آزمون ریاضی ۲ پایانترم

دکتر مریم میرغفوری

۱۴۰۰/۳/۲۶

از مباحث:

۱.تابع چند متغیره

۲.انتگرال چندگانه

۳.آنالیز برداری

سؤال 1
پاسخ داده نشده
نمره از 2.00
علامت زدن سؤال

فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کُره‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ و مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ باشد آنگاه $F = \left(x + z^۲ e^y, y - x\sin(xz^۲), z + \frac{y}{۱+x^۲}\right)$ را بیابید که در آن S سطح احاطه $\iint_S F \cdot ndS$ کننده‌ی ناحیه‌ی بالاست.

سؤال 2
پاسخ داده نشده
نمره از 2.00
علامت زدن سؤال

در صورتی که S قسمتی از کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲z$ باشد که توسط صفحات $z = ۱$ و $z = ۲$ جدا شده است و C لبهٔ آن باشد، انتگرال تابع $f = z(x - y)$ را بر C محاسبه کنید.

سؤال 3
پاسخ داده نشده
نمره از 1.00
علامت زدن سؤال

فرض کنید $f(x, y, z) = xe^{y^2 z}$ مشتق سوئی f در نقطه $(2, 1, 0)$ را در جهت بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ بیابید.

سؤال 4
پاسخ داده نشده
نمره از 1.00
علامت زدن سؤال

فرض کنید $z = x\ln y$ ، $x = u^2 + v^2$ ، $y = u^2 - v^2$. عبارت $\frac{\partial z}{\partial u}$ را برحسب u و v بنویسید.

سؤال 5
پاسخ داده نشده
نمره از 2.00
علامت زدن سؤال

حجم محصور بین مخروط های $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ ، $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ و زیر صفحه $z=1$ را به دست آورید.

سؤال 6
پاسخ داده نشده
نمره از 2.00
علامت زدن سؤال

فرض کنید $f(x,y)=x^2+4y^3$. ماکسیمم و مینیمم f را تحت شرط $x^2+2y^2-1=0$ تعیین کنید.

سؤال 7
پاسخ داده نشده
نمره از 1.00
علامت زدن سؤال

آیا تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(yz)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

در $(0,0,0)$ پیوسته است؟

سؤال 8
پاسخ داده نشده
نمره از 2.00
علامت زدن سؤال

کار انجام شده توسط میدان نیروی $\vec{F}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{(x^۲+y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ را روی منحنی $\vec{r}(t)=(e^t\cos t)\vec{i}+(e^t\sin t)\vec{j}$ از $(۱,۰)$ تا $(e^{۲\pi},۰)$ به‌دست آورید.

سؤال **9**

پاسخ داده نشده

نمره از 1.50

علامت زدن سؤال

انتگرال مکرر زیر را با تغییر ترتیب انتگرال گیری محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{(x^2)} dxdy$$

سؤال **10**

کامل

نمره از 1.50

علامت زدن سؤال

با استفاده از قضیه گرین ازمیدان برداری F بر منحنی داده شده انتگرال بگیرید.

$\mathbf{F} = \overrightarrow{(y^{۲} - x^{۲}, x^{۲} + y^{۲})}$ و C مثلث محدود به خطوط $y = ۰$، $x = ۱$ و $y = x$ است.

پاسخ سوال ۱- انتگرال سطح (دیورژانس)

نکته: در صورت سوال ذکر نشده که ناحیه مورد بحث خارج از مخروط است یا داخل مخروط.

این پاسخنامه با هر دو فرض جداگانه حل شده است.

$$\iint \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint divF dV$$

$$divF = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = ۱+۱+۱ = ۳$$

$$\to \iint \vec{F}.\vec{n}ds = \iiint ۳dV = ۳\iiint dV$$

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴ \to r^۲ = ۴ \to r = ۲ \\ x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱ \to r^۲ = ۱ \to r = ۱ \end{cases}$$

فرض اول: خارج از مخروط است

$$z = \sqrt{x^۲ + y^۲} \xrightarrow{\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}} \tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \to \tan\varphi = ۱ \to \varphi = \frac{\pi}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{Spherical coordinate}} \iiint dV = \iiint r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi \to V = \int_{\varphi=\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi} \int_{r=۱}^{۲} r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi$$

$$\to V = \left(\int_۱^۲ r^۲ dr\right)\left(\int_{\theta=۰}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \sin\varphi d\varphi\right)$$

$$\to V = \left(\frac{r^۳}{۳}\Big|_۱^۲\right)\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)\left(-\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\right) \to V = \left(\frac{۷}{۳}\right)(۲\pi)\left(-\left(\cos\frac{\pi}{۲} - \cos\frac{\pi}{۴}\right)\right) \to V = \left(\frac{۷}{۳}\right)(۲\pi)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \to \boxed{V = \frac{۷}{۳}\pi\sqrt{۲}}$$

