فصل ۷

روشهای انتگرال گیری

یادآوری :

همانطور که قبلاً گفتیم باید انتگرال گیری را (مخصوص در آغاز یادگیری) از مرحله اول شروع کرد:

الف) استفاده از جدول انتگرال (مراجعه کنید به صفحه ___)

مثال $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$ ، $\int \cos x\,dx = \sin x$ ، ...

ب) استفاده از قوانین جمع، تفریق و نیز دو قانون «مشتق مخرج در صورت برای کسرها» و نیز «قانون ترکیب با خط»

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u|$$

و

$$\int f(x)\,dx = F(x) \Longrightarrow \int f(mx+b)\,dx = \frac{F(mx+b)}{m}$$

مثال $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{مشتق مخرج}} \ln|\sin x|$

مثال $\int \frac{1}{\sqrt{7-3x}}\,dx = \frac{2\sqrt{7-3x}}{-3}$

ج) گفتیم که برای ضرب و تقسیم عبارت‌ها نمی‌توان انتگرال را شکست مثلاً

$$\int x\sin x\,dx \neq \int x\,dx \times \int \sin x\,dx$$

بلکه :

برای ضرب و تقسیم (بجز مشتق مخرج در صورت):

ج-۱: تا حد امکان عبارت را ساده می‌کنیم تا به عبارات ساده‌تر یا به فرمول‌های قبلی مثلاً جدول تبدیل شوند:

مثال * $\int x^2(x-3)\,dx \underset{\text{ساده}}{=} \int x^3 - 3x^2\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}$

مثال * $\int \sin x \cdot \cos x\,dx \underset{\text{ساده}}{=} \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{-\cos 2x}{2} = -\frac{1}{4}\cos 2x$

مثال * $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}$

ج-۲: (درس جدید): انتگرال‌های ضرب و تقسیم که مشتق یک تابع (قسمتی از تابع اصلی) در کنار انتگرالده موجود است؛ این موارد را با تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$\int f(u_{(x)}) \times u'_{(x)}\,dx = \int f(u)\,du = ?$$

مثال $\int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \times \cos x\,dx = ?$

ج-۳: (درس جدید): انتگرال‌های ضرب (تقسیم) که دو تابع معمولاً غیرهمجنس در هم ضرب شده‌اند؛ این موارد را با جزء به جزء حل می‌کنیم:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال $\int x \sin x\,dx = ?$

توضیح: دو روش (ج۲) و (ج۳) ما بسیار مهم می‌باشند. در صورتی که قادر به حل برخی مسائل نباشند به سراغ روش‌های دیگر یا تکنیک‌های ابتکاری نیز خواهیم رفت.

ت.م.

ج-۲ : روش تغییر متغیر (جانشانی) :

برعکس عمل مشتق گیری، قاعده زنجیره ای است که در آن مسائل شامل ضرب «یک تابع مرکب» و «مشتق قسمتی از آن» می‌باشد.

$$\left(f(u(x))\right)' = f'(u)\cdot u'$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\xleftarrow{\text{انتگرال}}$$

لذا:

مراحل کار:

① قسمتی از تابع را که مشتق آن همراه انتگرال موجود است، برابر با متغیر کمکی مانند u یا t قرار می‌دهیم.

② از طرفین تساوی موجود در ①، دیفرانسیل می‌گیریم.

③ انتگرال مورد سؤال را برحسب متغیر کمکی می‌نویسیم (به کمک ① و ②)

④ از عبارت حاصل که باید ساده شده باشد، انتگرال می‌گیریم.

⑤ در پاسخ ۴ متغیرهای کمکی را به متغیر اصلی باز می‌گردانیم.

مثال:

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \times \cos x\,dx$$

مشتق

① $u = \sin x$

② $du = \cos x\,dx$

③ $\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$

④ $= 2\sqrt{u}$

⑤ $= 2\sqrt{\sin x}$

مثال: انتگرال گیری (تغییر متغیر):

$$*\int \cos(tg\,x)\sec^2 x\,dx = (I)$$

حل: $u = tg\,x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$

$$(I) = \int \cos(u)\,du = \sin u = \sin(tg\,x)$$

نکته: اغلب عبارتی که مشتق آن همراه تابع است را باید در زیر رادیکال یا داخل پرانتزها در نظر گرفت یا به عنوان آرگومان تابع دیگر جستجو کرد.

