

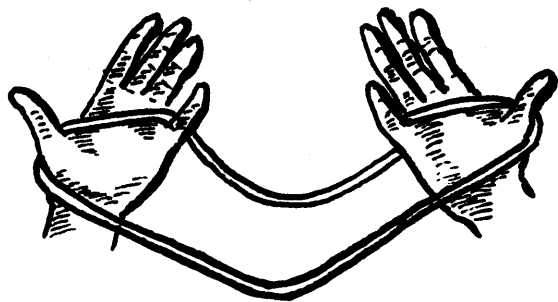
ملا گفت: بیشتر عمرت تلف شده است چون قدرت تمرکز حواست را خیلی کم به کار برده‌ای. اگر توانستی این دستورهای ساده را بخوانی و یاد بگیری، آنوقت تمرکز حواست تازه متوسط است. اگر همه را از حفظ شدی، آنوقت یکریال به تومی دهم.

هنر نخ بازی قسمتی از فرهنگ دنیاست. هر گوشه از کره زمین نقشه‌ای تازه به این هنر می‌افزاید. چندین کتاب و مقاله در این باره نوشته شده است که معمولاً جنبهٔ جامعه‌شناسی و مردم‌شناسی دارد. یکی دو کتاب دستوردقیق ساختن این شکلها را دارد. در این مقاله جنبهٔ ریاضی آنرا بررسی می‌کنیم [۱]، [۲]. دو موضوع را به‌ویژه در نظر گرفته‌ایم: یکی ابداع فرمول برای ساختن شکلها و دیگری موضوع استقرار ریاضی در این هنر.

۱- شکلهای باواری: در این بخش شکلهای ساده‌ایکه از ردیفی از لوزیها درست می‌شوند بررسی می‌کنیم.

۱-۱ توجیه: شکلهائیکه در این مقاله به نظر خواننده می‌رسد نمایش وضعی است که شخص دستهای خود را می‌بیند. اینرا حال عادی گوئیم. نزدیک شخص را درون و طرف مخالف را بیرون یک شکل گوئیم. نخها را از درون به بیرون، نزدیک انگشتهای، شماره می‌گذاریم. واژه‌های دیگر رابه معنی عادی آنها به کار خواهیم برد.

۲-۱ آغاز A: تکه نخ را که به قدر کافی ضخیم باشد می‌گیریم و دو سر آنرا به هم گره می‌زنیم. هر گاه نخ نایلونی بگیریم و دوسر آنرا به هم با آتش



شکل ۱

دکتر علیرضا امیر معز

مقدمات جبر بازی بانخ



شخصی به ملا نصرالدین گفت: ملا بچه شدی!! نخ بازی

می‌کنی!؟

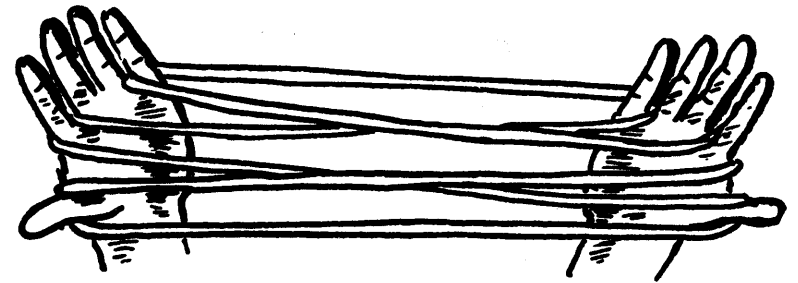
جوش بدهیم، بهتر است. نخ را روی شست و انگشت کوچک دست چپ می گذاریم. سپس طرف دیگر نخ را روی شست و انگشت کوچک دست راست می گذاریم (شکل ۱). اکنون انگشت نشانه دست راست را زیر نخی که روی کف دست



شکل ۲

شکل ۳

چپ است می بریم (شکل ۲). این نخ را می کشیم و دو دست را کاملاً روبه روی هم نگاه می داریم. سپس انگشت نشانه چپ را زیر نخی که روی کف دست راست است. درست مثل (شکل ۳) - می بریم، آنرا بیرون می کشیم و



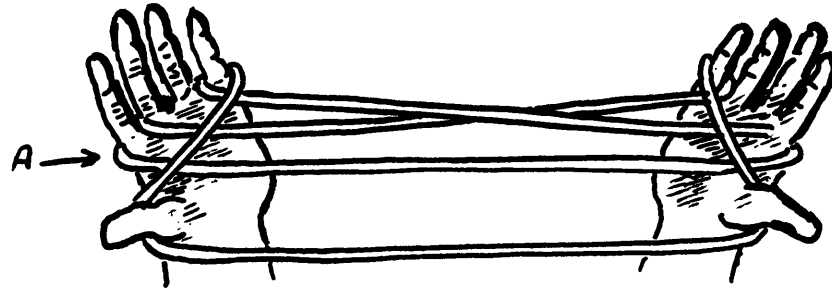
شکل ۴

دو دست را روبروی یکدیگر قرار می دهیم. شکلی که بدست می آید آغاز A:

نامیده می شود (شکل ۴).

۱-۳ رها کردن يك انگشت: رها کردن يك انگشت، در واقع، رها کردن نخ دور آن انگشت است. بسیار اتفاق می افتد که در ساختن يك شکل، نخي را رها می کنیم. این یا با تا کردن آن انگشت انجام می گیرد یا به کمک انگشتهای دیگر.

