۵ گوسفند باقی ماند که آن‌ها را هم برای خودش برداشت. سه نفر از دزدها به این روش تقسیم او اعتراض کردند. حسام‌بیگ عصبانی شد و گفت: «چه معنی می‌دِه دزد اعتراض کنه! اصلاً به شما سه‌تا گوسفند، گوسفند نمی‌دم.» حسام‌بیگ این بار گوسفندها را بین ۱۵ نفر به‌طور مساوی تقسیم کرد و باز هم ۵ گوسفند باقی ماند که آن‌ها را هم برای خودش برداشت. اگر تعداد گوسفندها کم‌تر از ۱۰۰ رأس باشد، راهزنان چند گوسفند دزدیده‌اند؟[۱]

۸. کوچک‌ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر هر دو عدد ۲۴ و ۱۸ برابر ۷ باشد.

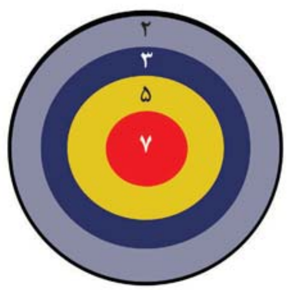
۱) **یادآوری.** لقمان را گفتند: «ادب از که آموختی؟» گفت: «از بی‌ادبان، هر چه از ایشان در نظرم ناپسند آمد، از آن پرهیز کردم.»

نگویند از سر بازیچه حرفی — کز آن پندی نگیرد صاحبِ هوش
وگر صد باب حکمت پیش نادان — بخوانند، آیدش بازیچه در گوش

گلستان سعدی

کارگاه بازی ـ نقطه بِذار، شلیک کن!

«نقطه بِذار، شلیک کن»، نام یک بازی، بین دو تیمِ دو نفره است. این بازی به دو برگه‌ی «جدولِ نقطه بذار، شلیک کن» (دو صفحه بعد) و دو «دایره‌ی امتیاز» نیاز دارد. هر تیم برگه‌ی جدول نقطه بذار، شلیک کن را دقیقاً از وسطِ طول آن، تا می‌زند. هر بازیکن نقطه‌ای در طرف سفید برگه‌ی جدول نقطه بذار،شلیک کن می‌گذارد؛ کاغذ را تا می‌کند و پشت اثر نقطه، نقطه‌ای پررنگ می‌کشد تا اثر آن نقطه روی عددی از جدول بیُفتد. عددی که بازیکن، با نقطه به آن شلیک کرده، باید در دایره‌ی امتیاز، در ناحیه‌ی همان عدد با ضربدر علامت زده شود. هر بازیکن ۵ شلیک نقطه‌ای می‌کند. امتیاز هر بازیکن حاصل‌ضرب علامت‌هایی است که او در دایره‌ی امتیاز ثبت می‌کند. **امتیاز نهایی هر تیم، ک.م.م امتیاز بازیکن‌های آن تیم است.** هر تیمی که امتیاز نهایی‌اش بیش‌تر باشد، برنده است. در زیر، تصویر یک دایره امتیاز آمده است.



به نکته‌های زیر توجه کنید.

۱. ابتدا نفر اول ۵ شلیک خود را انجام می‌دهد و بعد، نفر دوم وارد عمل می‌شود.

۲. در هر تیم، باید رنگ خودکار اعضای تیم متفاوت باشد و امتیازهای هر نفر با خودکار خودش در دایره‌ی امتیاز ثبت شود.

۳. بعد از این‌که کار یک تیم تمام شد و امتیازهای دو نفر (با دو رنگ متفاوت) در دایره‌ی امتیاز ثبت شد،

دایره امتیاز به تیم حریف داده می‌شود تا آن‌ها ک.م.م را محاسبه کنند. اگر تیم حریف ک.م.م را اشتباه حساب کند، هر بازیکن تیم مقابل یک شلیک جایزه می‌گیرد و بعد از شلیک و ثبت امتیاز، دوباره دایره‌ی امتیاز به تیم حریف داده می‌شود.

۴. اگر شلیک نقطه‌ای به خانه‌های خالی یا اطراف جدول برخورد کند، امتیاز یک محسوب می‌شود. توجه کنید که در دایره‌ی امتیاز، عدد ۱ وجود ندارد و واضح است که نیازی هم به ثبت شدن آن نیست.

۵. اگر اثر نقطه دقیقاً روی خط جدول افتاد، شلیک تکرار می‌شود.

۶. خانه‌ای که به آن شلیک می‌شود و همه‌ی خانه‌های همسایه‌ی آن، منفجر می‌شوند. خانه‌هایی که منفجر می‌شوند هیچ تفاوتی با خانه‌های خالی جدول نقطه بذار، شلیک کن ندارند. در شکل زیر، خانه‌های همسایه‌ی خانه خالی رنگ مشخص شده‌اند.

همسایه‌ی شمال شرقی	همسایه‌ی شمالی	همسایه‌ی شمال غربی
هسایه‌ی شرقی		همسایه‌ی غربی
همسایه‌ی جنوب شرقی	همسایه‌ی جنوبی	همسایه‌ی جنوب غربی

یک جدول نقطه بذار، شلیک کن در صفحه‌ی بعد آمده است.

		۵	۲	۲	۳	۷	۲	۳	۵	۳	۵	۳	۲	۷	۲	۲	۳	۷	
	۵	۳	۲	۳	۵	۳	۲	۵	۳	۳		۵	۳	۲	۲	۷	۳	۵	
	۳	۲	۲		۲	۲	۷	۳	۲	۲	۵	۲		۵	۳	۲	۲	۳	
	۳		۳	۲	۳	۳	۵	۲	۳	۵	۲	۳	۷		۵	۳	۵	۷	
	۲	۳	۲	۳		۵	۳	۳	۵	۷	۳	۷	۵	۳	۳	۲	۷		
	۷	۲	۳	۲	۵	۳	۲		۲	۲	۷	۲		۵	۷	۵	۲	۲	
	۲	۳	۵	۳	۳	۷	۵	۳	۵	۲	۳		۵	۲		۷	۳	۳	
	۳	۵	۷		۲	۳	۲	۵	۲	۳	۵	۷	۳	۲	۲	۳	۲	۵	
		۲	۳	۲	۷		۳	۲	۳	۲	۲	۳	۵		۵	۲	۳	۷	
	۲	۵	۳	۲	۳	۲	۳	۷	۳	۲	۲	۵	۳	۵	۳	۲	۵	۳	
	۲	۷	۳		۲	۳	۲	۳		۵	۳	۲	۲	۳		۵	۳	۲	
	۵	۲	۲	۳	۵	۳		۲	۳	۳	۵	۳	۲	۲	۵	۳	۲	۳	

روش تعیین کوچکترین مضرب مشترک

۱. در بازی نقطه بذار، شلیک کن، نفر اول ۹۸ امتیاز گرفته است؛

الف) نقاطی را که نفر اول به آن‌ها شلیک کرده است در دایره‌ی امتیاز مشخص کنید.

ب) هم‌تیمی او بهتر است چه خانه‌هایی را مورد هدف قرار دهد؟ چرا؟

۲. در بازی نقطه بذار، شلیک کن، نفر اول ۶۳ امتیاز گرفته است؛

الف) نقاطی را که نفر اول به آن‌ها شلیک کرده است در دایره‌ی امتیاز مشخص کنید.

ب) هم‌تیمی او بهتر است چه خانه‌هایی را مورد هدف قرار دهد؟ چرا؟

ج) اگر شلیک اول نفر دوم به عدد ۷ برخورد کند، او تیرهای بعدی‌اش را باید به سمت چه عددی نشانه رود؟ چرا؟

۳. در مسابقه‌های جهانی نقطه بذار، شلیک کن، گُردآفرید ۲۵۲ امتیاز و آرتمیس، هم تیمی او، ۷۵ امتیاز گرفته است.

الف) در دایره‌ی امتیاز، نقاطی را که گردآفرید به آن‌ها شلیک کرده با خودکار آبی و نقاط آرتیمیس را با خودکار قرمز مشخص کنید.

ب) ب.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمزی که گذاشته‌اید، پیدا کنید.

ج) ک.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمز به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول بنویسد. کدام عدد یا عددهایی که علامت زده شده‌اند را ننوشته‌اید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. در مورد نتیجه‌ای که از سؤال قبل گرفتید، و روش تعیین ک.م.م که در صفحه‌ی ۲۸ و ۲۹ کتاب آمده است، با هم تیمی خود گفت‌وگو کنید.

۵. هر جفت از عددهای زیر، امتیاز دو نفر یک تیم را در بازی نقطه بذار، شلیک کن را نشان می‌دهد.

۶۰ و ۹۰، ۵۷ و ۹۸، ۱۴۰ و ۲۷۰، ۸۰ و ۵۴۰، ۱۰۸ و ۱۷۵، ۸۴ و ۱۰۵.

الف) برای هر جفت از عددهای بالا، یک دایره امتیاز رسم کنید و شلیک‌های دو نفر را با رنگ متفاوت روی آن مشخص نمایید.

ب) ب.م.م، ک.م.م هر دو عدد را (با استفاده از دایره‌ی امتیاز) به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول بنویسید.

۶. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول بنویسید.

الف) $\frac{۲۸ \times ۶۹}{(۲۸, ۶۹)}$

ب) $\frac{۱۰۵ \times ۳۵}{(۱۰۵, ۳۵)}$

ج) $\frac{۸۴ \times ۱۰۲}{[۸۴, ۱۰۲]}$

د) $\frac{۱۵۵ \times ۹۳}{(۱۵۵, ۹۳)}$

هـ) $\frac{۱۰۶ \times ۸۵}{[۱۰۶, ۸۵]}$

و) $\frac{۱۸۲ \times ۵۴}{[۱۸۲, ۵۴]}$

ز) $[۸۵, ۵۱] \times (۸۵, ۵۱)$

ح) $(۳۹, ۹۱) \times [۳۹, ۹۱]$

فصل ۵

بردار و مختصات

کارگاه بازی ـ نبرد دریایی

بازی «نبرد دریایی»، یک جنگ دریایی است! باید تلاش کنید در این جنگ شکست نخورید. این بازی، یک بازیِ دو نفره است. قبل از شروع بازی باید ناوگان خود را مستقر کنید. این کار می‌تواند با فکر و ظرافت خاصی انجام شود. چنانکه خوش اقبال باشید، ناوگان شما از شلیک‌های حریف جان سالم به در خواهد برد.

هر نفر قبل از شروع بازی باید در صفحه‌ی «ناوگان نیروهای خودی»، ناوها کشتی‌ها و زیردریایی خود را به صورت عمودی و یا افقی بچیند. هرکس در ناوگان خود، یک ناو هواپیمابر به طول ۵ خانه، یک کشتی جنگی به طول ۴ خانه، یک رزم‌ناو به طول ۳ خانه، یک زیردریایی به طول ۳ خانه و یک ناوشکن به طول ۲ خانه دارد. بنابراین ناو هواپیمابر را با پنج‌تا «ه»، کشتی جنگی را با چهارتا «ج»، رزم‌ناو را با سه‌تا «ر»، زیردریایی را با سه‌تا «ز» و ناوشکن را با دوتا «ن» نشان می‌دهیم.

در زیر نمونه‌ای از این چیدمان را می‌توانید ببینید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ					ه	ه	ه	ه	ه	
ت				ز						
ث				ز					ج	
ج				ز					ج	
چ									ج	
ح									ج	
خ									ن	ن
د	ر	ر	ر							

ناوگان نیروهای خودی

واضح است که حریف شما از نحوه چیدمان ناوگان شما نباید مطلع شود. هر بازیکن در دست خود دو صفحه دارد. یک صفحه مربوط به «ناوگان نیروهای خودی» و یک صفحه مربوط به «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» است.

بعد از اینکه شما و حریفتان ناوگان‌هایتان را مستقر کردید، می‌توانید بازی را شروع کنید.

هر کس در نوبت خود یک شلیک به سمت ناوگان حریف باید انجام دهد. برای این منظور باید مختصات یک خانه را انتخاب و به حریف اعلام کنید. مثلاً به او بگویید «من به خانه‌ی الف ـ ۴ شلیک می‌کنم». سپس حریف شما باید اعلام کند که آیا شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده است یا خیر. اگر شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده باشد، شما در خانه‌ی «الف ـ ۴» در صفحه‌ی «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» علامت «✓» را بزنید. در غیر این صورت علامت «×» را بزنید. برنده کسی است که زودتر بتواند ناوگان حریف را از بین ببرد. یعنی بتواند تمام ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی‌های حریف را غرق کند.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف				✓						
ب				✓			×			
پ				✓						
ت										
ث						×				
ج										
چ								×		
ح										
خ			✓	×						
د										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ					ه	ه	ه	ه	ه	
ت				ز						
ث				ز					ج	
ج				ز					ج	
چ									ج	
ح									ج	
خ									ن	ن
د	ر	ر	ر							

ناوگان نیروهای خودی

و اما قوانین مسابقه:

۱. برای غرق کردن یک کشتی باید به تمام خانه‌های اشغال شده توسط آن کشتی، شلیک شود. به عنوان مثال اگر می‌خواهید ناو هواپیمابر را غرق کنید، باید به تمام پنج خانه‌ی آن شلیک کنید.

۲. وقتی شما یک وسیله را غرق کردید، حریف باید این موضوع را به شما اعلام کند. مثلاً بگوید «شما توانستید زیردریایی را غرق کنید».

۳. زمانی که یک شلیک به یک هدف برخورد کند، می‌توانید یک شلیک دیگر به عنوان جایزه انجام دهید.

برگه‌ی مربوط به بازی نبرد دریایی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

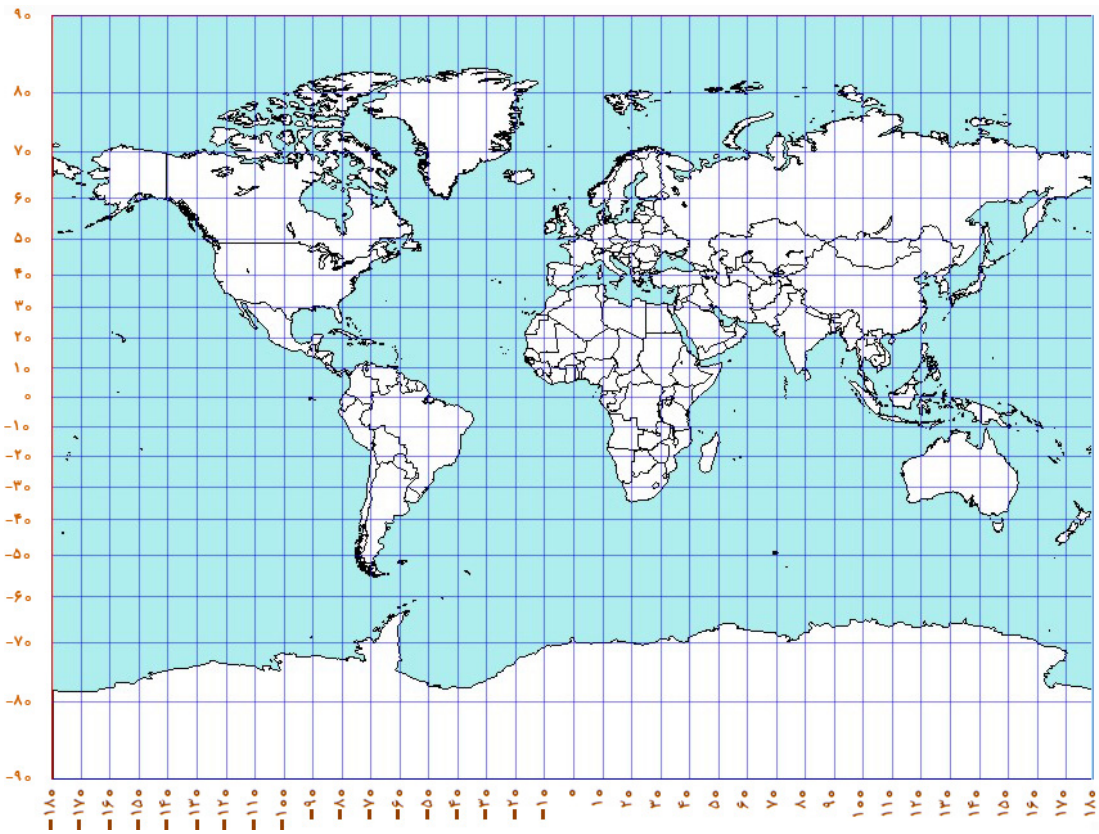
ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
پ										
ت										
ث										
ج										
چ										
ح										
خ										
د										

ناوگان نیروهای خودی

مختصات جغرافیایی

تا به حال به اطلس جغرافیایی جهان دقت کرده‌اید؟



با استفاده از اعدادی که در کنار و پایین نقشه می‌بینید، می‌توانید به هر نقطه از جهان به صورت دقیق یک مختصات نسبت دهید. اعدادی که در پایین نقشه به صورت افقی نوشته شده‌اند را طول جغرافیایی و اعدادی که در کنار نقشه به صورت عمودی نوشته شده‌اند را عرض جغرافیایی می‌نامند. مختصات هر نقطه را به صورت $\begin{bmatrix}\text{طول جغرافیایی}\\ \text{عرض جغرافیایی}\end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۵۱\\ ۳۵\end{bmatrix}$ در اطراف شهر تهران، نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۰\\ ۵۱\end{bmatrix}$ در شهر لندن و نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-۵۱\\ -۳۵\end{bmatrix}$ در سواحل بوئنوس آیرس قرار دارد.

