منطق ریاضی

(جبر گزاره‌ها)

گزاره‌ها

تعریف گزاره

هر گزاره جمله‌ای است خبری که درست یا نادرست باشد. مثلاً ۵ = ۴ + ۲ گزارهٔ نادرست و ۵ > ۳ گزارهٔ درست می‌باشد. اما ۷ + ۳ گزاره نیست زیرا در اینجا جملهٔ خبری وجود ندارد که درستی یا نادرستی آن مطرح باشد. معمولاً گزاره‌ها را با حروفی مثل p و q و r و ... نشان می‌دهند.

تذکر: در بیان یک گزاره باید کلماتی که بکار می‌بریم معانی مشخص و معینی داشته باشند. مثلاً اگر بگوییم (۱۰۰۰ عدد بزرگی است) تا زمانی که بزرگ بودن را تعریف نکرده باشیم گزاره نیست. باید دانست که لازم نیست ما قادر به تشخیص درستی یا نادرستی گزاره باشیم بلکه یک گزاره باید به خودی خود دارای ارزش یکتایی باشد. مثلاً اگر بگوییم در این لحظه جمعیت کره زمین ۵۸۹۵۳۹۲۷۲۱ نفر می‌باشد یک گزاره بیان کرده‌ایم اما درستی یا نادرستی آن را نمی‌دانیم.

ترکیب گزاره‌ها

با استفاده از رابط های گزاره‌ای می‌توانیم گزاره‌ها را با هم ترکیب کنیم و گزاره‌های جدیدی بدست آوریم. این رابط ها عبارتند از:

الف) ترکیب عطفی

اگر دو گزاره با حرف « و » کنار هم قرار گیرند. گزاره‌ای حاصل می‌شود که آن را « ترکیب عطفی » آن دو گزاره می‌نامند. ترکیب عطفی گزاره‌های p و q را با علامت $p \wedge q$ نشان می‌دهند و نماد « $\wedge$ » را « عاطف » می‌نامند. ارزش $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هر دو گزاره تشکیل دهنده آن درست باشند.

مثلاً: « ۴ عدد اول است و ۲۰ بر ۴ بخش پذیر می‌باشد. » یک ترکیب عطفی است و ارزش آن نادرست می‌باشد زیرا فقط گزاره دوم این ترکیب عطفی درست است.

ب) ترکیب فصلی

اگر دو گزاره با کلمهٔ « یا » کنار هم قرار گیرند گزاره‌ای حاصل می‌شود که آن را « ترکیب فصلی » آن دو گزاره می‌نامند. ترکیب فصلی p و q را با علامت $p \vee q$ نشان می‌دهند و نماد « $\vee$ » را « فاصل » می‌نامند. ارزش $p \vee q$ فقط هنگامی نادرست است که هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشند.

مثلاً: « ۴ عدد اول است یا ۲۰ بر ۴ بخش پذیر می‌باشد. » یک ترکیب فصلی است و ارزش آن درست می‌باشد زیرا یکی از دو گزارهٔ آن درست است. چنانکه ملاحظه می‌شود اگر هر دو گزاره هم درست باشند ترکیب فصلی درست است و این با معنای محاوره‌ای « یا » تفاوت دارد که باید به آن توجه کرد.

دو گزاره هم ارز

دو گزاره p و q را که ارزش یکسانی داشته باشند « هم ارز » یکدیگر می‌نامند و با $p \equiv q$ نشان می‌دهند.

ج) نقیض گزاره

برای هر گزاره p می‌توان گزاره‌ای در نظر گرفت که ارزش آن مخالف ارزش p باشد.

این گزاره را با $\sim p$ نشان داده و آن را « نقیض p » می‌خوانند. مثلاً داریم:

~ (۴ عدد اول است) ≡ (۴ عدد اول نیست)

$\sim (۴ < ۲) \equiv (۴ \geq ۲)$

گزاره شرطی

بسیاری از احکام ریاضی بصورت « اگر ... آنگاه ... » بیان شده‌اند. مثل :

۱) اگر چهار ضلعی مستطیل باشد آنگاه دو قطرش با هم برابرند.

۲) اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند آنگاه مکعبات آنها نیز با هم برابرند.

۳) اگر ترکیب عطفی دو گزاره درست باشد آنگاه ترکیب فصلی آنها نیز درست است.

