

عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر در آن عبارت، همچنین درجه نسبت به چند متغیر در یک چند جمله‌ای برابر است با بزرگ‌ترین درجه‌ای یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای مورد نظر.

مثال: در عبارت $3xy^3 - 2xy^2 - 4x^2$ درجه نسبت به متغیر x برابر ۲ و درجه نسبت به y برابر ۳ است و درجه نسبت به x و y برابر با $1+3=4$ یعنی ۴ است.

نکته ۸: هرگاه در یک چندجمله‌ای جملات را نسبت به یک متغیر از توان بیشتر به توان کمتر (از چپ به راست) مرتب کنیم، می‌گوییم آن چندجمله‌ای را برحسب آن متغیر به صورت استاندارد نوشته‌ایم.

مثال: اگر عبارت $2x^3y - 3x^2y - 2x$ را برحسب x استاندارد کنیم، به صورت $2x^3y + 2x^2y - 2x$ درمی‌آید.

نکته ۹: برای ضرب دو چند جمله‌ای، تک‌تک جمله‌های عبارت اول را باید در تک‌تک جمله‌های عبارت دوم ضرب کنیم و در آخر عبارت را ساده کنیم.

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2x^2 + 4) =$$

$$x^6 + 2x^4 - 2x^4 - 4x^2 - 2x^2 - 8 = x^6 - 8$$

نکته ۱۰: هر تساوی جبری را که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، برقرار باشد، یک اتحاد جبری نامیده می‌شود. مثال: عبارت $2x - 3 = -x + 1$ یک معادله است ولی یک اتحاد نیست زیرا این تساوی برای $x = 1$ برقرار نیست.

مثال: عبارت $x + x = 2x$ یک اتحاد است زیرا به ازای هر مقداری تساوی برقرار است.

نکته ۱۱: اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال: به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$(2x-y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2$$

$$(x^2 + 2y^2)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(2y^2) + (2y^2)^2 =$$

$$x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$$

نکته ۱۲: هرگاه بتوانیم یک عبارت را به صورت ضرب چند عبارت دیگر بنویسیم، می‌گوییم آن عبارت را تجزیه کرده‌ایم.

یکی از روش‌های تجزیه فاکتورگیری است.

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2y - 4xy^2 = 2xy(x - 2y)$

ب) $6x^2ab - 2x + 4x^2 = 2x(3xab - 1 + 2x)$

نکته ۱: به حاصل ضرب اعداد حقیقی در چند متغیر، یک جمله‌ای گفته می‌شود. هر یک جمله‌ای از دو بخش تشکیل شده است. یکی ضریب عددی و دیگری عبارت حرفی. برای مثال در یک جمله‌ای $\frac{2}{3}xy^2$ ، عدد $\frac{2}{3}$ را ضریب می‌گویند و x^2y قسمت حرفی آن است.

نکته ۲: در یک جمله‌ای‌ها توان متغیرها باید عددی طبیعی باشد. همچنین متغیرها نباید زیر رادیکال یا با توان مثبت در مخرج قرار داشته باشند یا دارای قدر مطلق باشند.

مثال: عبارت‌های $\frac{3x}{y}, \sqrt{2x^2y}, -3xy, 2x$ همگی یک جمله‌ای هستند.

مثال: عبارت‌های $3|x|, 2x^3, x^{\frac{2}{3}}, \sqrt{x}$ یک جمله‌ای نیستند.

نکته ۳: هرگاه در دو یک جمله‌ای، قسمت حرفی آن‌ها یکسان باشد، می‌گوییم این یک جمله‌ای‌ها مشابه هستند مثلاً دو یک جمله‌ای $2x^2y, 3x^2y$ مشابه هستند.

مثال: دو یک جمله‌ای x^2y^2 و $2x^2y^2$ مشابه نیستند. زیرا در قسمت حرفی آن‌ها توان $2x$ یکسان نیست.

نکته ۴: در یک جمله‌ای‌ها توان هر متغیر را درجه آن یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌گوییم. مثلاً در یک جمله‌ای $3x^2y^3$ درجه نسبت به x برابر ۲ و درجه نسبت به y برابر ۳ است.

همچنین درجه یک جمله‌ای نسبت به تمام متغیرهایش از جمع کردن توان‌های تمام متغیرها حاصل می‌شود. مثلاً در یک جمله‌ای $3x^2y^3$ درجه نسبت به تمام متغیرها ۵ است. زیرا $2+3=5$.

نکته ۵: برای ضرب دو یک جمله‌ای، ضریب‌های عددی آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و قسمت حرفی آن‌ها را نیز با استفاده از قواعد اعداد توان‌دار در هم ضرب می‌کنیم.

مثال: می‌خواهیم یک جمله‌ای‌های $\frac{3}{4}xz, -2xy^2$ را در هم ضرب کنیم:

$$(-2xy^2) \times (\frac{3}{4}xz) = (-2 \times \frac{3}{4})(xy^2xz) = -\frac{3}{2}x^2y^2z$$

نکته ۶: هرگاه چند یک جمله‌ای غیرمتشابه را جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، یک چند جمله‌ای به دست می‌آید. توجه کنید که یک جمله‌ای‌ها خود چند جمله‌ای به شمار می‌روند.

مثال: عبارت $-2xy^2 - 3x^2 + \frac{1}{2}x$ یک سه جمله‌ای است.