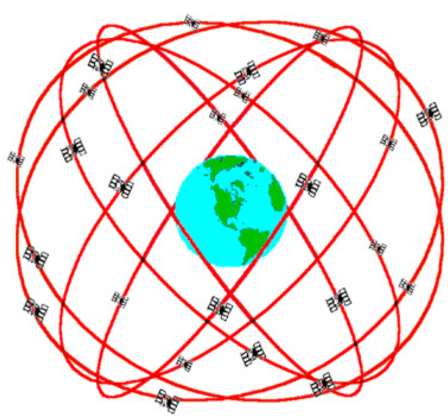
اگر در شبکه جهانی اینترنت به وب‌گاه « www.wikimapia.org » مراجعه کنید، می‌توانید با دادن عرض و

طول جغرافیایی یک نقطه از کره زمین، تصویری از منطقه‌ای که آن نقطه در آنجا قرار دارد را ببینید. به عنوان مثال مختصات $\begin{bmatrix} ۵۱٫۴ \\ ۳۵٫۷ \end{bmatrix}$ در شهر تهران قرار دارد.

اگر در صفحه‌ی مرورگر رایانه، نشانی http: //www.wikimapia.org/#lat= 35·7&lon= 51·4 را وارد کنید، تصویری از شهر تهران نمایش داده خواهد شد.

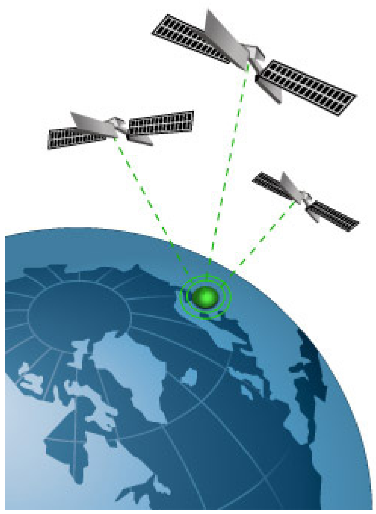
برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ای که در آن قرار دارید، می‌توانید از سامانه موقعیت‌یاب جهانی استفاده کنید.

سامانه موقعیت‌یاب جهانی یا GPS[1]، مجموعه‌ای از ۲۴ ماهواره است که دور کره زمین می‌گردند.



۱) Global Positioning System

هر کس در هر نقطه از کره زمین به‌وسیله‌ی یک دستگاه GPS که در دست خود دارد، می‌تواند دست کم با سه‌تا از این ماهواره‌ها در ارتباط باشد و به‌راحتی مختصات نقطه‌ای که در آن ایستاده است را پیدا کند.



به عبارت دیگر هر کس با کمک سامانه موقعیت‌یاب جهانی، طول و عرض جغرافیایی خود را در هر نقطه‌ای از کره زمین که باشد، می‌تواند پیدا کند.

در زمان استفاده از سامانه، اگر دستگاه GPS علاوه بر ارتباط با سه ماهواره، بتواند با یک ماهواره‌ی دیگر نیز ارتباط برقرار کند، علاوه بر طول و عرض جغرافیایی، ارتفاعی که آن شخص از سطح زمین دارد را نیز می‌تواند مشخص کند. همچنین این سامانه علاوه بر پیدا کردن طول و عرض جغرافیایی و ارتفاع هر کس، می‌تواند سرعت و جهت حرکت هر کس را بر روی کره زمین مشخص کند.

۱. به کمک یک نقشه‌ی جغرافیایی جهان و یا به کمک وب‌گاه « wikimapia.org »، تحقیق کنید هر یک از مختصات‌های زیر، مشخص کننده‌ی کدام نقطه در جهان است؟

الف) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ۳۹/۸۲ \\ ۲۱/۴۳ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -۵۰ \\ -۲۵ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ۵۴/۳۷ \\ ۳۱/۹۲ \end{bmatrix}$ هـ) $\begin{bmatrix} ۴۴/۰۸ \\ ۳۲/۶۱ \end{bmatrix}$

۲. دو نقطه روی کره زمین که توسط قطر کره زمین به هم وصل می‌شوند، نقطه‌های مقابل هم گویند. (قطر کره زمین از مرکز کره زمین می‌گذرد.) آیا درست است که دو نقطه به مختصات جغرافیایی $\begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۵۰ \\ -۲۰ \end{bmatrix}$ دقیقا در دو سوی کره زمین واقع هستند؟

۳. طبق فقه اسلامی، جهت قبله‌ی مسلمانان جهت کوتاه‌ترین فاصله‌ی هر نقطه نسبت به کعبه است.

الف) کدام نقطه از روی کره زمین، بیش از یک جهت قبله دارد؟

ب) درباره مختصات جغرافیایی این نقطه چه می‌توان گفت؟

۴. مختصات قطب شمال را بیابید.

صفحه‌ی مختصات

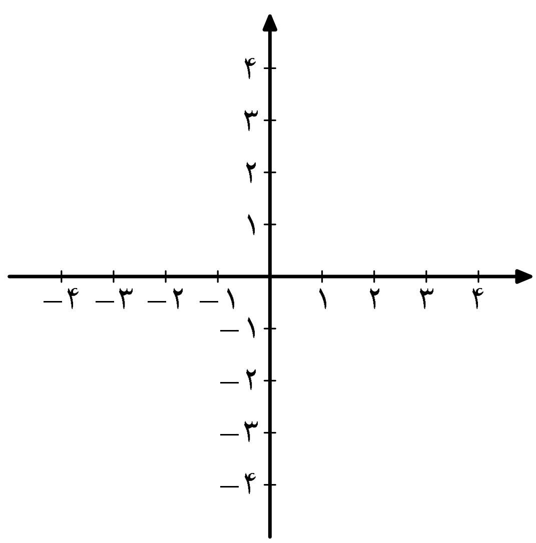
اگر بخواهیم مکان یک نقطه را در یک صفحه مشخص کنیم، به کمک مختصات می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

برای مثال در اطلس جغرافیایی جهان، مختصات تهران به صورت $\begin{bmatrix} ۵۱/۴ \\ ۳۵/۷ \end{bmatrix}$ است. یعنی تهران دارای طول جغرافیایی ۵۱/۴ و عرض جغرافیایی ۳۵/۷ است.

در بازی نبرد دریایی برای شلیک به یک نقطه، از مختصات آن نقطه کمک گرفتیم. «الف ـ ۴» مختصات یک نقطه در صفحه‌ی ناوگان حریف است. یعنی خانه‌ای که در سطر «الف» و در ستون ۴ است.

«اطلس جغرافیایی جهان» و صفحه‌ی «ناوگان حریف» در بازی نبرد دریایی، دو نمونه از صفحه‌های مختصاتی هستند.

یکی از معروف‌ترین صفحه‌های مختصاتی، صفحه‌ی مختصاتی است که دارای دو محور اعداد عمود بر هم است که یک محور به‌صورت افقی و محور دیگر به‌صورت عمودی است.

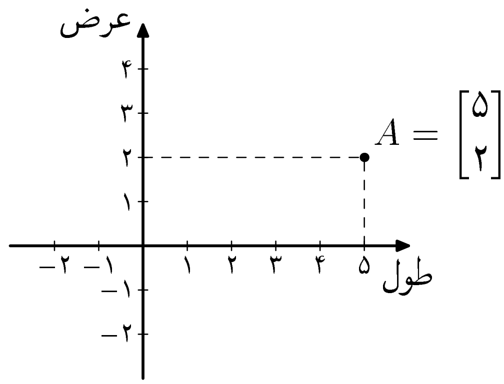


سمت راست محور افقی اعداد مثبت و سمت چپ محور افقی اعداد منفی قرار می‌گیرند. همچنین بالای محور عمودی اعداد مثبت و پایین محور عمودی اعداد منفی قرار می‌گیرند.

محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌نامند. یعنی هر نقطه در صفحه مختصات، یک طول و یک عرض دارد. مختصات یک نقطه را به شکل زیر نشان می‌دهند:

$$\begin{bmatrix} \text{طول نقطه} \\ \text{عرض نقطه} \end{bmatrix}$$

در صفحه‌ی مختصات زیر، نقطه A به طول ۵ و عرض ۲ می‌باشد. یعنی فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور عمودی ۵ واحد و از محور افقی ۲ واحد می‌باشد.



۱. هر یک از نقطه‌های زیر را در صفحه‌ی مختصات نشان دهید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ب) $B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$

ج) $C = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$ د) $D = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ -۲ \end{bmatrix}$

هـ) $E = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و) $F = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

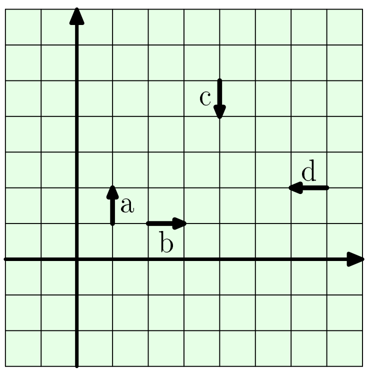
روپاد

چند نفر از دانش‌آموزان مدرسه سمپاد، روباتی به نام روپاد[1] ساخته‌اند که این روبات را با چهار دستور می‌توانند به هر مکانی در صفحه‌ی مختصات که بخواهند منتقل کنند.

این چهار دستور عبارت‌اند از:

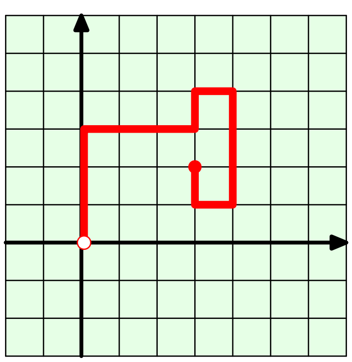
a: یک حرکت روبه بالا   b: یک حرکت به سمت راست   c: یک حرکت روبه پایین   d: یک حرکت به سمت چپ

در صفحه‌ی مختصات زیر، عملکرد هر دستور را می‌توانید ببینید.



به عنوان مثال اگر روپاد را بر روی مبدا مختصات $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ قرار دهیم، مجموعه دستورات زیر، روپاد را با سیزده حرکت به نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ می‌رساند. دایره‌ی توخالی نقطه‌ی شروع و دایره‌ی توپر نقطه‌ی پایانی مسیر را نشان می‌دهد.

a a a b b b a b c c c d a



۱) مخفّفِ روبات و سمپاد

تمرین

۱. مسیر aaabbcbaaddccc را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر جواب دهید.

الف) اگر روپاد از مبدا مختصات شروع به حرکت کند، آیا به مبدا باز خواهد گشت؟

ب) این روپاد چندبار مسیر حرکتش را قطع می‌کند؟

ج) این روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

۲. فرض کنید وقتی دو روپاد در یک نقطه به هم برسند، بتوانند از کنار یکدیگر عبور کنند و به مسیر خود ادامه دهند.

«روپاد شماره‌ی یک» با مسیر bbbcdccddaaddccccdd از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۸ \end{bmatrix}$،
و «روپاد شماره‌ی دو» با مسیر cdcccbbccddddaddccbb از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$
شروع به حرکت می‌کنند.

این دو روپاد در چه نقطه‌هایی یکدیگر را ملاقات می‌کنند؟

۳. فرض کنید دو روپاد وقتی به هم برخورد بکنند از حرکت متوقف می‌شوند.

«روپاد شماره‌ی یک» با مسیر baaaabbbcccbbbaa از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$،

و «روپاد شماره‌ی دو» با مسیر adddcccccbbaabccbba از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۶ \end{bmatrix}$

شروع به حرکت می‌کنند.

الف) این دو روپاد در چه نقطه‌ای از حرکت متوقف می‌شوند؟

ب) اگر روپاد شماره‌ی دو از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \end{bmatrix}$ شروع به حرکت کند، در چه نقطه‌ای متوقف خواهد شد؟

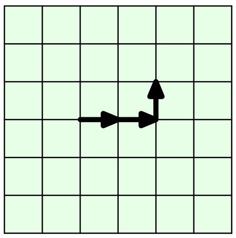
ج) روپاد شماره‌ی دو از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در سیزدهمین حرکت متوقف شود؟

د) روپاد شماره‌ی دو از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ متوقف شود؟

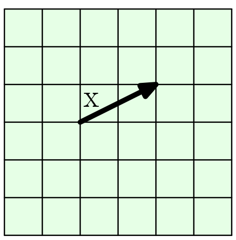
ه) روپاد شماره‌ی دو از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۸ \\ ۵ \end{bmatrix}$ متوقف شود؟

بردار انتقال

دانش‌آموزان سازنده‌ی روپاد برنامه‌ی روپاد را به‌گونه‌ای تغییر دادند که بتوان دستورات ترکیبی برای آن تعریف کرد. به عنوان نمونه دستور ترکیبی $x = b\,b\,a$، یعنی روپاد دوبار به سمت راست و یک‌بار به سمت بالا برود. می‌توان عملکرد دستور ترکیبی x را به‌صورت زیر نشان داد.



اما برای ساده‌تر نشان دادن عملکرد دستور ترکیبی x، نقطه‌ی شروع دستور را به نقطه‌ی انتهای دستور وصل می‌کنیم.

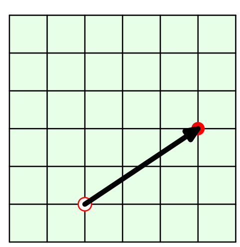


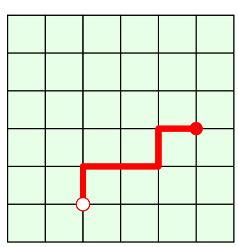
این نحوه‌ی نمایش به این معنی نیست که روپاد واقعاً کج حرکت کرده است. بلکه به ما می‌گوید اگر روپاد این حرکت ترکیبی را انجام دهد، از نقطه‌ی شروع حرکتش به کدام نقطه می‌رسد.

این نحوه‌ی نمایش نه تنها برای دستورات ترکیبی، بلکه برای تمام مسیر حرکت روپاد نیز درست است.

به عملکرد یک دستور ترکیبی و یا یک مسیر، **بردار انتقال** می‌گوییم. همیشه برای نشان دادن بردار انتقال، ساده‌ترین راه را انتخاب می‌کنیم. یعنی نقطه‌ی شروع را به نقطه‌ی انتها وصل می‌کنیم.

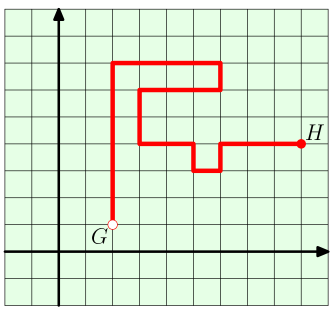
به عنوان مثال بردار انتقال مسیر $a\,b\,b\,a\,b$ به شکل زیر است.