۴) اگر a عدد طبیعی و مربع کامل باشد آنگاه رقم یکان آن عدد عضو مجموعهٔ {۸و ۷و ۳و ۲} نیست.

۵) اگر نقطه‌ای از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد آنگاه روی عمود منصف AB قرار دارد.

۶) اگر دو دایره متخارج باشند آنگاه طول خط المرکزین آنها ار مجموع شعاع‌های آن دو بزرگتر است.

هر یک از گزاره‌های فوق را یک « گزاره شرطی » می‌نامند و با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند که خوانده می‌شود: « اگر p آنگاه q »

در هر گزاره شرطی $p \Rightarrow q$، p را « مقدم » و q را « تالی » می‌نامند.

چنانکه از مفهوم یک گزاره شرطی می‌توان فهمید گزاره شرطی فقط در صورتی نادرست است که مقدم آن درست و تالی نادرست باشد.

مثال : ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $۴ > -۵ \Rightarrow ۱۶ > ۲۵$

ب) (۱۰ بر ۲ بخش پذیر است) ⇐ (۱۰۰ بر ۴ بخش پذیر است)

ج) (۲۵ عدد اول است) ⇒ (۵ عدد اول است)

د) (مثلث ABC متساوی الاضلاع است) ⇒ (مثلث ABC قائم الزاویه است)

با توجه به ارزش گزاره‌های شرطی می‌توان گفت که از موارد فوق فقط (الف) و (د) نادرست می‌باشند و بقیه درست هستند.

تذکر: با توجه به مطالب قبلی می‌توانیم ارزش هر یک از ترکیبهای گزاره‌ها را در جدولی بصورت زیر خلاصه کنیم:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

ضمناً اگر بخواهیم برای نقیض یک گزاره جدولی تشکیل دهیم دو ردیف برای آن کافی است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

چنانکه ملاحظه شد جدول ارزش یک گزارهٔ تنها دارای دو سطر و جدول ارزش ترکیب دو گزاره متفاوت دارای چهار سطر و جدول ارزش ترکیب n گزاره متفاوت دارای 2^n سطر خواهد بود.

بعنوان مثال جدول ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ را با توجه به ارزشهای p و q و r می‌توان در جدول ۰ نشان داد:

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن

شرطهای لازم و کافی

اگر $p \Rightarrow q$ گزاره درست باشد در این صورت p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می‌نامند. در این حالت $p \Rightarrow q$ را یک ، قضیه ریاضی ، می‌نامند که p ، فرض ، و q ، حکم ، آن می‌باشد.

مثلاً : مستطیل بودن ۴ ضلعی شرط کافی برای برابری دو قطر است و برابری دو قطر شرط لازم برای مستطیل بودن چهار ضلعی است. همچنین اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، $a=b$ شرط کافی است برای $a^{2}=b^{2}$ و $a^{2}=b^{2}$ شرط لازم برای $a=b$ است.

در هندسه به قضیه زیر توجه کرده‌اید:

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای از یک صفحه از دو سر یک پاره خط واقع در همان صفحه به یک فاصله باشد آن است که نقطه روی عمود منصف آن پاره خط واقع باشد.

گزاره فوق در واقع بیان دو قضیه زیر است:

الف) فرض : نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
حکم : نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد. (لزوم شرط)

ب) فرض : نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.
حکم : نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است. (کفایت شرط)

یکی دیگر از ترکیبهای گزاره‌ها ترکیب دو شرطی است که بصورت زیر تعریف

می‌شود:

تعریف

ترکیب عطفی دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را بصورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را «گزاره دو شرطی» می‌نامیم و به این صورت می‌خوانیم: «اگر p آنگاه q و بالعکس» یا «p اگر و فقط اگر q»

پس داریم: $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

اگر جدول ارزش عبارت طرف دوم را تشکیل دهیم خواهیم دید که گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ در حالتهایی که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند درست است و در دو حالت دیگر نادرست می‌باشد.

واضح است که اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد هر یک از دو گزارهٔ p و q شرط لازم و کافی برای دیگری است.

معرفی چند اصطلاح

الف) $q \Rightarrow p$ را عکس گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ می‌نامند. ارزش عکس یک گزاره شرطی با ارزش خود آن گزاره ممکن است یکسان باشد یا نباشد.

