فصل چهارم

اپراتور برداری نابلا و بحث‌های مربوط به آن

تعریف اپراتور برداری نابلا
گرادیان یک تابع اسکالر
دیورژانس یک تابع برداری
کرل یک تابع برداری
لاپلاسین یک میدان اسکالر
مشتق سویی (مشتق جهتی)
مجموعه تست اپراتور برداری نابلا

یادداشت:

تعریف اپراتور برداری نابلا

اپراتور (عملگر) برداری $\vec{\nabla}$ در مختصات دکارتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

چنانچه ملاحظه می‌کنیم، $\vec{\nabla}$ به خودی خود معنایی ندارد؛ بلکه، باید روی یک اسکالر یا بردار دیگر عمل می‌کند تا مفهوم مشخصی را دربرداشته باشد. برخی موارد کاربرد این اپراتور عبارتند از: گرادیان یک تابع اسکالر، دیورژانس و کرل یک تابع برداری و مشتق سویی.

توجه: در بحث‌های زیر هرگاه از کلمه «میدان» استفاده شده، بدین معنا است که کمیت مورد نظر می‌تواند به متغیرهای مکانی وابسته باشد؛ یعنی، تابعی از x , y , z است.

گرادیان یک میدان اسکالر

گرادیان تابع اسکالر $w = f(x , y , z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad}\, w=\vec{\nabla} w=\frac{\partial w}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial w}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}$$

توجه داریم که حاصل گرادیان یک میدان اسکالر، یک میدان برداری خواهد بود.

کاربرد مفهوم گرادیان

چنانچه معادله یک سطح (رویه) در فضا به‌صورت $F(x ,y, z)=0$ بیان شده باشد، بردار حاصل از گرادیان F در هر نقطه از رویه مورد نظر، در آن نقطه بر سطح عمود است؛ یعنی، اگر $P(x_0,y_0,z_0)$ نقطه‌ای از رویه $F(x ,y, z)$ باشد، بردار زیر:

$$\vec{\nabla}F\Big|_P=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0 , y_0 , z_0)\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 , y_0 , z_0)\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0 , y_0 , z_0)\vec{k}$$

در نقطه مذکور بر سطح رویه عمود خواهد بود.

با استفاده از این خاصیت می‌توان معادله صفحه مماس و معادله خط عمود بر یک سطح فضایی را در هر نقطه از آن نوشت؛ زیرا، طبیعی است $\vec{\nabla}F\Big|_P$ هم توصیف کننده بردار نرمال صفحه مماس در نقطه P و هم بیان کننده بردار هادی خط عمود در نقطه P می‌باشد؛ یعنی، می‌توان نوشت:

معادله صفحه مماس:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

معادله خط عمود:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

نکته: اگر معادله یک منحنی در فضا از طریق فصل مشترک دو رویه $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ بیان شده باشد و (x_0,y_0,z_0) نقطه‌ای از این منحنی باشد؛ طبیعی است:

$$\vec{N}_1=\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}\right)(x_0,y_0,z_0)$$

$$\vec{N}_2=\vec{\nabla}G(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{\partial G}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\hat{k}\right)(x_0,y_0,z_0)$$

نرمال‌های دو رویه را در نقطه مذکور نشان می‌دهند؛ لذا:

الف) $\vec{N}_1\times\vec{N}_2$ بردار هادی خط مماس را بر منحنی C در نقطه (x_0,y_0,z_0) بیان می‌کند.

ب) $\cos\theta=\dfrac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$ کسینوس زاویه بین دو رویه را در نقطه (x_0,y_0,z_0) بیان می‌کند.

نکته: خطوط مماس و صفحات قائم بر رویه در یک نقطه

کلیه صفحات گذرنده از خط قائم بر رویه در یک نقطه را صفحات قائم بر رویه و کلیه خطوط عمود بر خط قائم را که در صفحه مماس بر رویه واقعند، خطوط مماس بر رویه در آن نقطه می‌گوییم؛ لذا، اگر معادله خط قائم را به‌صورت فصل مشترک دو صفحه $Q=0$ و $P=0$ بنویسیم، رابطه $P+\alpha Q=0$ (α عددی ثابت و دلخواه است) معادله صفحات قائم را توصیف می‌کند و فصل مشترک صفحه $P+\alpha Q=0$ و صفحه مماس بر رویه، معادله خطوط مماس بر رویه را نشان خواهد داد.