بردار انتقال

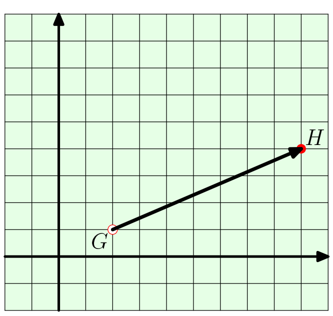

مسیر حرکت

یک مسیر را به کمک بردار انتقال می‌توان کوتاه کرد به‌طوری که با کمترین حرکت ممکن می‌شود از نقطه‌ی شروع به نقطه‌ی انتهای مسیر رسید.

به عنوان مثال مسیر a a a a a a b b b b c d d d c c b b c b a b b b را با نقطه‌ی شروع $G = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.



با این مسیر، از نقطه‌ی $G = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ با بیست و دو حرکت به نقطه‌ی $H = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۴ \end{bmatrix}$ رسیده‌ایم. بردار انتقال این مسیر به صورت زیر است.



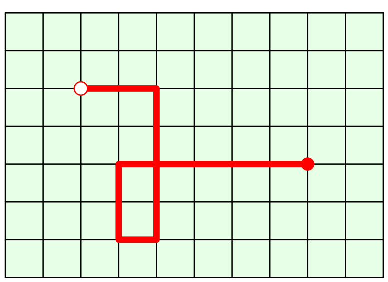
بردار انتقال به ما می‌گوید که برای رفتن از نقطه‌ی $G = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ به نقطه‌ی $H = \begin{bmatrix} ۹ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ، به‌اندازه‌ی هفت حرکت باید به سمت راست و به‌اندازه‌ی سه حرکت باید به سمت بالا حرکت کنیم. بنابراین با ده حرکت هم می‌توان از نقطه‌ی G به نقطه‌ی H رسید. پس این مسیر را می‌توان به صورت b b b b b b b a a a کوتاه کرد.

نمایش بردار انتقال

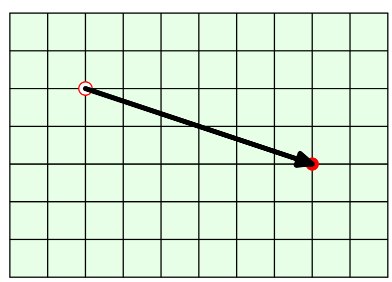
اگر حرکت رو به بالا را مثبت و حرکت رو به پایین را منفی و همچنین حرکت به سمت راست را مثبت و حرکت به سمت چپ را منفی در نظر بگیریم، به راحتی می‌توان بردار انتقال را با دو عدد نشان داد.

در مثال صفحه‌ی قبل بردار انتقال به‌صورت b b b b b b b a a a به‌دست آمد. بنابراین بردار انتقال را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix} = \overrightarrow{GH}$ نمایش داد. دقت داشته باشید که $\overrightarrow{GH}$ با $\overrightarrow{HG}$ فرق دارد. $\overrightarrow{GH}$ بردار انتقال روپادی است که حرکت خود را از نقطه‌ی G شروع می‌کند و در انتها به نقطه‌ی H می‌رسد. $\overrightarrow{HG}$ بردار انتقال روپادی است که حرکت خود را از نقطه‌ی H شروع می‌کند و در انتها به نقطه‌ی G می‌رسد.

به عنوان مثالی دیگر، مسیر b b c c c c d a a b b b b b را در نظر بگیرید.



مسیر حرکت



بردار انتقال

بردار انتقال این مسیر به‌صورت $\begin{bmatrix} ۶ \\ -۲ \end{bmatrix}$ نمایش داده می‌شود. زیرا روپاد برای رسیدن به نقطه‌ی انتهایی مسیر، باید شش حرکت به سمت راست و دو حرکت به سمت پایین داشته باشد.

تمرین

۱. بردار انتقال هر یک از دستورات ترکیبی زیر را به‌دست آورید.

الف) $e = a\,a\,a\,b\,b\,a\,b\,c\,c\,c\,d\,a$

ب) $f = b\,b\,c\,c\,c\,c\,d\,a\,b\,b\,b\,b\,b$

ج) $g = a\,a\,d\,c\,d\,c\,d\,c\,d\,c\,b$

د) $h = d\,d\,a\,b\,a\,d\,c\,d\,a\,b$

۲. دستورات ترکیبی تمرین قبل را در نظر بگیرید.

الف) بردار انتقال مسیر $f\,e\,h\,g\,e\,g\,e\,h$ را به‌دست آورید.

ب) مسیر را به‌طوری خلاصه کنید که از نقطه‌ی ابتدایی بتوان به نقطه‌ی انتهایی با کمترین حرکت رسید.

ج) اگر یک روپاد از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ با مسیر قسمت «الف» حرکت کند، در انتها به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

۳. یک روپاد با مسیر $a\,a\,e\,a\,b\,c\,b\,a\,e\,e\,a\,d\,a\,d\,a$، از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ شروع به حرکت می‌کند.

الف) دستور ترکیبی e را به‌گونه‌ای تعریف کنید به‌طوری که نقطه‌ی انتهای مسیر $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \end{bmatrix}$ باشد. بردار انتقال e را بنویسید.

ب) دستور ترکیبی e را به‌گونه‌ای تعریف کنید به‌طوری که نقطه‌ی انتهای مسیر $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$ باشد. بردار انتقال e را بنویسید.

ج) دستور ترکیبی e را به‌گونه‌ای تعریف کنید به‌طوری که نقطه‌ی انتهای مسیر، نقطه‌ی شروع مسیر باشد. بردار انتقال e را بنویسید.

۴. یک روپاد با بردار انتقال $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$ در هر یک از حالت‌های زیر، به چه نقطه‌ای روی صفحه‌ی مختصات می‌رسد؟

الف) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

ب) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$

ج) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۵. یک روپاد قرار است با بردار انتقال $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ حرکت کند. در هر یک از حالت‌های زیر، بگویید روپاد از چه نقطه‌ای باید شروع به حرکت کند.

الف) نقطه‌ی انتهای مسیر $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ باشد.

ب) نقطه‌ی انتهای مسیر $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۷ \end{bmatrix}$ باشد.

ج) نقطه‌ی انتهای مسیر $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد.

۶. در هر یک از حالات زیر بگویید روپاد با چه بردار انتقالی حرکت کرده است.

الف) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتها در $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$

ب) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتها در $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$

ج) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتها در $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$

د) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتها در $\begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$

ه) نقطه‌ی شروع از $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و نقطه‌ی انتها در $\begin{bmatrix} -۵ \\ -۱۱ \end{bmatrix}$

۷. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، $E = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ باشد، بردارهای انتقال زیر را به‌دست آورید.

پ) $\overrightarrow{AF}$	ب) $\overrightarrow{FA}$	الف) $\overrightarrow{EA}$
ج) $\overrightarrow{CD}$	ث) $\overrightarrow{AE}$	ت) $\overrightarrow{BE}$
خ) $\overrightarrow{BD}$	ح) $\overrightarrow{BC}$	چ) $\overrightarrow{CB}$

فصل ۶

توان و جذر

ترتیب عمل‌ها در محاسبات

از سال گذشته به خاطر دارید که هنگام انجام محاسبات، باید به رتبه‌ی عمل‌ها دقت کرد.

۱ـ پرانتز   ۲ـ توان   ۳ـ ضرب و تقسیم   ۴ـ جمع و تفریق

۱. پرانتز. رتبه‌ی اول، انجام محاسبات داخل پرانتزها است. یعنی ابتدا باید عبارات داخل پرانتز را محاسبه، و آنها را ساده کنید.

$$۷ \times (۴ - ۵) = ۷ \times (-۱) = -۷$$

۲. توان. قبل از انجام هرگونه محاسبه به وسیله‌ی چهار عمل اصلی، ابتدا باید محاسبات توانی را انجام دهید.

$$۱۵ - ۲^۴ = ۱۵ - ۱۶ = -۱$$

$$(۱۵ - ۲)^۴ = ۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱$$

$$(۱۵ - ۲^۴)^۴ = (۱۵ - ۱۶)^۴ = (-۱)^۴ = ۱$$

۳. رتبه‌ی سوم اختصاص به ضرب و تقسیم دارد. یعنی ضرب و تقسیم، نسبت به جمع و تفریق مقدم هستند.

$$۷ + \underbrace{۴ \times ۳}_{۱۲} = ۷ + ۱۲ = ۱۹$$

$$۶ - \underbrace{۴ \div ۲}_{۲} = ۶ - ۲ = ۴ \qquad \left(۶ - ۴ \div ۲ = ۶ + (-۴) \times \frac{۱}{۲} = ۶ + \frac{-۴}{۲} = ۶ + (-۲) = ۴\right)$$

۴. و در نهایت محاسبات مربوط به جمع و تفریق را باید انجام دهیم.

مثال.

$$-۱۰ - ۳ \times ۴۵ \div (۱۹ - ۲^۲) \times (-۱)^۳ =$$

$$-۱۰ - ۳ \times ۴۵ \div (۱۹ - \underbrace{۲^۲}_{۴}) \times \underbrace{(-۱)^۳}_{-۱} = -۱۰ - ۳ \times ۴۵ \div \overbrace{(۱۹ - ۴)}^{۱۵} \times (-۱)$$

$$= -۱۰ - ۳ \times ۴۵ \div ۱۵ \times (-۱)$$

از این مرحله با دو روش می‌توان عمل کرد.

روش اول. رعایت قاعده از چپ به راست

$$= -۱۰ - \underbrace{\overrightarrow{۳ \times ۴۵}}_{۱۳۵} \div ۱۵ \times (-۱) = -۱۰ - \underbrace{۱۳۵ \div ۱۵}_{۹} \times (-۱)$$

$$= -۱۰ - \underbrace{۹ \times (-۱)}_{-۹} = -۱۰ - (-۹) = -۱۰ + ۹ = -۱$$

روش دوم. تبدیل تقسیم به ضرب و تفریق به جمع

$$= -۱۰ - ۳ \times ۴۵ \div ۱۵ \times (-۱) = (-۱۰) + (-۳) \times ۴۵ \times \frac{۱}{۱۵} \times (-۱)$$

$$= (-۱۰) + (+۹) = -۱۰ + ۹ = -۱$$

تمرین

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۴^۲ - ۳^۳ + ۲^۲$

ب) $۴^۳ + ۳^۲ - ۲ \times ۵^۲$

ج) $۶ \times ۲^۳ - ۲ \times ۶^۲$

د) $(۷^۲ - ۵^۲)(۶ \times ۳^۲ + ۴) \times ۲۰ - ۲^۵$

ه) $(۵^۳ - ۳^۵)(۳^۲ - ۲^۳)^۴ - ۵^۴$

و) $(-۵ \times ۴)^۲ \div ۲^۴ \times (-۳)^۲$

ز) $(۲ - ۳^۲ \times ۵^۲ \div ۱۵ - ۲^۳) \times (۷ + ۲)$

ح) $(۴۳ - ۵^۲ \times ۲)^۲ - ۸ \div ۲^{(۴-۱\times۳)} - ۴ \times (۸ + ۳^۲)$

ط) $۵^۲ - (۳^۲ - ۱^۳) \times ۲^۲ \div ۴^۲$

تعریف توان

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) 10000×1000

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7} \times (0/2)^{4}$

ج) $\left(\frac{7}{20}\right)^{5} \times (0/35)^{11}$

د) $\left(\frac{3}{5}\right)^{10} \times (0/6)^{3} \times \left(\frac{12}{20}\right)$

هـ) $2 \times 2^{2} \times 2^{3} \times \ldots \times 2^{10}$

و) $3^{5} \times 3^{6} \times 3^{7} \times \ldots \times 3^{20}$

ز) $2^{5} + 2^{5}$

ح) $3^{2} + 3^{2} + 3^{2}$

۲. به سؤال‌های زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید.

الف) مکعب ۲ بزرگ‌تر است یا مجذور ۳؟

ب) مکعب ۳ بزرگ‌تر است یا مجذور ۴؟

ج) مکعب ۷ بزرگ‌تر است یا مجذور ۱۷؟

د) مکعب $\frac{1}{3}$ بزرگ‌تر است یا مجذور $\frac{1}{4}$؟

۳. داخل هر یک از مربع‌های زیر، علامت «>»، «=» یا «<» قرار دهید.

الف) $3^{5} \square 5^{3}$

ب) $2 \times 10 \square 2^{10}$

ج) $2 \times 2 \square 2^{2}$

د) $4^{3} + 4^{2} \square 4^{5}$

هـ) $\left(\frac{1}{2}\right)^{5} \square \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$

و) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \square \frac{1^{3}}{3}$

ز) $2^{10} + 2^{10} \square 2^{11}$

ح) $1 \div 2 \times 2 \times 2 \square 1 \div 2^{3}$

ط) $1 \times 25 \square 1^{25}$

۴. عدد 5^{18} را به‌صورت حاصل‌ضربِ

الف) دو عدد توان‌دار مساوی بنویسید.

ب) سه عدد توان‌دار مساوی بنویسید.

۵. عدد $۷^{۷۷}$ را به صورت حاصل ضرب ۷ عدد توان‌دار مساوی بنویسید.

۶. هر دسته از عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $۲^۴,\ ۳^۴,\ ۴^۲,\ ۵^۳,\ ۹^۲$

ب) $۲^۳,\ ۳^۳,\ ۴^۲,\ ۵^۲,\ ۶^۲$

ج) $۲^۲ \times ۳^۵,\ ۵ \times ۳^۵,\ ۵^۲ \times ۳^۴$

د) $۲^۵ \times ۱۷,\ ۳^۵ \times ۱۷,\ ۵^۳ \times ۱۷$

هـ) $۳^{۲۰},\ ۲^۳ \times ۳^{۱۸},\ ۵^۳ \times ۳^{۱۶}$

و) $۲^{۱۰},\ ۳ \times ۲^۹,\ ۴^۲ \times ۲^۸$

ز) $(\frac{۲}{۳})^۸,\ \frac{۲^۸}{۳},\ \frac{۲}{۳^۸}$

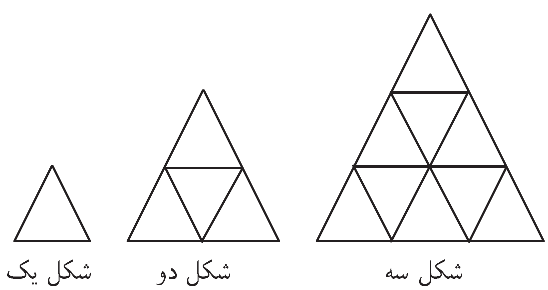
ح) $(\frac{۱}{۵})^{۱۰},\ (\frac{۲}{۵})^{۱۰},\ (\frac{۳}{۵})^{۱۰}$

ط) $(\frac{۱}{۲})^۷ \times (\frac{۱}{۳})^۵,\ (\frac{۱}{۲})^۸ \times (\frac{۱}{۳})^۴$

ی) $(\frac{۱}{۲})^۷ \times (\frac{۱}{۳})^۵,\ (\frac{۱}{۲})^۸ \times (\frac{۱}{۳})^۵$

ک) $۵^{۲۱},\ ۵^{۲۳} \times (\frac{۱}{۵})^۳,\ ۵^{۲۳} \times (\frac{۲}{۵})^۳$

۷. به شکل‌های زیر توجه کنید.

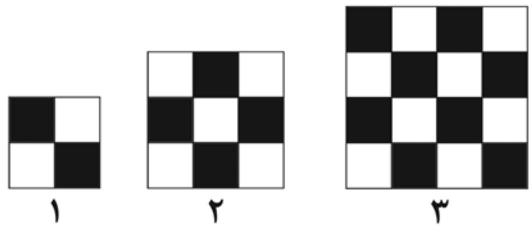


همان‌طور که می‌بینید در شکل یک، ۱ مثلث کوچک، در شکل دو، ۴ مثلث کوچک و در شکل سه، ۹ مثلث کوچک وجود دارد. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) شکل چهارم و پنجم را رسم کنید و بگویید در هر شکل چند مثلث کوچک وجود دارد.

ب) در شکل دهم چند مثلث کوچک وجود دارد؟

۸. با توجه به شکل‌های زیر به سؤالات پاسخ دهید.