نکته ۷: درجه یک چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر برابر است

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad n^7 + 10n^7 + 25 &= (n^7)^2 + 2 \times 5 \times n^7 + 5^2 \\ (n^7 + 5)^2 &= (n^7 + 5)(n^7 + 5) \\ \text{ج)} \quad 25x^7 + 30x^7 + 9x^7 &= x^7(25x^7 + 30x^7 + 9) = \\ &= x^7((5x)^2 + 2 \times (5x)(3) + 3^2) \\ &= x^7(5x + 3)^2 = x^7(5x + 3)(5x + 3) \end{aligned}$$

مثال: تجزیه کنید.
 مربع دو جمله‌ای است. برای این کار ابتدا جملات عبارت داده شده را با صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای مقایسه می‌کنیم (یعنی a و b را مشخص می‌کنیم) سپس عبارت داده شده را به شکل $(a+b)^2$ یا $(a-b)^2$ می‌نویسیم.

$$\text{الف)} \quad x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times (2x) + 2^2 =$$

$$(x-2)^2 = (x-2)(x-2)$$

۷۹

فعالیت

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$۱) \quad 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$۲) \quad \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) \quad (-3x^2)^2 \left(\frac{1}{5}x^3\right)^2 = (-3)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (x^3)^2 = 9 \cdot \frac{1}{25} \cdot x^4 \cdot x^6 = \frac{9}{25}x^{10}$$

$$۴) \quad \left(\frac{1}{4}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^3\right) = \left(\frac{-2}{5}\right) \cdot a^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot c^3 = -\frac{2}{5}a^5b^2c^3$$

$$۵) \quad 2(\Delta xy^2)^2 (-2x^3y^2) = 2 \cdot \Delta^2 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2 \cdot (-2x^3y^2) =$$

$$= (2)(25)(-2)(x^2 \cdot x^3) \cdot (y^2 \cdot y^2) = -100x^5y^4$$

$$۶) \quad (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) = 6x^4y^3 - 5x^3y^3 = x^3y^3$$

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

درجه نسبت به x و y	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	متغیرها	یک جمله‌ای
$2+4=6$	۴	۲	a, x, y	$\sqrt{3}a^3x^2y^2$
$2+2=4$	۲	۲	x, y, z	$\Delta x^2y^2z^2$
۳	صفر	۳	x و u	$-12x^3u$
صفر	صفر	صفر	-	$\frac{3}{5}$

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

$$\text{الف)} \quad 3x^2 + 5 - 2x + 2x^3 = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5$$

$$\text{ب)} \quad -3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2 = -4bx^2y^2 + ax^2y - 3bxy^2$$

$$\text{ج)} \quad \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 + 3x^2y - 4 = 3x^2y + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 - 4$$

۸۰

کاردر کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad -5a^2 - 3ax + x^2 - [2a^2 + 5ax - (3a^2 - 4ax)] &= -5a^2 - 3ax + x^2 - 2a^2 - 5ax + 3a^2 + 4ax \\ &= x^2 - 16ax - 6a^2 \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad (4x + 5x^2)(x^2 - x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^4 - 5x^3 + 5x^2 = 5x^4 + 4x^3 - 5x^2 + x^2 + 4x$$

$$\text{ج)} \quad (x + x^2)(x^2 + x^3 + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x = x^5 + x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$$

$$\begin{aligned}
 \text{د) } (x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) &= (x^2)(x^2) + (x^2)(x^2) + (x^2)(-2) \\
 &+ (-2x)(x^2) + (-2x)(x^2) + (-2x)(-2) + x^2 + x^2 - 2 = \underline{x^4} + \underline{x^4} - \underline{2x^2} - \underline{2x^2} + \underline{4x} + \underline{x^2} + \underline{x^2} - 2 \\
 &= x^4 - x^2 - x^2 + 4x - 2
 \end{aligned}$$

۸۱

فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید:

x	x^2	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
-۲	۴	-۱۲	۱	۱
۰	۰	۰	۹	۹
۵	۲۵	۳۰	۶۴	۶۴
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	۹	$\frac{81}{4}$	$\frac{81}{4}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ مقادیر هر دو ستون برابرند. حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

x	x^2	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
-۱	۱	-۶	۴	۴
۲	۴	۱۲	۲۵	۲۵
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	۳	$\frac{49}{4}$	$\frac{49}{4}$

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حدس می‌زنیم به ازای هر عدد حقیقی دیگری که محاسبات را انجام دهیم، حاصل دو ستون آخر با هم برابر شود.

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری $x^2 + 6x + 9$ مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

حاصل عبارت $(x+3)^2$ با عبارت $x^2 + 6x + 9$ برابر است.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است.

برابری $3x - 3 = x + 1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x = 2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 3 = 2 + 1 \Rightarrow 3 = 3$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ خیر، زیرا به ازای هر مقدار دیگر مطمئن نیستیم تساوی برقرار باشد.

برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=3 \times 0-3=-3 \\ x+1=0+1=1 \end{cases} \Rightarrow -3 \neq 1$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=3 \times 1-3=0 \\ x+1=1+1=2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq 2$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

ب) $(5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$

ج) $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$
 مربع جمله دوم دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها مربع جمله اول $\Rightarrow$ مربع جمله اول $= 4a^2 = (2a)^2$
 مربع جمله اول $= 4a^2 = (2a)^2 \Rightarrow$ دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها $= 12ab = 2(2a)(3b)$

در نتیجه داریم:

$(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$
 الف) $(1 + b)^2 = 1 + 2b + b^2 \Rightarrow$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها $= 2(1)b = 2b$
 ب) $(xy - \frac{1}{x})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{x^2}$
 مربع جمله اول $= (xy)^2 = x^2y^2$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها $= 2(xy)(\frac{1}{x}) = xy$

ج) $(x^2 - \frac{1}{x^3})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^6} (x \neq 0)$
 مربع جمله اول $= x^4 = (x^2)^2 \Rightarrow$
 مربع جمله دوم $= \frac{1}{x^6} = (\frac{1}{x^3})^2 \Rightarrow$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها $= 2(x^2)(\frac{1}{x^3}) = \frac{2}{x}$
 د) $(6x - y)^2 = 36x^2 - 12xy + y^2$
 مربع جمله اول $= 36x^2 = (6x)^2 \Rightarrow$
 دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها $= 12xy = 2(6x)y \Rightarrow$

۸۳

فعالیت

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:
 (با توجه به خاصیت پخش)

الف) $8x^2 + 12x = 4x.2x + 4x.3 = 4x(2x + 3)$

$(م.م.ب) = 4x$

ب) $6a^3 - 18a^2 = (6a^2.a) - (6a^2.3) = 6a^2(a - 3)$

ج) $7x^3 - 14x^2 + 21x = (7x^2).(x) - (7x^2).(2) + (7x^2).(3) = 7x^2(x - 2x + 3)$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y = (5xy).x - (5xy).(2y) + (5xy).(3x) = 5xy(x - 2y + 3x)$

۸۴

کاردر کلاس

باتوجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه درسه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

مربع کامل مربع کامل
 الف) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$
 $2(x)(3)$

۳- با دقت در برابری $4 + 20x + 25x^2 = (2x + 5)^2$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

- جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ $25x^2$ مربع $5x$ (توان دوم $5x$) است.

- جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با 2 و $5x$ دارد؟ $20x$ از دو برابر کردن حاصل ضرب 2 و $5x$ به دست می‌آید.

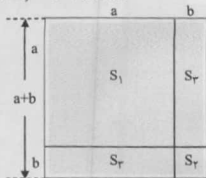
- جمله سوم سمت راست برابری یعنی 4 چه رابطه‌ای با 2 دارد؟ 4 مربع عدد 2 است. (توان دوم عدد 2 است).

عبارت جبری $25x^2 + 20x + 4$ دوجمله‌ای و $(2x + 5)^2$ را مربع دوجمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دوجمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{array}{ccccccc} (\downarrow 5x) & + & (\downarrow 2)^2 & = & (\downarrow 5x)^2 & + & 2 \times \downarrow 5x \times \downarrow 2 & + & \downarrow 2^2 \\ \text{مربع جمله دوم} & & \text{جمله دوم} & & \text{مربع جمله اول} & & \text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله} & & \end{array}$$

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد مقابل را نشان دهید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b)^2 = S_1 + 2S_2 + S_4$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x - 2)^2 = (5x - 2)(5x - 2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$

ب) $(3x - 5x)^2 = 9x^2 - 15x^2 - 15x^2 + 25x^2 = 9x^2 - 30x^2 + 25x^2 = 4x^2$

ج) $(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید. عبارت سمت راست برابر است با مربع جمله اول در پرانتز سمت چپ منهای دو برابر حاصل ضرب دوجمله‌ای داخل پرانتز سمت چپ به اضافه مربع جمله دوم داخل پرانتز سمت چپ تساوی.

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب) $(4a + 3b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot (4a) \cdot (3b) + (3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج) $(x^2 - \frac{1}{p})^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot (x^2) \cdot (\frac{1}{p}) + (\frac{1}{p})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{p^2}$

د) $(2xy - \frac{1}{p}x^2)^2 = (2xy)^2 - 2(2xy)(\frac{1}{p}x^2) + (\frac{1}{p}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{p^2}x^4$

ه) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(3\sqrt{3}) + (3\sqrt{3})^2 = 2 + 6\sqrt{6} + 27 = 29 + 6\sqrt{6}$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 5^2 - 2(5)(2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

در این سه جمله ای دو جمله ای مربع کامل داریم که عبارتند از x^2 و 9 . توجه کنید که جمله ای دیگر، دو برابر حاصل ضرب جذر x^2 و 9 است. پس با استفاده از مربع دو جمله ای تجزیه می شود. $(6x = 2(x)(3))$

ب) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2)$

توجه کنید که $4x = 2(x)(2)$

ج) $n^2 - 10n + 25 = (n-5)^2 = (n-5)(n-5)$

توجه کنید که $10n = 2(n)(5)$

د) $8ax^2 + 24axy + 18ay^2 = 2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a(2x+3y)^2 = 2a(2x+3y)(2x+3y)$

$\xrightarrow{\text{م. م. م.}} (م. م. م.) = 2a$

توجه کنید که $12xy = 2(2x)(3y)$

۸۵

تمرین

۱- عبارات های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2 - (-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3 = (25m^2)(-8m^3) - (\frac{1}{4}m^2)(-8m^3)$

$= -200m^5 + 2m^5 = -198m^5$

ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2) = 7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - a^2 + 9b^2 + 11c^2$

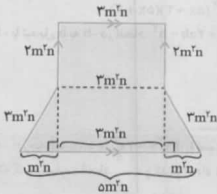
$= 6a^2 + 5b^2 + 16c^2$

ج) $(x^m - 1)(x^m - 1) = (x^m)^2 - x^m - x^m + 1 = x^{2m} - 2x^m + 1$

د) $x - [(y-x) - (y-1)] = x - [y-x-y+1] = x - (-x+1) = x+x-1 = 2x-1$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.