۱-۴ تعویض: معمولاً برای ساختن شکل‌های لوزی دار از آغاز A شروع می کنیم. اکنون پس از آغاز A شست‌ها را رها می کنیم شست‌ها را روی نخهای يك، دو، سه و زیر نخ چهار می بریم. با شست‌ها نخ چهار را بر می داریم و دست‌ها



شکل ۵

را به صورت عادی بر می گردانیم (شکل ۵)

اکنون تعویض را برای انگشت نشانه و شست دست چپ شرح می دهیم:

۱- با شست و انگشت نشانه دست راست نخي که در شکل ۵ با A نشان داده ایم می گیریم و آنرا می کشیم تا روی شست دست چپ قرار گیرد (شکل ۶).

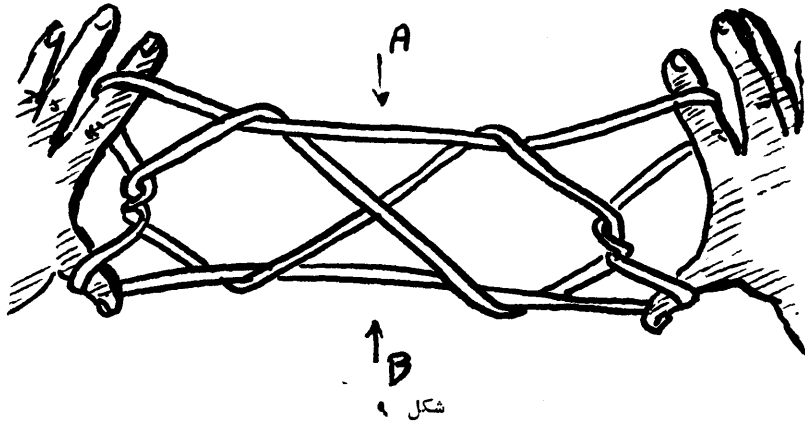
۱۱- سپس نخي که در شکل ۶ با B نشان داده ایم با شست و انگشتهای نشانه دست راست می گیریم و بین شست و انگشت نشانه دست چپ می اندازیم (شکل ۷).

آنچه تا اینجا تشریح شد تعویض چپ می نامیم. تعویض راست هم کاملاً شبیه تعویض چپ است. آنرا به خواننده واگذار می کنیم.

۱-۵ گرفتن مثلث: فرض کنیم که تا حرکت‌هاییکه در بخش ۴-۱ بررسی شده است، رسیده ایم. سپس دست‌ها را به طرف خود می گردانیم تا کف آنها را بخوبی ببینیم. روی کف‌های دست دو شکل مثلث مانند دیده می

بیرون بیاید. نخهائیکه زیر انگشتهای نشانه اند باید همانجا بمانند که سپس به دور این انگشتها قرار گیرند. همه نخهای دیگر را رها می کنیم. آرنجها را تا سطح شانه بالا می بریم. کفهای دست را روی زمین می کنیم. نخهائیکه زیر انگشتهای نشانه بودند، اکنون به آن قلاب می شوند. انگشتها را با دقت باز می کنیم و سپس دستها را از هم دور می کنیم. تمام اینها را گسترش شکل گوئیم. در بخش بعد، بویژه، برای ساختن شکل دولوزی دوباره گسترش شکل را بررسی می کنیم. پس از تمرین مختصر تمام حرکتها به طور پیوسته پشت سرهم انجام می شوند.

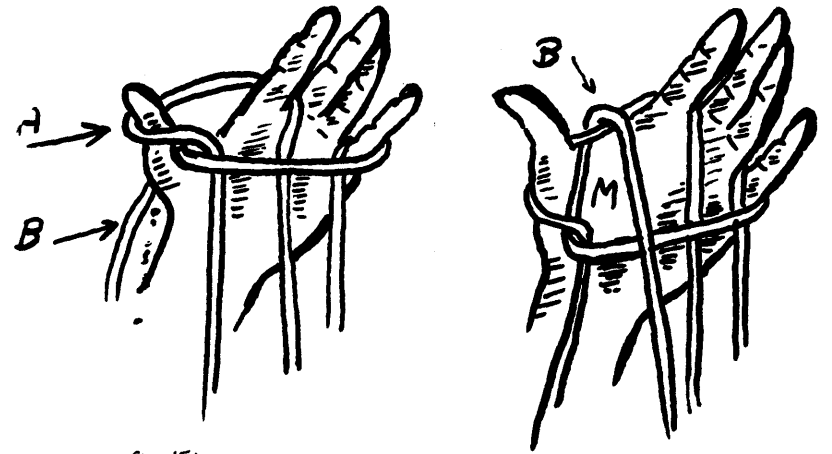
۷-۱ شکل دولوزی: با آغاز A شروع می کنیم و شستها را رها می کنیم. شستها را روی نخهای یک، دو، سه و زیر نخ چهار می بریم. با شستها نخ چهارا برمی داریم و دستها را بحال عادی برمی گردانیم.



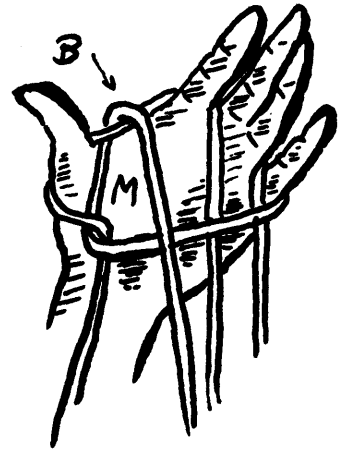
شکل ۹

سپس تعویض راست و تعویض چپ می کنیم. آنگاه مثلث گیری می کنیم و شکل را گسترش می دهیم (شکل ۹). دوباره متذکر می شویم که برای گسترش شکل دقت زیاد لازم است. پس از مثلث گیری، انگشتهای نشانه را به کف دست فشار می دهیم تا اینکه آرنجها را بالا ببریم و کفهای دست رو به زمین شود. آنگاه انگشتها را دراز می کنیم: سپس دستها را از هم دور می کنیم.

