فصل ۱

تعاریف مقدماتی و مدل‌سازی ریاضی

فصل ۲

بخش اول: مروری بر جبرخطی

- بردار
  - بردار nبعدی
  - نمایش بردار و مولفه‌های آن
  - ترانهاده یک بردار، نرم یک بردار، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار n بعدی

- فضای اقلیدسی n بعدی

- انواع ترکیب‌های برداری
  - ترکیب خطی
  - ترکیب خطی نامنفی
  - ترکیب آفین

- ترکیب محدب

چند تعریف مفید

- **تعریف ابرصفحه و نیم فضا** $(Hyperplane\, and\, half\, space)$

- مجموعه‌ای به فرم $\{x \in R^n | a^T x = \alpha\}$، که $a \in R^n$ $0 \neq$ بردار (بردار نرمال) و $\alpha \in R$ عددی ثابت می‌باشد را ابرصفحه در فضای n بعدی گویند.

- **مثال:**

$\{x \in R^2 | 2x_1 + 3x_2 = 5\}$

- مجموعه‌ای به فرم $\{x \in R^n | a^T x \leq \alpha\}$ یا $\{x \in R^n | a^T x \geq \alpha\}$، که a بردار (بردار نرمال) و α عددی ثابت می‌باشد را نیم‌فضا گویند.

- در نتیجه ابرصفحه اشتراک دو نیم فضای متناظر با آن است.

- **تعریف مجموعه چندوجهی** $(polyhedral)$: به اشتراک تعداد متناهی نیم‌فضا یک مجموعه چندوجهی گویند.
  - یک مجموعه چندوجهی می‌تواند کران‌دار یا بی‌کران باشد.

- مجموعه چندوجهی کراندار را <u>$Polytope$</u> گویند.

- **استقلال خطی** $(Linear\ Independent)$:

  - **مثال:** کدام یک از مجموعه بردارهای زیر مستقل خطی هستند؟

  -
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

  -
$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

  -
$$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- وابسته خطی

- <u>سوال:</u>ا گر بردارهای a^1، a^2، a^3و a^4 مستقل خطی باشند آنگاه در مورد بردارهای a^2، a^3و a^4 چه می‌توان گفت و چرا؟

- **مجموعه مولد**: مجموعه بردارهای $a^1, a^2, ..., a^k$ را مولدی برای R^n گویند هرگاه هر بردار در R^n را بتوان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $a^1, a^2, ..., a^k$ نمایش داد.

- **مثال:**کدام یک از مجموعه‌های زیر مولدی برای فضای R^2 است.

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0,\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right\}$$

- پایه: مجموعه بردارهای $a^1, a^2, ..., a^k$ پایه‌ای برای R^n تشکیل می‌دهند هرگاه
  - $a^1, a^2, ..., a^k$ مولدی برای R^n باشند.
  - اگر یکی از بردارها را حذف کنیم، مجموعه بردارهای باقی‌مانده دیگر مولدی برای R^n نباشد

- به طور معادل می‌توان گفت:
  - $k = n$
  - بردارهای $a^1, a^2, ..., a^k$ مستقل خطی باشند.

- **نکته:**

۱) یک پایه برای R^n همیشه از n تشکیل شده است.

۲) یک پایه منحصر بفرد نیست. هر مجموعه‌ای متشکل از n بردار مستقل خطی یک پایه برای R^n است.

- **سوال:** دو پایه مختلف برای فضای R^3 بیان کنید.

- **نکته:** اگر S یک مجموعه مستقل خطی و $L(S) = W$ آنگاه W یک فضای برداری با بعد $Card(S)$ است.

- **نکته:** بعد فضای برداری V و $W = \{x^0\} + V$ (انتقال یافته V) برابر هستند.

- **تمرین -شرط لازم و کافی برای جایگزینی یک بردار در پایه:**

فرض کنید مجموعه $\{a^1, ..., a^j, ..., a^n\}$ یک پایه برای R^n باشد. و $y \neq 0$ نمایشی بر حسب اعضای پایه به‌صورت زیر داشته باشد:

$$y = \delta_1 a^1 + ... + \delta_j a^j + ... + \delta_n a^n$$

شرط لازم و کافی برای اینکه $\{a^1, ..., a^{j-1}, y, a^{j+1}, ..., a^n\}$ یک پایه برای R^n باشد آن است که $\delta_j \neq 0$.

