بسمه تعالی

امتحان پایان ترم | تاریخ: ۱۳۹۸/۴/۱۰

درس معادلات دیفرانسیل | وقت: ۱۲۰ دقیقه

(درک وفهم مسائل بخشی ازامتحان است، لذابه هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود)

مسئله ۱. تبدیل لاپلاس

$$L\left[e^{-at}\int_{0}^{t}\frac{e^{-ax}\sin bx}{x}dx\right]$$

را به دست آورید. (۲۰ نمره)

مسئله ۲. معادله انتگرال

$$y(t)=t+\frac{1}{6}\int_{0}^{t}(t-x)^{3}y(x)dx$$

را حل کنید.(۲۰ نمره)

مسئله ۳. حاصل انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{t}e^{-t}\frac{\sin x}{x}\,dxdt$$

را بیابید.(۲۰ نمره)

مسئله ۴. دستگاه معادلات زیر را حل کنید (۲۰ نمره)

$$\begin{cases} x'+y'-x=1 \\ x''+y''=t \end{cases} \qquad x(0)=y(0)=0$$

مسئله ۵. یک جواب معادلهٔ $xy''-2y=0$ را به ازای ریشه بزرگتر معادلهٔ شاخصی (مفسر) به دست آورید. (۲۰ نمره)

مسئله ۶. معادله زیر را با تغییر متغیر $y=xu$ حل کنید (۲۰ نمره)

$$xy''-y'+xy=0$$

موفق باشید.

پاسخنامه تشریحی پایانترم «معادلات دیفرانسیل»
«دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی»

ابراهیم شاه‌ابراهیمی

1) $\mathcal{L}\left(e^{-at}\int_0^t \frac{e^{-ax}\sin(bx)}{x}\,dx\right)$

پاسخ: ابتدا از عبارت $\int_0^t \frac{e^{-ax}\sin(bx)}{x}\,dx$ لاپلاس می‌گیریم و سپس حاصل را $s \to s+a$ انتقال می‌دهیم.

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{s}F(s) \overset{*}{=} \boxed{\frac{1}{s}\left(\pi/2 - tg^{-1}\left(\frac{s}{b}\right)\right)}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \int_s^\infty F(s)\,ds \to \mathcal{L}\left(\frac{\sin(bx)}{x}\right) = \int_s^\infty \frac{b}{s^2+b^2}\,ds = tg^{-1}\left(\frac{s}{b}\right)\Big|_s^\infty$$

$$= \boxed{\pi/2 - tg^{-1}\left(\frac{s}{b}\right)} \; *$$

$\xrightarrow{\text{پاسخ نهایی}}$ $$= \boxed{\frac{1}{s+a}\left(\pi/2 - tg^{-1}\left(\frac{s+a}{b}\right)\right)}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - تیر ۹۸

$$\text{۲)}\quad y(t) = t + \frac{1}{6}\int_0^t (t-x)^3 g(x)\,dx$$

پاسخ: ابتدا از طرفین لاپلاس می‌گیریم؛

$$\to \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t) + \frac{1}{6}\mathcal{L}\left(\int_0^t (t-x)^3 g(x)\,dx\right) \quad \begin{cases} f(t) = t^3 \\ g(t) = y(t) \end{cases}$$ کانولوشن

$$\to F(s) = \frac{1}{s^2} + \cancel{\frac{1}{6}}\left(\frac{\cancel{3!}}{s^4}\cdot F(s)\right)$$

سپس $F(s)$ را تنها می‌کنیم؛

$$\to F(s)\left(1 - \frac{1}{s^4}\right) = \frac{1}{s^2} \to F(s)\left(\frac{s^4-1}{s^4}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\to F(s) = \frac{s^2}{s^4-1}$$