ب) $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ می‌نامند. ارزش این گزاره همواره با ارزش $p \Rightarrow q$ یکسان است. در اثبات بعضی از قضایا از این هم ارزی استفاده می‌کنند و بجای اثبات قضیهٔ $p \Rightarrow q$ عکس نقیض آن را ثابت می‌کنند.

مثلاً اگر بخواهیم در مجموعهٔ اعداد طبیعی قضیه:

«اگر a^2 زوج باشد آنگاه a زوج است.» را ثابت کنیم. می‌توانیم قضیه زیر را که اثبات آن ظاهراً ساده‌تر است ثابت کنیم: «اگر a فرد باشد آنگاه a^2 فرد است.»

قضایای دمورگان

الف) $\sim(p\vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

ب) $\sim(p\wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

درستی هم ارزی‌های فوق را می‌توانیم به کمک جدول ثابت کنیم.

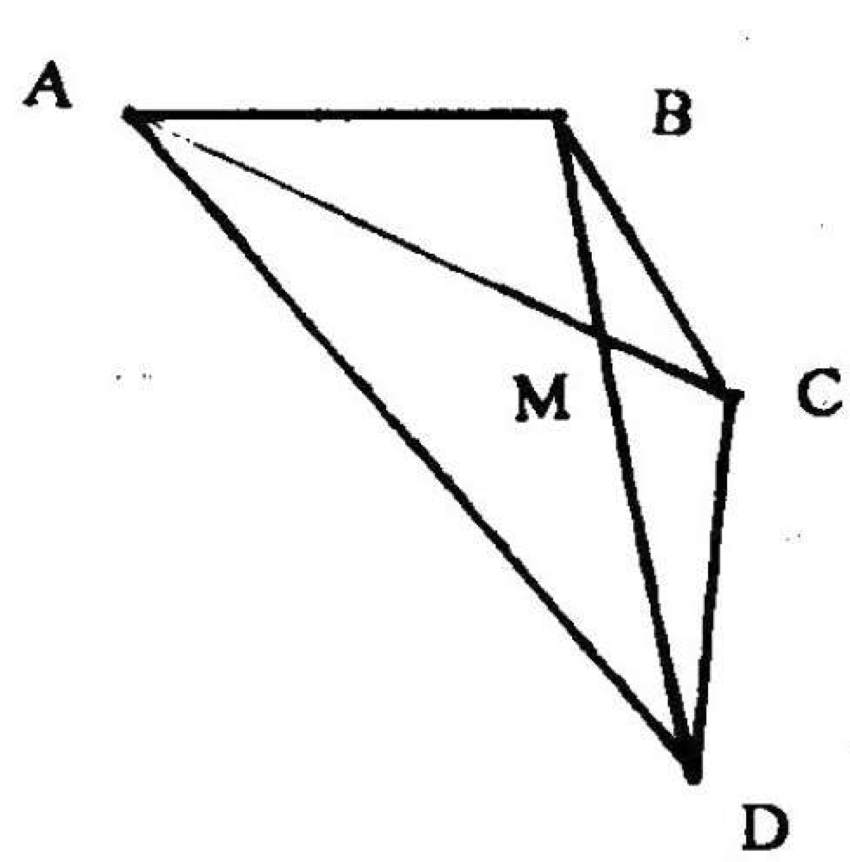
نقیض گزارهٔ شرطی

با استفاده از جدول می‌توان ثابت کرد که هم ارزی زیر برقرار است.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

با توجه به هم ارزی فوق برای اثبات نادرستی گزاره شرطی باید حالتی را معرفی کنیم که در آن حالت مقدم درست و تالی نادرست باشد.

مثلاً: اگر بخواهیم نادرستی گزاره: « اگر دو قطر ۴ ضلعی برابر باشند آنگاه ۴ ضلعی مستطیل است. » را نشان دهیم باید یک چهارضلعی معرفی کنیم که دو قطرش برابر باشند اما مستطیل نباشد. شکل روبرو چنین ۴ ضلعی را نشان می‌دهد: (برای رسم این چهار ضلعی، دو پاره خط مساوی و متقاطع و AC و BD را طوری رسم کرده‌ایم که $MD \neq MA$ باشد)



معرفی سورها

در بعضی از گزاره‌ها از نمادهای $\forall$ و $\exists$ و $\nexists$ استفاده می‌کنیم. این نمادها را بترتیب سور عمومی، سور وجودی و سور صفر می‌نامند و گزاره‌ای را که در آن از این نمادها استفاده شده است ، گزارهٔ سوری ، می‌نامند. معنای هر یک از این نمادها بشرح زیر است:

الف) سور عمومی $\forall$

به گزاره‌های زیر توجه کنید:

۱ـ همه اعداد طبیعی بر ۱ بخش پذیرند.