- **تمرین -توسیع یک مجموعه مستقل خطی به پایه- (یک نکته کلیدی در تبهگنی):**

فرض کنید مجموعه $S = \{a^1, ..., a^j, ..., a^k\} \subseteq R^n$ ($k \leq n$) و مستقل خطی باشد، آنگاه پایه‌ای برای R^n می‌توان یافت که S زیر مجموعه‌ی آن پایه باشد.

- ماتریس
  - جمع و تفریق دو ماتریس، ضرب یک عدد در ماتریس،
  - ماتریس قطری، مثلثی، واحد
  - ترانهاده ماتریس و ماتریس متقارن
  - ضرب دو ماتریس

سوال: آیا ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی دارد؟

  - معکوس ماتریس ($Matrix\ Inversion$):
  - رابطه معکوس پذیری ماتریس با دترمینان و استقلال سطری یا ستونی آن (شرط وجود معکوس ماتریس)

- عملیات سطری مقدماتی روی یک ماتریس عبارتند از
  * سطر i با سطر j تعویض شوند.
  * سطر i را در یک اسکالر غیر صفر k ضرب شود.
  * سطر i با سطر i به‌علاوه k برابر سطر j عوض شود.

- **مثال:** معکوس ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- رتبه ماتریس ($Rank\, of\, a\, matrix$):
  - رتبه سطری ماتریس
  - رتبه ستونی ماتریس
  - **سوال:** چه رابطه‌ای بین رتبه سطری و ستونی ماتریس ماتریس وجود دارد؟
  - **نکته:** فرض کنید ماتریس A یک ماتریس $m \times n$ است آنگاه داریم

$$Rank(A) \leq min\{m, n\}$$

و اگر داشته باشیم $Rank(A) = min\{m, n\}$ آنگاه ماتریس A را مرتبه کامل($Full\, rank$) گویند.

- رتبه ماتریس A برابر k است اگر و تنها اگر A را بتوان از طریق دنباله متناهی از عملیات سطری مقدماتی به ماتریس زیر تبدیل کرد.

$$\begin{bmatrix} I_k & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **مثال:** رتبه ماتریس زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **تعریف k ابرصفحه مستقل خطی:**

- **معادلات خطی هم‌زمان:** سیستم $Ax = b$ را درنظر بگیرید(A ماتریسی با m سطر، n ستون و $m \leq n$ می‌باشد). با توجه به رابطه بین $rank(A)$ و $rank(A, b)$ حالت‌های زیر را در مورد جوابهای دستگاه $Ax = b$ داریم:

  - $rank(A) \neq rank(A, b)$

  - $rank(A) = rank(A, b) = n$

- $rank(A) = rank(A, b) = m < n$

- دستگاه زیر را حل به دو روش گاوس-جردن و گاوس حل کنید.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 10,$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6,$$

$$x_2 + x_3 = 2$$

دستگاه فوق را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & |10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & |6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & |2 \end{bmatrix}$$

برای حل به روش گاوس-جردن باید ماتریس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی به ماتریس واحد به شرح زیر تقلیل دهیم:

برای حل به روش گاوس باید ماتریس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی به ماتریس بالا مثلثی به شرح زیر تقلیل دهیم:

- **تمرین (کاربرد انواع ترکیبات در حل دستگاه):**

الف) اگر x^1 و x^2 دو جواب دستگاه **متجانس** $Ax = 0$ باشد. نشان دهید هر ترکیب خطی از این جواب‌ها نیز یک جواب شدنی دستگاه است.

ب) اگر x^1 و x^2 دو جواب دستگاه $Ax \geq 0$ باشد. نشان دهید هر ترکیب خطی نامنفی از این جواب‌ها نیز یک جواب شدنی دستگاه است.

ج) اگر x^1 و x^2 دو جواب دستگاه $Ax = b$ باشد. نشان دهید هر ترکیب آفین از این جواب‌ها نیز یک جواب شدنی دستگاه است.

د) اگر x^1 و x^2 دو جواب دستگاه $Ax = b$ و $x \geq 0$ باشد. نشان دهید هر ترکیب محدب از این جواب‌ها نیز یک جواب شدنی دستگاه است.

تمرین (شرط لازم و کافی برای شدنی بودن):

ناحیه شدنی $S = \{x|Ax = b,\, x \geq 0\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید

$$S \neq \emptyset \Longleftrightarrow b \in Pos(A)$$