جانشانی مثلثاتی:

برای حل انتگرال‌های شامل عبارات زیر (که معمولاً رادیکال دارند) و مشتق عبارت زیر رادیکال کنار انتگرال موجود نیست، مانند

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

این روش ⇐ مشتق همراه ندارد

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

تغییر متغیر معمولی ⇐ مشتق همراه دارد

می‌توان از تغییر متغیرهای به کمک زیر استفاده کرد که در آنها متغیر کمکی خود تابعی مثلثاتی است:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \xrightarrow{\text{حل}} x=a\sin t \;;\; -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \text{ نیمدایره راست} \;;\; \cos t\geq 0 \\ \sqrt{a^2+x^2} \xrightarrow{\text{حل}} x=a\,tg\,t \;;\; -\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2} \text{ نیمدایره راست} \;;\; \sec t\geq 0 \\ \sqrt{x^2-a^2} \xrightarrow{\text{حل}} x=a\sec t \;;\; 0\le t<\frac{\pi}{2} \text{ ربع اول} \;;\; tg\,t\geq 0 \end{cases}$$

که در هر کدام $a>0$ می‌باشد و برای ساده کردن آنها (عبارات زیر رادیکال‌ها) از اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$1-\sin^2 t=\cos^2 t \;;\; 1+tg^2 t=\sec^2 t \;;\; \sec^2 t-1=tg^2 t$$

مثال: از قبل می‌دانیم $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x$. با این روش برای حل $\int \frac{1}{x^2+1}dx = ?$

$$x := tg\,t \Rightarrow dx=\sec^2 t\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx=\int \frac{1}{tg^2 t+1}\times \sec^2 t\,dt=\int\frac{\sec^2 t}{\sec^2 t}dt=\int 1\,dt=t = \operatorname{arctg} x. \quad \square$$

$$x=tg\,t \Rightarrow t=\operatorname{arctg} x$$

مثال: انتگرال‌های زیر را محاسبه نمائید .

$$* \int \frac{dx}{x\sqrt{1-100x^2}} = A \qquad \times \frac{10}{10}$$

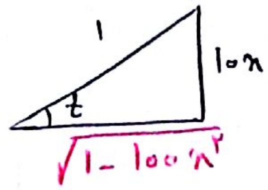
تغییر متغیر $\Rightarrow$ $10x = \sin t \Rightarrow 10dx = \cos t\,dt$ (*)

$$A = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t}{\sin t \cos t}\,dt = \int \frac{1}{\sin t}\,dt$$

$$= \int \csc t\,dt \times \frac{-1}{-1} \times \frac{\csc t + \operatorname{cotg} t}{\csc t + \operatorname{cotg} t}$$ «$\int \sec$ مشابه»

$$= -\operatorname{Ln}|\csc t + \operatorname{cotg} t|$$

از (*) $\Rightarrow \sin t = \frac{10x}{1} \Rightarrow$



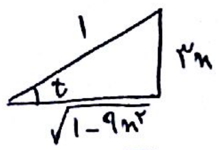
$$\text{ادامه} = -\operatorname{Ln}\left|\frac{1}{10x} + \frac{\sqrt{1-100x^2}}{10x}\right| .$$

$$* \int \sqrt{1-9x^2}\,dx \qquad \times \frac{3}{3} = B$$

$$3x = \sin t \Rightarrow 3dx = \cos t\,dt$$

$$B = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-\sin^2 t} \times \cos t\,dt = \frac{1}{3}\int \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t\,dt = \frac{1}{6}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)$$ $\rightarrow \sin t \cos t$



$$= \frac{1}{6}\left(\arcsin(3x) + 3x\sqrt{1-9x^2}\right) .$$

$$* \int \frac{dx}{(x^2+1)^{5/2}} = C$$

$$x = tg\, t \Rightarrow dx = \sec^2 t\, dt$$

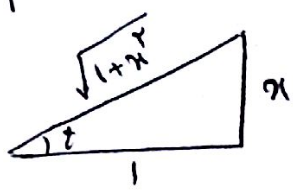
$$C = \int \frac{\sec^2 t\, dt}{(tg^2 t+1)^{5/2}} = \int \frac{\sec^2 t}{\sec^5 t} dt = \int \frac{1}{\sec^3 t} dt$$

$$= \int \cos^3 t\, dt = \int \cos^2 t \cos t\, dt = \int (\underbrace{1-\sin^2 t}) \cos t\, dt$$

$$= \int \cos t\, dt - \int \sin^2 t \cos t\, dt \;\overset{}{\underset{u=\sin t}{\equiv}}\; \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$$

اثبات: برعهده شما

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} .$$



$$* \int \frac{x\,dx}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}} = D$$

« مطالعه این مثال برعهده دانشجو »

$$x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$$

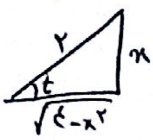
$$D = \int \frac{2\sin t\; 2\cos t\, dt}{4-4\sin^2 t + \sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int \frac{4\sin t \cos t}{4\cos^2 t + 2\cos t} dt$$

هردو: $4(1-\sin^2 t)$

$$= \int \frac{4\sin t \cos t}{2\cos t(2\cos t+1)} dt = -\int \frac{-2\sin t}{2\cos t+1} dt$$

$$= -\ln|2\cos t+1| \;=\; -\ln\left|\cancel{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\cancel{2}}+1\right| .$$

$$\sin t = \frac{x}{2}$$



نکته: گاهی اوقات قبل از انجام تغییر متغیرهای مثلثاتی باید صورت مسأله را به فرم های x^2+a^2 یا x^2-a^2 یا a^2-x^2 تبدیل نمود.