دیورژانس یک میدان برداری

دیورژانس تابع برداری $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

توجه داریم حاصل دیورژانس یک میدان برداری، یک میدان اسکالر است.

مفهوم دیورژانس

دیورژانس یک میدان برداری در هر نقطه، وضعیت واگرایی خطوط میدان را مشخص می‌کند؛ بدین معنا که، در نقطه‌ای؛ مانند، $P(x_o, y_o, z_o)$ داریم:

الف) اگر $\operatorname{div}\vec{F}\big|_P > 0$ باشد؛ یعنی، خطوط میدان در حال واگرا شدن هستند.

ب) اگر $\operatorname{div}\vec{F}\big|_P < 0$ باشد؛ یعنی، خطوط میدان در حال همگرا شدن هستند.

ج) اگر $\operatorname{div}\vec{F}\big|_P = 0$ باشد؛ یعنی، خطوط میدان موازیند.

کرل یک میدان برداری

کرل تابع برداری $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{Curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

توجه داریم حاصل کرل یک میدان برداری، یک میدان برداری است.

نکته: می‌توان نشان داد، شرط لازم و کافی برای آنکه $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$ باشد، آن است که بتوان نوشت: $\left(\vec{F} = \vec{\nabla}\phi\right)$

که در این شرایط ϕ را تابع پتانسیل میدان برداری غیر چرخشی $\vec{F}$ می‌گویند.

اگر $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ یک میدان غیرچرخشی باشد، تابع پتانسیل آن را می‌توان از حل دستگاه زیر یافت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = R$$

مفهوم کرل

کرل یک میدان برداری در هر نقطه، وضعیت چرخش میدان را در آن نقطه مشخص می‌کند؛ بدین معنا که، در نقطه‌ای؛ مانند، $P(x_o, y_o, z_o)$ اگر $\operatorname{Curl}\vec{F}\big|_P$ مخالف صفر باشد؛ یعنی، میدان در آن نقطه، P چرخشی و اگر $\operatorname{Curl}\vec{F}\big|_P$ صفر باشد؛ یعنی، میدان در آن نقطه غیرچرخشی است.

چند اتحاد مهم

هرگاه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو میدان برداری و h, g, f توابعی حقیقی باشند، همواره داریم:

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}.\vec{A}+\vec{\nabla}.\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}.(h\vec{A})=(\vec{\nabla}h).\vec{A}+h(\vec{\nabla}.\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}h)=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=\nabla^2 h$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(h\vec{A})=(\vec{\nabla}h)\times\vec{A}+h(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$$

دیورژانس کرل هر میدان برداری، صفر است.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}h)=\underset{\sim}{0}$$

کرل گرادیان هر میدان اسکالر، بردار صفر است.

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\Delta(fg)=f\Delta g+2\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g+g\Delta f$$

لاپلاسین یک میدان اسکالر

لاپلاسین تابع اسکالر $w=f(x,y,z)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} w)=\Delta w=\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

توجه داریم که، حاصل لاپلاسین یک میدان اسکالر، یک میدان اسکالر است.

تعریف: می گوییم میدان اسکالر w هارمونیک است، هرگاه لاپلاسین آن صفر باشد.

همساز

مشتق سویی (مشتق جهتی)

مشتق سویی تابع اسکالری؛ مانند، $w=f(x,y,z)$ در یک جهت مشخص؛ مانند، $\vec{u}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dw}{d\vec{u}}=\vec{\nabla}w\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

توجه داریم که، حاصل مشتق سویی میدان اسکالر w در جهتی؛ مانند، $\vec{u}$ یک میدان اسکالر است که برای تعیین آن کافی است گرادیان w $(\vec{\nabla}w)$ و بردار یکه جهت $\vec{u}$ ؛ یعنی، $\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)$ را مشخص کرده و آنها را در هم ضرب داخلی نماییم.