الف)



شکل $= 3m^2n + 2m^2n + 3m^2n$

$+ 5m^2n + 3m^2n + 2m^2n = 18m^2n$

مساحت دوزنقه = مساحت مستطیل + مساحت شکل

مساحت مستطیل $= (2m^2n)(3m^2n) = 6m^4n^2$

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس ارتفاع دوزنقه را می یابیم:

(ارتفاع) $^2 = (3m^2n)^2 - (m^2n)^2$

$= 9m^4n^2 - m^4n^2 = 8m^4n^2$

ارتفاع $= \sqrt{8m^4n^2} = 2\sqrt{2}m^2n$

ب) قطعه ای از ضلع پایین که نامعلوم است، با توجه به رابطه فیثاغورس به صورت زیر به دست می آید:

$(5xy)^2 - (3xy)^2 = A^2$

$25x^2y^2 - 9x^2y^2 = 16x^2y^2 = A^2 \Rightarrow A = 4xy$

شکل $= 4xy + 5xy + 4xy$

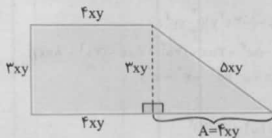
$+ 4xy + 3xy = 20xy$

مساحت دوزنقه = مساحت شکل

$= \frac{(4xy + 8xy)4xy}{2} = 18x^2y^2$

مساحت دوزنقه $= \frac{(3m^2n + 5m^2n) \times 2\sqrt{2}m^2n}{2} = 8\sqrt{2}m^4n^2$

شکل $= 6m^4n^2 + 8\sqrt{2}m^4n^2 = (6 + 8\sqrt{2})m^4n^2$



۳- طرف دیگر عبارتهای زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف $(\Delta y - 3x)^2 = (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)(3x) + (3x)^2 = 2\Delta y^2 - 3\Delta xy + 9x^2$

ب $(-3a^2 - a)^2 = (-3a^2)^2 - 2(-3a^2)(a) + (a)^2 = 9a^4 + 6a^3 + a^2$

ج $(\Delta x - \frac{1}{x})^2 = (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)(\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2 = 6\Delta x^2 - \frac{16}{x}x + \frac{1}{x^2}$

د $(2/7)^2 + 2(2/7)(3/3) + (3/3)^2 = (2/7 + 3/3)^2 = (6)^2 = 36$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

نشان می‌دهیم حاصل سمت چپ تساوی با سمت راست تساوی برابر است:

$$\left. \begin{aligned} (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$$

ب $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

سمت چپ $= (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$ سمت راست

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف $2x^2 + \Delta x^2 + \Delta x = 2x(x^2 + 2x + 1) = 2x(x+1)^2 = 2x(x+1)(x+1)$

ب $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(3a^2 - 12b^2 + a^2b^2)$

ج $a(x+1) + b(x+1)^2 = (x+1)[a + b(x+1)]$

د $a^3 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2 = a(a-1)(a-1)$

و $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy)^2 - 4xy + 4 = (xy-2)^2 = (xy-2)(xy-2)$

ه $2\Delta x^2 + 3\Delta x^2 + 9x^2 = x^2(2\Delta x^2 + 3\Delta x + 9) = x^2(\Delta x + 3)^2 = x^2(\Delta x + 3)(\Delta x + 3)$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

آرژشیابی مستمر

۱- درجه عبارت $3x^2y - 2x^2 + 1$ را نسبت به x و نسبت به y بنویسید. (۵/۰)

۲- کدام عبارت اتحاد است و کدام اتحاد نیست؟ چرا؟ (۱/۵)

الف $3x(x+1) = 3x^2 + 3x$ ب $2x^2 - 3 = x + 1$

۳- حاصل عبارت‌های زیر را بیابید. (۳ نمره)

الف $(-3x^2y)(\frac{1}{x}xy^2z)$

ب $-5a^2 - 3ax - (2a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax))$

ج $(x+x^2)(x^2 - x^2 + x^2)$

۴- به کمک اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید. (۲)

الف $(\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2$

ب $(6x^2 - 1)^2$

۵- تجزیه کنید. (۴)

الف $\Delta x^2y - 10xy^2 - 1\Delta xy$

ب $x^2 - 4x + 4$

ج $x^2 + 10x^2 + 25$

د $2ax^2 - 12ax + 18a$

۱

$$3x^2y - 2x^3 + 1 \quad \begin{cases} 3 = x & \text{درجه نسبت به } (0/25) \\ 1 = y & \text{درجه نسبت به } (0/25) \end{cases}$$

۲ الف) اتحاد است زیرا این تساوی به ازای هر مقدار حقیقی برقرار است.

$$3x(x+1) = (3x).(x) + (3x).(1) = 3x^2 + 3x \quad (0/75)$$

ب) اتحاد نیست زیرا مثلاً برای $x=1$ تساوی برقرار نیست.