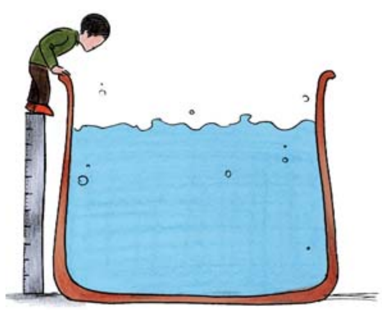
الف) در شکل ۱، چند مربع سیاه وجود دارد؟

ب) در شکل ۲، چند مربع سیاه وجود دارد؟

ج) در شکل ۳، چند مربع سیاه وجود دارد؟

د) در شکل ۲۰، چند مربع سیاه وجود دارد؟

۹. در یک مدرسه‌ی راهنمایی ۳ پایه وجود دارد. هر پایه ۳ کلاس دارد. در هر کلاس ۳ ردیف نیمکت چیده شده است. در هر ردیف ۳ نیمکت وجود دارد. روی هر نیمکت ۳ دانش‌آموز می‌نشینند. اگر هر دانش‌آموز ۳ بار در روز آب بخورد و هر بار به اندازه‌ی ۳ فنجان، آب هدر بدهد، دانش‌آموزان این مدرسه در ۳ روز، چند فنجان آب اسراف می‌کنند؟ در ۲۷ روز چه‌طور؟



۱۰. کاغذی را هر بار از وسط تا می‌زنیم. اگر مساحت کاغذ اصلی یک متر مربع باشد، مساحت شکل به‌دست آمده بعد از سومین تا، چه‌قدر است؟

۱۱. اگر یک کاغذ مربعی شکل، به طول ضلع یک متر و ضخامت ۰٫۱ میلی‌متر داشته باشیم و آن‌را در هر مرحله از وسط تا بزنیم، بعد از هشتمین تا، طول ضلع و ضخامت آن چه‌قدر می‌شود؟

۱۲. در جدول‌های زیر، به دو عدد همسایه می‌گوییم، هرگاه خانه‌های آن‌ها در یک ضلع مشترک باشند.

الف) خانه‌های خالی جدول روبه‌رو را با کوچک‌ترین عددهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه، نصف حاصل‌ضرب آن دو عدد باشد.

۳۴	
	۷۸

راهنمایی: برای مثال ک.م.م ۶ و ۱۴ نصف حاصل‌ضرب ۶ و ۱۴ است.

ب) خانه‌های خالی جدول روبه‌رو را با عددهای طبیعی متفاوت و دو رقمی مجذور (مربع) طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه، با حاصل‌ضرب آن دو عدد برابر باشد.

۱۲		۶۳
۴۵		۷۵

راهنمایی: برای مثال ۳۶ یک عدد دو رقمی مجذور است.

محاسبه عبارت‌های توان‌دار

۱. هریک از عددهای زیر را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول توان‌دار بنویسید.

$$۵۴,\ ۷۲,\ ۹۶,\ ۹۸,\ ۱۲۸,\ ۷۲ \times ۵۷,\ ۳۵ \times ۴۹,\ ۶۶ \times ۱۲۱,\ ۵۱ \times ۳۴,\ ۳۹ \times ۹۱,\ ۸۰۸,$$

$$۳۶ \times ۸۸,\ ۷۸ \times ۹۱ \times ۸۱,\ ۲۵۶ \times ۲۲۵ \times ۲۵۰,\ ۲۴ \times ۱۰۰,\ ۲۵۰۰,\ ۱۰۵۰۰۰,\ ۱۰۰۱$$

۲. در هر قسمت، جاهای خالی را با عددهای مناسب پرکنید.

الف) $۲^{۳} \times \square \times ۱۱ = ۶۶۰$

ب) $۳ \times ۲^{۴} \times \square = ۱۲۰۰$

ج) $۲^{۲} \times \square \times ۳ = ۱۵۰۰$

د) $۲ \times \square \times ۵^{۲} = ۴۵۰$

۳. ب.م.م و ک.م.م هر جفت از اعداد زیر را به‌صورت حاصل‌ضربی از اعداد اول توان‌دار بنویسید.

الف) $۵^{۳} \times ۳^{۵}$ و $۵^{۷} \times ۷^{۵}$

ب) $۳^{۲} \times ۷ \times ۱۱$ و $۲^{۵} \times ۳ \times ۷^{۲}$

ج) ۳۵×۷۷ و ۱۲×۱۸

د) $۱۰۰ \times ۷^{۴} \times ۳^{۵}$ و $۵^{۷} \times ۲^{۵} \times ۱۸$

ه) $۱۵ \times ۵۱ \times ۷۲$ و $۱۴ \times ۱۸ \times ۲۱$

و) $۶۵ \times ۴۹ \times ۸۵$ و $۹۱ \times ۳۹ \times ۴۵$

۴. هر دسته از عددهای زیر را ازکوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $۲^{۶} \times ۳^{۲} \times ۵^{۵}$ و $۲^{۲} \times ۳^{۷} \times ۵^{۴}$

ب) $۲^{۶} \times ۵^{۵} \times ۱۳^{۷}$ و $۲^{۳} \times ۳ \times ۵^{۴} \times ۱۳^{۸}$

ج) $۲^{۲} \times ۳^{۶} \times ۵^{۴},\ ۲^{۴} \times ۳^{۷} \times ۵^{۳},\ ۲^{۳} \times ۳^{۵} \times ۵^{۲} \times ۴ \times ۱۱$

د) $۱۳^{۱۸},\ ۱۳^{۲۱} \times \left(\frac{۱}{۱۳}\right)^{۴},\ ۱۳^{۲۱} \times \left(\frac{۲}{۱۳}\right)^{۴}$

۵. مساحت یک مستطیل $۵^{۱۳۹۲}$ است. اگر طول ضلع این مستطیل ۵ برابر عرضش باشد،

الف) طول و عرض این مستطیل را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) محیط این مستطیل چند برابر عرضش است؟

۶. الف) همه مقسوم‌علیه‌های عدد ۵۴ را بنویسید.

ب) حاصل عبارت زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار با توان بزرگ‌تر از ۱۰ بنویسید.

۷. الف) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۰۰۰ شده است. اگر هیچ‌یک از این دو عدد بر ۱۰ بخش‌پذیر نباشند، این دو عدد را بیابید.

ب) خانه‌های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل‌ضرب عددهای هر سطر برابر $۱۰^{۴}$ شود.

ج) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل‌ضرب عددهای هر سطر و هر ستون برابر ۱۰۰۰ شود؟

جذر و ریشه

۱. در جاهای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

$$\square^{۲} = ۹ \qquad \square^{۲} = ۳۶ \qquad \square^{۲} = ۱۰۰$$

۲. اعداد سمت چپ را به توان ۲ برسانید و سپس به عدد مربوطه در سمت راست وصل کنید.

۲۵	۲
۴	-۲
۹	۴
۱۶	۵
	-۳
	-۵
	۳
	-۴

هر عدد مثبت، مجذور (به توان ۲) دو عدد است که به آن دو عدد ریشه دوم گویند.

به عنوان مثال ۲۵ مجذور ۵ و ۵− است. پس ۵ و ۵− ریشه‌های دوم عدد ۲۵ هستند. زیرا اگر آنها را به توان ۲ برسانیم حاصل ۲۵ خواهد شد.

$$(-۵)^{۲} = ۲۵ \qquad ۵^{۲} = ۲۵$$

روشن است که ریشه‌های دوم یک عدد مثبت باید قرینه هم باشند. پس یکی از آنها مثبت و دیگری منفی خواهد بود.

۳. ریشه‌های دوم هر یک از موارد زیر را بیابید.

$(-۴)^۲ :$ $\qquad$ $۴^۲ :$ $\qquad$ $۲۵۶ :$ $\qquad$ $۸۱ :$

$۱۰۰ \times ۱۶^۲ \times ۳^۴ :$ $\qquad$ $۲^۴ \times ۳^۲ :$ $\qquad$ $۴^۲ \times ۶^۲ :$ $\qquad$ $۵ \times ۲۰۰ :$

۴. الف) چرا اعداد منفی ریشه دوم ندارند؟

ب) چرا صفر فقط یک ریشه دوم دارد؟

برای ریشه دوم مثبت، نماد و اسم مخصوصی انتخاب کرده‌اند. نماد ریشه دوم مثبت، $\sqrt{\ }$ و اسم آن رادیکال است. به ریشه دوم مثبت جذر هم می‌گویند.

باتوجه‌به آنچه در بالا گفتیم، چون ریشه‌های دوم یک عدد مثبت قرینه هم هستند و چون ریشه دوم مثبت را با $\sqrt{\ }$ نشان می‌دهیم، پس می‌توانیم بگوییم که $-\sqrt{\ }$ ریشه دوم منفی خواهد بود.

۵. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و بگویید که هر مورد چه چیزی است؟ (مانند نمونه حل کنید.)

$\sqrt{۳۶} = ۶$ $\longleftarrow$ ریشه دوم مثبت عدد ۳۶ $\longleftarrow$ $\sqrt{۳۶}$

$\longleftarrow$ $-\sqrt{۳۶}$

$\longleftarrow$ $\sqrt{۸۱}$

$\longleftarrow$ $\sqrt{۱۴۴}$

$\longleftarrow$ $-\sqrt{۲۵۶}$

a و b دو عدد مثبت هستند. مراحل زیر را دنبال کنید و برای هر تساوی دلیل بیاورید.

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^۲ = (\sqrt{a})^۲ \times (\sqrt{b})^۲ = a \times b = (\sqrt{a \times b})^۲$$

پس به این تساوی می‌رسیم:

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^۲ = (\sqrt{a \times b})^۲$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۲۵ \times ۱۶} = \sqrt{۲۵} \times \sqrt{۱۶} = ۵ \times ۴ = ۲۰$$

$$\sqrt{۱۰۰^۲ \times ۲۵۶} = \sqrt{۱۰۰^۲} \times \sqrt{۲۵۶} = ۱۰۰ \times ۱۶ = ۱۶۰۰$$

$$\sqrt{۲۰۰ \times ۵} = \sqrt{۱۰۰ \times ۲ \times ۵} = \sqrt{۱۰۰ \times ۱۰} = \sqrt{۱۰۰} \times \sqrt{۱۰} = ۱۰\sqrt{۱۰}$$

۶. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\sqrt{۱۶ \times ۱۰۰ \times ۲۸۹} =$ $\qquad$ $\sqrt{۱۲۱ \times ۱۴۴} =$

$\sqrt{۲ \times ۱۸ \times ۳۶} =$ $\qquad$ $\sqrt{۸ \times ۵۰} =$

$\sqrt{۱۴ \times ۲۸} =$ $\qquad$ $\sqrt{۲^۳ \times ۲۵ \times ۹۸} =$

$\sqrt{۲^۵ \times ۱۸ \times ۷۵} =$ $\qquad$ $\sqrt{۲۷ \times ۱۶} =$

تمرین

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $\sqrt{۵^{۲۰}}$

۲) $\sqrt{\sqrt{۴۰۰}+\sqrt{۱۶}-\sqrt{۶۴}}$

۳) $\sqrt{۱۵\times ۳۵\times ۲۱}$

۴) $\sqrt{۴۰-\sqrt{۱۶}}$

۵) $\sqrt{\frac{۶۴}{۴۹}\times\frac{۴}{۸۱}}$

۶) $\sqrt{\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}\times\ldots\times\frac{۷۱}{۷۲}}$

۷) $\sqrt{\frac{۹+۱۶}{۳۶+۶۴}}$

۸) $\sqrt{\frac{۳۲^{۲}+۳۰^{۲}+۱۶^{۲}+۱۵^{۲}+۵^{۲}}{۳۰}}$

۹) $\sqrt{(-۲۵)\times(-۴)}$

۱۰) $\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰۰}\times ۰/۳۶}$

۱۱) $\sqrt{۰/۰۴\times ۸۱}$

۱۲) $\sqrt{۴\times ۲۵\times ۹\times ۳۶}$

۱۳) $\sqrt{\sqrt{۶۲۵}}$

۱۴) $\sqrt{۳^{۳}\times ۲^{۴}\times ۱۲}$

۱۵) $\sqrt{\frac{۰/۰۱۸}{۰/۸}}$

۱۶) $\sqrt{۵۰۰۰\times ۰/۱۸}$

۱۷) $\sqrt{۰/۷\times ۶/۳}$

۱۸) $\sqrt{\frac{\sqrt{۵۱/۲}}{\sqrt{۰/۲}}+\frac{\sqrt{۴۸۶}}{\sqrt{۶}}}$

۱۹) $\sqrt{۱+۲\times\sqrt{۱+۳\times\sqrt{۱+۴\times\sqrt{۱+۵\times\sqrt{(۱+۶)^{۲}}}}}}$

۲. در جای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $۳\times\sqrt{\square}=۲۱$

ب) $\sqrt{\frac{۲۸}{\sqrt{\square}}}=۲$

ج) $۳\times ۴\times\sqrt{\square}=\frac{۱۲۰}{۲}$

د) $\sqrt{۱+۲\times\sqrt{\square}}=۳$

۳. برای هر یک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

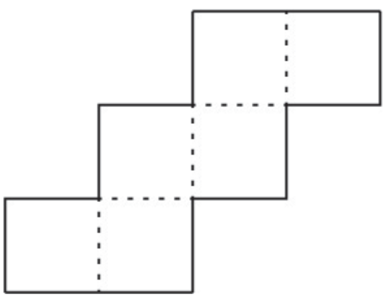
الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مادر مریم برای تولّد او، یک کادو خریده که جعبه آن به شکل مکعب است. اگر برای کادوکردن این جعبه، به ۲/۱۶ متر مربع کاغذ کادو احتیاج باشد، اندازه هر ضلع این جعبه، چند سانتی‌متر است؟

۵. شکل زیر از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل ۲۱۶۰۰ سانتی‌متر مربع است.



الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

ب) طول ضلع یک مربع را پیدا کنید.

ج) محیط تمام شکل را برحسب سانتی‌متر پیدا کنید.

۶. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به‌دست آورید.

ب) $\sqrt{۷۸}$	الف) $\sqrt{۰/۲۷}$
د) $\sqrt{۳۵/۵}$	ج) $\sqrt{۴۷/۳}$
و) $\sqrt{۰/۰۷۴}$	هـ) $\sqrt{۷۴۰}$

۷. الف) مقدار تقریبی $\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

ب) تلاش کنید جواب دقیق‌تری برای $\sqrt{۳}$ به‌دست آورید.

۸. $۲\sqrt{۳}$ یعنی $\sqrt{۳} \times ۲$. مقدار تقریبی عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. سعی کنید جوابتان بهترین جواب ممکن باشد.

الف) $\sqrt{۶} \times \sqrt{۳}$

ب) $۳\sqrt{۲}$

ج) $۲\sqrt{۵} \times \sqrt{۹۹}$

د) $\sqrt{۸۸} \times \sqrt{۸} \times \sqrt{۸}$

هـ) $\sqrt{۱} \times \sqrt{۲} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۴} \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۶} \times \sqrt{۷}$

۹. اولین رقم بعد از اعشار کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

الف) $\sqrt{۱۵}$

ب) $\sqrt{۱۷}$

۱۰. حاصل جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۱۱. مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{۸۸}$ را بنویسید.