۸-۱ نردبان یعقوب: این شکل چهارلوزی دارد و در بیشتر دنیا شناخته شده است. با آغاز A شروع می کنیم و شستها را رها می کنیم. شستها زیر تمام نخهای رو و دو با آن کف دستها را به طرف بیرون می بریم که کار آسانتر شود. با

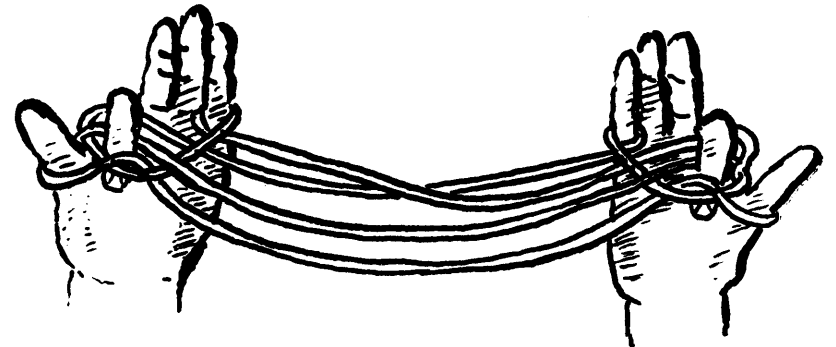


شکل ۶



شکل ۷

شوند. در شکل ۷ آنرا با M نمایش داده ایم. انگشتهای نشانه هر دست را درون مثلث مربوطه می بریم و این انگشتها را به کف دست می چسبانیم. سعی می کنیم که از کف دست تا حرکت بعدی جدا نشود (شکل ۸)، این حرکت را گرفتن مثلث گوئیم. ۶-۱ گسترش شکل: در تمام شکلهای بالوزی، آخرین حرکت راکه با آن شکل کامل می شود گسترش شکل گوئیم. این حرکت دقت بیشتری لازم دارد. شستها را به طرف بالا نگاه می داریم و نمی گذاریم نخهائیکه در شستهاست



شکل ۸

شستها نخ چهارم را می گیریم و آنرا از زیر همه نخها به داخل می آوریم. سپس شستها را روی نخ دوم و وزیر نخ سوم می گذاریم. نخ سوم را با شستها برمی داریم و دستها را به حال عادی در می آوریم. آنگاه انگشتهای کوچک را رها می کنیم. اکنون انگشتهای کوچک را دوری نخ چهارم و وزیر نخ سوم می بریم. با انگشتهای کوچک نخ سوم را برمی داریم دستها را به حال عادی می آوریم. شستها را رها می کنیم. شستها را روی نخ يك، نخ دو و وزیر نخ سه می بریم. با شستها نخ سوم را برمی داریم و دستها را به حال عادی می آوریم اکنون مثلث گیری می کنیم و شکل را گسترش می دهیم (شکل ۱۰). به این ترتیب نردبان یعقوب یا شکل چهارلوزی بدست می آید.

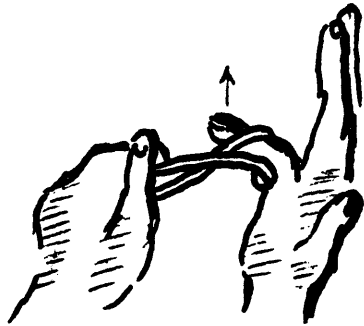


شکل ۱۱

شکل ۱۲

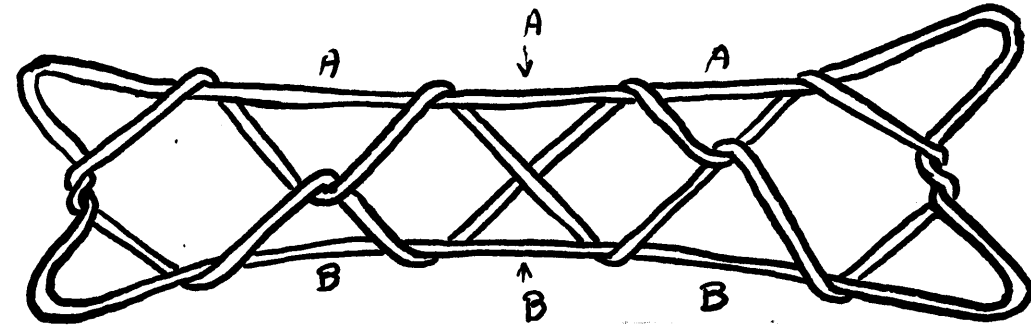
درون می آوریم (شکل ۱۲). آنگاه این انگشت را از طرف درون دونخ به حالت عادی برمی گردانیم. روشن است که تاب رامی توان به نخ هر انگشت داد.

تاب درون بسیار شبیه تاب بیرون است، فقط انگشت را به طرف درون می آوریم و از زیر دونخ انگشت به طرف بیرون می بریم. سپس انگشت را به حالت عادی برمی گردانیم (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

۱۱-۱- شکل بایک لوزی: با آغاز شروع می کنیم. شستها را رها می کنیم. شستها را روی نخ يك، نخ دو، نخ سه و زیر نخ چهارم می بریم. با شستها نخ چهارم را بر می داریم و دستها را به حالت عادی بر می گردانیم. آنگاه به



شکل ۱۰

۹-۱ باز کردن شکل: برای اینکه نخ گره نخورد شکل را روی زمین می گذاریم. در شکل ۱۰ و ۹ بعضی نقاط را با A نمایش داده ایم و برخی را با B: يك A و يك B که روبه روی هم اند می گیریم و می کشیم. به این ترتیب نخ بدون گره خوردن بحالت اولش برمی گردد.