۲ـ مربع هر عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است.

۳ـ همهٔ اعداد اول، فرد می‌باشند.

در هر یک از گزاره‌های فوق، خاصیتی به تمام عضوهای یک مجموعه نسبت داده شده است و برای اینکه این گزاره‌ها درست باشند باید آن خاصیت برای همهٔ عضوهای آن مجموعه، برقرار باشد. وجود حداقل یک عضو از مجموعه که آن خاصیت را نداشته باشد باعث نادرستی گزاره خواهد شد و در این حالت، هر یک از عضوهای مزبور را یک مثال نقض برای آن گزاره می‌نامند. سه مثال فوق را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم. [نماد $\forall$ را می‌خوانند: (برای هر) یا (برای همه).]

(۱ $\forall X \in N$ ،(X بر ۱ بخش پذیر است)

(۲ $\forall X \in N$ ،($X^2 \in N$)

(۳ $\forall X \in P$ ،(X عدد فرد است)

در اینجا N مجموعه اعداد طبیعی و P مجموعه اعداد اول است. چنانکه ملاحظه می‌شود گزاره‌های (۱) و (۲) درست می‌باشند زیرا خاصیت مربوطه برای همه اعضای مجموعه درست است. اما گزارهٔ (۳) درست نیست و مثال نقض آن $X = 2$ می‌باشد.

ب) سور وجودی $\exists$

به گزاره‌های زیر توجه کنید:

۱ـ بعضی از اعداد طبیعی فرد هستند.

۲ـ عددی طبیعی وجود دارد که مساوی مربع خودش باشد.

۳ـ عدد اولی وجود دارد که بر ۱۳ بخش پذیر است.

۴ـ عددی طبیعی و دو رقمی وجود دارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر است.

در هر یک از گزاره‌های فوق خاصیتی به بعضی از عضوهای یک مجموعه نسبت

داده شده است برای آنکه این گونه گزاره‌ها درست باشند باید خاصیت مورد نظر حداقل برای یک عضو آن مجموعه درست باشد. از مثالهای فوق سه مثال اول گزاره‌های درست و مثال چهارم گزاره نادرست می‌باشد.

[نماد $\exists$ را می‌خوانند: (وجود دارد) یا (برای بعضی)]

چهار مثال فوق را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

۱) $\exists X \in N$ ، (X فرد است) ،

۲) $\exists X \in N$ ، $(X = X^2)$

۳) $\exists X \in P$ ، (X بر ۱۳ بخش پذیر است) ،

۴) $\exists X \in N$ ، (X دو رقمی است و X بر ۱۰۱ بخش پذیر است) ،

تذکر : واضح است که اگر گزاره‌ای با سور عمومی درست باشد، با سور وجودی نیز درست است. مثلاً اگر بگوییم بعضی اعداد طبیعی مثبت هستند گزاره درستی را بیان کرده‌ایم.

ج) سور صفر $\nexists$

به گزاره‌های زیر توجه کنید:

۱ـ عدد طبیعی دو رقمی وجود ندارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد.

۲ـ عدد اولی وجود ندارد که بر ۲۶ بخش پذیر باشد.

۳ـ عدد زوجی وجود ندارد که اول باشد.

در هر یک از گزاره‌های فوق نداشتن خاصیتی به همه عضوهای یک مجموعه نسبت داده شده است یا به عبارت دیگر خاصیتی از همه عضوها سلب شده است. شرط درستی گزاره آن است که این خاصیت برای هیچیک از عضوهای مجموعه برقرار نباشد. از مثالهای فوق دو مثال ۱ و ۲ درست است و مثال ۳ نادرست است.

[نماد $\nexists$ را می‌خوانند: وجود ندارد.]

سه مثال بالا را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

۱) $\nexists X \in N$ ، (X دو رقمی است و بر ۱۰۱ بخش پذیر است)

۲) $\nexists X \in P$ ، (X بر ۲۶ بخش پذیر است)

۳) $\nexists X \in E$ ، (X اول است)

(در اینجا E به معنی مجموعه اعداد زوج است).