۱۲. اگر هر یک از حروف نشان‌دهنده‌ی یک رقم باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً غلط است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$

ب) $\sqrt{abc} = def$

ج) $\sqrt{۰/ab} = ۰/c$

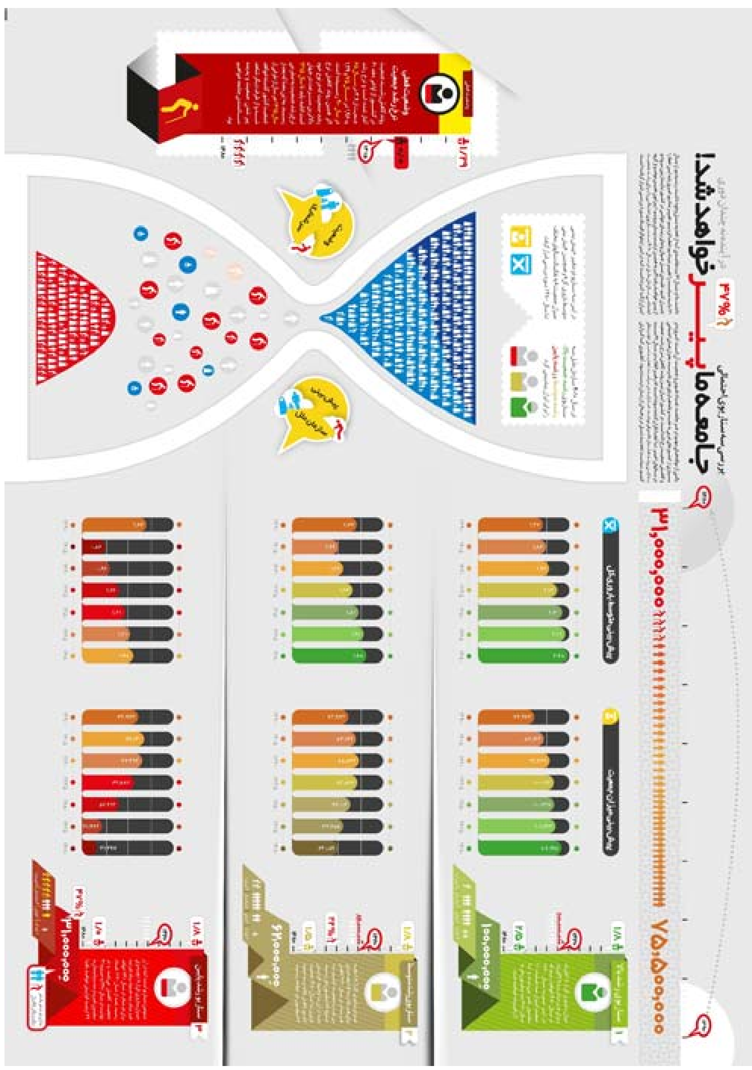
د) $\sqrt{ab} = c$

فصل ۷

آمار و احتمال (اختیاری)

دسته‌بندی داده‌ها

عکس با کیفیت‌تری از آنچه داده شده است را می‌توانید با عنوان «جامعه ما پیر خواهد شد!» از «webmath.ir» دانلود کنید. درباره تک تک جملات و یکایک نمودارهای تصویر داده شده ساعتی فکر کنید. برداشت‌های دقیق خود را یادداشت کنید.



کارگاه بازی ـ پرتاب سکه

کارگاه. بخشی از قانون هشتم داوری فوتبال چنین می‌گوید:

« در شروع بازی سکه‌ای انداخته می‌شود و تیم برنده (ی سکه انداختن،) دروازه را انتخاب می‌کند.»

می‌خواهیم ببینیم چرا به سکه انداختن می‌توان اعتماد کرد؟

به دانش آموزان یاد دهید که سکه انداختن به چه صورت است.

دانش آموزان را در محیطی وسیع قرار دهید و از آن‌ها بخواهید بیست بار سکه بیندازند، و نتایج تعداد شیر به‌دست آمده را به دقت اعلام کنند. سپس دوباره و دوباره این پرتاب بیست‌باره را انجام دهند. در پایان آزمایش، هر دانش‌آموز سه عدد باید داشته باشد که بیانگر تعداد شیرهای به دست آمده در سه آزمایش است. روی تخته‌ی کلاس سه مختصات متفاوت رسم کنید که در هر یک، محور افقی بیانگر تعداد شیرها و محور عمودی بیانگر تعداد دانش‌آموزان باشد. داده‌های به‌دست آمده را در سه نمودار متفاوتِ آزمایش اول، دوم و سوم ثبت کنید.

چه چیزی مشاهده می‌شود؟ و چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

میانگین داده ها

۱. میانگین نمرات دانش‌آموزی ۱۵ شده است. در هر مورد میانگین نمرات جدید را حساب کنید.

الف) به هر یک از نمرات او دو نمره اضافه کنیم.

ب) هر یک از نمرات را در دو ضرب کنیم.

ج) هر یک از نمرات را به توان دو برسانیم.

د) از راه حل‌های سه قسمت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

۲. در آزمونی که از ۱۰۰ امتیاز بوده است، میانگین امتیاز داوطلبین ۸۵ شده است. اگر امتیازها را به نمرات از ۰ تا ۲۰ تبدیل کنیم، میانگین نمرات چقدر خواهد شد؟

۳. در یکی از مدارس سمپاد برای تدریس ریاضی هفتم، به جای این کتاب ریاضی که در دست دارید، از کتب جانبی نامناسبی استفاده کرده بودند. روایت تقویم زمانی چنین بود:

روز شنبه، زمان برگزاری امتحان هماهنگ درس ریاضی در یک کلاس درس ۲۰ نفره بود.

روز یکشنبه، معلم ریاضی تا دیرهنگام به تصحیح برگه‌های امتحان پرداخت، و فرصت نشد که نتیجه را اعلام کند.

روز دوشنبه، معلم در جلسه‌ی انجمن اولیای دانش آموزان گفت:

« باعث سرفرازی مدرسه است که بیشترین نمره‌ی گرفته شده در این امتحان سخت و طاقت فرسا ۲۰ بوده است.»

در آن روز اولیای دانش آموزان خوشحال به خانه رفتند. مدیر که در جلسه حضور داشت، از معلم خواست که گزارش مکتوب خود را درباره‌ی نمره‌های این درس به او ارسال کند.

روز سه‌شنبه، معلم در گزارش کتبی خود به مدیر مدرسه نوشت:

«در امتحان ریاضی گرفته شده، بیش از نصف دانش‌آموزان نمره‌ی‌شان حداقل ۱۸ شده است.»

مدیر از اینکه گزارش شفافی دریافت کرده بود، خوشحال شد، از اینکه چنین معلمی را در این مدرسه انتخاب کرده است، به خود بالید.

روز چهارشنبه، معلم عصبانی سر کلاس درس رفت و به دانش‌آموزان چنین گفت:

«میانگین نمرات شما ۱۲ شده است. از شما راضی نیستم! فردا کسانی که نمره‌ی آنها زیر میانگین شده است، باید در کلاس جبرانی شرکت کنند.»

روز پنجشنبه، اولین کلاس جبرانی درس ریاضی هفتم تشکیل شد!

روز جمعه، معلم با خودش فکر کرد که آیا بهتر نبود به جای استفاده از تمرین‌های متوسط و زیاد ، از تمرین‌های خوب ولی کمتری استفاده می‌کرد؟ با این فکر تصمیم گرفت شنبه‌ی هفته‌ی آینده، روز متفاوتی برای تدریس ریاضی هفتم باشد؛ روزی که برای اولین بار تنها به دو کتاب ریاضی فکر می‌کرد: کتاب درسی رسمی و کتاب تکمیلی.

الف) مثالی از نمرات این کلاس ارائه بدهید.

ب) مثال‌تان را طوری ارائه دهید که کلاس جبرانی روز پنج‌شنبه با بیشترین تعداد نفرات ممکن تشکیل شود.

احتمال ریاضی

۱. تاسی را می‌اندازیم. آیا احتمال اینکه «عدد بزرگتر از چهار ظاهر شود» از احتمال اینکه «عدد اول ظاهر شود» بیشتر است؟

۲. دو تاس را با هم می‌اندازیم. اگر یکی از آنها ۶ آمده باشد، احتمال آنکه دیگری ۶ باشد را حساب کنید.

۳. دو تاس را همزمان می‌اندازیم. در هر مورد احتمال مربوط را به‌دست آورید.

الف) جفت شش ظاهر شود.

ب) مجموع دو عدد هشت شود.

ج) عدد یکی از تاس‌ها زوج و دیگری فرد باشد.

د) مجموع دو عدد کمتر از هشت نشود.

ه) دو عدد ظاهر شده متوالی باشند.

۴. اگر ده بار سکه بیندازیم، احتمال اینکه ۵ تا شیر بیاید و ۵ تا خط چقدر است؟

۵. اگر ۴ تاس را همزمان بیندازیم، احتمال اینکه تاس‌ها چهارتا عدد مختلف را نشان دهند، چقدر است؟

۶. اگر ۷ تاس با هم ریخته شود، احتمال اینکه دقیقاً سه تا ۶ ظاهر شود، چقدر است؟

۷. غروب روز یازده فروردین، هواشناسی اعلام کرد که احتمال بارش باران سراسری در روز ۱۲ام ۵۰٪ و در روز ۱۳ام هم ۵۰٪ است. اگر قصد چادرزدن در خارج از شهر را داشته باشیم، چقدر احتمال دارد در این دو روز شاهد بارش باران باشیم؟

۸. خانمی به خانه‌ی سه تا از دوستانش می رود که سال‌هاست آنها را ندیده است.

الف) او می‌داند که دوستش، یاس، دو فرزند دارد که دو قلو نیستند، ولی جنسیت آن‌ها را نمی‌داند. وقتی که در می‌زند پسری در را باز می‌کند. پسر می‌گوید: «سلام. من فرزند بزرگ خانواده‌ام. فرزند کوچک خانواده ما خواب است». احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده نیز پسر باشد، چقدر است؟

ب) او می‌داند که دوستش، یاسمن، دو فرزند دارد که دو قلو نیستند، ولی جنسیت آن‌ها را نمی‌داند. وقتی که در می‌زند پسری در را باز می‌کند. احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده نیز پسر باشد، چقدر است؟

ج) او می‌داند که دوستش، یاسمین، دو فرزند دارد که دو قلو نیستند، ولی جنسیت آن‌ها را نمی‌داند. وقتی که در می‌زند دختری در را باز می‌کند، و می‌گوید: «سلام. خوش آمدید. بفرمایید تو»، و سریع در حالی که به داخل خانه می‌رود، می‌گوید: «ببخشید. می‌روم به بچه که گریه می‌کند، سری بزنم». احتمال اینکه فرزند دیگر خانواده نیز پسر باشد، چقدر است؟

۹. (مسأله ی بز و بنز) در پایان یک مسابقه‌ی تلویزیونی، مسابقه دهنده در برابر سه در بزرگ قرار می‌گیرد که پشت دوتای آنها بز و پشت یکی از آنها یک بنز قرار دارد. مجری از مسابقه دهنده می‌خواهد که با انتخاب یکی از سه در، جایزه‌اش را که پشت آن قرار دارد، تعیین کند. مسابقه دهنده یک در را شانسی انتخاب می‌کند. مجری می‌داند پشت هر دری چه چیزی قرار دارد. روند مسابقه چنین است که پس از انتخاب مسابقه دهنده، همیشه مجری یک در دیگر را که پشتش بز قرارگرفته است باز می‌کند و به مسابقه دهنده می‌گوید که اگر مایل باشد می‌تواند انتخاب خود را عوض کند. اکنون مسابقه دهنده می‌تواند بگوید «نه» و همان انتخاب اولیه‌اش را حفظ کند، و یا بگوید «بله» و در بسته‌ی انتخابی‌اش را عوض کند. به عنوان یک ریاضی‌دان نوجوان، اگر به جای مسابقه دهنده بودید، چه تصمیمی می‌گرفتید؟

فصل ۸

ترسیم‌های هندسی و توازی (اختیاری)

مثلث و اجزای آن

عمود و عمودمنصف

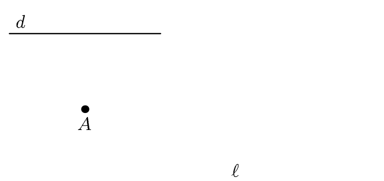
۱. حداکثر تعداد زاویه‌های قائمه را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) برخورد دو خط ب) برخورد سه خط

ج) برخورد چهار خط د) برخورد پنج خط

۲. در شکل زیر، آیا خط ℓ بر خط d عمود است؟

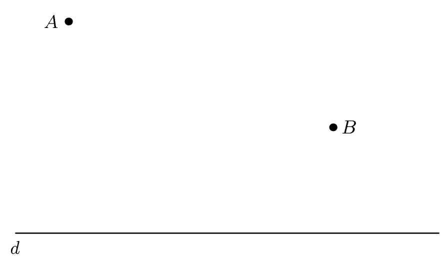
۳. در شکل زیر فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط ℓ بیشتر است یا از خط d؟



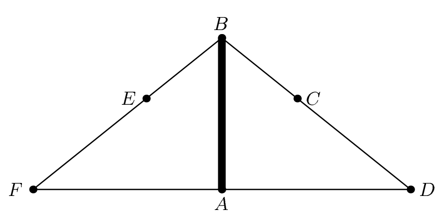
۴. نشان دهید فاصله‌ی هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک اندازه است.

۵. نشان دهید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

۶. دو کارخانه‌ی A و B در یک طرف ساحل رودخانه‌ای قرار دارند. این دو کارخانه می‌خواهند یک اسکله‌ی بارگیری برای استفاده‌ی مشترک در این ساحل بسازند. این اسکله در چه نقطه‌ای از ساحل باید ساخته شود تا از کارخانه‌ی A و کارخانه‌ی B به یک فاصله باشد؟ در شکل زیر، نقاط A و B محل کارخانه‌ها هستند و خط d نشان‌دهنده‌ی ساحل رودخانه است.

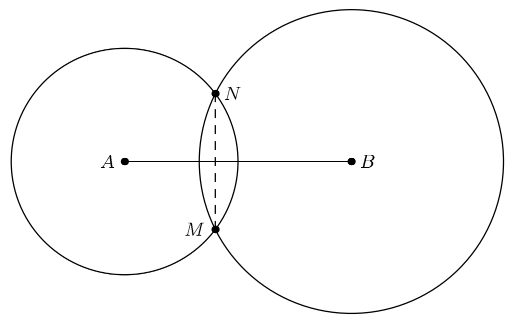


۷. تالس [1] برای محاسبه‌ی فاصله‌ی یک کشتی از ساحل رودخانه، میله‌ی AB را به صورت عمودی برلب ساحل قرار داده بود. تالس از نقطه‌ی B، با استفاده از لوله‌ی BC کشتی D را نشانه می‌رفت و سپس با حفظ زاویه‌ی $\widehat{ABC}$، لوله را حول پاره‌خط AB به طرف ساحل می‌چرخاند و به این ترتیب نقطه‌ی F در ساحل به دست می‌آمد و به این ترتیب بدون این‌که داخل آب برود فاصله‌ی کشتی تا ساحل را به‌دست می‌آورد. با رسم شکل درستی روش تالس را ثابت کنید.

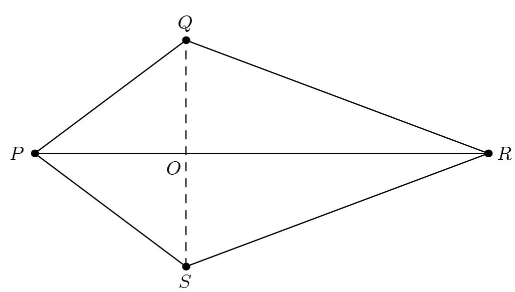


۱) ریاضیدان یونانی سده ششم پیش از میلاد.

۸. در شکل زیر، نقاط A و B مرکز دو دایره‌ی شکل زیر هستند. نشان دهید دو پاره‌خط AB و MN برهم عمودند.



۹. در شکل زیر، پاره‌خط PR دو زاویه‌ی $\widehat{QPS}$ و $\widehat{QRS}$ را نصف کرده است. ثابت کنید پاره‌خط PR عمودمنصف پاره‌خط QS است.

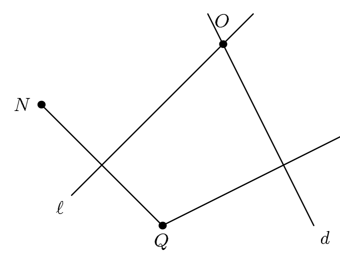


مثلث متساوی‌الساقین

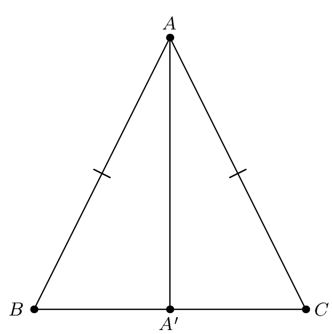
۱. در شکل زیر، خط d عمودمنصف پاره‌خط QM و خط ℓ عمودمنصف پاره‌خط QN است.