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 1^2 - 3 = 2 - 3 = -1 & (\text{سمت چپ تساوی}) \\ x+1 = 1+1 = 2 & (\text{سمت راست تساوی}) \end{cases} \Rightarrow 2 \neq -1 \quad (0/75)$$

۳

$$\text{الف)} \quad -(3x^2y)(\frac{2}{3}xy^2z) = 2x^2y^2z \quad (1)$$

$$\text{ب)} \quad -5a^2 - 3ax - (4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)) = -5a^2 - 3ax - 4a^2 - 5ax + 3a^2 + 8ax = -6a^2 - 16ax \quad (1)$$

$$\text{ج)} \quad (x+x^2)(x^2-x^2+x^2) = x^5 - x^4 + x^3 + x^6 - x^5 + x^4 = x^3 + x^6 \quad (1)$$

۴

$$\text{الف)} \quad (\sqrt{2} + 3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times (3\sqrt{2}) + (3\sqrt{2})^2$$

$$= 2 + 6\sqrt{4} + 18 = 20 + 6\sqrt{4} \quad (1)$$

$$\text{ب)} \quad (6x^2 - 1)^2 = (6x^2)^2 - 2 \times (6x^2)(1) + (-1)^2 = 36x^4 - 12x^2 + 1 \quad (1)$$

۵

$$\text{الف)} \quad 5x^2y - 10xy^2 - 15xy = 5xy(x - 2y - 3) \quad (1)$$

$$\text{ب)} \quad x^2 - 3x + 2 = (x-2)^2 = (x-2)(x-2) \quad (1)$$

$$\text{ج)} \quad x^2 + 10x^2 + 25 = (x^2 + 5)^2 = (x^2 + 5)(x^2 + 5) \quad (1)$$

$$\text{د)} \quad 2ax^2 - 12ax + 18a = 2a(x^2 - 6x + 9) = 2a(x-3)^2 = 2a(x-3)(x-3) \quad (1)$$

۲ چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

$$\text{ب)} \quad -\frac{1}{25} + y^2 = y^2 - \frac{1}{25} = (y - \frac{1}{5})(y + \frac{1}{5})$$

$$\text{ج)} \quad 49x - 4x^2 = x(49 - 4x^2) = x(7 - 2x)(7 + 2x)$$

نکته ۱۶: اتحاد یک جمله مشترک به صورت زیر است:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به کمک اتحاد یک جمله مشترک بنویسید.

$$\text{الف)} \quad (2x-2)(2x+5)$$

$$= (2x)^2 + (-2+5)(2x) + (-2 \times 5) = 4x^2 + 9x - 10$$

مثال: به کمک اتحاد یک جمله مشترک، تجزیه کنید.

$$\text{الف)} \quad x^2 - 4x - 5 = x^2 + (-5+1)x + (-5 \times 1)$$

$$= (x-5)(x+1)$$

$$\text{ب)} \quad 4x^2 - 2x - 2 =$$

$$(2x)^2 + (-2+1)(2x) + (-2 \times 1) = (2x-2)(2x+1)$$

نکته ۱۷: تساوی زیر به اتحاد مزدوج معروف است. این اتحاد می‌گوید برای ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آن دو جمله، مربع جمله اول را منهای مربع جمله دوم می‌کنیم.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحاد مزدوج بنویسید.

$$\text{الف)} \quad (3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$$

$$\text{ب)} \quad (x^2+3y)(x^2-3y) = (x^2)^2 - (3y)^2 = x^4 - 9y^2$$

$$\text{ج)} \quad 1001 \times 999 = (1000+1)(1000-1) = 1000^2 - 1^2$$

$$= 1000000 - 1 = 999999$$

نکته ۱۸: از اتحاد مزدوج می‌توان برای تجزیه کمک گرفت.

فقط باید دو جمله مختلف‌العلامت باشند که تک‌تک جمله‌های آن را بتوان به صورت مربع نوشت.

مثال: تجزیه کنید.

$$\text{الف)} \quad 9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$$

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام داده و آنها را کامل کنید.

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

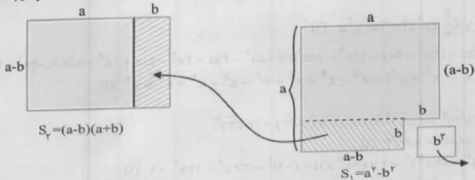
به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

۲- با استفاده از ضرب عبارت های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد به کمک شکل های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را نتیجه بگیرید.



$$\text{مساحت شکل سمت راست} = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ba + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

قسمت هاشورخورده از شکل (۱) را برداشته و به سمت راست آن اضافه می کنیم. شکل (۲) حاصل خواهد شد. مساحت شکل ۲ را به دست می آوریم:

$$\text{مساحت شکل سمت چپ} = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

چون دو مساحت باید با هم برابر باشند پس داریم:

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل آن ها برابر است با تفاضل مربع عدد اول از مربع عدد دوم.

۱- تساوی های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

$$۱) (1+a)(1-a) = 1-a^2$$

$$۲) (2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$$

$$۳) (t+3)(t-3) = t^2 - 9$$

$$۴) (a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

۲- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید؟

$$۱) (1-x)(x+1) = (1-x)(1+x) = 1-x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = -(2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) = -(2z+4y)(2z-4y) = -4z^2 + 16y^2$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2$$

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت های جبری نیز استفاده می شود.
باتوجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (2y + \frac{1}{2}z)(2y - \frac{1}{2}z)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - y][(2x+1) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)] = (1-3a-z)(1+3a+z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)] = (-x-3)(5x+5)$$

$$۶) x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$$

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (y - 3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری، به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می کند.

$$(2x - y + 3y)(2x + y - 3y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
او A را همان $2x$ و B را همان $(y - 3y)$ در نظر گرفته است.