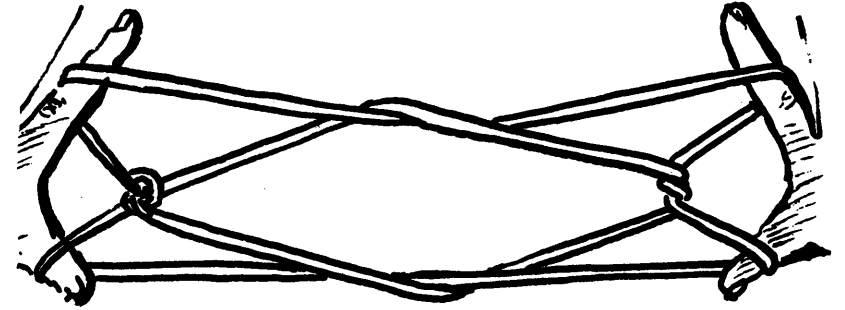
۱۰-۱- تاب بیرون و تاب درون: تاب بیرون يك انگشت شامل دو قسمت است. به عنوان مثال تاب بیرون را برای نخ انگشت نشانه راست شرح می دهیم:

I- با شست و انگشت نشانه دست چپ دو سر نخ دور انگشت نشانه راست را نگاه می داریم (شکل ۱۱).

II- سر انگشت نشانه راست را به طرف بیرون روی نخ بیرونی این انگشت می بریم.

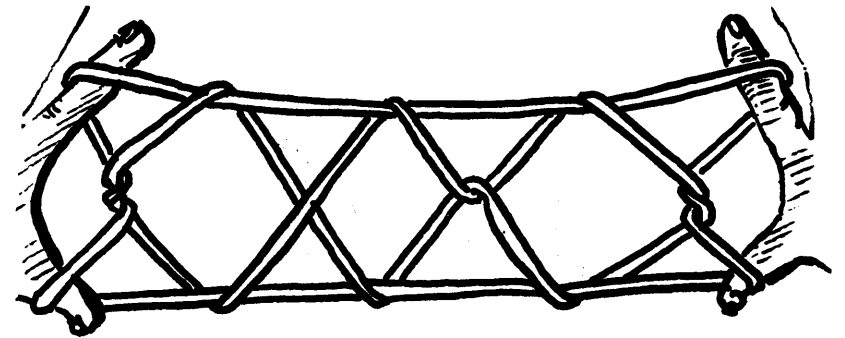
سپس انگشت نشانه راست را از زیر هر دو نخ این انگشت به طرف

انگشت نشانه وشست راست و درون می‌دهیم و سپس تعویض راست و تعویض چپ و مثلث‌گیری می‌کنیم. آنگاه شکل را گسترش می‌دهیم. بهمین ترتیب شکل بایک لوزی بدست می‌آید (شکل ۱۴)



شکل ۱۴

۱-۱۲ شکل سه‌لوزی: با آغاز A شروع می‌کنیم وشستها را رها می‌کنیم وشستها را روی نخ يك، نخ دو، نخ سه وزیر نخ چهار می‌بریم. با شستها نخ چهار را برمی‌داریم. آنگاه به انگشت نشانه وشست چپ تاب بیرون می‌دهیم. سپس تعویض راست و تعویض چپ می‌کنیم. آنگاه مثلث‌گیری می‌کنیم و شکل را گسترش می‌دهیم (شکل ۱۵). به این ترتیب شکل با سه لوزی حاصل می‌شود.



شکل ۱۵

۲. روش نمادی: هر گاه انگشتها و حرکات را با نمادها نشان دهیم و چند علامت دیگر به آن اضافه کنیم، برای شکلهای بانخ می‌توان فرمول نوشت.

۲-۱ نماد انگشتها: به انگشتها علامتهای زیر را نسبت می‌دهیم:

B_1 راست	} انگشت نشانه	A_1 راست	} شست
B_2 چپ		A_2 چپ	
D_1 راست	} انگشت حلقه	C_1 راست	} انگشت میانه
D_2 چپ		C_2 چپ	
E_1 راست	} انگشت کوچک		
E_2 چپ			

هر گاه دو انگشت نظیر را به کار ببریم آنرا با يك حرف نمایش می‌دهیم مثلا A یعنی شستها، B یعنی دو انگشت نشانه، ...

۲-۲ نماد نخها: نخها را با x نمایش می‌دهیم و شمار آنرا زیر آن می‌نویسیم $[1-1]$ ؛ مثلا x_1, x_2, \dots یعنی نخ اول، نخ دوم و ...

۲-۳ نماد حرکات: حرکات را با علامتهای زیر نمایش می‌دهیم:

$a \dots A$ آغاز	$b_1 \dots$ تعویض راست
$b_2 \dots$ تعویض چپ	$c_1 \dots$ تاب بیرون
$c_2 \dots$ تاب درون	مثلث‌گیری $3 \dots$
$d \dots$ گسترش شکل	برداشتن يك نخ $e \dots$
$h \dots$ رها کردن انگشت	به حالت عادی در آوردن دست $k \dots$

۲-۴ ر: بطه بین انگشتها و حرکات: هر گاه حرکتی را برای نخي انجام دهیم، نماد حرکت را پیش از نماد نخ می‌نویسیم. مثلا (ex_2) یعنی نخ چهارم را برمی‌داریم. هر گاه حرکت را با انگشتی انجام دهیم، نماد انگشت را اول می‌نویسیم، بعد از آن يك نقطه «.» می‌گذاریم و سپس حرکت و نخ را رami می‌نویسیم. مثلا، $(A.ex_2)$ یعنی باشستها نخ چهارم را برمی‌داریم.