الف) همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الساقینی را که با رأس‌های M و Q و N و O ساخته می‌شوند را با ذکر دلیل نام ببرید.

ب) چرا عمودمنصف MN از نقطه‌ی O می‌گذرد؟



۲. در شکل زیر، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است. در هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید دو مثلث $\overset{\triangle}{AA'B}$ و $\overset{\triangle}{AA'C}$ برابرند.



الف) AA' میانه‌ی ضلع BC است.

ب) AA' نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.

ج) AA' ارتفاع ضلع BC است.

۳. در هر یک از حالت‌های زیر، ثابت کنید مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.

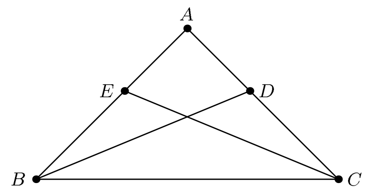
الف) میانه و ارتفاع BC برهم منطبق هستند.

ب) نیمساز $\widehat{A}$ و ارتفاع BC برهم منطبق هستند.

۴. ثابت کنید هر مثلث متساوی‌الساقین، دو زاویه برابر دارد. (به ضلع بین این دو زاویه قاعده می‌گویند.)

۵. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه زاویه برابرند.

۶. در مثلث زیر، دو پاره‌خط BD و CE به ترتیب نیم‌ساز زاویه‌های $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ACB}$ هستند.



اگر $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$،

الف) ثابت کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{BCD}$ و $\overset{\triangle}{CBE}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بنویسید.

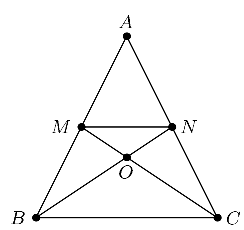
ب) آیا دو زاویه‌ی $\widehat{ADB}$ و $\widehat{AEC}$ برابرند؟ چرا؟

ج) نشان دهید دو مثلث $\overset{\triangle}{ADB}$ و $\overset{\triangle}{AEC}$ برابرند و اجزای برابر آن‌ها را بیابید.

۷. از مسأله قبل نتیجه بگیرید که اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، این مثلث متساوی‌الساقین است.

۸. نشان دهید مثلثی که هر سه زاویه‌اش مساوی‌اند، متساوی‌الاضلاع است.

۹. در شکل زیر، دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{AMN}$ متساوی‌الساقین هستند.



الف) نشان دهید دو مثلث $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ANB}$ برابرند.

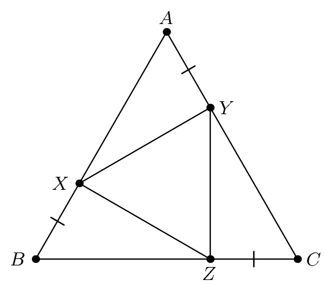
ب) ثابت کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{OBM}$ و $\overset{\triangle}{OCN}$ برابرند.

۱۰. نشان دهید در یک مثلث متساوی‌الساقین،

الف) دو نیم‌ساز زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند.

ب) دو میانه‌ی وارد بر ساق‌ها با هم برابرند.

۱۱. در شکل زیر $AY = BX = ZC$. اگر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع باشد، نشان دهید مثلث $\overset{\triangle}{XYZ}$ نیز متساوی‌الاضلاع است.



۱۲. در مربع $ABCD$،

الف) ثابت کنید قطر AC نیم‌ساز هر دو زاویه $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ است.

ب) ثابت کنید قطر BD عمودمنصف قطر AC است.

ترسیم‌های هندسی (اختیاری)

۱. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به رأس A، متساوی‌الساقین است. می‌دانیم $AB = ۵cm$ و طول ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر ۴ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

۲. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به قاعده‌ی BC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم $AC = ۶cm$ و طول نیمساز AD برابر ۵ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

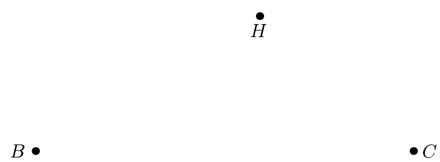
۳. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است طوری که زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$، زاویه‌های مجاور به قاعده‌ی آن هستند. می‌دانیم قاعده‌ی این مثلث برابر ۵ سانتی‌متر و ارتفاع وارد بر ضلع AC برابر ۳٫۵ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

۴. می‌خواهیم مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنیم. می‌دانیم $BC = ۶cm$ است. طول ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ضلع AC را هم داریم. یکی برابر ۳ سانتی‌متر و دیگری ۲٫۵ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

۵. می‌خواهیم مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنیم. می‌دانیم $BC = ۹cm$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع AC برابر ۵ سانتی‌متر و طول نیمساز زاویه‌ی $\widehat{B}$ را ۶٫۵ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

۶. $AC = ۵cm$ قطر مربع $ABCD$ است. مربع $ABCD$ را رسم کنید.

۷. در شکل زیر، نقاط B و C رأس‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، و نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های AB و AC است. رأس A را پیدا کنید.



۸. می‌خواهیم مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنیم. می‌دانیم $BC = ۹cm$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع AC برابر ۵ سانتی‌متر و طول نیمساز زاویه‌ی $\widehat{B}$ را ۶٫۵ سانتی‌متر است. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

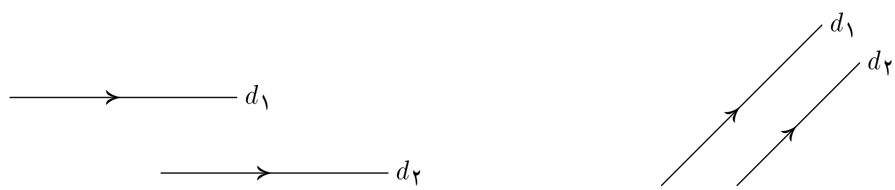
۹. در مثلث ABC، می‌دانیم $AB = ۵cm$، $AC + BC = ۹cm$ و ارتفاع وارد بر ضلع BC برابر ۴ سانتی‌متر است.

۱۰. طول میانه‌ی AM برابر ۵ سانتی‌متر است. AM با ضلع AC زاویه‌ی ۳۰ درجه و با ضلع AB زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد. مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم کنید.

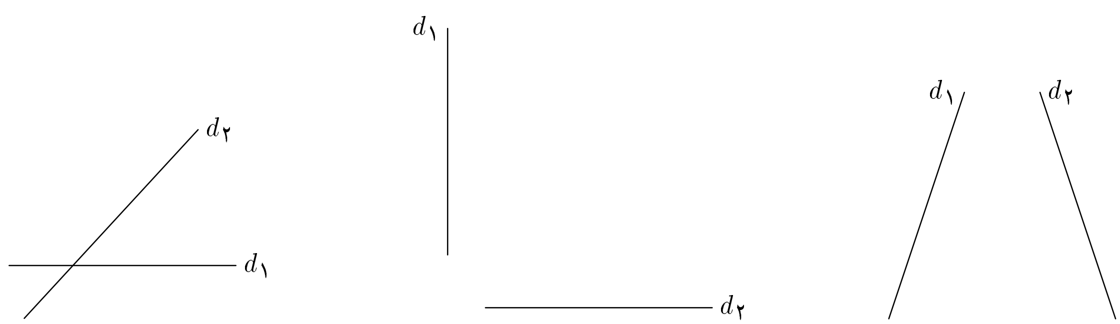
توازی

تعریف. دو خط با هم موازی هستند، در صورتی که با امتدادشان، یکدیگر را قطع نکنند. دوخطی که با هم موازی نباشند را دو خط متقاطع گویند.

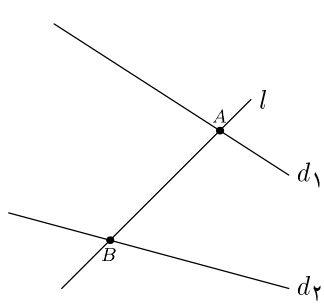
مثال ۱. در این دو شکل، خطوط d_1 و d_2 با هم موازی هستند.



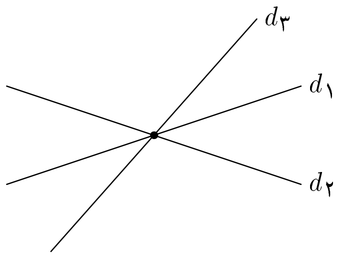
مثال ۲. در این سه شکل، خطوط d_1 و d_2 با هم موازی نیستند.



تعریف. اگر دو خط داشته باشیم، به خطی که آنها را در دو نقطه‌ی متمایز قطع کند، خط مورّب آن دو خط گویند.

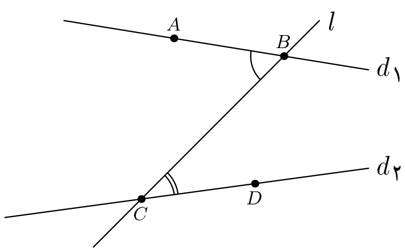


مثال ۱. در این شکل، خط l یک خط مورّب برای دو خط d_1 و d_2 است. زیرا خط l، دو خط d_1 و d_2 را در نقاط A و B قطع کرده است.

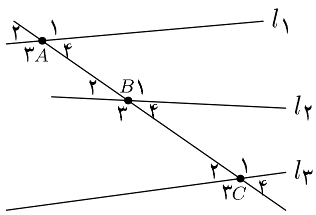


مثال ۲. در این شکل هیچ خط موربی وجود ندارد. زیرا با آنکه مثلاً خط $d_۳$ دو خط دیگر را قطع کرده است، اما این دو خط را در یک نقطه قطع کرده است.

تعریف. مورّب l دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را به ترتیب در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. A را روی $d_۱$ و D را روی $d_۲$ انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که A و D در دو طرف l قرار گیرند. در این صورت دو زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BCD}$ را «*زاویه‌های متبادل درونی*» می‌نامیم.



۱. دو زاویه‌ی متبادل درونی برای خطوط زیر بیان کنید.

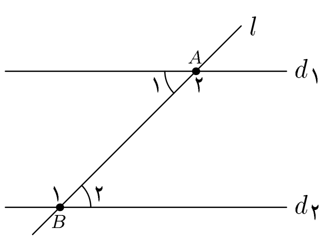


الف) برای دو خط $l_۱$ و $l_۲$:

ب) برای دو خط $l_۱$ و $l_۳$:

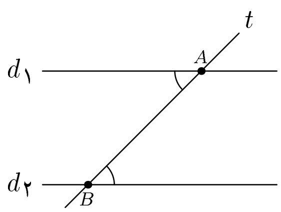
ج) برای دو خط $l_۲$ و $l_۳$:

۲. در شکل زیر، مورّب l دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را قطع کرده است. اگر $\widehat{A}_۱ = \widehat{B}_۲$، نشان دهید که $\widehat{A}_۲ = \widehat{B}_۱$.



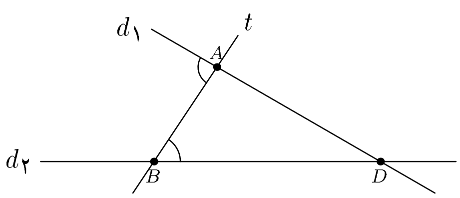
قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی

مورّب t دو خط متمایز d_1 و d_2 را قطع کرده است. اگر یک جفت زاویه‌ی متبادل درونی مساوی به وجود آید، d_1 و d_2 موازی خواهند بود.

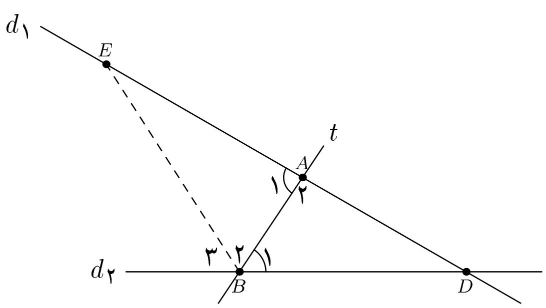


برهان.

می‌خواهیم ثابت کنیم که d_1 و d_2 موازی هستند $(d_1 \parallel d_2)$. فرض کنید که d_1 و d_2 موازی نباشند؛ یعنی $d_1 \nparallel d_2$. در نتیجه d_1 و d_2 در نقطه‌ای مانند D یکدیگر را قطع خواهند کرد.



E را نقطه‌ای روی d_1 در نظر بگیرید به‌طوری که $EA = BD$.



با توجه به فرض قضیه، $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

در نتیجه دو مثلث $E\overset{\triangle}{A}B$ و $A\overset{\triangle}{B}D$ با هم مساوی خواهند شد. (چرا؟)

از تساوی دو مثلث $E\overset{\triangle}{A}B$ و $A\overset{\triangle}{B}D$ نتیجه می‌شود که $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$. (چرا؟)

تا به اینجا دریافتیم که

$$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \\ \widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 \end{cases}$$

بنابراین

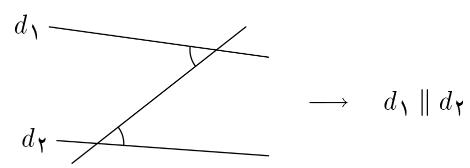
$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$$

می‌دانیم که $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$.   در نتیجه خواهیم داشت: $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$.

اما از طرف دیگر واضح است که $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$ از 180° کمتر است.   بنابراین «$\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$» نمی‌تواند درست باشد.

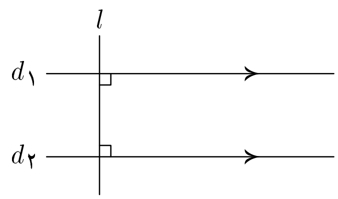
پس «$d_1 \nparallel d_2$» امکان‌پذیر نیست.   در نتیجه d_1 و d_2 موازی خواهند بود.

آنچه گذشت ...



قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط

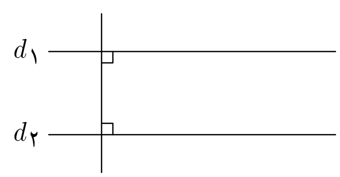
دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.



۳. قضیه‌ی قبل را ثابت کنید.

باید ثابت کنید که اگر دو زاویه‌ی قائمه مطابق شکل داشته باشیم، d_1 و d_2 با هم موازی خواهند شد.

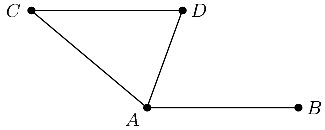
آنچه گذشت ...



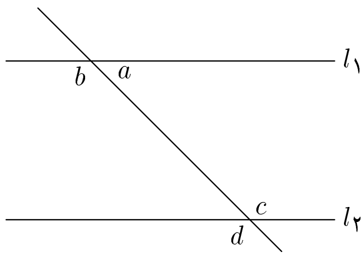
$\longrightarrow \quad d_1 \parallel d_2$

۴. روش رسم خطی گذرنده از نقطه‌ی P که با خط d موازی باشد را شرح دهید.

۵. فرض کنید AD نیمساز $\widehat{CAB}$ است و $CA = CD$. ثابت کنید AB و CD با هم موازی‌اند.



۶. در کدامیک از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $l_۲ \parallel l_۱$.



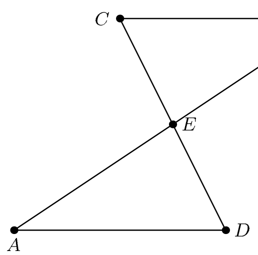
الف) $\widehat{a} = ۸۰^\circ$ و $\widehat{c} = ۱۰۰^\circ$

ب) $\widehat{b} = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{d} = ۱۰۰^\circ$

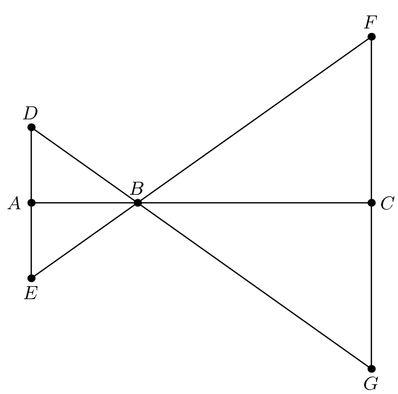
ج) $\widehat{a} = ۷۰^\circ$ و $\widehat{d} = ۱۰۰^\circ$

د) $\widehat{a} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{c} = ۹۰^\circ$

۷. AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند؛ ثابت کنید $AD \parallel CB$.



۸. در شکل زیر نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند. همچنین داریم: $AD = AE$، $BD = BE$ و $BF = BG$.