$$(2x - y + 3y)(2x + y - 3y) = \underbrace{(2x - (y - 3y))}_a \underbrace{(2x + (y - 3y))}_b$$

$$= (2x)^2 - (y - 3y)^2 = 4x^2 - (y - 3y)^2$$

۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند. به کمک اتحادها تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500 - 3) \times (500 + 3) = 500^2 - 3^2 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = (1000 + 1)(1000 + 1) = (1000)^2 + 2 \times (1000) \times 1 + 1 = 1002001$$

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\text{الف) } (x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + \underbrace{7x}_{2+5} + \underbrace{10}_{2 \times 5}$$

$$\text{ب) } (x + 9)(x - 4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + \underbrace{5x}_{9-4} - \underbrace{36}_{9 \times (-4)}$$

جمله دوم در سمت راست از حاصل ضرب جمله مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی در مجموع جملات غیر مشترک آنها به دست می آید و جمله سوم سمت راست تساوی ها از حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزهای سمت چپ تساوی ایجاد می شود.

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم. اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟ دو عدد را طوری پیدا می‌کنیم که مجموع آنها ضریب جمله وسط باشد و حاصل ضرب آنها جمله سوم را ایجاد کند.

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

الف) $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

ب) $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

ج) $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$

د) $y^2 - y - 6 = (y-3)(y+2)$

ه) $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$

۳- تجزیه عبارت $x^2 + 10x - 24$ را چهار نفر از دانش‌آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده‌اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

الف) جواب نفر اول: $(x+6)(x-4)$

ب) جواب نفر سوم: $(x+12)(x-2)$

ج) جواب نفر دوم: $(x+6)(x+4)$

د) جواب نفر چهارم: $(x-12)(x+2)$

جواب نفر سوم درست است و بقیه نادرست هستند. زیرا تنها در این جواب است که حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک پرانتزها 24 می‌شود و حاصل جمع آنها 10 است.

۸۹

تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) اتحاد مزدوج $(\frac{1}{f} - x)(\frac{1}{f} + x) = \frac{1}{f^2} - x^2$

ب) اتحاد جمله مشترک $(5x+4) + (5x+3) = (5x)^2 + 7(5x) + 12 = 25x^2 + 35x + 12$

ج) اتحاد مزدوج $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) =$

د) اتحاد مزدوج و مربع دو جمله‌ای $(3x+y-z)(3x+y+z) = (3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$

ه) اتحاد مزدوج $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

و) اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت‌های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت‌های مناسب بگذارید.

الف) $(xy-z)(xy+z) = (xy)^2 - z^2$ ج) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$

ب) $(\frac{1}{f}y + \sqrt{5})(\frac{1}{f}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{f^2}y^2 - 5$ د) $(x^2+7)(x^2-5) = x^4 + 2x^2 - 35$

۳- عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف) $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$

ب) $x^2 + x + \frac{1}{f} = (x + \frac{1}{f})^2 = (x + \frac{1}{f})(x + \frac{1}{f})$

ج) $x^2 + 10x + 24 = (x+6)(x+4)$

د) $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

ه) $4ax^2 - a = a(4x^2 - 1) = a(2x-1)(2x+1)$

و) $x^2 - 13x + 36 = (x-4)(x-9)$

ز) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2 = (x-6)(x-6)$

ح) $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$

ط) $bx^2 - 5bx - 5b = b(x^2 - 5x - 5) = b(x-10)(x+5)$

ی) $x^2 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

در شکل بالا چنانچه وزنه p کیلوگرمی باشد به طوری که $a = b + p$ ، در این صورت برای اینکه کفه های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ روی کفه ای که وزنه b قرار دارد.
باتوجه به برابری های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج) $a - 2 = b + 3 \Rightarrow a = b + 5 \Rightarrow a > b$

ب) $m + 1 = n + 3 \Rightarrow m = n + 2 \Rightarrow m > n$

د) $2m = 3n \quad (m, n > 0) \Rightarrow m > n$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت های « a بزرگتر از b » یا « a کوچکتر از b » یا « a برابر با b » خواهد داشت.

چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد، در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ ، در این حالت می نویسیم $a \geq 0$ و می خوانیم a بزرگتر یا برابر با 0 است؛ مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$ یا $\frac{1}{3} \geq 0$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که a از b کمتر نباشد، در این صورت $a > b$ یا $a = b$ در این حالت می نویسیم $a \geq b$.

۹۱

کار در کلاس

۱- متناظر با هریک از ناحیه های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

الف) $-3 \leq x \leq 5$

(الف)

ب) $2 \leq x < 5$

(ب)

۲- درستی یا نادرستی هریک از عبارت های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a + b > 0$ ، آنگاه a و b هر دو مثبت هستند. نادرست ($(+3) + (-2) > 0$)

ب) اگر $ab > 0$ ، آنگاه a و b هم علامت هستند. درست

ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ ، آنگاه a و b و c منفی هستند. نادرست ($\frac{2 \times 3}{-5} < 0$)

د) اگر $a^2 b < 0$ ، آنگاه b منفی است. درست

۳- عبارت های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگتر است. $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگتر است. $8 > -(2x + 3)$

۹۱

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \Rightarrow 0 < 4$

$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \Rightarrow -10 < -6$

$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \Rightarrow -103 < -102$

با توجه به حاصل عبارت های دو طرف نامساوی ها، نابرابری باز هم برقرار است.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری ها تغییر می کنند؟

$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times 0} 0 = 0$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-1)} 7 < 9$

باتوجه به حاصل ضرب ها مشاهده می کنیم که نابرابری ها تغییر می کند.