هر گاه حرکتی را روی يك انگشت انجام دهیم، اسم انگشت را می‌نویسیم، بعد از آن يك دو نقطه «.» می‌گذاریم و سپس حرکت را می‌نویسیم. مثلا $(B_1: C_2)$ یعنی به انگشت نشانه راست يك تاب درون می‌دهیم. علامت «+» را برای رو و علامت «-» را برای زیر يك نخ بکار می‌بریم.

مثلا $(E + x_2 - x_3)$ یعنی انگشتهای کوچک را روی نخ چهارم و زیر نخ سوم می‌بریم.

۲-۵ فرمولها: يك فرمول عبارتست از يك رشته نمادها که با «و»

به هم متصل شده اند و با «.» ختم می شوند. مثلاً:

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 + x_2 - x_3 - x_4.$$

یعنی با آغاز A شروع می کنیم و شستها را رها می کنیم. سپس شستها را روی نخ یک، نخ دو و زیر نخ سه و نخ چهار می بریم. اکنون فرمول شکلهاییکه تاکنون شرح داده ایم می نویسیم.

I- شکل يك لوزی:

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \text{ و } A.e.x_4 \text{ و } k, B_1 : C_2 \text{ و } A_1 : d. \text{ و } 3 \text{ و } b_2 \text{ و } b_1 \text{ و } c_2$$

II- شکل دولوزی:

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \text{ و } A.e.x_4 \text{ و } k \text{ و } b_1 \text{ و } b_2 \text{ و } 3 \text{ و } d.$$

III- شکل سه لوزی:

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \text{ و } A.e.x_4 \text{ و } k \text{ و } B_2 : C_1 \text{ و } A_2 : d. \text{ و } 3 \text{ و } b_2 \text{ و } b_1 \text{ و } c_1$$

IV- شکل چهار لوزی:

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \text{ و } A.e.x_4 \text{ و } k \text{ و } A + x_2 - x_3 \text{ و } A.e.x_3 \text{ و } k \text{ و } E : h \text{ و } E + x_4 - x_3 \text{ و } E.e.x_3 \text{ و } k \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 + x_2 - x_3 \text{ و } A.e.x_3 \text{ و } k \text{ و } b_1 \text{ و } b_2 \text{ و } 3 \text{ و } d.$$

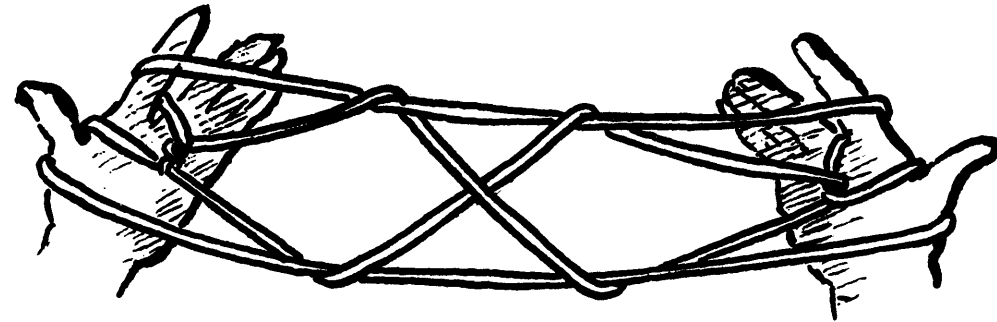
شخص می تواند فرمولهاییکه قابل امکان باشد بنویسد و شکلهای تازه

کشف کند. مثلاً

$$a \text{ و } A : h \text{ و } A + x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \text{ و } A.e.x_4 \text{ و } k \text{ و } b_1 \text{ و } b_2 \text{ و } 3 \text{ و } d.$$

فرمول دیگری برای شکل دو لوزی است.

استقراء شکلهای بانخ: در این قسمت بیان می کنیم که چگونه می توان شکلی با عده ای دلخواه لوزی ساخت. این عمل چندین روش دارد. چون با



شکل ۱۶

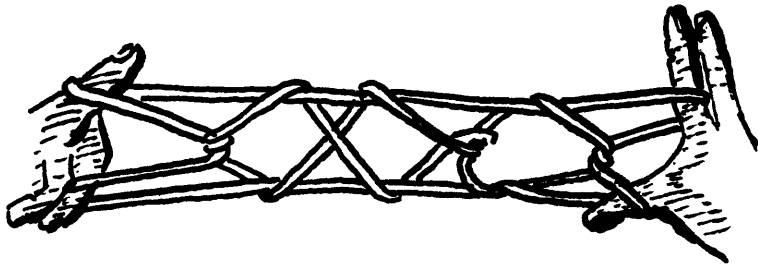
فرمول می شود آنرا بررسی کرد سعی می کنیم که آنچه تاکنون در این باره پیدا شده است متذکر شویم.

برای اینکه هر مرحله استقراء را به مورد عمل بگذاریم باید دستها را به آهستگی بچرخانیم که کف آنها را ببینیم (شکل ۱۶). استقراء را در باره هر شکل بالوزی می توان به کار برد.