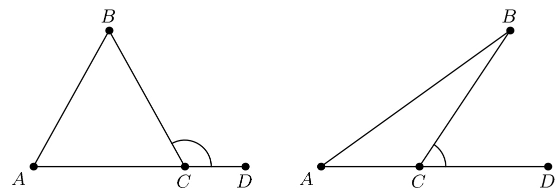


الف) ثابت کنید $CF = CG$.

ب) ثابت کنید $DE \parallel FG$.

زاویه‌ی خارجی

تعریف. زاویه‌ای را که مکمل و مجاور با یکی از زاویه‌های مثلث باشد، «*زاویه‌ی خارجی*» مثلث می‌نامند. به عبارت دیگر در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، اگر نقطه‌ی C بین دو نقطه‌ی A و D باشد، $\widehat{BCD}$ زاویه‌ی خارجی $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

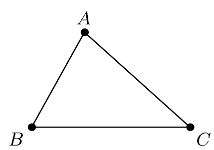


در شکل بالا، $\widehat{BCD}$ مکمل زاویه‌ی $\widehat{BCA}$ است.

دو زاویه‌ی داخلی مثلث را که با زاویه‌ی خارجی مجاور نباشند، «*زاویه‌های داخلی غیرمجاور*» گویند.

در شکل بالا زاویه‌های $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاویه‌های داخلی غیرمجاور برای زاویه‌ی خارجی $\widehat{BCD}$ هستند.

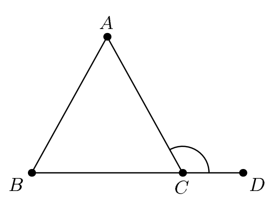
سؤال. تمام زوایای خارجی مثلث زیر را رسم کنید. تعداد آنها چندتاست؟



قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی

زاویه‌ی خارجی در یک مثلث، از هر یک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

برهان. مطابق شکل، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و یک زاویه‌ی خارجی آن مثل $\widehat{ACD}$ را در نظر می‌گیریم.

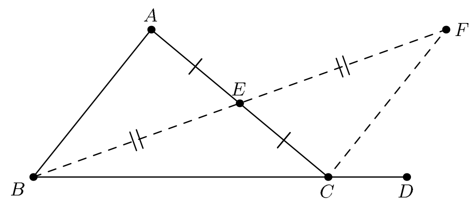


باید ثابت کنیم

$$\widehat{ACD} > \widehat{A} \quad \text{و} \quad \widehat{ACD} > \widehat{B}$$

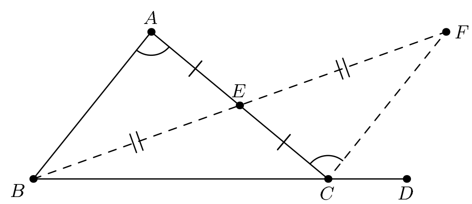
ابتدا می‌خواهیم ثابت کنیم که $\widehat{ACD} > \widehat{A}$.

نقطه‌ی E وسط AC را در نظر می‌گیریم. از B به E وصل می‌کنیم و به اندازه‌ی BE آن را ادامه می‌دهیم تا به نقطه‌ی F برسیم.



دو مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ و $\overset{\triangle}{CFE}$ با یکدیگر مساوی خواهند شد. (چرا؟)

بنابراین $\widehat{A} = \widehat{ACF}$.



در نتیجه $\widehat{ACD} > \widehat{A}$.

حالت $\widehat{ACD} > \widehat{B}$ نیز به همین صورت ثابت می‌شود.

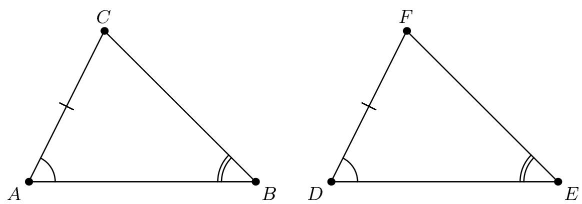
۹. در قضیه‌ی قبل ثابت کنید $\widehat{ACD} > \widehat{B}$.

۱۰. ثابت کنید اگر مثلثی یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، دو زاویه‌ی دیگر آن حاده‌اند.

۱۱. تمرین شماره‌ی ۳ را یک‌بار دیگر با استفاده از قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی ثابت کنید.

قضیه‌ی ض‌زز

هرگاه دو زاویه و ضلع روبه‌رو به یکی از آن دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه و ضلع متناظر از مثلثی دیگر مساوی باشند، آنگاه دو مثلث با هم برابرند. به عبارت دیگر در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ هرگاه $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $\widehat{B} = \widehat{E}$ و $AC = DF$، آنگاه $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.



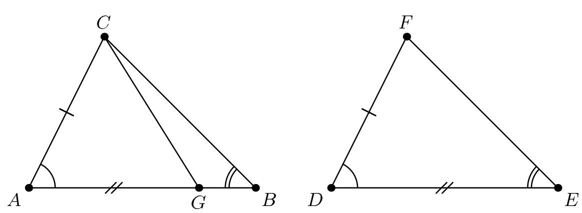
برهان. می‌خواهیم ثابت کنیم $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$. برای این کار اگر ثابت کنیم $AB = DE$، آنگاه تساوی دو مثلث نتیجه می‌شود. (چرا؟)

برای AB و DE سه امکان وجود دارد.

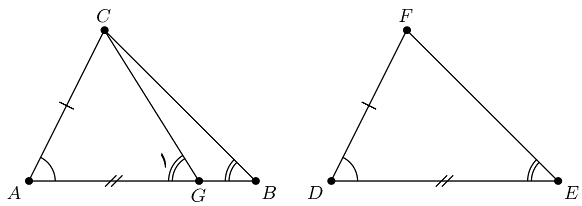
(۱) $AB = DE$ (۲) $AB > DE$ (۳) $AB < DE$

باید ثابت کنیم که فقط حالت اول یعنی $AB = DE$ می‌تواند درست باشد. بنابراین باید نشان دهیم که حالت‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند درست باشند.

فرض کنید که حالت (۲) درست باشد؛ یعنی $AB > DE$. در نتیجه می‌توانیم نقطه‌ی G را روی AB چنان انتخاب کنیم به‌طوری‌که $AG = DE$.



$AC = DF$، $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $AG = DE$. بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{AGC} = \overset{\triangle}{DEF}$. در نتیجه $\widehat{G}_1 = \widehat{E}$.



$\widehat{G}_1 = \widehat{E}$؛ از فرض قضیه هم داریم که $\widehat{E} = \widehat{B}$. در نتیجه $\widehat{G}_1 = \widehat{B}$.

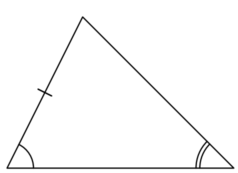
اما از طرف دیگر با توجه به قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی برای مثلث $\overset{\triangle}{GCB}$ و رأس G، واضح است که $\widehat{B} < \widehat{G}_1$. بنابراین $\widehat{G}_1 = \widehat{B}$ نمی‌تواند درست باشد. پس $AB > DE$ امکان‌پذیر نیست.

به روش مشابهی می‌توان ثابت کرد که $AB < DE$ نیز نمی‌تواند برقرار باشد.

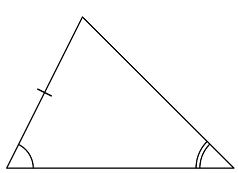
چون حالت‌های (۲) و (۳) نمی‌توانند درست باشند، پس تنها حالت (۱) درست خواهد بود. در نتیجه $AB = DE$ و $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.

آنچه گذشت ...

دو مثلث با هم



و

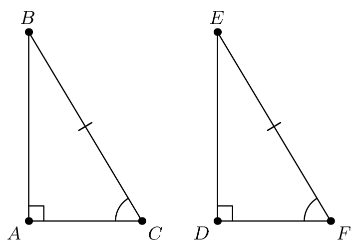


$\longrightarrow$

برابرند

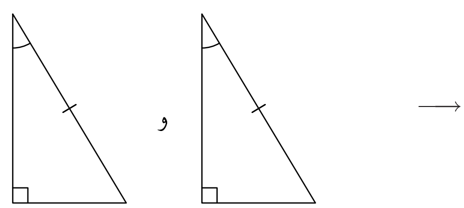
۱۲. چرا حالت $AB < DE$ در برهان قضیه‌ی قبل نمی‌تواند درست باشد؟

۱۳. قضیه‌ی وتر و یک زاویه‌ی تند. ثابت کنید اگر وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث مساوی‌اند. یعنی باید ثابت کنید در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ قائمه در A و D، اگر $BC = EF$ و $\widehat{C} = \widehat{F}$، آنگاه $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEF}$.



آنچه گذشت ...

دو مثلث قائم‌الزاویه با



هم برابرند

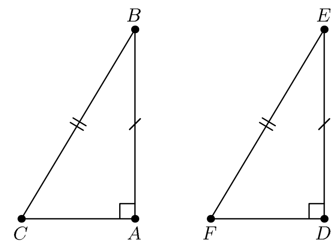
قضیه وتر و یک ضلع

اگر وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث مساوی‌اند. برای بیان برهان این قضیه، چنین عمل می‌کنیم. در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ داریم:

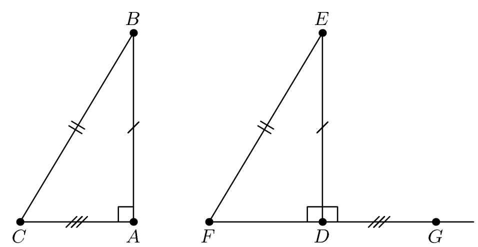
$\widehat{A} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$

$AB = DE$

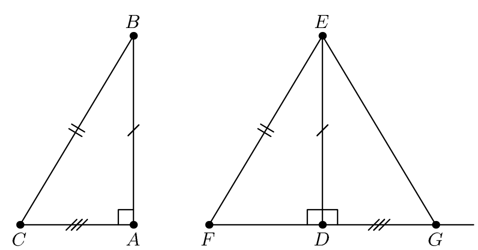
$BC = EF$



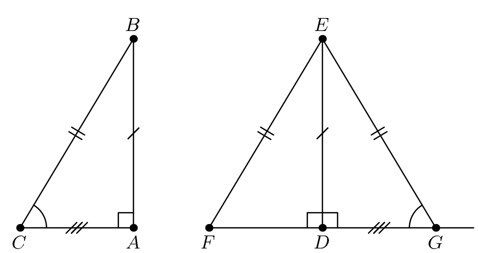
مطابق شکل، در امتداد خط FD نقطه‌ی G را چنان انتخاب می‌کنیم که $AC = DG$.



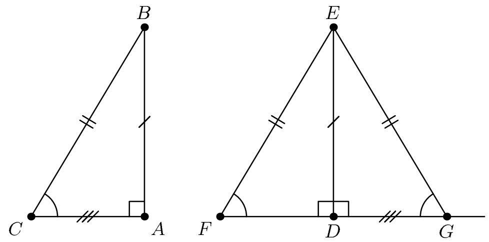
سپس E را به G وصل می‌کنیم. واضح است که $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{DEG}$. (چرا؟)



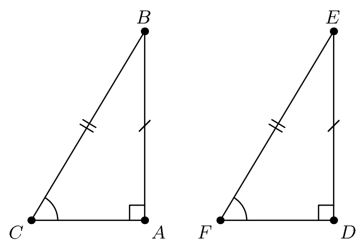
در نتیجه $BC = EG$ و همچنین $\widehat{C} = \widehat{G}$.



$BC = EG$ و همچنین $BC = EF$؛ در نتیجه $EF = EG$. پس می‌توان نتیجه گرفت $\widehat{F} = \widehat{G}$.



اکنون به دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{DEF}$ دقت کنید.



توانستیم ثابت کنیم که زاویه‌های C و F نیز با هم مساوی‌اند.

در نتیجه بنابر حالت «ض‌زز» می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث با هم مساوی‌اند.

پس توانستیم ثابت کنیم که:

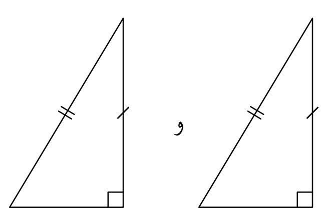
هرگاه دو مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک ضلع مساوی داشته باشند، آن دو مثلث با هم مساوی‌اند.

آنچه گذشت ...

دو مثلث قائم‌الزاویه با

هم برابرند

$\longrightarrow$



۱۴. ثابت کنید مجموع اندازه‌های هر دو زاویه از مثلثی کمتر از 180° است.

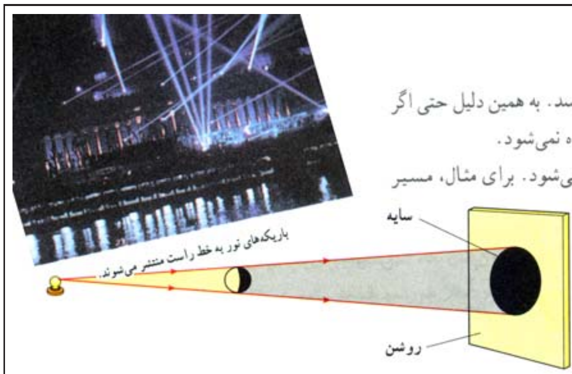
اصل

بعضی واقعیات در زندگی هستند که هیچ دلیلی برای آنها نمی‌توان آورد و اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا . . .؟*»، شما تنها کاری که می‌توانید انجام دهید این است که چشم در چشم سؤال کننده به او خیره شوید و با یک لبخند به او بگویید: «*با اینکه درست است، ولی دلیلی برای این واقعیت* وجود *ندارد!*»

به عنوان مثال اگر کسی از شما بپرسد: «*چرا نور خط راست را طی می‌کند؟*»، شما هیچ دلیلی برای آن نمی‌توانید بیاورید. قانون خلقت این است که نور خط راست را طی کند.

اما بعضی واقعیات در زندگی وجود دارند که برای آنها می‌توان دلیل آورد. یعنی اگر کسی از شما بپرسد که «*چرا . . .؟*»، شما به‌راحتی می‌توانید جواب سؤال کننده را بدهید.

به عنوان مثال اگر کسی از شما بپرسد: «*چرا وقتی در مقابل نور خورشید ایستاده‌ایم، سایه‌ی ما روی زمین می‌افتد؟*»، شما می‌توانید پاسخ دهید: «*چون نور خط راست را طی می‌کند.*»



نور به خط راست منتشر می‌شود

دانستیم که برای دیدن یک جسم باید از آن جسم نور به چشم ما برسد. به همین دلیل حتی اگر جسمی در مقابل ما باشد ولی نوری که از آن می‌تابد به چشم ما نرسد دیده نمی‌شود.

تجربه‌های روزانه‌ی ما نشان می‌دهد که نور به خط راست منتشر می‌شود. برای مثال، مسیر پرتوهای نور خورشید وقتی از پنجره به درون اتاق می‌تابد، یا از لابه‌لای بلند به زمین می‌رسد و یا از سوراخ یک سقف می‌تابد، نشانگر این است می‌شود.

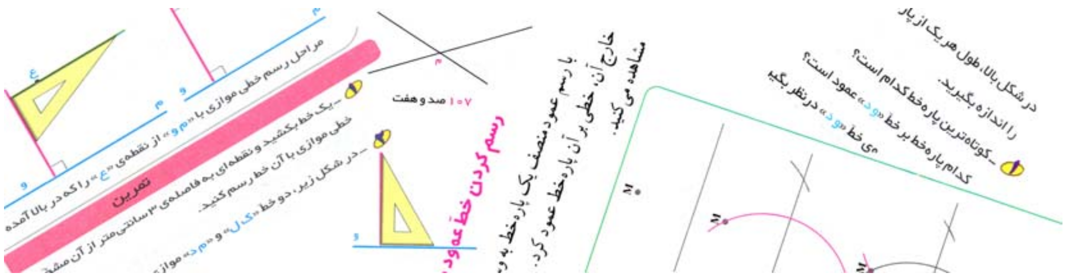
علت تشکیل سایه را با توجه به انتشار نور به خط راست، توضیح دهید.