تذکر: با توجه به مطالب فوق برای اثبات درستی گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است باید نشان دهیم خاصیت مورد نظر برای همه عضوهای مجموعه (بدون استثناء) برقرار است. اما برای رد چنین گزاره‌ای آوردن فقط یک مثال نقض کافی است.

نقیض گزاره‌های سوری

با توجه به معنی سورها که شرح داده شد می‌توان نقیض گزاره‌های سوری را در حالتهای مختلف مطرح کرد:

مثال ۱) نقیض گزاره « همه انسانها فنا پذیرند » را می‌توان بصورت « انسانی وجود دارد که فناپذیر نیست » نوشت.

مثال ۲) نقیض گزاره « بعضی از مثلثهای قائم الزاویه، متساوی الساقین هستند.» را می‌توانیم بصورت « وجود ندارد مثلث قائم الزاویه‌ای که متساوی الساقین باشد » بنویسیم.

مثال ۳) نقیض گزاره « عددی طبیعی و دو رقمی وجود ندارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد.» را می‌توانیم بنویسیم بصورت « عددی طبیعی و دو رقمی وجود دارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد.»

بطور کلی می‌توانیم از قاعده‌های زیر برای نوشتن نقیض گزاره‌های سوری استفاده کنیم:

الف) $\sim(\forall X \in A , p(X)) \equiv \exists X \in A , \sim p(X)$

یعنی برای نوشتن نقیض گزاره‌هایی که با سور عمومی نوشته شده‌اند (گزاره کلی) سور عمومی را به سور وجودی تبدیل کرده و نقیض خاصیت مطرح شده را می‌نویسیم.

ب) $\sim(\exists X \in A, p(X)) \equiv \forall X \in A, \sim p(X)$

$\equiv \nexists X \in A, p(X)$

یعنی برای نوشتن نقیض گزاره‌هایی که با سور وجودی بیان شده‌اند سور وجودی را به سور عمومی تبدیل کرده و نقیض خاصیت مطرح شده را می‌نویسیم یا سور وجودی را به سور صفر تبدیل کرده و خاصیت مطرح شده را می‌نویسیم.

مثال: ارزش هر یک از گزاره‌های سوری زیر را تعیین کرده و نقیض آنها را بنویسید.

الف) $\forall X \in Z, x^۲ > ۰$

ب) $\exists X \in Z, x^۳ - ۸ = ۰$

ج) $\forall a \in N, (a = ۵) \vee (a^۲ = ۳۶)$

د) $\forall X \in Z, (X > ۲ \Rightarrow x^۲ > ۴)$

هـ) $\nexists X \in N, (X > ۵) \wedge (X^۲ < ۱۰)$

حل:

مثال الف: نادرست است زیرا $X = ۰$ مثال نقض آن است و نقیض آن بصورت زیر می‌باشد:

$\exists X \in Z, \ X^۲ \leq ۰$

مثال ب: درست است زیرا $X = ۲$ در Z وجود دارد و نقیض آن بصورت $\forall X \in Z, X^۳ - ۸ \neq ۰$ یا بصورت $\nexists X \in Z, X^۳ - ۸ = ۰$ است.

مثال ج: نادرست است زیرا هر عدد طبیعی جز ۵ و ۶ مثال نقض آن است و نقیض آن بصورت: $\exists a \in N, a \neq ۵ \wedge a^۲ \neq ۳۶$

مثال د: درست است زیرا برای هر عدد صحیح X اگر X بزرگتر از ۲ باشد آنگاه $X^۲$ بزرگتر از ۴ است و نقیض آن بصورت زیر است:

$\exists X \in Z, (X>۲) \wedge (X^۲ \leq ۴)$

مثال هـ: درست است زیرا عددی طبیعی که بزرگتر از ۵ باشد و مربع آن کوچکتر از

۱۰ باشد وجود ندارد و نقیض آن بصورت زیر است:

$\exists X \in N ، (X>۵) \wedge (X^۲<۱۰)$

<u>مثالهای دیگر</u>

ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید:

۱) $\forall X \in R ، x^۲> ۰$

۲) $\exists X \in R ، x^۲ = x$

۳) $\exists X \in R ، \frac{x-۱}{۲} = ۰$

۴) $\nexists X \in R ، x^۲ = -۱$

۵) $\exists X \in Z ، x = ۰$

۶) $\nexists X \in N ، x + ۱ = ۰$

۷) $\forall X \in Z ، x^۲> ۰$