۱-۳ استقراء يك به يك: يك شکل بالوزی را در نظر می گیریم و آنرا X می نامیم. برای مثال در بخشهای استقراء شکل دو لوزی را X گرفته ایم. فرض کنیم که مثلث گیری طرف دست راست $3'$ باشد. فرمول زیر را در نظر می گیریم

$$d. \text{ و } 3' \text{ و } b_1 \text{ و } c_1 \text{ و } B_1 \text{ و } X$$

می بینیم که شکل تاب می خورد. هر گاه دست چپ را بچرخانیم، شکلی که يك لوزی بیشتر از شکل X دارد بدست می آید (شکل ۱۷). می توان



شکل ۱۷

نخهاییکه به شست وانگشت نشانه چپ اند با هم جا به جا کرد که دست چپ به حال طبیعی برگردد. سپس استقراء را ادامه داد. ولی این از لحاظ بازی زیاد جالب نیست.

۲-۳ استقراء دو به دو: فرض کنیم که X يك شکل بالوزی باشد. سپس

$$d. \text{ و } 3 \text{ و } b_2 \text{ و } b_1 \text{ و } B_2 : c_1 \text{ و } B_1 : c_1 \text{ و } B_1 \text{ و } X$$

شکلی که دو لوزی بیشتر دارد بدست می آید (شکل ۱۸)

۳-۳ استقراء سه به سه: باز شکل X بخشهای ۱-۳ و ۲-۳ را در نظر می-

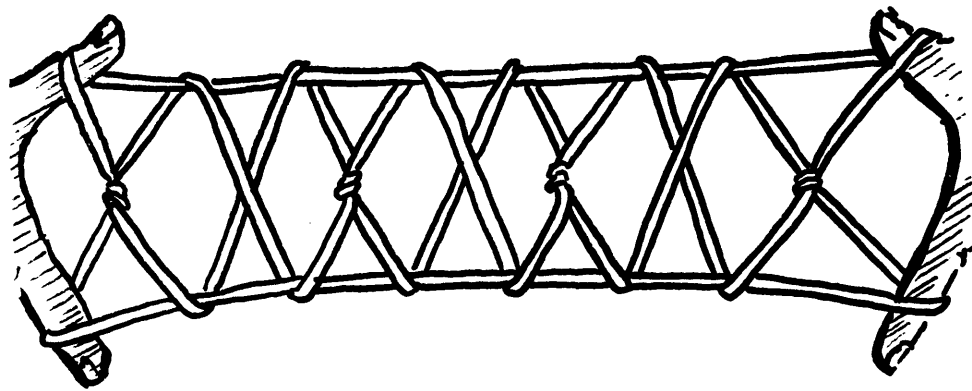
گیریم و فرمول زیر را می نویسیم:

$$(1) \quad d. \text{ و } 3 \text{ و } b_2 \text{ و } b_1 \text{ و } B_2 : c_1 \text{ و } B_2 \text{ و } c_1 \text{ و } A_1 : c_1 \text{ و } B_1 : c_1 \text{ و } X$$

به این ترتیب شکل با سه لوزی بیشتر از X بدست می آید (شکل ۱۹)

به جای فرمول (۱) می توان فرمول زیر را به کار برد

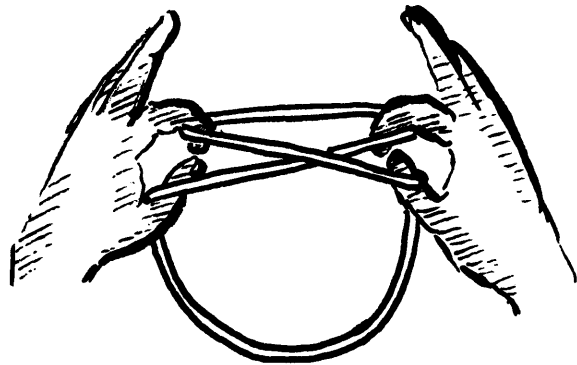
$$(2) \quad d. \text{ و } 3 \text{ و } b_2 \text{ و } b_1 \text{ و } B_1 : c_1 \text{ و } B_1 : c_1 \text{ و } A_2 : c_1 \text{ و } B_2 : c_1 \text{ و } X$$



شکل ۲۰

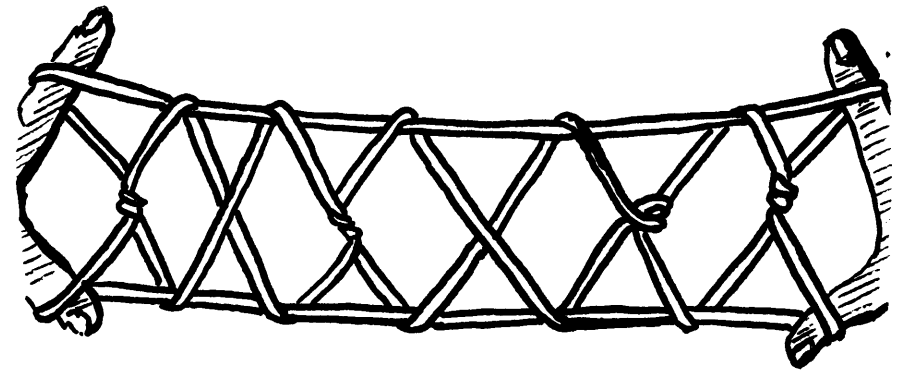
نداریم که همه یا بیشتر شکلهای بانخ را بسازیم. این خود برای خواننده جا باز می‌کند که با ابتکارش فرمولهای تازه و نمادهای تازه پیدا کند. در این قسمت فقط نمونه‌ای از این شکلها بررسی می‌شود.