الف) $a^2 - 2\delta = (a^2 - \delta)(a^2 + \delta)$ (۱)

ب) $y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$ (۱)

ج) $ax^2 - 4ax + 4a = a(x^2 - 4x + 4) = a(x-2)^2$ (۱)

د) $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$ (۱)

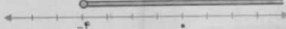
۳ نایبریی ها و نامعادله ها

مثال: نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور نشان دهید.

$$3x - 1 \leq 5x + 7$$

$$\Rightarrow 3x - 5x \leq 7 + 1 \Rightarrow -2x \leq 8$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{8}{-2} \Rightarrow \boxed{x \geq -4}$$



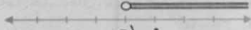
$$2(x-1)^2 > 2x(x-3)$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) > 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 > 2x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow -4x + 2 > -6x$$

$$\Rightarrow -4x + 6x > -2 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow \boxed{x > -1}$$



$$\frac{2}{3}x - 2 > x - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (\frac{2}{3}x - 2 > x - \frac{1}{3}) \times 6 \Rightarrow 4x - 12 > 3x - 1$$

$$\Rightarrow 4x - 6x > 12 - 1 \Rightarrow -2x > 11 \Rightarrow x < \frac{11}{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x < -10.5}$$



نکته ۱۷: هر عبارت جبری که بین آنها یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ ، $\leq$ یا $\geq$ باشد، یک نایبریی ایجاد می‌کند.

مثال: هر یک از عبارت‌های $1 < 2$ ، $0 \leq x+1$ ، $-(x+1) \leq 0$ یک نایبریی هستند.

نکته ۱۸: به دو طرف یک نامساوی می‌توان عددی مانند c را افزود یا این که از دو طرف آن عددی مانند c را کم کرد:

$$a < b \rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \rightarrow a - c < b - c$$

نکته ۱۹: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب کنیم، (یا بر عددی مثبت تقسیم کنیم) آن نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a < b \xrightarrow{c>0} ac < bc$$

نکته ۲۰: اگر دو طرف یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم، (یا بر عددی منفی تقسیم کنیم)، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a < b \xrightarrow{c<0} ac > bc$$

مثال: از آنجا که $3 < 5$ ، آن گاه:

$$3 + 2 < 5 + 2 \Rightarrow 5 < 7$$

$$3 - 2 < 5 - 2 \Rightarrow 1 < 3$$

$$3 \times 2 < 5 \times 2 \Rightarrow 6 < 10$$

اما اگر نامساوی $3 < 5$ را در (-2) ضرب کنیم، به نامساوی $-6 > -10$ تبدیل می‌شود.

نکته ۲۱: برای حل یک نامعادله درجه اول دقیقاً مانند حل یک معادله درجه اول عمل می‌کنیم. اگر ضریب مجهول مثبت باشد، جهت نامساوی ثابت و اگر ضریب مجهول منفی باشد، جهت نامساوی عوض می‌شود.

فعالیت

روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. باتوجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین تر است.



- باتوجه به وضعیت ترازو، هریک از نمادهای $<$ ، $>$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$$a \boxed{>} b, a \boxed{<} b, b \boxed{\neq} a$$

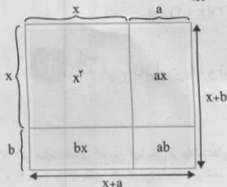
۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a = b$ باشد، چه اتحادی به دست می‌آید؟ اگر a و b قرینه باشند، کدام اتحاد به دست می‌آید؟

اگر $a = b$ باشد اتحاد مربع دو جمله‌ای و اگر $a = -b$ اتحاد مزدوج به دست می‌آید.

$$a = b \Rightarrow (x + a)(x + b) = (x + a)^2$$

$$a = -b \Rightarrow (x + a)(x + b) = (x + a)(x - a)$$

۵- به کمک مساحت‌ها در شکل روبه‌رو، اتحاد جمله مشترک را به دست آورید.



$$\text{مساحت کل شکل} = (x + a)(x + b)$$

$$\text{مساحت کل شکل} = x^2 + bx + ax + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

ارزشیابی مستمر

۱- جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۳/۷۵ نمره)

الف) $(\dots + 2x)(\dots) = y^2 - 4x^2$

ب) $(\dots + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \dots$

ج) $(x + \dots)(x - 3) = \dots + 7x - \dots$

د) $(\dots + x - 3)^2 = \dots + x^2 + 9 + 2xy - \dots$

۲- حاصل عبارت $2 = 98 \times 10^2$ را به کمک اتحادها بیابید. (۵/۷۵)

۳- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها بنویسید. (۲)

الف) $(2x - 3)(2x + 3)$

ب) $(2x - 3y + 1)^2$

ج) $(x - 5)(x - 2)$

د) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

۴- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (۴)

الف) $a^2 - 25$

ب) $y^2 - 3y + 2$

ج) $ax^2 + 4a - 4ax$

د) $x^4 - 13x^2 + 36$

پاسخ ارزشیابی مستمر

الف) $(y + 2x)(y - 2x) = y^2 - 4x^2$ (۵/۷۵)

۱

ب) $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$ (۵/۷۵)

ج) $(x + 10)(x - 3) = x^2 + 7x - 30$ (۵/۷۵)

د) $(y + x - 3)^2 = y^2 + x^2 + 9 + 2xy - 6y - 6x$ (۱)

۲

$98 \times 10^2 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 4 = 10000 - 4 = 9996$ (۵/۷۵)

۳

الف) $(2x - 3)(2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$ (۵/۵)

ب) $(2x - 3y + 1)^2 = (2x)^2 + (-3y)^2 + 1^2 + 2(2x)(-3y) + 2(2x)(1) + 2(-3y)(1)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 1 - 12xy + 4x - 6y$ (۵/۵)

ج) $(x - 5)(x - 2) = x^2 - 7x + 10$ (۵/۵)

د) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = x^4 - 16$ (۵/۵)

۳- نابرابری $2x + 1 > 7$ را در نظر بگیرید: این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم.