نکته: با توجه به بحث‌های صورت گرفته در ضرب داخلی دو بردار داریم:

$$\frac{dw}{d\vec{u}}=\vec{\nabla}w\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=|\vec{\nabla}w|\cdot\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\cos\theta$$

که در آن θ زاویه بین دو بردار $\vec{\nabla}w$ و $\vec{u}$ می‌باشد و چون $\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|=1$ می‌باشد، به‌دست می‌آید:

$$\frac{dw}{d\vec{u}}=|\vec{\nabla}w|\cos\theta$$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر دو بردار $\vec{\nabla}w$ و $\vec{u}$ هم جهت باشند، $(\theta=0)$، مقدار مشتق سویی مورد نظر حداکثر بوده و برابر $\left|\vec{\nabla}w\right|$ می‌باشد.

ب) اگر دو بردار $\vec{\nabla}w$ و $\vec{u}$ مختلف الجهت باشند، $(\theta=\pi)$، مقدار مشتق سویی مورد نظر حداقل بوده و برابر $-\left|\vec{\nabla}w\right|$ می‌باشد.

ج) اگر دو بردار $\vec{\nabla}w$ و $\vec{u}$ بر هم عمود باشند، $(\theta=\frac{\pi}{2})$، مقدار مشتق سویی مورد نظر صفر می‌باشد (از نظر اندازه حداقل مقدار را دارد).

مفهوم مشتق سویی

همانطوری‌که می‌دانیم $\frac{\partial w}{\partial x}$، $\frac{\partial w}{\partial y}$ و $\frac{\partial w}{\partial z}$ میزان تغییرات تابع w را نسبت به متغیرهای x، y و z توصیف می‌کند.

مشتق سویی تابع w در جهتی مانند $\vec{u}$ در حقیقت شدت تغییرات تابع w را در جهت $\vec{u}$ مشخص می‌کند.

برای تشریح این موضوع فرض کنید برای تابعی؛ مانند، w در نقطه P، مقادیر مشتق سویی را در جهات $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ به‌دست آورده‌ایم، چنانچه $\left.\frac{dw}{d\vec{u}_2}\right|_P > \left.\frac{dw}{d\vec{u}_1}\right|_P$ باشد؛ شدت تغییرات کمیت w در نقطه P در جهت $\vec{u}_1$ از شدت تغییرات کمیت w در نقطه P در جهت $\vec{u}_2$ بیشتر است؛ همچنین، توجه داریم اگر علامت مشتق سویی مثبت باشد، بدین معنا است که مقدار کمیت w در حال افزایش و چنانچه علامت مشتق سویی منفی باشد؛ یعنی، مقدار کمیت w در حال کاهش بوده است.

مجموعه تست اپراتور برداری نابلا

۱ـ گرادیان تابع $w = ze^{\frac{x}{y}}$ روی کدام سطح زیر بر بردار (1 و 1 و1) عمود است؟

۱) $z=\dfrac{y}{x-y}$ ۲) $z=\dfrac{x}{x-y}$ ۳) $z=\dfrac{y^2}{x-y}$ ۴) $z=\dfrac{x^2}{x-y}$

حل :

$$\operatorname{grad} w=\frac{\partial w}{\partial x}i+\frac{\partial w}{\partial y}j+\frac{\partial w}{\partial z}k=\frac{z}{y}e^{\frac{x}{y}}i-\frac{zx}{y^2}e^{\frac{x}{y}}j+e^{\frac{x}{y}}k$$

شرط تعامد grad w و بردار (1 , 1 , 1) می‌طلبد ضرب داخلی آن‌ها صفر باشد؛ یعنی:

$$\frac{z}{y}e^{\frac{x}{y}}-\frac{zx}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{y}}=0 \;\rightarrow\; \frac{z}{y}-\frac{zx}{y^2}+1=0$$

$$\rightarrow\; zy-zx+y^2=0 \;\rightarrow\; z=\frac{y^2}{x-y}$$

۲ـ دو رویه $x+2y-\ln z+4=0$ و $x^2-xy-8x+z+5=0$ در نقطه $(2,-3,1)$:

۱) بر هم مماسند. ۲) بر هم عمودند.