۱-۴ آغاز ناواهو (Navajo): بسیاری از شکلهای نخ‌بازی با آغاز ناواهو شروع می‌شود. بانخ‌شکلی مانند هشت‌فرنگی درست می‌کنیم. سپس انگشتهای نشانه را در حلقه بالا و شستنها را در حلقه پائین می‌گذاریم (شکل ۱). آن گاه دستها را از یکدیگر جدا می‌کنیم. پس از آن دستها را می‌چرخانیم به حالت عادی برگردند. (شکل ۲۲)



شکل ۲۱

اینرا آغاز ناواهو گوئیم و آنرا با N نمایش می‌دهیم.
۲-۴ دوران يك شکل: فرض کنیم X يك شکل بانخ باشد که انتهای نخها



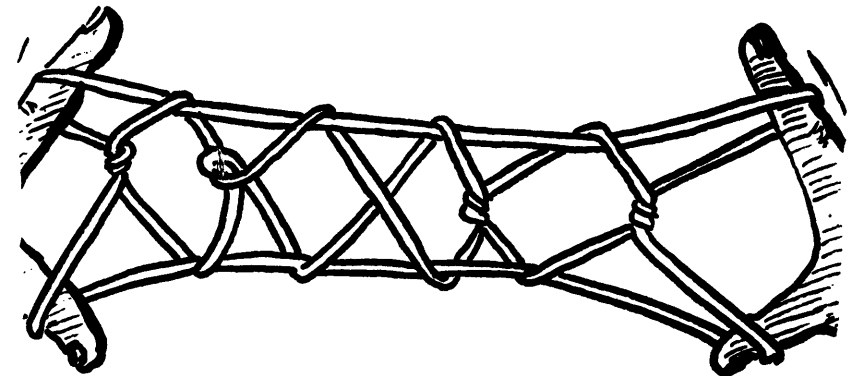
شکل ۱۸

برای ادامه می‌توان یکبار (۱) و سپس (۲) را به کار برد و به این ترتیب پیش‌رفت.

۳-۴ استقراء چهار به چهار: دوباره X را که يك شکل با لوزی است در نظر می‌گیریم، فرمول استقراء چهار به چهار می‌شود:

d و b_1 و b_2 و c_1 و A_2 و $2(B_2:c_1)$ و $A_1:c_1$ و $2(B_1:c_1)$ و X از این روش کلی با چهار لوزی بیشتر از X بدست می‌آید (شکل ۲۰) و همچنین می‌توان فرمول زیر را به کار برد:

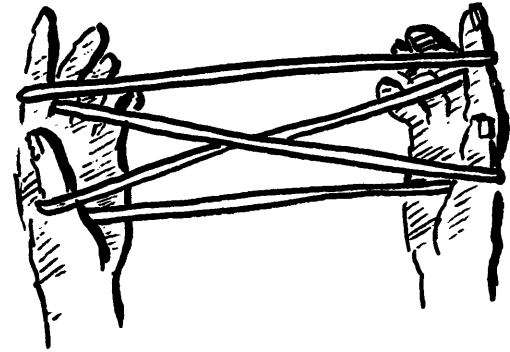
d و b_1 و b_2 و c_2 و A_2 و $A_1:c_2$ و X .



شکل ۱۹

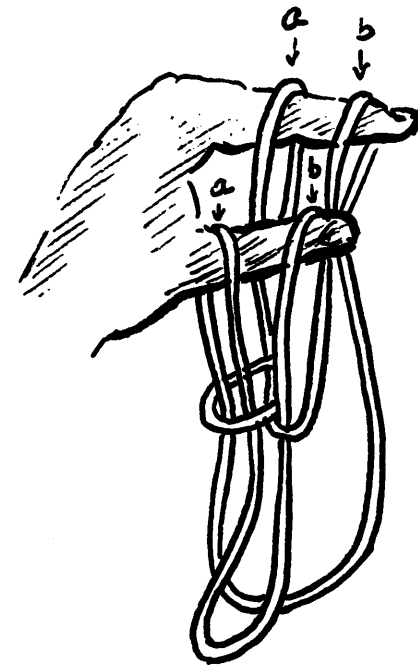
این فرمول را باید خیلی با دقت انجام داد. گاهی شخص درست موفق نمی‌شود.

۴- بعضی شکلهای جالب: خواننده ملاحظه می‌کند که بقدر کافی نماد



شکل ۲۲

دور انگشتهای نشانه و شستها باشند، مثل آغاز ناواهو یا یک شکل لوزی دار. دوران یک شکل یعنی آنرا ۹۰ درجه نسبت به انگشتهایی که آنرا نگاه داشته اند بچرخانیم. این دوران به قرار زیر است:



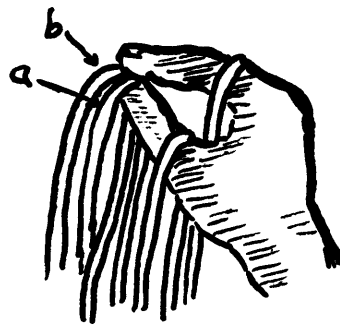
شکل ۲۳

۱- نخ دور انگشت نشانه راست را روی انگشت نشانه چپ می گذاریم همچنین نخ شست راست را روی شست چپ می گذاریم (شکل ۲۳). باید دقت کرد که نخهای جابه جا شده سر انگشتان قرار گیرند.