و در انتها لاپلاس معکوس می‌گیریم؛

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسر}} F(s) = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{B}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Cs+D}{s^2+1}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{ریاضی ۱}} \begin{cases} A = +\frac{1}{4} & C = 0 \\ B = -\frac{1}{4} & D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\to y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}\right)$$

$$\to \boxed{y = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸

math-teacher.blog.ir

۳) $\int_0^\infty \int_0^t e^{-t} \frac{\sin x}{x}\, dx\, dt$

پاسخ : با مقایسه انتگرال داده شده با تعریف لاپلاس داریم :

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad \begin{cases} \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx\right) = ? \\ s = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx\right) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{s}\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}\, ds$$

$$= \frac{1}{s}\left(tg^{-1} s\Big|_s^\infty\right) = \boxed{\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1} s\right)}$$

$$\xrightarrow{s=1} \quad = \frac{1}{1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸

٤) $\begin{cases} x'+y'-x=1 \\ x''+y''=t \end{cases}$

پاسخ: از طرفین دستگاه لاپلاس می‌گیریم.

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(x')+\mathcal{L}(y')-\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}(1) \\ \mathcal{L}(x'')+\mathcal{L}(y'')=\mathcal{L}(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} s\mathcal{L}(x)-\cancel{x(0)}+s\mathcal{L}(y)-\cancel{y(0)}-\mathcal{L}(x)=\frac{1}{s} \\ s^2\mathcal{L}(x)-s\cancel{x(0)}-\cancel{x'(0)}+s^2\mathcal{L}(y)-s\cancel{y(0)}-\cancel{y'(0)}=\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

تذکر: درصورت سؤال باید مقادیر $x'(0)$ و $y'(0)$ را می‌داد ← فرض می‌کنیم $x'(0)=y'(0)=0$

$$\rightarrow \begin{cases} (s-1)\mathcal{L}(x)+s\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s} \\ s^2\mathcal{L}(x)+s^2\mathcal{L}(y)=\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

به کمک دستور کرامر داریم:

$$\mathcal{L}(x)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s} & s \\ \frac{1}{s^2} & s^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & s \\ s^2 & s^2 \end{vmatrix}}, \quad \mathcal{L}(y)=\frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{1}{s} \\ s^2 & \frac{1}{s^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & s \\ s^2 & s^2 \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(x)=\frac{s-\frac{1}{s}}{\cancel{s^3}-s^2-\cancel{s^3}}=\frac{s-\frac{1}{s}}{-s^2}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{x=-1+\frac{t^2}{2}}$$

$$\rightarrow \mathcal{L}(y)=\frac{\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}-s}{-s^2}=-\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y=-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+1}$$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی - تیر ۹۸

۵) $xy'' - 2y = 0 \xrightarrow{\div x} y'' - \frac{2}{x}y = 0 \rightarrow$ $x=0$ غیرعادی

$$P_0 = \lim_{x\to 0} x(0) = 0$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$$

منظم $\xrightarrow{\text{معادله مشخصه}} m(m-1) + 0 + 0 = 0 \quad \begin{cases} m=0 \\ \boxed{m=1} \end{cases}$

ریشه بزرگتر معادله مشخصه

$$\xrightarrow{\text{شکل کلی جواب}} y = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow \boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}}$$

$$\rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n \rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در سوال}} x \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{قاعده لغزش}} 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_n x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$\rightarrow n(n+1) a_n = 2 a_{n-1} \rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{n(n+1)} a_{n-1} \quad n \geq 1}$$

۴) $xy'' - y' + xy = 0 \qquad y = xu$

پاسخ: تغییر متغیر و مشتقات آن را در معادله جایگذاری می‌کنیم

$$y' = u'x + u$$

$$y'' = u''x + 2u'$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} (u''x + 2u')x - u'x - u + x(xu) = 0 \rightarrow x^2u'' + 2xu' - xu' - u + x^2u = 0$$

$$\rightarrow x^2u'' + xu' + (x^2 - 1)u = 0 \rightarrow$$ معادله بسل مرتبه ۱

$$\rightarrow u = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x) \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \boxed{y/x = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)}$$

math-teacher.blog.ir

ابراهیم شاه ابراهیمی - تیر ۹۸