روش کرامر

دستگاه معادله‌های خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

را می‌توان با نمادهای ماتریسی

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

به شکل $AX=B$ نوشت که به A ماتریس ضرایب دستگاه، به B ماتریس مقادیر ثابت دستگاه و به X ماتریس مجهول‌ها می‌گویند.

توجه: اگر ماتریس A در X ضرب شود و مساوی ماتریس B قرار دهیم همان دستگاه معادلات خطی که در آغاز کار داشتیم به دست می‌آید.

برای آنکه بتوان از روش کرامر برای یافتن X یا همان مجهول‌های x_1 تا x_n استفاده کنیم باید دو شرط برقرار باشد: ۱) تعداد معادله‌ها با تعداد مجهول‌ها برابر باشد

۲) دترمینان ماتریس ضرایب ناصفر باشد یعنی $|A|\neq 0$

نام‌گذاری:

$$A_i=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \boxed{b_2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

ستون iام ماتریس

یعنی A_i ماتریسی است که با تعویض ستون iام ماتریس A با ماتریس B بدست می‌آید.

در این صورت دستور کرامر برای یافتن x_i ها به صورت زیر است:

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|} \quad (\text{برای } 1\leq i\leq n)$$

توجه: منظور از $|A|$ دترمینان A و منظور از $|A_i|$ دترمینان ماتریس A_i است.

 emamipour@bam.ac.ir

مثال: مقادیر مجهول c_1 و c_2 را بیابید.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{cases}$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

توجه: چون تعداد مجهول‌ها و تعداد معادله‌ها برابر است و $|A| = -1 \neq 0$ پس می‌توان از دستور کرامر برای یافتن c_1 و c_2 استفاده کرد.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad c_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-6-3}{-3-(-2)} = \frac{-9}{-1} = 9 \quad , \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3-(-4)}{-3-(-2)} = -7$$

پس $c_1 = 9$ ، $c_2 = -7$.

مثال: مقادیر مجهول c_1 تا c_4 را بیابید.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ 2c_3 - 3c_4 + c_1 - c_2 = 0 \\ c_2 + 4c_3 + 9c_4 + c_1 = -2 \\ c_1 - c_2 + 8c_3 = -1 + 27c_4 \end{cases}$$

حل: ابتدا دستگاه را مرتب می‌کنیم به طوری که c_1ها زیر هم و c_2ها زیر هم تا c_4ها زیر هم و عددهای ثابت در سمت راست باشند یعنی

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 = -2 \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -27 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} , X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

توجه: چون تعداد مجهول‌ها و تعداد معادلات برابر است و $|A| = 240 \neq 0$ پس می‌توان از دستور کرامر برای یافتن c_1 تا c_4 استفاده کرد. قبل از آن ماتریس‌های A_1 تا A_4 را معرفی می‌کنیم

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & -1 & 8 & -27 \end{bmatrix} , A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & -27 \end{bmatrix} , A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -27 \end{bmatrix} , A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c_i = \frac{|A_i|}{|A|} \Rightarrow c_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{330}{240} = \frac{11}{8} \;,\; c_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{100}{240} = \frac{5}{12} \;,\; c_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-160}{240} = \frac{-2}{3}$$

$$c_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-30}{240} = \frac{-1}{8}$$

پس $c_1 = \frac{11}{8}$ ، $c_2 = \frac{5}{12}$ ، $c_3 = \frac{-2}{3}$ ، $c_4 = \frac{-1}{8}$.

 emamipour@bam.ac.ir