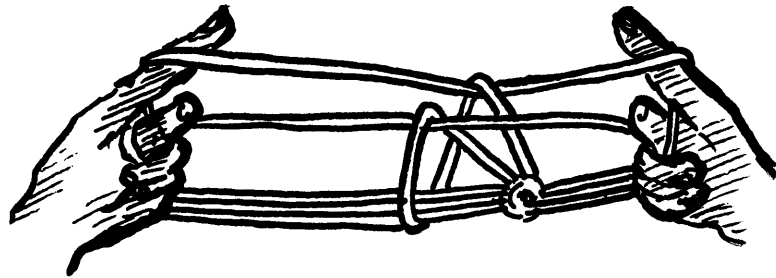
شکل ۲۴

۱۱- در شکل ۲۳ نخها را با *a* و *b* نمایش داده ایم؛ *a* نمایش نخهای شست که قبلا روی دست چپ بوده اند و *b* نمایش نخهای شست که از دست راست به دست چپ آورده ایم. شست راست را درون *a* که روی شست است و انگشت نشانه را درون *b* که روی شست است می بریم (شکل ۲۴). به این ترتیب با دست راست این دو حلقه نخ را برمی داریم. اکنون با شست و انگشت نشانه راست دونخ *a* و *b* دست چپ را نگاه می داریم (شکل ۲۵) باید دقت کرد که



شکل ۲۵

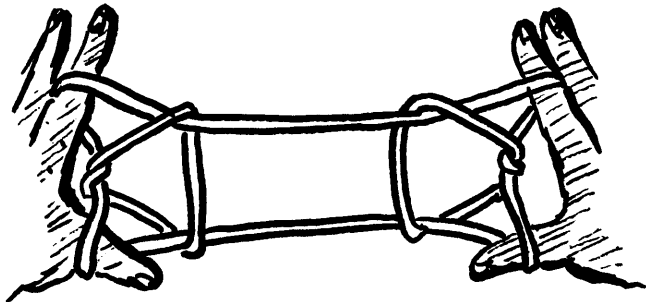
a و *b* جابه جا نشوند. آنگاه انگشت نشانه چپ را درون *b* و شست چپ را درون *a* قرار می دهیم و این دونخ را برمی داریم. سپس دستها را بحال



شکل ۲۸

برای اینکه پروانه بهتر نشان داده شود دونخ پایین را بادستها پایین نگاه می‌داریم. (شکل ۲۸)

۴-۵ مستطیل و دوران آن: مستطیل را با روش ساده‌ای می‌توان ساخت. ولی برای نوشتن فرمول C ساختن آنرا کمی طولانی می‌کنیم:
 a و A ; h و E ; h و $E - x_2$ و $E \cdot ex_2$ و $A + x_1 - x_2$ و $A \cdot ex_2$ و b_1 و b_2 و d .
 به این ترتیب مستطیل بدست می‌آید (شکل ۲۹).



شکل ۲۹

هرگاه نخ کوتاه‌تری بگیریم، شکل بهتری بدست می‌آید. فرض کنیم که X مستطیل باشد. سپس d و r و X شکل جالبی می‌شود. برای تفریح، خواننده می‌تواند فرمولهای چیزهائیکه ساخته است بنویسد.

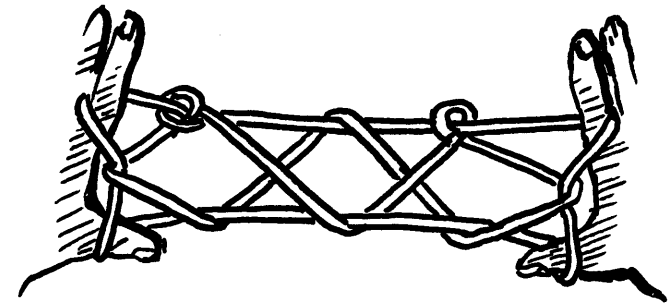
منابع

1. Ali R. Amir- Moez , Classes Résidues et Figure ave Ficelle Lafayette, Printing Co. Lafayette, Indiona (1968).
2. Ali R. Amir- Moez' J. D. Hamilton, Art and mathematics of string figures, J. Rec mathematics, 7 (1), PP23-34, (1974)
3. W.W. Rouse Ball, Fun with string figure, Dover Publications Inc. New york (1971)
4. Crrolino Furness gane ,string figure and how to make Them Dover pablications Inc. New york, (1962)

عادی می‌آوریم. نتیجه را دوران X گوئیم و آنرا با r نمایش می‌دهیم. هر گاه r رادر نظر بگیریم، شکل به محل اولش برمی‌گردد. خواننده برای امتحان دقت خود می‌تواند ببیند که پس از r شکل را به هم زده است یا نه. ۴-۳ جت (Jet): فرض می‌کنیم که X یک شکل بایک لوزی باشد. فرمول زیر رادر نظر می‌گیریم

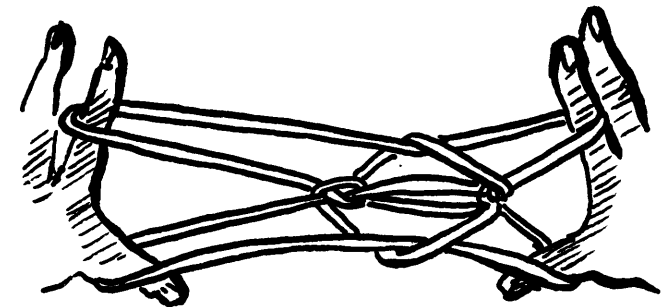
$$X \text{ و } b_1, b_2 \text{ و } d.$$

یک شکل با سه لوزی بدست می‌آید که باشکلهای قبل فرق دارد (شکل ۲۶).



شکل ۲۶

اکنون اگر فرمول d و r و d و b_1 و b_2 و X را در نظر بگیریم، شکل جالبی پیدا می‌شود که آنرا جت می‌نامیم (شکل ۲۷)



شکل ۲۷

۴-۴ پروانه: یکی از شکلهای زیبای بانخ پروانه است. فرمول آن بسیار ساده است:
 N و B_1 ; $4(c_1)$ و B_2 ; $4(c_1)$ و b_1 و b_2 و r و d .