> به واقعیات درستی که نتوان برای آنها دلیلی آورد و نتوان آنها را ثابت کرد، «**اصل**» می‌گویند.

در واقع حرکت نور در خط راست، یک اصل است.

در فصل دوم کتاب «علوم‌تجربی سال دوم راهنمایی» چه واقعیات دیگری را می‌توان به عنوان اصل بیان کرد؟

همه‌ی آنچه که تا کنون در هندسه آموخته‌اید، از چهار اصل نتیجه می‌شود.



اولین‌بار اقلیدس بوده که این چهار اصل را معرفی کرده است. اقلیدس زندگی جالبی دارد. برای آشنایی با او می‌توانید به «درباره‌ی اقلیدس» در وب‌گاه ریاضی مراجعه کنید.

بعد از اینکه اقلیدس گزاره‌ها و قضیه‌ها و واقعیات فراوانی را با این چهار اصل ثابت کرد، متوجه شد که یک واقعیت دیگری هم وجود دارد که نمی‌توان آن را ثابت کرد و آن را به عنوان پنجمین اصل در هندسه معرفی کرد.

سالیان سال ریاضیدانان و دانشمندان فراوانی تلاش کردند تا بتوانند اصل پنجم را ثابت کنند. یعنی معتقد بودند که اصل پنجم در واقع اصل نیست و می‌توان برای آن دلیل آورد. ولی تا به امروز کسی موفق به چنین کاری نشده است.

امروزه به این پنج اصل «*اصول اقلیدس*» می‌گویند. برای آشنایی با این اصول می‌توانید «اصول پنجگانه‌ی اقلیدس» را در وب‌گاه ریاضی ببینید.

سؤال. آیا جمله‌ی زیر را می‌توان به عنوان اصل پذیرفت؟

«دو *خط* عمود بر یک *خط*، *با هم موازی‌اند.*»

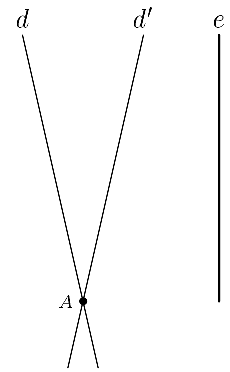
پنجمین اصل اقلیدس را می‌توان به گونه‌ای دیگر بیان کرد که به آن «اصل توازی» می‌گویند. در واقع اصل توازی همان اصل پنجم اقلیدس است.

اصل توازی. از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

در تمام قضایا و گزاره‌هایی که از این به بعد خواهید دید، می‌توانیم از «اصل توازی» استفاده کنیم.

گزاره‌ی سه خط موازی. اگر دو خط با یک خط موازی باشند، با یکدیگر موازی هستند. به عبارتی دیگر اگر $d \parallel e$ و $e \parallel d'$، آنگاه $d \parallel d'$.

برهان. می‌دانیم $d \parallel e$ و $e \parallel d'$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $d \parallel d'$. یعنی باید ثابت کنیم $d \nparallel d'$ درست نیست. اگر $d \nparallel d'$ درست باشد، یعنی d و d' با هم موازی نیستند و این یعنی همدیگر را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کنند.



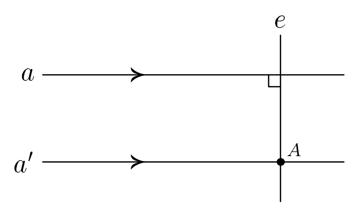
طبق فرض $d \parallel e$ و همچنین $e \parallel d'$. یعنی از نقطه‌ی A دو خط موازی با خط e رسم کرده‌ایم. از طرفی اصل توازی می‌گوید که از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. بنابراین d و d' نمی‌توانند با هم متقاطع باشند. پس d و d' با هم موازی هستند.

آنچه گذشت ...

$$d \parallel e \quad \text{و} \quad d' \parallel e \quad \longrightarrow \quad d \parallel d'$$

گزاره‌ی دو خط موازی و یک عمود. اگر مورّبی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است. به عبارتی دیگر اگر $a' \parallel a$ و $e \perp a$، آنگاه $e \perp a'$.

برهان. می‌دانیم $a' \parallel a$ و $e \perp a$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $e \perp a'$. یعنی باید ثابت کنیم e بر a' نیز عمود است.



ابتدا باید توجه کرد که e نمی‌تواند با a' موازی باشد؛ زیرا اگر داشته باشیم $a' \parallel e$، با توجه به این فرض که $a' \parallel a$، بنابر گزاره‌ی سه خط موازی، نتیجه می‌گیریم $a \parallel e$ که با فرض دیگرمان یعنی $e \perp a$ جور در نمی‌آید. بنابراین e و a' موازی نبوده و در نقطه‌ای مانند A متقاطع‌اند.

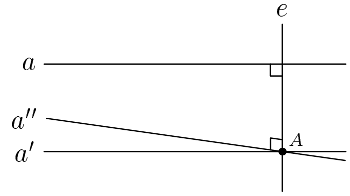
از نقطه‌ی A خط a'' عمود بر e را رسم می‌کنیم. در این صورت دو حالت ممکن است اتفاق افتد.

حالت اول: a' و a'' روی هم بیفتند.

حالت دوم: a' و a'' روی هم نیفتند.

نشان می‌دهیم که حالت دوم اتفاق نخواهد افتاد.

فرض کنید حالت دوم اتفاق بیفتد. یعنی a' و a'' روی هم نیفتند.



می‌دانیم خط a بر e عمود است $(a\perp e)$. همچنین خط a'' نیز بر e عمود است $(a''\perp e)$. بنابراین با توجه به قضیه‌ی «دو خط عمود بر یک خط»، دو خط a و a'' با هم موازی خواهند شد؛ یعنی $a \parallel a''$. از طرفی با توجه به فرض می‌دانیم که $a \parallel a'$. پس از نقطه‌ی A دو خط موازی با خط a داریم و این اشتباه است. زیرا اصل توازی می‌گوید که از یک نقطه در خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. بنابراین حالت دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

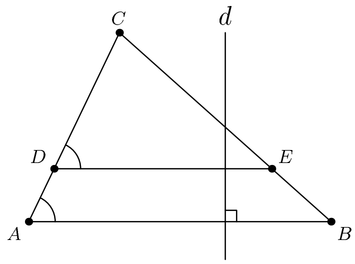
در نتیجه a' و a'' روی هم می‌افتند. بنابراین خط a' در نقطه‌ی A برخط e عمود خواهد بود؛ یعنی $e\perp a'$.

آنچه گذشت ...

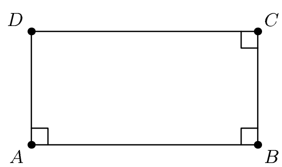
$$a \parallel a' \quad \text{و} \quad e\perp a \quad \longrightarrow \quad e\perp a'$$

تمرین

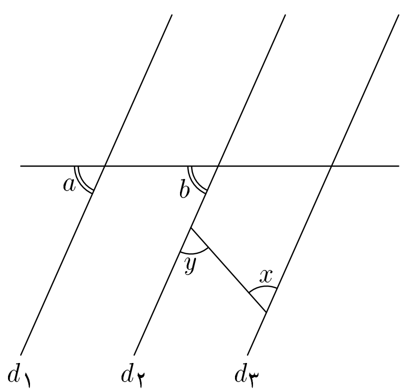
۱. در شکل زیر $\widehat{A} = \widehat{CDE}$ و $d \perp AB$ ؛ ثابت کنید $d \perp DE$.



۲. در چهار ضلعی $ABCD$ زاویه‌های $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمه هستند؛ ثابت کنید AD بر CD عمود است.

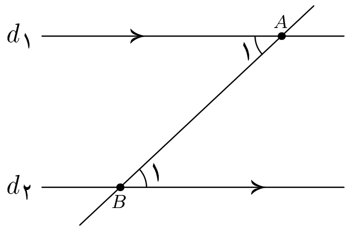


۳. در شکل زیر $\widehat{y} = \widehat{x}$ و همچنین $\widehat{a} = \widehat{b}$ ؛ ثابت کنید $d_۳ \parallel d_۱$.



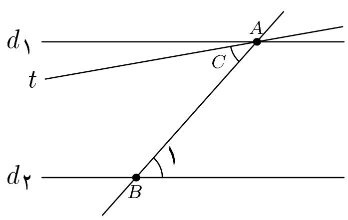
قضیه‌ی دو خط موازی و یک مورّب

اگر مورّبی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های متبادل درونی، مساوی خواهند شد. به عبارتی دیگر اگر $d_1 \parallel d_2$، آنگاه $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.



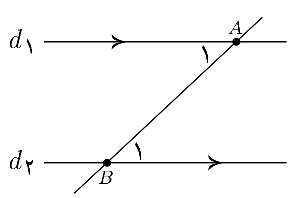
برهان. می‌دانیم $d_1 \parallel d_2$؛ می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

اگر زاویه‌های $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ مساوی نباشند، پس یکی از آنها از دیگری بزرگ‌تر است. فرض کنید $\widehat{A}_1$ از $\widehat{B}_1$ بزرگ‌تر باشد. پس خط t را چنان می‌توان از نقطه‌ی A رسم کرد به‌طوری که یک زاویه‌ی مساوی با $\widehat{B}_1$ به‌وجود آید. آن زاویه را C می‌نامیم.



چون $\widehat{B}_1 = \widehat{C}$، در نتیجه با توجه به قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی $d_2 \parallel t$ خواهد شد. از طرفی می‌دانیم که $d_1 \parallel d_2$. پس، از نقطه‌ی A دو خط موازی با d_2 رسم کرده‌ایم و این با اصل توازی جور در نمی‌آید. زیرا اصل توازی می‌گوید «از یک نقطه (مانند A) در خارج یک خط (مانند d_2)، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد». پس $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ نمی‌توانند با هم مساوی نباشند؛ در نتیجه $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

آنچه گذشت ...

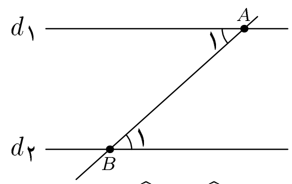


$d_1 \parallel d_2$

$\longrightarrow \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

دقت کنید

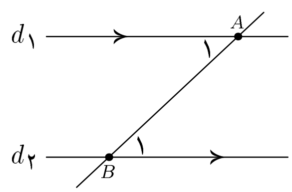
نتیجه‌ی یک ...



$\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

$\longrightarrow \quad d_1 \parallel d_2$

نتیجه‌ی دو ...



$d_1 \parallel d_2$

$\longrightarrow \quad \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$

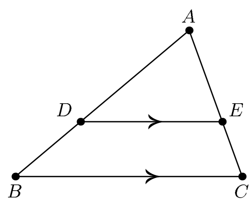
نتیجه‌ی یک از قضیه‌ی زاویه‌های متبادل درونی به‌دست آمده است. اگر به خاطر داشته باشید، این قضیه را قبل از بیان اصل توازی ثابت کردیم. یعنی برای اثبات آن، احتیاجی به قبول کردن اصل توازی نیست.

نتیجه‌ی دو که در واقع برعکس نتیجه‌ی یک است، از قضیه‌ی صفحه‌ی قبل به‌دست آمده است. این قضیه را با استفاده از اصل توازی توانستیم ثابت کنیم. اگر اصل توازی را قبول نکنیم، نمی‌توان این قضیه را ثابت کرد.

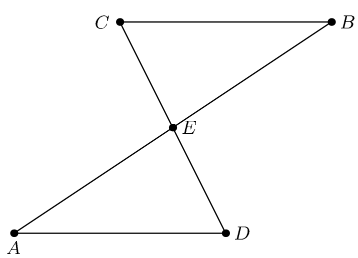
تمرین

۱. ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی رسم شود و دوساق آن را در دو نقطه‌ی دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی‌الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

۲. در شکل زیر $AB = BC$ و $DE \parallel BC$؛ ثابت کنید $AD = DE$.

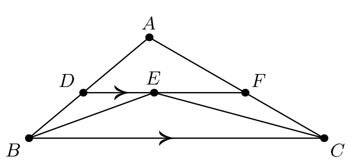


۳. در شکل زیر اگر $AD = CB$ و همچنین $AD \parallel CB$، ثابت کنید AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند.

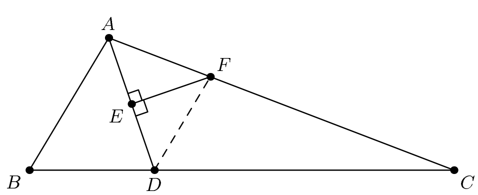


۴. باهمان شرایط سؤال قبل، ثابت کنید $DB \parallel AC$.

۵. مطابق شکل، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، BE نیمساز $\widehat{B}$، CE نیمساز $\widehat{C}$ و DF با BC موازی است. ثابت کنید محیط مثلث $\overset{\triangle}{ADF}$ برابر است با مجموع اندازه‌ی طول ضلع‌های AB و AC.



۶. مطابق شکل، در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، AD نیمساز $\widehat{A}$ و همچنین EF عمودمنصف AD است؛ ثابت کنید $AB \parallel DF$.



منابع و مراجع

[۱] توبیاس دانتزیگ، عدد زبان علم، ترجمه‌ی عباس گرمان، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۱

[۲] محمد بن موسی خوارزمی، جبر و مقابله، حسین خدیو جم، انتشارات اطلاعات، ۱۳۶۳

[۳] الکساندر پ. دوموریاد، در قلمرو ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، مؤسسه چاپ و انتشارات امیرکبیر، ۱۳۴۸

[۴] واسیلی د. چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، ۱۳۷۴

[۵] هاوارد ایوز، تاریخ ریاضیات، جلد اول ، ترجمه‌ی محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸

[۶] علیرضا توکلی صابری، از ریاضیات خود مطمئن شوید، جلد اول، دوم و سوم

[۷] خسرو داودی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷

[۸] د. فومین، س. گنکین و ا. ایتنبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه ی ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۶

[۹] جان دفت، درک مفاهیم ریاضی از طریق بازی‌های آموزشی، ترجمه‌ی حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه

[۱۰] سرژ لانگ و جین مورو، هندسه، ترجمه‌ی محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۵۷

[۱۱] مویز و دانز، هندسه، ترجمه‌ی محمود دیانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷

[۱۲] شه پان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۸۴

[۱۳] امیرحسین حمداوی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ عطار، ریاضیات پایه دوم راهنمایی، نشر سمپاد، ۱۳۸۷

[۱۴] ماروین ج. گرینبرگ، هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، ترجمه‌ی محمد هادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۳

[۱۵] آیزاک آسیموف، عدد، ترجمه‌ی ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۶۹.

[۱۶] اریک تمپل بل، ریاضی دانان نامی، چاپ چهارم، ترجمه‌ی حسن صفاری، مؤسسه‌ی انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۲.

[۱۷] دیوید برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه‌ی محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.

[۱۸] اویستن اور، گزیده‌هایی از نظریه اعداد، چاپ اول، ترجمه‌ی منوچهر وصال، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.

[۱۹] شه‌پان النسکی، درپی‌فیثاغورث، چاپ پنجم، ترجمه‌ی پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.

[۲۰] امیرحسین اصغری، وهرز پوراحمد، عرفان صفر و علی محمودی، محتوای تکمیلی ریاضیات سال اول راهنمایی، نشر سمپاد، چاپ ششم، تهران، ۱۳۸۳.

[۲۱] حمیدرضا زیارتی و اسماعیل رنگرز، معماهایی برای تیزهوشان، فرهیختگان دانشگاه، چاپ اول، تهران، بهار ۱۳۸۷.

[۲۲] تارل هاف، چگونه با آمار دروغ می‌گویند، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، چاپ اول، تهران، ۱۳۷۱.

[۲۳] استیون کرانس، فنون مسئله حل کردن، ترجمه مهران اخباری‌فر، انتشارات فاطمی، چاپ اول، تهران، ۱۳۷۹.

[24] Victor Klee and Stan Wagon, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991