فرض دوم: داخل مخروط است

$$\xrightarrow{\text{Spherical coordinate}} \iiint dV = \iiint r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi \to V = \int_{\varphi=۰}^{\frac{\pi}{۴}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi} \int_{r=۱}^{۲} r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi$$

$$\to V = \left(\int_۱^۲ r^۲ dr\right)\left(\int_{\theta=۰}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=۰}^{\frac{\pi}{۴}} \sin\varphi d\varphi\right)$$

$$\to V = \left(\frac{r^۳}{۳}\Big|_۱^۲\right)\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)\left(-\cos\varphi\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}\right) \to\to V = \left(\frac{۷}{۳}\right)(۲\pi)\left(-\left(\cos\frac{\pi}{۴} - \cos ۰\right)\right) \to V = \left(\frac{۷}{۳}\right)(۲\pi)\left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \to \boxed{V = \frac{۷}{۳}\pi(۲ - \sqrt{۲})}$$

پاسخ سوال ۲- انتگرال سطح (مساحت سطوح فضایی)

$$\iint f ds = ?$$

$$= \iint z(x-y) ds$$

$$ds = \frac{|\vec{\nabla}_g|}{|\vec{\nabla}_g . \vec{k}|} dA \xrightarrow{g: x^2+y^2+z^2-2z=0} ds = \frac{|(2x,2y,2z-2)|}{|(2x,2y,2z-2).(0,0,1)|} dA \to ds = \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2-8z+4}}{2z-2} dA$$

$$\xrightarrow{x^2+y^2+z^2=2z} ds = \frac{\sqrt{8z-8z+4}}{2z-2} dA \to ds = \frac{1}{z-1} dA$$

$$\iint f ds = \iint z(x-y) ds = \iint \frac{z(x-y)}{z-1} dA \xrightarrow{x^2+y^2+z^2=2z \to x^2+y^2+(z-1)^2=1} = \iint \frac{(\sqrt{1-x^2-y^2}+1)(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA$$

$$= \iint \frac{(\sqrt{1-x^2-y^2}+1)x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA - \iint \frac{(\sqrt{1-x^2-y^2}+1)y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dA = 0 - 0 = \boxed{0}$$

نکته: تابع تحت انتگرال فرد و بازه انتگرال گیری متقارن است بنابراین حاصل صفر می شود.

پاسخ سوال ۳- توابع چندمتغیره (مشتق سویی)

$$D = \vec{\nabla}_f . \vec{\lambda}_u$$

$$\vec{\nabla}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \ \vec{\lambda}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \ f = xe^{y^2 z}, \ u = (1,-1,\sqrt{2})$$

$$\vec{\nabla}_f = (e^{y^2 z}, 2xyze^{y^2 z}, xy^2 e^{y^2 z}) \xrightarrow{(2,1,0)} \vec{\nabla}_f = (1,0,2)$$

$$\vec{\lambda}_u = \frac{(1,-1,\sqrt{2})}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{(1,-1,\sqrt{2})}{2}$$

$$\xrightarrow{D=\vec{\nabla}_f . \vec{\lambda}_u} D = (1,0,2).\frac{(1,-1,\sqrt{2})}{2} = \boxed{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}$$

پاسخ سوال ۴- توابع چندمتغیره (مشتق زنجیره ای)

$$z = x\ln y \begin{cases} x = u^۲ + v^۲ \\ y = u^۲ - v^۲ \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (\ln y)(۲u) + \left(\frac{x}{y}\right)(۲u) = (۲u)\left(\ln y + \frac{x}{y}\right) = \boxed{(۲u)\left(\ln(u^۲ - v^۲) + \frac{u^۲ + v^۲}{u^۲ - v^۲}\right)}$$

پاسخ سوال ۵- انتگرال سه گانه (مختصات کروی)

$$V = \iiint dV$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{\frac{۱}{۳}(x^۲ + y^۲)} \xrightarrow{\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}} \tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{\frac{۱}{۳}(x^۲ + y^۲)}} \to \tan\varphi = \sqrt{۳} \to \varphi = \frac{\pi}{۳} \\ z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)} \xrightarrow{\tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲+y^۲}}{z}} \tan\varphi = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{\sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}} \to \tan\varphi = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \to \varphi = \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{z=۱} r\cos\varphi = ۱ \to r = \sec\varphi$$

$$\xrightarrow{\text{Spherical coordinate}} V = \iiint r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi \to V = \int_{\varphi=\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi} \int_{r=۰}^{\sec\varphi} r^۲ dr d\theta \sin\varphi d\varphi$$

$$\xrightarrow{\int_۰^{\sec\varphi} r^۲ dr = \frac{r^۳}{۳}\Big|_{r=۰}^{\sec\varphi} = \frac{\sec^۳\varphi}{۳}} V = \frac{۱}{۳}\int_{\varphi=\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}} \int_{\theta=۰}^{۲\pi} \sec^۳\varphi d\theta \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(\int_{\theta=۰}^{۲\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}} \sec^۳\varphi \sin\varphi d\varphi\right) = \frac{۱}{۳}\left(\theta\Big|_۰^{۲\pi}\right)\left(\frac{۱}{۲\cos^۲\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۳}}\right)$$

$$\to V = \left(\frac{۱}{۳}\right)(۲\pi)\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\cos^۲\frac{\pi}{۳}} - \frac{۱}{\cos^۲\frac{\pi}{۶}}\right)\right) \to V = \frac{\pi}{۳}\left(۴ - \frac{۴}{۳}\right) \to \boxed{V = \frac{۸}{۹}\pi}$$

روش دوم :

کافی بود حجم بین دو مخروط به شعاع های $\sqrt{۳}$ و $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ و ارتفاع ۱ را حساب کنیم:

$$\xrightarrow{v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h} v = \frac{۱}{۳}\pi h(r_۲^۲ - r_۱^۲)$$

$$\to v = \frac{۱}{۳}\pi(۱)(۳ - \frac{۱}{۳})$$

$$\to v = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{۸}{۳}) \to \boxed{v = \frac{۸}{۹}\pi}$$

پاسخ سوال ۶- توابع چندمتغیره (اکسترمم)

$$f(x,y)=x^2+4y^3 \quad , \quad x^2+2y^2-1=0$$

$$L=x^2+4y^3+\lambda(x^2+2y^2-1)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial x}=0} 2x+2\lambda x=0 \to 2x(1+\lambda)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial y}=0} 12y^2+4\lambda y=0 \to 4y(3y+\lambda)=0 \to \begin{cases} y=0 \\ \lambda=-3y \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0} x^2+2y^2-1=0 \begin{cases} \xrightarrow{x=0} 2y^2-1=0 \to y^2=\frac{1}{2} \to y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \xrightarrow{y=0} 2y^2-1=0 \to x^2-1=0 \to x=\pm 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\lambda=-3y]{\lambda=-1} 3y=1 \to y=\frac{1}{3} \to x^2+\frac{2}{9}-1=0 \to x^2=\frac{7}{9} \to x=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\to (0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}),(\pm 1,0),(\pm\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3}) \xrightarrow{f(x,y)=x^2+4y^3} \begin{cases} f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\pm\sqrt{2} \\ f(\pm 1,0)=1 \\ f(\pm\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{1}{3})=\frac{7}{9}+\frac{4}{27}=\frac{25}{27} \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{\min f=-\sqrt{2}} \\ \boxed{\max f=\sqrt{2}} \end{cases}$$

پاسخ سوال ۷- توابع چندمتغیره (حد و پیوستگی)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x\sin(yz)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \xrightarrow{\text{Spherical coordinate}} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\sin\varphi\cos\theta)(r\sin\varphi\sin\theta)(r\cos\varphi)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\right) = \boxed{0}$$

پیوسته است.

پاسخ سوال ۸- انتگرال خم (پتانسیل)

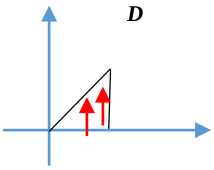
$curlF = \boxed{\vec{0}}$

چون کرل برابر صفر شد یعنی میدان پایستار است.

$$\xrightarrow{\text{Potential function}} \int F.dr = \int Pdx + \int^{*} Qdy = \int \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + 0 = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(1,0)}^{(e^{2\pi},0)} = \boxed{\frac{-1}{e^{2\pi}}+1}$$

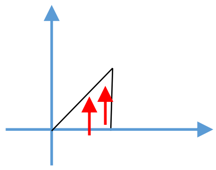
پاسخ سوال ۹- انتگرال دوگانه (تعویض کران)

$$\xrightarrow{\text{تعویض کران}} \iint_D e^{x^2}dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{x^2}dydx = \int_{x=0}^{1} ye^{x^2}\Bigg|_{y=0}^{x} dy = \int_{x=0}^{1} xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Bigg|_{x=0}^{1} = \boxed{\frac{1}{2}(e-1)}$$



پاسخ سوال ۱۰- انتگرال خم (گرین)

$$\xrightarrow{Green} \int F.dr = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint (2x-2y)dA = 2\iint (x-y)dA$$



$$\rightarrow 2\iint (x-y)dA = 2\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}(x-y)dydx = 2\int_{x=0}^{1}\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{x} dx = 2\int_{x=0}^{1}\frac{x^2}{2}dx = \int_{x=0}^{1} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$