در جدول زیر مقدارهای داده شده را به جای x قرار دهید: آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟ خیر

نامعادله	$x = -1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 7$
$2x + 1 > 7$	$2(-1) + 1 > 7$	$2(2) + 1 > 7$	$2(3) + 1 > 7$	$2(4) + 1 > 7$	$2(7) + 1 > 7$
	↓	↓	↓	↓	↓
	$-1 > 7$	$5 > 7$	$7 > 7$	$9 > 7$	$15 > 7$
	نادرست	نادرست	نادرست	درست	درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

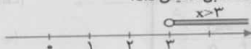
- دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

$$2x + 1 - 1 > 7 - 1 \Rightarrow 2x > 6$$

- دو طرف نامعادله حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

$$\frac{1}{2} \times 2x > \frac{1}{2} \times 6 \Rightarrow x > 3$$

- با توجه به نابرابری $x > 3$ متوجه می‌شویم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت مقابل نمایش داد.



$$2x + 1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} 2x > 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x > 3$$

۹۳

کار در کلاس

۱- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x + 7 \geq 15 \Rightarrow 2x \geq 15 - 7 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ب) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \times 6 \Rightarrow \frac{x}{3} - 6 < \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$
 $\xrightarrow{+(-3)} 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

ج) $3(x-1) \geq 2x+1 \Rightarrow 3x-3 \geq 2x+1 \Rightarrow 3x-2x \geq 1+3 \Rightarrow x \geq 4 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

د) $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{6} \leq \frac{1}{3}(3-x) + \frac{x}{6} \Rightarrow 8(x+7) - 2x \leq 6(3-x) + 2x$
 $\Rightarrow 8x + 56 - 2x \leq 18 - 6x + 2x \Rightarrow 5x + 56 \leq 18 - 4x$

$\Rightarrow 5x + 4x \leq -56 + 18 \Rightarrow 9x \leq -38 \Rightarrow x \leq \frac{-38}{9} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-38}{9}\}$

۹۳

تمرین

- در جاهای خالی نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین کنید.

الف) $a - b = 1$ در این صورت $a \boxed{\geq} b$.

ب) اگر $u - v = -2$ در این صورت $u \boxed{\leq} v$.

ج) اگر $2(p-1) = 2q-3$ در این صورت $p \boxed{\leq} q$.

د) اگر $\frac{a-b}{2} = -3$ در این صورت $a \boxed{\leq} b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$

$$b \neq 0, a < 0, c > 0$$

$$b \neq 0, a > 0, c < 0$$

ب) $\frac{a}{bc} > 0$

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

$$a > 0, b < 0, c < 0$$

$$a < 0, b < 0, c > 0$$

$$a < 0, b > 0, c < 0$$

ج) $ab > 0$

$$a > 0, b > 0$$

$$a < 0, b < 0$$

د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

$$a \neq 0, b > 0, c > 0$$

$$a \neq 0, b < 0, c < 0$$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5 - x$

$$2x - 6 + 5 < 5 - x \Rightarrow 2x - 1 < 5 - x \Rightarrow 2x + x < 5 + 1 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2$$

$$\Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

ب) $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$

$$3 - 2x \geq 15 - 10x \Rightarrow -2x + 10x \geq 15 - 3 \Rightarrow 8x \geq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\}$$

ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2} \Rightarrow y - 3 - 4 > 2y \Rightarrow y - 7 > 2y \Rightarrow y < -7 \Rightarrow D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -7\}$

د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \Rightarrow -24 - 3q \leq 4(1+q) \Rightarrow -24 - 3q \leq 4 + 4q \Rightarrow -4q - 3q \leq 24 + 4$

$$-7q \leq 28 \Rightarrow q \geq \frac{28}{-7} \Rightarrow q \geq -4 \Rightarrow \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -4\}$$

۴- اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ خیر برای مثال $(-3)^2 > (-2)^2$ اما $-3 < -2$

۵- اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید.)

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (a-b)(a+b) > 0$$

$$\begin{aligned} a+b &> 0 \\ \Rightarrow (a-b) &> 0 \Rightarrow a > b \end{aligned}$$

۶- عبارت‌های کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

$3x > 2x + 300$ ($x = \text{پول علی}$)

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

$$\frac{a}{2} + 4b < 6$$

۷- دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازه سه برابر وزن خود کیلوکالری انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

$$\left. \begin{aligned} 85 \times 3 &= 255 \\ 65 \times 3 &= 195 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 255 + 195 = 450$$

این دو نفر هر روز حداقل ۴۵۰ کیلو کالری انرژی نیاز دارند. چون مجموع کیلوکالری‌ها کمتر از ۴۵۰۰ است. اگر x تعداد روزهای گذرانده شده باشد پس $450 \cdot x < 4500$.

دو نفر حداکثر ۱۰ روز دوام می‌آورند. $450 \cdot x < 4500 \Rightarrow x < 10$