سوال ۱)

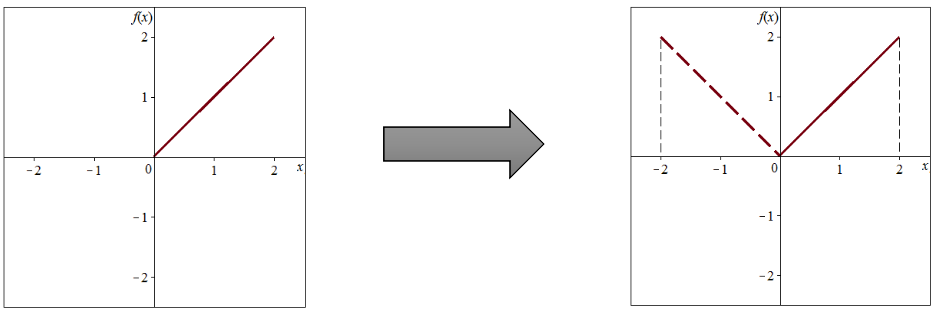
الف) سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف شده است را بنویسید.

$$f(x)=x,\quad 0<x<2$$

سپس با استفاده از همگرایی سری فوریه در نقطه $x=0$ مقدار سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ را حساب کنید

پاسخ)

برای بسط فوریه کسینوسی لازم است تابع به صورت زوج بسط داده شود.



مشتق	انتگرال
x	$\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
1	$\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$
0	$\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

$$2L=4\Rightarrow L=2$$

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx=1,\quad b_n=0,$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx=$$

$$\left[\frac{2}{n\pi}x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2+\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}\frac{-8}{n^2\pi^2} & (\text{فرد } n)\\ 0 & (\text{زوج } n)\end{cases}$$

فرد است $n\Rightarrow n=2k+1$

چون n از یک شروع می‌شود پس k باید از صفر شروع شود.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$$

طبق قضیه نمایش، در نقاط پیوستگی تابع، مقدار سری فوریه به خود مقدار تابع همگرا است. با قرار دادن $x=0$ در عبارت بالا خواهیم داشت:

$$0=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

سوال ۱)

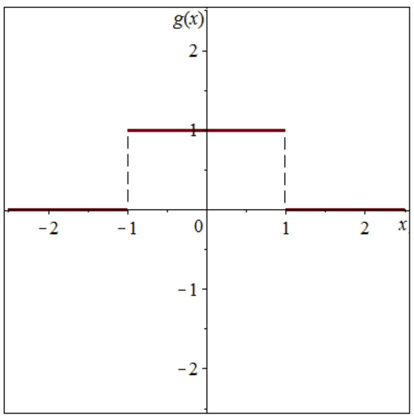
ب) انتگرال فوریه تابع $g(x)$ که به صورت زیر تعریف شده است را محاسبه کنید.

$$g(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

سپس با استفاده از همگرایی انتگرال فوریه در نقطه $x=0$ مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega$ را حساب کنید.

پاسخ)

دقت شود که تابع $g(x)$ تابعی زوج است.



$$g(x)=\int_0^\infty \left[A(\omega)\cos(\omega x)+B(\omega)\sin(\omega x)\right]d\omega,$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(\omega x)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(\omega x)d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos(\omega x)d\omega=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(\omega x)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin(\omega x)d\omega=0$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)d\omega$$

$$x=0,\Rightarrow\ 1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega\ \Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

سوال ۱)

ج) تبدیل فوریه تابع $e^{-a|x|}$ را بدست آورید. ($a > 0$)

سپس با استفاده از رابطه $\cos(bx) = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$ و خواص تبدیل فوریه، تبدیل فوریه تابع $\cos(bx)e^{-a|x|}$ را محاسبه نمایید. ($b > 0$)

پاسخ)