۳) با هم زاویه $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$ دارند. ۴) با هم زاویه $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3}\right)$ دارند.

حل :

$$F(x\,,\,y\,,\,z)=x+2y-\ln z+4$$

$$\rightarrow\; \vec{\nabla}F=(1)i+(2)j+\left(\frac{-1}{z}\right)k \;\rightarrow\; \vec{N}_1=\vec{\nabla}F(2,-3,1)=i+2j-k$$

$$G(x\,,\,y\,,\,z)=x^2-xy-8x+z+5$$

$$\rightarrow\; \vec{\nabla}G=(2x-y-8)i+(-x)j+(1)k \;\rightarrow\; \vec{N}_2=\vec{\nabla}G(2,-3,1)=-i-2j+k=-\vec{N}_1$$

چون $\vec{N}_1\,,\,\vec{N}_2$ با هم موازیند، دو رویه مذکور در نقطه تقاطع $(2,-3,1)$ بر هم مماسند.

۳ـ معادله خط مماس بر منحنی فصل مشترک دو رویه $\begin{cases}F: z^2+x^2+y^2-xy-2=0\\ G: z+x^2-y^2-1=0\end{cases}$

در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

۱) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ ۲) $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$

۳) $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$ ۴) $\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$

حل :

نرمال‌های دو رویه را می‌یابیم:

$$\vec{\nabla}F=(2x-y)i+(2y-x)j+2zk \quad\rightarrow\quad \vec{N}_1=\vec{\nabla}F\Big|_{(1,1,1)}=i+j+2k$$

$$\vec{\nabla}G=(2x)i+(-2y)j+(1)k \quad\rightarrow\quad \vec{N}_2=\vec{\nabla}G\Big|_{(1,1,1)}=2i-2j+k$$

لذا، بردار هادی خط مماس بر منحنی فصل مشترک چنین است:

$$\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=5i+3j-4k$$

پس، معادله خط مماس به فرم زیر می‌باشد:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-4}$$

۴ ـ در چه نقطه‌ای از سطح $x^2+y^2+4z^2=1$، خط قائم با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد؟

۱) $\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}\right)$ ۲) $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}\right)$

۳) $\left(\pm\frac{\sqrt{11}}{4},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{8}\right)$ ۴) هیچ کدام

حل :

اگر نقطه موردنظر را (α,β,γ) بنامیم، از آنجاکه $F:x^2+y^2+4z^2-1=0$ داریم:

$$\vec{\nabla}F=2xi+2yj+8zk$$

بنابراین، بردار هادی خط مورد نظر چنین است:

$$\vec{u}=2\alpha\hat{i}+2\beta\hat{j}+8\gamma\hat{k}$$

اگر بخواهیم خط قائم با محورهای مختصات زاویای مساوی بسازد، باید:

$$2\alpha=2\beta=8\gamma \quad\rightarrow\quad \alpha=\beta=4\gamma$$

حال، از آنجاکه نقطه (α,β,γ) باید در سطح رویه داده شده واقع باشد، لازم است مختصات این نقطه در معادله $x^2+y^2+4z^2=1$ صدق کند، پس باید:

$$\alpha^2+\alpha^2+4\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2=1 \quad\rightarrow\quad \frac{9\alpha^2}{4}=1 \quad\rightarrow\quad \alpha=\pm\frac{2}{3}$$

یعنی نقاط موردنظر عبارتند از:

$$\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}\right)$$

۵ ـ در کدام نقاط از بیضوی $x^2+4y^2+\frac{z^2}{4}=1$ صفحه مماس، بر روی محورهای مختصات پاره‌خط‌های مساوی جدا می‌کند؟

۱) $\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$ ۲) $\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{4}{3}\right)$

۳) چنین نقطه‌ای وجود ندارد. ۴) هیچ‌کدام

حل :

$$F: x^2+4y^2+\frac{z^2}{4}-1 \rightarrow \vec{\nabla}F = 2x\,i+8y\,j+\frac{z}{2}k$$

اگر نقطه موردنظر را (α,β,γ) فرض کنیم، داریم:

بردار نرمال صفحه مماس: $\vec{\nabla}F(\alpha,\beta,\gamma)=\vec{N}=2\alpha\,i+8\beta\,j+\frac{\gamma}{2}k$