مثال: انتگرال بگیرید.

$$*\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt$$

$1+4$

$$=\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{(t+1)^2+4}}\,dt$$

$$t+1=2\,tg\,u \Rightarrow dt=2\sec^2 u\,du$$

کران پایین $t=1 \Rightarrow tg\,u=1 \Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$

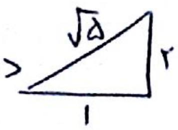
کران بالا $t=3 \Rightarrow tg\,u=2 \Rightarrow u=\mathrm{arc}\,tg\,2$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}\,2} \frac{2\,tg\,u-1}{\sqrt{4\,tg^2 u+4}} \times 2\sec^2 u\,du$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arc}\,tg\,2} \frac{2\,tg\,u-1}{\cancel{2}\,\cancel{\sec u}} \times \cancel{2}\sec^{\cancel{2}} u\,du$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arc}\,tg\,2} 2\sec u\,tg\,u-\sec u\,du$$

$$=\Big(2\sec u-\mathrm{Ln}|\sec u+tg\,u|\Big)_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arc}\,tg\,2}$$

$\mathrm{arc}\,tg\,2=u \Rightarrow tg\,u=2 \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \sec u=\sqrt{5}$

$$=\big(2\sqrt{5}-\mathrm{Ln}|\sqrt{5}+2|\big)-\big(2\sqrt{2}-\mathrm{Ln}|\sqrt{2}+1|\big)=\boxed{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\mathrm{Ln}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{5}}}\,.\square$$

$\sec\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$$* \int \sqrt{۲x - x^۲}\, dx = \int \sqrt{-(x^۲ - ۲x)}\, dx = \int \sqrt{۱ - (۱ - ۲x + x^۲)}\, dx$$

$$= \int \sqrt{۱ - (x-۱)^۲}\, dx$$

$$x - ۱ = \sin t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$$

$$= \int \sqrt{۱ - \sin^۲ t}\, \cos t\, dt = \int \cos^۲ t\, dt = \int \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲t\, dt$$

$$= \frac{۱}{۲} t + \frac{۱}{٤} \sin ۲t = \frac{۱}{۲} t + \frac{۱}{۲} \sin t \cos t$$

بجای ضلع $\sqrt{۱ - \sin^۲ t}$

$$= \frac{۱}{۲} \arcsin(x-۱) + \frac{۱}{۲}(x-۱)\sqrt{۲x - x^۲}\ .$$

$$* \int_{\ln ۲}^{\ln ۳} \frac{e^u}{\sqrt{e^{۲u} - ۱}}\, du = \int \frac{e^u}{\sqrt{(e^u)^۲ - ۱}}\, du$$

این دفعه کران را آخر به جایگذاری می‌زنیم.

$$e^u = \sec t \Rightarrow e^u du = \sec t\, tg\, t\, dt$$

$$\text{ادامه} = \int \frac{\sec t\, \cancel{tg\, t}\, dt}{\cancel{\sqrt{\sec^۲ t - ۱}}} = \ln|\sec t + tg\, t|$$

$tg\, t \to \sqrt{\sec^۲ t - ۱}$

$$\overset{e^u = \sec t}{=\!=} \ln\left|e^u + \sqrt{(e^u)^۲ - ۱}\right| \Big|_{\ln ۲}^{\ln ۳}$$

$$= \ln|۳ + \sqrt{۸}| - \ln|۲ + \sqrt{۳}| = \ln\left(\frac{۳ + \sqrt{۸}}{۲ + \sqrt{۳}}\right).$$

یادآوری

$$\boxed{e^{\ln ۳} = ۳}$$

همچنین می‌توان از جانشانی‌های هذلولوی $x = a\sinh t$ و $x = a\cosh t$ به ترتیب برای ساده نمودن $\sqrt{x^2+a^2}$ و $\sqrt{x^2-a^2}$ ($a>0$) استفاده کرد که اتحادهای

$$\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$$

$$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$$

در ساده کردن عبارات به کار خواهند آمد.

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = A$$

$$x = 3\sinh t \Rightarrow dx = 3\cosh t\, dt$$

$$A = \int \frac{3\cosh t\, dt}{\sqrt{9\sinh^2 t + 9}} = \int \frac{\cancel{3\cosh t}}{\cancel{3\cosh t}}\, dt$$

$$= t = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$