$$*\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx = (I)$$

حل: روش اول: $u = x^3 - 5 \Rightarrow du = 3x^2\,dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2\,dx$

$$\Rightarrow (I) = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-5}. \quad \blacksquare$$

روش دوم: می‌توان عبارت زیر رادیکال را طوری تغییر داد که همزمان رادیکال هم ساده شود یا کل رادیکال را یک متغیر جدید گرفت (حالت تی گویا ساز)

$$t^2 = x^3 - 5 \Rightarrow 2t\,dt = 3\underbrace{x^2\,dx} \Rightarrow \frac{2}{3}t\,dt = x^2\,dx$$

$$\Rightarrow (I) = \frac{2}{3}\int \frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{3}\int \overset{1}{} dt = \frac{2}{3}t \overset{t=\sqrt{x^3-5}}{=\!=\!=} \frac{2}{3}\sqrt{x^3-5}. \quad \blacksquare$$

ح-۳: روش جزء به جزء

در این روش قسمتی از مشتق حاصل ضرب را به عنوان سؤال می دهند:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

یا

$$d(uv) = udv + vdu$$

مشتق حاصل ضرب

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int u\,dv = ? = uv - \int v\,du}$$

مراحل حل:

باید تابع انتگرالده را به دو جزء یا عامل ضربی تبدیل کرد که از یکی بتوان انتگرال و از دیگری بتوان مشتق بگیریم و همواره باید به یاد داشت که هدف ساده کردن و حل انتگرال نهایی است.

ضربی که ساده نمی شود چون از اجزاء ناهم جنس تشکیل شده.

مثال و توضیح نحوه حل:

$$\int x\cos x\,dx = ? = \mathrm{I}$$

روش اول

$$\begin{cases} u = \cos x \\ dv = x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x\,dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x\,dx$$

X بدتر شد.

روش دوم

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I} = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= \underbrace{x\sin x + \cos x}_{\text{پاسخ}}$$

✓

نکته (براساس مثال قبل): اگر انتگرالده حاصل ضرب یک چندجمله‌ای و یکی از توابع سینوس، کسینوس یا نمایی یا حتی توابع اینها باشد آنگاه باید به صورت زیر مسأله را حل شروع کرد:

$$\begin{cases} u = \text{چندجمله‌ای} \\ dv = \text{مابقی موارد} = dx \end{cases}$$

مثال: حاصل را بیابید.

$$\int xe^x dx$$

حل: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$ (چندجمله‌ای)

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x. \square$$

دوستار جایگزین:

مشتق		انتگرال
$\oplus$	x	e^x
$\ominus$	1	e^x
$\oplus \int$	0	e^x

توجه: اغلب مسائل جزء به جزء انتگرال‌ها به سه دسته زیر دسته بندی می‌شوند:

(۱) مسائل با یکبار جزء به جزء حل می‌شوند.

(۲) مسائل با چندبار تکرار جزء به جزء حل می‌شوند که در هر مرحله ساده‌تر می‌شوند و دوستار جایگزین برای حل آنها مناسب‌تر است.

(۳) مسائلی که بعد از چند مرحله تکرار به صورت سؤال می‌رسند و به فرم یک معادله تبدیل می‌شوند که صورت انتگرال مورد سؤال، مجهول آن معادله است.

مثال: انتگرال بیت (جزء جزء):

$$* \int (x^2+3)e^x\,dx = \text{I}$$

x^2+3

$$\xrightarrow{\text{جزء جزء اول}} \begin{cases} u = x^2+3 \\ dv = e^x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x\,dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{I} = (x^2+3)e^x - 2\underbrace{\int x e^x\,dx}_{\text{ساده‌تر و نیاز به جزء جزء دوم}}$$

$$\xrightarrow[\text{با همان روال قبل}]{\text{جزء جزء دوم}} \begin{cases} u = x \\ dv = e^x\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{I} = \underbrace{(x^2+3)e^x - 2}_{\text{از قبل}}\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) \quad \int e^x\,dx \to e^x$$

$$= (x^2+3)e^x - 2xe^x + 2e^x \;\square$$

و با کمک نوشتار دیگر (روش نردبانی):

$+$	x^2+3	e^x
$-$	$2x$	e^x
$+$	2	e^x
$-\int$	0	e^x

$$\text{I} = \underset{+}{(x^2+3)e^x} \;\underset{-}{-}\; 2xe^x \;\underset{+}{+}\; 2e^x \;\square$$