لذا صفحه مماس موردنظر چنین است:

$$2\alpha(x-\alpha)+8\beta(y-\beta)+\frac{\gamma}{2}(z-\gamma)=0 \rightarrow 2\alpha x+8\beta y+\frac{\gamma}{2}z-2\alpha^2-8\beta^2-\frac{\gamma^2}{2}=0$$

و چون نقطه (α,β,γ) در معادله $x^2+4y^2+\frac{z^2}{4}=1$ صدق می‌کند، لازم است که:

$$2\alpha x+8\beta y+\frac{\gamma}{2}z-2\left(\alpha^2+4\beta^2+\frac{\gamma^2}{4}\right)=0$$

$$\alpha^2+4\beta^2+\frac{\gamma^2}{4}=1$$

پس، معادله صفحه مماس چنین است:

$$\boxed{2\alpha x+8\beta y+\frac{\gamma}{2}z-2=0}$$

در جایی که این صفحه محورهای مختصات را قطع می‌کند، داریم:

محل تقاطع با محور x: $y=z=0 \rightarrow x=\frac{1}{\alpha}$

محل تقاطع با محور y: $x=z=0 \rightarrow y=\frac{1}{4\beta}$

محل تقاطع با محور z: $x=y=0 \rightarrow z=\frac{4}{\gamma}$

و ما می‌خواهیم:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{4\beta}=\frac{4}{\gamma} \rightarrow \alpha=4\beta=\frac{\gamma}{4}$$

با جایگذاری در معادله رویه داریم:

$$\alpha^2+4\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2+\frac{(4\alpha)^2}{4}=1 \rightarrow \alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{21}}$$

یعنی، نقطه مورد نظر $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{21}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{21}}, \pm\frac{8}{\sqrt{21}}\right)$ است.

۶ـ مشتق سویی تابع $f(x,y)$ در نقطه $(1,1)$ در جهت $\vec{u}_1 = 5i$ برابر 3 و در جهت $\vec{u}_2 = 3i - 4j$ برابر $\frac{1}{5}$ شده است، مشتق سویی این تابع در نقطه مذکور در جهت $\vec{u} = i + j$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{7}{\sqrt{2}}$

حل :

اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = a$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = b$ فرض شود، با توجه به تعریف مشتق سویی، از فرض‌های مساله نتیجه می‌شود:

$$\frac{df}{d\vec{u}_1} = 3 \rightarrow \vec{\nabla} f(1,1) \cdot \vec{\lambda}_{\vec{u}_1} = 3 \rightarrow (ai + bj).(i) = 3 \rightarrow a = 3$$

$$\frac{df}{d\vec{u}_2} = \frac{1}{5} \rightarrow \vec{\nabla} f(1,1) \cdot \vec{\lambda}_{\vec{u}_2} = \frac{1}{5} \rightarrow (ai + bj) \cdot \left(\frac{3i - 4j}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\rightarrow \frac{3a - 4b}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow 3a - 4b = 1 \xrightarrow{a=3} b = 2$$

لذا، می‌توان نوشت:

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \vec{\nabla} f_{(1,1)} \cdot \vec{\lambda}_{\vec{u}} = (3i + 2j) \cdot \left(\frac{i + j}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

۷ـ توزیع دما در هرنقطه از صفحه‌ای با رابطه $F(x,y) = x\ln y - y\ln x$ بیان شده است. در نقطه $(1,e)$، بیشترین شار حرارتی در کدام جهت جاری می‌شود؟

۱) $(1-e)i + \frac{1}{e}j$ ۲) $(1+e)i - \frac{1}{e}j$

۳) $\frac{1}{e}i + (1-e)j$ ۴) $\frac{1}{e}i - (1+e)j$

حل :

$$F(x,y) = x\ln y - y\ln x \rightarrow \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j = \left(\ln y - \frac{y}{x}\right) i + \left(\frac{x}{y} - \ln x\right) j$$

در نقطه $(1,e)$ داریم:

$$\vec{\nabla} F = \left(\ln e - \frac{e}{1}\right) i + \left(\frac{1}{e} - \ln 1\right) j = (1-e) i + \left(\frac{1}{e}\right) j$$

و البته، بیشترین شار حرارتی در جهتی اتفاق می‌افتد که بیشترین مشتق سویی تابع F را داشته باشیم و این خود در جهت بردار $\vec{\nabla} F$ حاصل می‌شود؛ یعنی، جهت موردنظر $(1-e)i + \frac{1}{e}j$ خواهد بود.

