

تشابه مثلثات

دایره مماس

دکتر یوسف کوه‌مسکن

هندسه ۱۱۰م



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



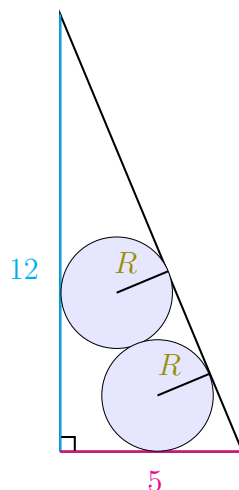
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده 🧐 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 🧐 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 🧐 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 🧐 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

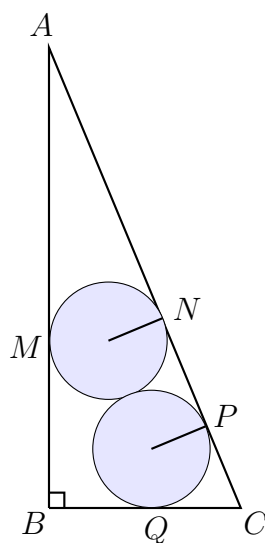
۱ مسئله

دو دایره به شعاع R به صورت شکل زیر درون یک مثلث قائم الزاویه قرار گرفته‌اند. مقدار شعاع دایره را بدست آورید.



۲ روش حل مسئله

پاسخ: در این مسئله ضلع سوم مثلث برابر با 13 می‌باشد. رئوس مثلث و نقاط تماس دایره‌ها با مثلث در شکل زیر نام‌گذاری شده‌اند.



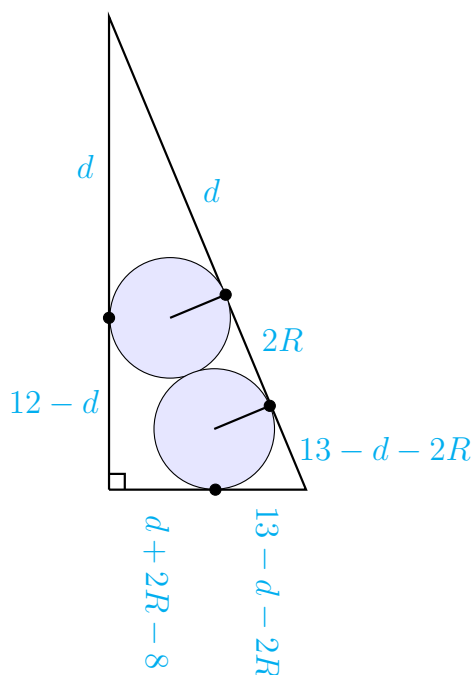
💡 اعداد 3، 4 و 5 مضارب آنها تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند.

💡 اعداد 5، 12 و 13 مضارب آنها تشکیل مثلث قائم الزاویه می دهند.

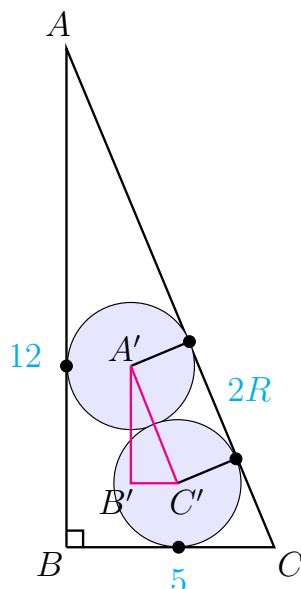
اگر از یک نقطه بر دایره ای مماس شود، طول هر دو مماس با هم برابرند. اگر فاصله AM با d نمایش داده شود، همین مقدار فاصله AN خواهد بود. فاصله بین N و P برابر با $2R$ است. در نتیجه فاصله PC برابر است با طول کل ضلع منهای دو طول AN و NP :

$$PC = 13 - AN - NP = 13 - d - 2R$$

در شکل زیر تمام طول ها بر حسب پارامتر d و شعاع دایره نمایش داده شده است.



اگر دو مرکز دایره به هم متصل شوند، خطی موازی ضلع AC پدید می‌آید. همچنین یک مثلث قائم‌الزاویه طوری داخل مثلث بزرگ ساخته می‌شود که دو ضلع آن موازی دو ضلع مثلث بزرگ باشد. در این صورت مثلث $A'B'C'$ تشکیل می‌شود.

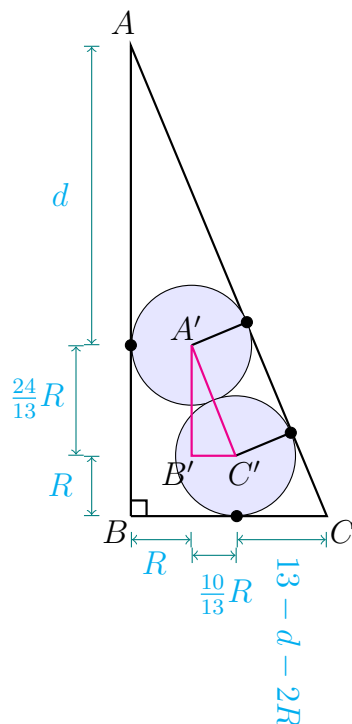


این دو مثلث قائم‌الزاویه با هم مشابه هستند چون هر سه زاویه متناظر آن‌ها با هم برابرند. در نتیجه می‌توان بین اضلاع رابطه زیر را برقرار کرد.

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}, \quad \Rightarrow \quad A'B' = \frac{12}{13}A'C' = \frac{24}{13}R$$

$$\frac{B'C'}{A'C'} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}, \quad \Rightarrow \quad A'B' = \frac{5}{13}A'C' = \frac{10}{13}R$$

در شکل زیر تمام طول‌ها بر حسب پارامتر d و شعاع دایره تعیین شده است.



اکنون می‌توان دو معادله برای اضلاع افقی و عمودی در نظر گرفت و با حل این معادلات، شعاع دایره بدست می‌آید.

$$\begin{cases} d + \frac{24}{13}R + R = 12 \\ R + \frac{10}{13}R + 13 - d - 2R = 5 \end{cases}$$

با ساده کردن رابطه فوق، دو معادله-دو مجهول به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} d + \frac{37}{13}R = 12 \\ d + \frac{3}{13}R = 8 \end{cases}$$

از حل این معادله بدست می‌آید:

$$R = \frac{26}{17}$$

به خاطر داشته باشید که دریای آرام،
نافدای قهرمان نمی‌سازد.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com