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{e^{(a-i\omega)x}}{a-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\right]_{0}^{\infty}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\cos(bx)e^{-a|x|}\right\} = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right)e^{-a|x|}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{ibx}}{2}e^{-a|x|} + \frac{e^{-ibx}}{2}e^{-a|x|}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\left\{e^{ibx}e^{-a|x|}\right\} + \mathcal{F}\left\{e^{-ibx}e^{-a|x|}\right\}\right]$$

از خواص تبدیل فوریه می‌دانیم $\mathcal{F}\left\{e^{-ibx}f(x)\right\} = \hat{f}(\omega+b)$ بنابراین :

$$\mathcal{F}\left\{\cos(bx)e^{-a|x|}\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\left\{e^{ibx}e^{-a|x|}\right\} + \mathcal{F}\left\{e^{-ibx}e^{-a|x|}\right\}\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\omega-b) + \hat{f}(\omega+b)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2a}{a^2+(\omega-b)^2} + \frac{2a}{a^2+(\omega+b)^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a\left(a^2+b^2+\omega^2\right)}{\left(a^2+b^2+\omega^2\right)^2-(2b\omega)^2}$$

سوال ۲)

الف) مرتبه، درجه و خطی یا غیرخطی بودن معادلات مشتقات جزئی زیر را مشخص کنید.

پاسخ)

۱) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,t)$ (درجه ۱، مرتبه ۲ و خطی)

۲) $x\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = y^3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,y)$ (درجه ۱، مرتبه ۳ و خطی)

۳) $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \varphi(x,y)$ (درجه ۲، مرتبه ۱ و غیرخطی)

سوال ۲)

ب) معادله مشتقات جزئی زیر را به روش مستقیم حل کنید.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x)y$$

$$\begin{cases} z(x,0) = x^2 \\ z\left(\dfrac{\pi}{2}, y\right) = \cos(y) \end{cases}$$

پاسخ)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x)y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x)y + F(y) \Rightarrow z(x,y) = \sin(x)\frac{y^2}{2} + H(y) + G(x)$$

$$z(x,0) = x^2 \Rightarrow x^2 = H(0) + G(x) \Rightarrow G(x) = x^2 - H(0)$$

$$\Rightarrow z(x,y) = \sin(x)\frac{y^2}{2} + H(y) + x^2 - H(0)$$

$$z\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \cos(y) \Rightarrow \cos(y) = \frac{y^2}{2} + H(y) + \frac{\pi^2}{4} - H(0) \Rightarrow H(y) = \cos(y) - \frac{y^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} + H(0)$$

$$\Rightarrow z(x,y) = \sin(x)\frac{y^2}{2} + \cos(y) + x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}$$

سوال ۲)

ج) معادله مشتقات جزئی زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad u(0,y)=8e^{-3y}$$

پاسخ)

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

$$\Rightarrow X'(x)Y(y)=4X(x)\dot{Y}(y)\Rightarrow \frac{X'(x)}{4X(x)}=\frac{\dot{Y}(y)}{Y(y)}=\lambda$$

$$\frac{X'(x)}{4X(x)}=\lambda\Rightarrow X'(x)-4\lambda X(x)=0\Rightarrow X(x)=c_1e^{4\lambda x}$$

$$\frac{\dot{Y}(y)}{Y(y)}=\lambda\Rightarrow \dot{Y}(y)-\lambda Y(y)=0\Rightarrow Y(y)=c_2e^{\lambda y}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=X(x)Y(y)=c_1e^{4\lambda x}\times c_2e^{\lambda y}=c_1c_2e^{\lambda(4x+y)}=Ce^{\lambda(4x+y)}$$

$$u(0,y)=8e^{-3y}\Rightarrow Ce^{\lambda y}=8e^{-3y}\Rightarrow\begin{cases}C=8\\ \lambda=-3\end{cases}\Rightarrow u(x,y)=8e^{-3(4x+y)}$$

سوال ۲)

د) با استفاده از روش مشخصه‌ها ابتدا نوع معادله $25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ را مشخص کنید و سپس تغییر متغیرهای لازم را برای حل معادله بدست آورید.

پاسخ)

$$25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-=0 \Rightarrow\begin{cases}A=25\\ B=0\\ C=-4\end{cases},AC-B^2=-100<0\Rightarrow$$ (معادله از نوع هذلولوی است)

$$Ay'^2-2By'+C=0\Rightarrow 25y'^2-4=0\Rightarrow(5y'+2)(5y'-2)=0\Rightarrow\begin{cases}5y'+2=0\\ 5y'-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5y+2x=c_1\\ 5y-2x=c_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}5y+2x=c_1\\ 5y-2x=c_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=5y+2x\\ w=5y-2x\end{cases}$$ **یا** $$\begin{cases}v=2x+5y\\ w=2x-5y\end{cases}$$

سوال ۲)

هـ) معادله انتقال حرارت زیر را به روش تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in(0,\pi)$$
$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(\pi,t)=0\end{cases},\quad u(x,0)=\sin(x)$$

پاسخ)

نسبت به پارامتر t تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\mathcal{L}\{u(x,t)\}=U(x,s)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\Rightarrow sU(x,s)-u(x,0)=2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ \Rightarrow\ 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-sU(x,s)=-\sin(x)\ \ (\mathrm{I})$$
$$\begin{cases}u(0,t)=0\\ u(3,t)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathcal{L}\{u(0,t)\}=0\\ \mathcal{L}\{u(\pi,t)\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U(0,s)=0\\ U(\pi,s)=0\end{cases}\quad(\mathrm{II})$$
$$(\mathrm{I})\ \Rightarrow\ U(x,s)=c_1e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x}+c_2e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}x}+\frac{\sin(x)}{s+2}$$
$$(\mathrm{II})\ \Rightarrow\begin{cases}c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=-c_1\\ c_1e^{\sqrt{\frac{s}{2}}\pi}+c_2e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}\pi}=0\Rightarrow c_1\left\{e^{\sqrt{\frac{s}{2}}\pi}+e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}\pi}\right\}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=0\\ c_2=0\end{cases}\Rightarrow U(x,s)=\frac{\sin(x)}{s+2}$$
$$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}\{U(s,t)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin(x)}{s+2}\right\}=\sin(x)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}\sin(x)$$

سوال اضافی)

معادله قسمت (د) سوال دوم را با استفاده از تغییر متغیرهای بدست آمده و شرایط زیر به طور کامل حل کنید.

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ u(\pi,y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u(x,0)=\sin(2x) \\ u_y(x,0)=0 \end{cases}$$

پاسخ)

با تغییر متغیرهای بدست آمده در بخش (د) سوال دوم، می‌دانیم پاسخ معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,y)=F(2x+5y)+G(2x-5y)$$

اکنون از شرایط داده شده استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ u(\pi,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(5y)+G(-5y)=0 \Rightarrow F(5y)=-G(-5y) \Rightarrow G(5y)=-F(-5y) \\ F(2\pi+5y)+G(2\pi-5y)=0 \Rightarrow F(2\pi+5y)-F(-2\pi+5y)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(5y+2\pi)=F(5y-2\pi)$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\sin(2x) \\ u_y(x,0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(2x)+G(2x)=\sin(2x) \\ 5F'(2x)-5G'(2x)=0 \Rightarrow F(2x)-G(2x)=c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(2x)+G(2x)=\sin(2x) \\ F(2x)-G(2x)=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(2x)=\frac{1}{2}\left[\sin(2x)+c\right] \\ G(2x)=\frac{1}{2}\left[\sin(2x)-c\right] \end{cases}$$

$$u(x,y)=F(2x+5y)+G(2x-5y)=\frac{1}{2}\left[\sin(2x+5y)+\sin(2x-5y)\right]=\sin(2x)\cos(5y)$$