۸- مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=z^{xy}$ در نقطه $(1,1,e)$ در جهت برداری که با محورهای مختصات زاویه یکسان می‌سازد، عبارت است از:

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2e+1)$ ۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2e-1)$ ۳) $\sqrt{3}(2e+1)$ ۴) $\sqrt{3}\,(2e-1)$

حل :

می‌دانیم چنانچه زاویه یک بردار با محورهای x و y و z به ترتیب α و β و γ باشد، داریم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

در این مسأله چون زاویه بردار موردنظر با هر سه محور یکسان است، خواهیم داشت:

$$\cos^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{\pm1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین، بردار یکه امتداد مورد بحث (با توجه به حاده بودن θ) عبارت است از:

$$\vec{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$$

اما، گرادیان تابع f به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec{\nabla}f=yz^{xy}\ln|z|i+xz^{xy}\ln|z|j+xyz^{xy-1}k\Rightarrow\vec{\nabla}f\Big|_{(1,1,e)}=ei+ei+k$$

لذا، مشتق‌سویی موردنظر برابر است با:

$$Df_{\vec{\lambda}}=(ei+ej+k).\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)=\frac{1}{\sqrt{3}}(2e+1)$$

۹- در تابع $w=x^3+y^2z$ حاصل $\operatorname{div}(\operatorname{grad} w)$ در نقطه $x=1\,,\,y=2\,,\,z=-1$ کدام است؟

۱) 8 ۲) صفر ۳) -6 ۴) 4

حل :

$$\operatorname{grad} w=\frac{\partial w}{\partial x}i+\frac{\partial w}{\partial y}j+\frac{\partial w}{\partial x}k=\left(3x^2\right)i+(2yz)j+\left(y^2\right)k \quad\to$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} w)=\frac{\partial(3x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(2yz)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2)}{\partial z}=(6x)+(2z)+(0)=6x+2z$$

و در نقطه $x=1\,,\,y=2\,,\,z=-1$ حاصل فوق برابر $6(1)+2(-1)=4$ می‌باشد.

۱۰- اگر $\vec{w}=\left(x^2+yz\right)i$ باشد، کرل کرل تابع $\vec{w}$ در نقطه $x=y=1\,,\,z=2$ کدام است؟

۱) $\vec{i}-\vec{j}$ ۲) $2\vec{j}+\vec{k}$ ۳) $\vec{i}-\vec{k}$ ۴) بردار صفر $(\vec{0})$

حل :

$$\operatorname{curl}\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+yz & 0 & 0 \end{vmatrix}=i(0)-j(0-y)+k(0-z)=y\vec{j}-z\vec{k}$$

و لذا، به‌دست می آید:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\vec{w})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & y & -z \end{vmatrix}=i(0-0)-j(0-0)+k(0-0)=\vec{0}$$

۱۱ ـ لاپلاسین تابع $w=x\ln y+y^2\ln z$ در نقطه $(1,1,1)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) -2 ۴) 1

حل :

$$w=x\ln y+y^2\ln z\ \rightarrow\ \begin{cases} w_x=\ln y\ \rightarrow\ w_{xx}=0 \\ w_y=\frac{x}{y}+2y\ln z\ \rightarrow\ w_{yy}=\frac{-x}{y^2}+2\ln z \\ w_z=\frac{y^2}{z}\ \rightarrow\ w_{zz}=\frac{-y^2}{z^2} \end{cases}$$

لذا:

$$\Delta w=w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}=(0)+\left(\frac{-x}{y^2}+2\ln z\right)+\left(\frac{-y^2}{z^2}\right)$$

در نقطه $(1,1,1)$ داریم:

$$\Delta w=-1+0-1=-2$$

یادداشت: