دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم شهر

ریاضیات مهندسی تکمیلی

دکتر عسکری تشکری

استادیار گروه مهندسی آب

مهرماه ۱۳۹۳

Subject: ریاضیات مهندسی تکمیلی
Year. ۹۰ Month. ۷ Date. ۱۲ ( ) جلسه اول ۱

۱ - آنالیز مختلط
۲ - آنالیز فوریه
۳ - معادلات با مشتقات جزئی

مرجع ۱ - ریاضیات مهندسی پیشرفته (۲) - اروین کریزیگ - دکتر شیدفر
۲ - ریاضی مهندسی - دکتر شیدفر
۳ - ریاضی مهندسی - دکتر حاجی جمشیدی

فصل اول :
آنالیز مختلط :

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$

اعداد مختلط $\rightarrow i=\sqrt{-1}$ واحد موهومی

$x=\pm i$

$Z = x + iy$ (قسمت حقیقی: x ، قسمت موهومی: y ، واحد موهومی: i)

$Z=i \Rightarrow 0+1i$

$Z=1 \Rightarrow 1+0i$

مجموعه جدیدی به نام مجموعه اعداد مختلط معرفی می کنیم و آن را تعمیمی از اعداد حقیقی در نظر می گیریم بعنوان مثال معادله $x^2+1=0$ در مجموعه اعداد حقیقی دارای جواب نمی باشد با قرار دادن $i=\sqrt{-1}$ بعنوان واحد موهومی این معادله دارای دو جواب $x=\pm i$ در مجموعه اعداد مختلط می باشد.

تعریف: هر عدد مختلط در حالت کلی به صورت $Z=x+iy$ نشان داده می شود بطوریکه :
x قسمت حقیقی Z (Realez) نامند.
y قسمت موهومی Z (Imaginary) نامند.

$Z = x + iy$

$Z = \text{Realez} + i\,\text{Imainary}$ $\qquad Re(z)=x \qquad Im(Z)=y$

مجموعه همه اعداد مختلط را به صورت

$\mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in R,\ i=\sqrt{-1}\}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 \qquad \Longleftrightarrow \quad z_1 = z_2 \qquad x_1 = x_2 \,,\; y_1 = y_2$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i^1 = (-1)^2 \times i = -i$$

$$i^4 = (i^{4\times 1}) = i^2 \times i^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad a^n \times a^m \Longleftrightarrow a^{n+m}$$: یادآوری

$$i^8 = (i^{4\times 2}) = i^4 \times i^4 = 1$$

$$i^{12} = (i^{4\times 3}) = i^8 \times i^4 = 1$$

$$\forall n \in N \Rightarrow i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \times i^1 = 1 \times i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \times i^2 = 1 \times i^2 = -1$$

مثال: مقدار i^{83} و i^{91} را محاسبه کنید.

$$i^{83} = i^{4\times \overset{n}{20} + 3} = i^3 = -i \qquad 83 \,|\, 4$$

$$i^{91} = i^{4\times \overset{n}{22} + 3} = i^3 = -i \qquad 91 \,|\, 4$$

اعمال جبری روی اعداد مختلط:

برای هر دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$

روابط زیر برقرارند:

جمع و تفریق 1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

ضرب 2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$

تقسیم 3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ ، $z_2 \neq 0$

مثال: ضرب و تقسیم دو عدد مختلط $z_1 = 1+\sqrt{3}i$ و $z_2 = 1+i$ را بنویسید.

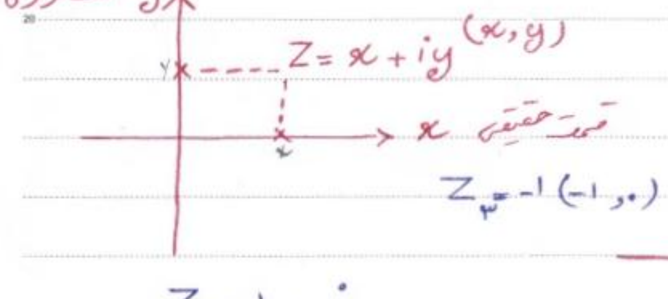
$$z_1 \cdot z_2 = (\underset{x_1}{1} + \underset{y_1}{\sqrt{3}}i) \cdot (\underset{x_2}{1} + \underset{y_2}{i}) \Rightarrow \overset{(1\times 1)-(\sqrt{3}\times 1)}{(1-\sqrt{3})} + i\overset{(1\times\sqrt{3})+(1\times 1)}{(1+\sqrt{3})}$$

علامت $\rightarrow (\sqrt{3}+1)$

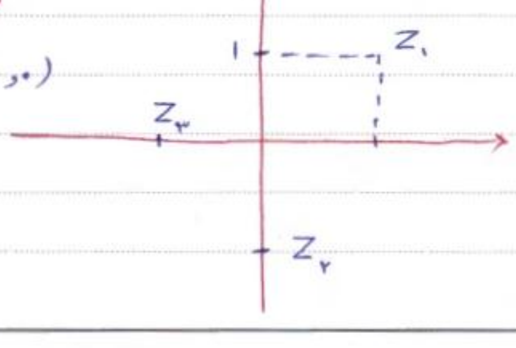
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{1+1} + i\frac{\sqrt{3}-1}{1+1} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

نمایش دکارتی اعداد مختلط:

هر عدد مختلط $z = x + iy$ متناظر با نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ مختلط می‌باشد.



$z_3 = -1$ $(-1, 0)$



$z_1 = 1 + i$

$z_2 = -i$ $(0, -1)$

تعاریف :

قرینه هر عدد مختلط $z=x+iy$ به صورت $-z=-x-iy$ تعریف می‌شود به طوری که

$$z+(-z)=0$$

$$z=2-3i \Rightarrow -z=-2+3i$$

مزدوج هر عدد مختلط $z=x+iy$ به صورت $\bar{z}=x-iy$ تعریف می‌شود

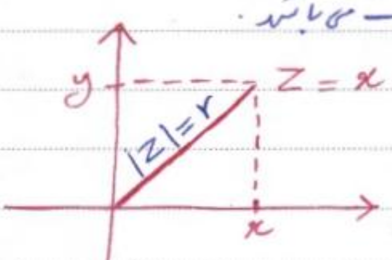
$$z=1-3i \Rightarrow \bar{z}=1+3i$$

تعریف عکس عدد مختلط $z=x+iy$ به صورت $\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$ تعریف می‌شود به طوری که $z\cdot\frac{1}{z}=1$

$$\frac{1}{\underset{x}{2}-\underset{y}{3}i}=\frac{\overset{x}{2}}{13}+i\frac{\overset{-y}{-(-3)}}{13}$$

قدر مطلق عدد مختلط $z=x+iy$ به صورت $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ تعریف می‌شود.

از نظر هندسی قدر مطلق هر عدد مختلط فاصله آن عدد تا مبدأ مختصات می‌باشد.



$$|z|^2=x^2+y^2 \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

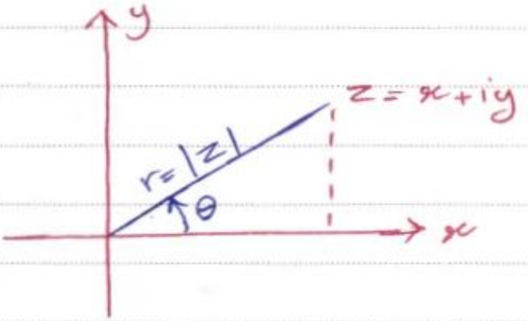
$$z=1+3i \Rightarrow |z|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$z=\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نمایش مثلثاتی اعداد مختلط:

برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ زاویه θ و r به صورت زیر تعریف می‌شود



$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{y}{r} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \end{cases} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}}$$

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

فرم مثلثاتی

آرگومان اصلی ← زاویه‌ای در بازه ۰ و ۲π می‌باشد.

$$\theta \rightarrow 0 < \theta \leq 2\pi \Rightarrow \theta = \operatorname{Arg}(z)$$

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) + 2n\pi$$ ← حالت کلی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: فرم مثلثاتی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$-1+i$

دوم $\pi-\theta$	اول θ
سوم $\pi+\theta$	چهارم $2\pi-\theta$

1) $Z=-1+i$

$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right)=\tan^{-1}1 \Rightarrow$ $\left(\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$

$$\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{4} & \text{غ ق ق}\\ \pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$Z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

2) $Z=1-\sqrt{3}\,i$ ناحیه چهارم مثلثاتی.

$\frac{\pi}{3}$

$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$\theta=Arg(z)=2\pi-\text{Arctg}\frac{|y|}{|x|}=\frac{5\pi}{3}$

$$\theta=\text{ArcTan}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)\Rightarrow\theta=\begin{cases}\pi-\frac{\pi}{3} & \text{غ ق ق}\\ 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$Z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{6}$

3) $Z=\sqrt{3}-i$ ناحیه چهارم. $\theta=Arg(z)=2\pi-\text{Arctg}\frac{|y|}{|x|}$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\frac{11\pi}{6}$

$$\theta=\text{ArcTan}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow\theta=\begin{cases}\pi-\frac{\pi}{6} & \text{غ ق ق}\\ 2\pi-\frac{\pi}{6}=11\frac{\pi}{6} & \text{ق ق}\end{cases}$$

$Z=2\left(\cos 11\frac{\pi}{6}+i\sin 11\frac{\pi}{6}\right)$

اعمال اساسی روی اعداد مختلط:

برای هر دو عدد مختلط $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
جمع و ضرب و تقسیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

1) $Z_1 \pm Z_2 = (r_1\cos\theta_1 \pm r_2\cos\theta_2) + i(r_1\sin\theta_1 \pm r_2\sin\theta_2)$

2) $Z_1 \cdot Z_2 = (r_1\cos\theta_1 \cdot r_2\cos\theta_2 - r_1\sin\theta_1 \cdot r_2\sin\theta_2) + i(r_1\cos\theta_1 \cdot r_2\sin\theta_2 + r_2\cos\theta_2 \cdot r_1\sin\theta_1)$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \Big[\underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\,(\underbrace{\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1}_{\sin(\theta_1+\theta_2)})$$

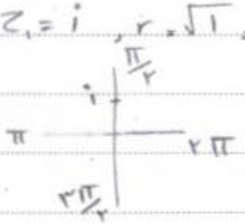
$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

3) $$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

نکته

مثال: ضرب و تقسیم دو عدد مختلط $Z_1 = i$ و $Z_2 = -1+i$ در فرم مثلثاتی بنویسید.

$Z_1 = i$, $r = \sqrt{1} = 1$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$ Tan در ربع ۲ و ٤ منفی است.



$$\theta \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{ق ق (ربع اول)} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{غ ق ق (ربع سوم)} \end{cases} \qquad \theta + \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3}{2}$$

$Z_2 = -1+i$ $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\theta = \operatorname{ArcTan}\left(\frac{1}{-1}\right)$

$$\theta = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4} & \text{ق ق (ربع دوم)} \\ 2\pi - \frac{\pi}{4} & \text{غ ق ق (ربع چهارم)} \end{cases}$$

دستور دموآر:

برای هر عدد مختلط $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بنا بر دستور دموآر رابطه زیر برقرار است:

$$Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$

مثال: حاصل عبارت $(1+i)^{24}$ ، $(1-i\sqrt{3})^{-6}$ را بدست آورید.

$(1+i)^{24}$

$Z = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\theta = \operatorname{ArcTan}(1) \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{ق ق} \\ \pi + \frac{\pi}{4} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در جلسه دوم در مورد آن توضیح داده شد

π | 2π

مضارب فرد π | مضارب زوج π

$$(1+i)^{24} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{24} = (\sqrt{2})^{24}$$

$$\Big[\underbrace{\cos\frac{24\pi}{4}}_{1} + i\,\underbrace{\sin\frac{24\pi}{4}}_{0}\Big] \Rightarrow 2^{12}[1 + 0i] \Rightarrow 2^{12}$$

نکته: مضارب زوج 2π ← مثل $\cos 2\pi \to 1$ و $\sin 4\pi \to 0$

$(1-i\sqrt{3})^{-6}$

$Z = 1 - i\sqrt{3}$

$r = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$$\theta = \operatorname{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) \Rightarrow \theta = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{3} & \text{غ ق ق} \\ 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$(1-i\sqrt{3})^{-6} = \left[2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{-6}$$

$\frac{5\pi}{3} \times (-6) = \frac{-30\pi}{3} = -10\pi$

$$= 2^{-6}\left[\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)\right]$$

$$= 2^{-6}(1 + 0i)$$

$$= 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ریشه یابی اعداد مختلط :

ریشه سوم ۱ = $\sqrt[3]{1} = x \Rightarrow 1 = x^3 \ , \ x^3 - 1 = 0$

ریشه های n ام عدد مختلط z از رابطه زیر محاسبه می شوند : $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$

$$\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,\underbrace{\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]}$$

$, k = 0, 1, 2, \dots n-1$

یا $= \sqrt[n]{r}\ \mathrm{cis}\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$

مثال : ریشه های سوم عدد مختلط $z = -1$ را بیابید .

$z = -1$

$r = \sqrt{(-1)^2} = 1$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-1}\right) \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0 & \text{غ ق ق} \\ \pi & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\omega_k = \underbrace{\sqrt[3]{1}}_{1}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)\right]$$

$K = 0, 1, 2$

$k = 0 \Rightarrow \omega_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 1 \Rightarrow \omega_1 = \overset{-1}{\cancel{\cos\pi}} + i\overset{0}{\cancel{\sin\pi}}$

$\Rightarrow \omega_1 = -1$

$k = 2 \Rightarrow \omega_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

$\omega_2 = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

PAPCO

مثال: ریشه های دوم عدد مختلط $Z=1-i$ را بیابید.

$$Z=1-i$$

$$r=\sqrt{2}$$

$$\theta=\tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta=\begin{cases} \pi-\frac{\pi}{4} & \text{غ ق ق} \\ 2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\omega_k=\sqrt[2]{\sqrt{2}}\ \text{cis}\left(\frac{2k\pi+\frac{7\pi}{4}}{2}\right) \qquad k=0,1$$

$$k=0 \Rightarrow w_0=\sqrt[4]{2}\ \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$k=1 \Rightarrow w_1=\sqrt[4]{2}\ \text{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right)$$

تذکر: برای محاسبه ریشه های دوم عدد مختلط Z می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\sqrt{Z}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(\underbrace{|z|}_{r}+\underset{Re(z)}{x})}+i\ \text{sgn}(\overset{Im(z)}{y})\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-x)}\right]$$

به طوریکه
$$\text{sgn}(y)=\begin{cases} 1 & y\geq 0 \\ -1 & y<0 \end{cases}$$

$$|z|=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

مثال
$$\underbrace{\sqrt{8-6i}}_{z}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(10+8)}-i\sqrt{\frac{1}{2}(10-8)}\right] \Rightarrow \pm[3-i] \begin{cases} 3-i \\ -3+i \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دستورات اویلر:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots \quad (1)$$ بسط مک لورن

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\dots \quad (2)$$ بسط مک لورن

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\frac{x^{6}}{6!}+\dots \quad (3)$$ بسط مک لورن

با قرار دادن ix به جای x در رابطه 1 داریم

$$e^{ix}=1+ix+\frac{\overbrace{(ix)^{2}}^{i^2=-1}}{2!}+\frac{\overbrace{(ix)^{3}}^{i^3=-i}}{3!}+\frac{(ix)^{4}}{4!}+\dots$$

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^{2}}{2!}-i\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\dots$$

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\dots\right)+i\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+\dots\right) \quad (*)$$

عامل فاکتورگیری

توضیح:
لذا با توجه به رابطه اخیر بدست آمده $(*)$ و توجه به روابط (۲) و (۳) در بالای صفحه با جایگذاری به فرمول های زیر دست می یابیم : فرمول اویلر

$$\boxed{e^{ix}=\cos x+i\sin x}$$

$$\boxed{e^{-ix}=\cos x-i\sin x}$$

فرمول نمایی اعداد مختلط :

فرم نمایی عدد مختلط $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

فرم نمایی $Z=re^{i\theta}$

PAPCO

Subject: شکل قطبی شکل دکارتی

Year. Month. Date ( )

مثال: اعداد a و b را طوری بیابید که رابطه $e^{a+bi} = \overset{Z}{(1+i)}$ برقرار باشد.

فرم قطبی ← r و θ را بدست بیاوریم در فرمول $Z = re^{i\theta}$

$Z = 1+i \Rightarrow r=\sqrt{۲}\ ,\ \theta=\frac{\pi}{۴}$

$Z=\sqrt{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۴}}$

یادآوری: $(a^{m+n}=a^m\times a^n)$

$e^{a+bi}=\sqrt{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۴}}$

$\underbrace{e^a}_{r}\, e^{bi} = \underbrace{\sqrt{۲}}_{r}\, e^{i\underbrace{\frac{\pi}{۴}}_{\theta}} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{\pi}{۴} \\ e^a=\sqrt{۲} \\ Ln\, e^a = Ln\sqrt{۲} \Rightarrow a\, Ln\, e = Ln\sqrt{۲} \\ a = Ln\sqrt{۲} \end{cases}$

از طرفین تساوی ln می‌گیریم.

یادآوری: $\log_e^x = Ln\, x$

$Ln\, e = \log_e^e = 1$

$Ln\, x^a = a\ln x \Rightarrow Ln\, e^a = a\ln e = a\log_e^e = a\times 1 = a$

مثال: مکان هندسی نقاط مربوط به معادله‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $Re(\frac{1}{Z})>1$

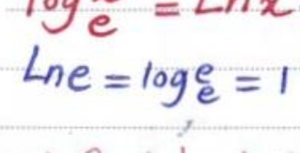
$Z=x+iy \Rightarrow \frac{1}{Z} = \underbrace{\frac{x}{x^۲+y^۲}}_{Re\ (\text{حقیقی})} + i\underbrace{\frac{-y}{x^۲+y^۲}}_{Im\ (\text{موهومی})}$

$Re(\frac{1}{Z})>1 \Rightarrow \frac{x}{x^۲+y^۲}>1 \Rightarrow x>x^۲+y^۲$

$\Rightarrow x^۲-x+y^۲<0$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{۲})^۲-\frac{1}{۴}+y^۲<0 \Rightarrow \boxed{(x-\frac{1}{۲})^۲+y^۲<\frac{1}{۴}}$

نقاط درون دایره‌ای به مرکز $O\left|\begin{matrix}x=\frac{1}{۲}\\ y=0\end{matrix}\right.$ و شعاع $r=\frac{1}{۲}$



نقاط درون دایره‌ای به مرکز $(0\ ,\ \frac{1}{۲})$ و شعاع $\frac{1}{۲}$ می‌باشد.

$(x-a)^۲+(y-b)^۲=R^۲$

دایره‌ای به مرکز (a,b) و شعاع R

مثال: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (|y| \neq 0)$

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = 1$$

$\frac{|z+i|}{|z-i|} = 1 \Rightarrow |z+i| = |z-i|$ طرفینِ وسطین

$$\Rightarrow |(x+iy)+i| = |(x+iy)-i|$$

$$\Rightarrow |x+i(\overbrace{y+1}^{y})| = |x+i(\overbrace{y-1}^{y})|$$

اندازه مختلط را به یاد آوردیم

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+(y+1)^2 = \cancel{x^2}+(y-1)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{y^2}+\cancel{1}+2y = \cancel{y^2}+\cancel{1}-2y$$

$\Rightarrow 4y = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ نقاط روی خط $y=0$ $\rightarrow$ محور xها

قضیه: روابط زیرِ همواره برقرارند:

مزدوج

1) $|z| = |\bar{z}|$

2) $z+\bar{z} = 2Re(z) \longrightarrow \frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)$

3) $z-\bar{z} = 2i\,Im(z) \longrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z)$

همان نکاتی که قبلاً نیز دیده بودیم در جزوه

4) $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$

5) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ***

۶) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

۷) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

۸) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $\quad z_2 \neq 0$

۹) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

۱۰) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ***

۱۱) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ***

۱۲) $\bar{\bar{z}} = z$

Subject: جلسه ۲
Year. ۹. Month. ۷ Date. ۱۹ ( )

تعریف دایره:

هر دایره به مرکز z_0 و شعاع دلخواه r به صورت $|z-z_0|=r$ نشان داده می‌شود.

دایره یکه یعنی دایره‌ای به مرکز صفر و شعاع یک ← $|z|=1$

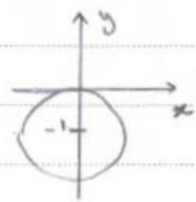
$$|z-z_0|=r \Rightarrow |(x+iy)-(x_0+iy_0)|=r$$
$$\Rightarrow |(x-x_0)+i(y-y_0)|=r$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$$
$$\Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

دایره‌ای به مرکز (x_0, y_0) و شعاع r

$|z+i|=1 \longrightarrow r=1$

$z_0=-i$

$\Longrightarrow$ دایره‌ای به مرکز $z_0=-i$ و شعاع r



نامساوی $|z-z_0|<r$ نقاط درون دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r را نشان می‌دهد.

و نامساوی $|z-z_0|\geq r$ نقاط روی دایره و خارج دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع r را نشان می‌دهد.

r_1 = شعاع دایره کوچک r_2 = شعاع دایره بزرگ

$$r_1<|z-z_0|<r_2$$

ناحیه‌ای بین دو دایره متحدالمرکز به مرکز z_0 و شعاع‌های r_1 و r_2 را به صورت $r_1<|z-z_0|<r_2$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه می‌نامیم.

$r_1<|z-z_0|$ $|z-z_0|<r_2$

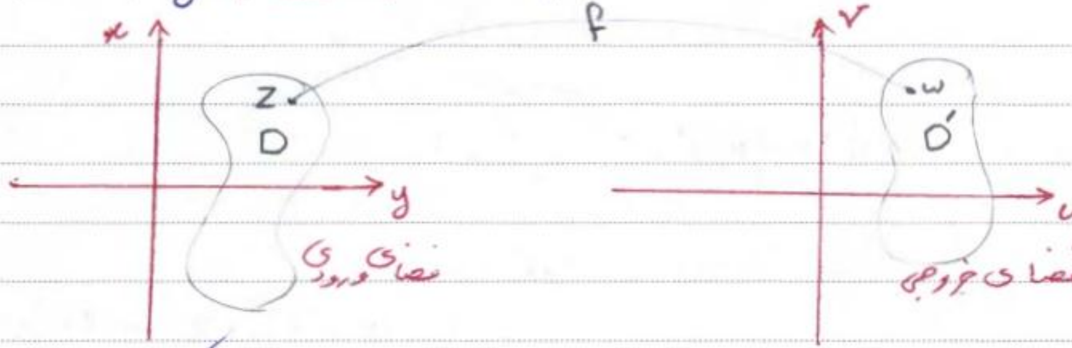
Subject:
Year. Month. Date. ( )

دایره در مختصات قطبی : هر دایره به مرکز z_0 و شعاع دلخواه r در مختصات قطبی به صورت $z = z_0 + re^{i\theta}$ نشان داده می‌شود به طوری که

$$|z - z_0| = r \Leftrightarrow z = z_0 + re^{i\theta}$$

تعریف تابع : تابع مختلط تابعی است که ورودی و خروجی آن عدد مختلط باشد.

$$z = x + iy \to \boxed{f} \to w = u + iv$$



مثال : قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $f(z) = iz + 6\bar{z}$ را مشخص کنید سپس مقدار تابع را در نقطه $z_0 = \overset{x}{2} + \overset{y}{3}i$ محاسبه کنید

$i^2y \to -1y = -y$

$$z = x + iy \Rightarrow f(z) = i(x + iy) + 6(x - iy)$$

$$f(z) = ix - y + 6x - 6iy$$

$$f(z) = \underbrace{(6x - y)}_{(u)\ f\ \text{قسمت حقیقی}} + i\underbrace{(x - 6y)}_{(v)\ f\ \text{قسمت موهومی}}$$

بر خلاف مبنای شطرنجی ای در صفحه مختصات دکارتی است
بوده

مقدار تابع $f(z_0) =$ $\qquad$ $x_0 = 2 \quad y_0 = 3$

$$(\overset{12}{6\times2} - 3) + i(2 - \overset{18}{6\times3})$$

$$\boxed{f(z) = 9 - 16i}$$

PAPCO

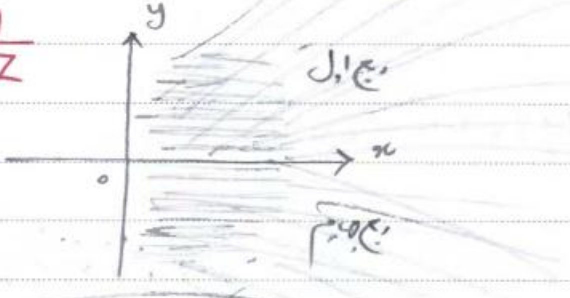
Subject:
Year. Month. Date.

« سوالات ۸ و ۹ کتاب کرویت‌سیگ صفحه ۳۱۴ »

مثال: با توجه به معلومات زیر ناحیه مربوط به Z و $f(Z)$ را رسم کنید.

الف) $Re(z) > 0$, $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} Re(z) > 0 \\ z = x + iy \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$



$$f(z) = \frac{1}{z} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u} + i\,\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{v}$$

جزو شرط مسئله است

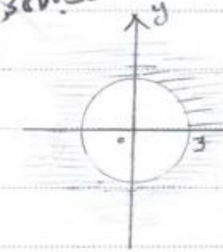
قسمت حقیقی $= u = \frac{x}{x^2+y^2} \sim u > 0$ ، مخرج $+$ ؛ $\frac{+}{+} = + > 0$

قسمت موهومی $= v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ محدودیت ندارد

$$\begin{cases} \text{اگر } y>0 & \frac{(-)(+)}{+} < 0 \\ \text{اگر } y<0 & \frac{(-)(-)}{+} > 0 \end{cases}$$

ب) $|z| > 3$, $f(z) = z^2$

$|z| > 3 \rightarrow$ (نقاط خارج دایره به مرکز ۰ و شعاع ۳)



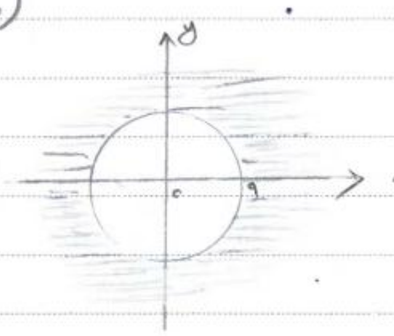
$f(z)$
$\uparrow$
$w = z^2$

$|w| = |z^2|$

$|w| = |z|^2 \longrightarrow |z| > 3 \rightarrow |z|^2 > 9$

$\rightarrow |w| > 9 \rightarrow$ (نقاط خارج دایره به مرکز ۰ و شعاع ۹)

نکته: وقتی این مسائل را رسم باید به طرف اول نگاه کنیم اگر قسمت اول قدر مطلق باشد باید طرف دوم هم قدر مطلق کنیم.

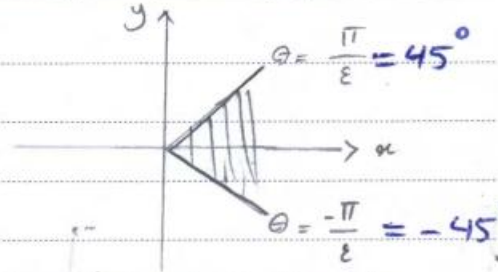


$\theta = \mathrm{Arg}(z)$

Subject:
Year. Month. Date.

« سوال ۱۰ کتاب کرویت سنگ صفحه ۳۲۵ »

c) $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{4}$ $\quad w = f(z) = z^{3}$



$|\theta| \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$|x| < a \rightarrow -a < x < a$

چون ناحیه اول θ داریم برای ناحیه دوم هم فرم تبدیل را بنویسیم

$z = re^{i\theta}$

$w = \rho e^{i\phi}$

« به پاسخی که در صفحه ۳۲۵ کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته نوشته شده است مراجعه گردد »

$w = z^{3}$

$\rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})^{3}$

$\rho e^{i\phi} = r^{3} e^{3i\theta}$

$\begin{cases} \rho = r^{3} \\ \phi = 3\theta \end{cases}$

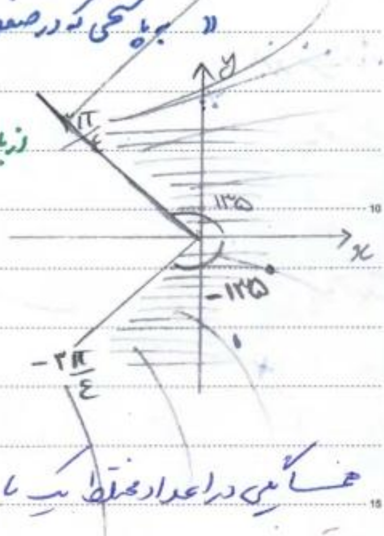
از بالا داریم ⟸ $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$

$\times(3)$

$-3\frac{\pi}{4} \leqslant 3\theta \leqslant 3\frac{\pi}{4}$

$3\theta = \phi$

$-3\frac{\pi}{4} \leqslant \phi \leqslant 3\frac{\pi}{4}$

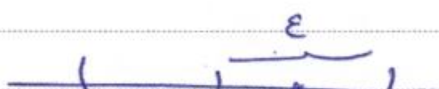


همسایگی دراعداد مختلط یک بازه است .

$|x - x_0| < \delta$

تعریف همسایگی حول نقطه x_0 در مجموعه اعداد حقیقی بازه‌ای است که فاصله هر نقطه از این بازه تا نقطه x_0 از عدد مثبتی مانند ε کمتر است .

$N(x_0, \varepsilon) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$



تعریف همسایگی حول نقطه z_0 در مجموعه اعداد مختلط نقاط درون دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع دلخواه r می‌باشد .

$N(z_0, r) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$

PAPCO

تعریف حد: فرض کنید تابع $f(z)$ در همسایگی نقطه z_0 تعریف شده باشد در این صورت می‌نویسیم

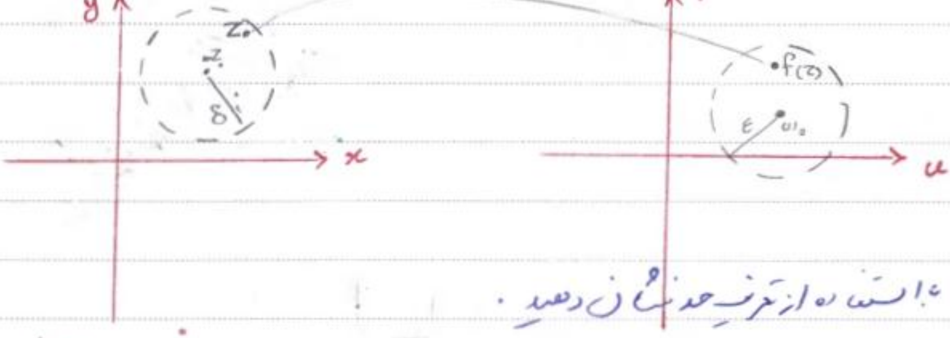
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

هرگاه به ازای z هایی که در همسایگی نقطه z_0 قرار دارند، مقدار $f(z)$ به اندازه کافی به w_0 نزدیک شود.

وجود دارد

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;|\; 0 < |z - z_0| < \delta$$

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$



مثال: با استفاده از تعریف حد نشان دهید.

الف) $\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \;|\; 0 < |z-1| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| i\frac{z}{2} - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon \qquad \left[\left|\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \sqrt{0 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \right]$$

$$\left| \frac{i}{2} z - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{i}{2} \cdot (z-1) \right| = \underbrace{\left| \frac{i}{2} \right|}_{\frac{1}{2}} \cdot |z-1|$$

$$\left| \frac{i}{2} z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} |z-1| < \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon$$

$$\frac{\delta}{2} \leq \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leq 2\varepsilon}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

ب) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0 \;\; (w_0)$ ($z\to 0$: z_0)

$\bar{z} = re^{-i\theta} \to \bar{z}^2 = r^2 e^{-2i\theta}$

$z = re^{i\theta}, \dots$

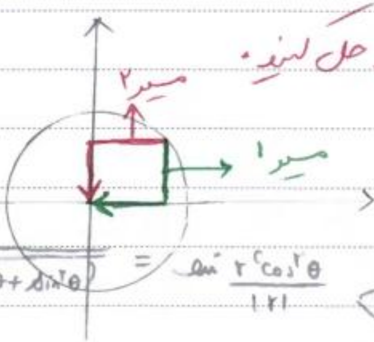
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |z-0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\bar{z}^2}{z} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = \frac{|\bar{z}^2|}{|z|} = \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta \leqslant \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta \leqslant \varepsilon}$$

تذکر: در توابع حقیقی تک متغیره حد چپ و راست را محاسبه می‌کنیم ولی در توابع مختلط چون همسایگی حول نقطه z_0 به صورت دایره‌ای می‌باشد بنابراین از بی‌شمار راه به z_0 نزدیک می‌شویم در این صورت تابع $f(z)$ در نقطه z_0 دارای حد است هرگاه (بلاک) مقدار آن از هر مسیر یکسان باشد.

بخصوص 100 درصد [illegible]

مثال: حدهای زیر را حل کنید.



الف) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|} = 0 = L$ ($\to r \to 0$)

نکته: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \lim \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim \frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}} = \lim \frac{r^2\cos^2\theta}{|r|}$$

$r>0 \to r\cos\theta = 0$

$r<0 \to -r\cos\theta = 0$

$r \longrightarrow 0$

مسیر (۱) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

مسیر (۲) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{|y|}\right) = \lim\limits_{y\to 0} (0) = 0$

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|} = 0 \;\; (w_0)$ (z_0) $\longleftarrow 0 < |z| < \delta$

تعریف $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |z - 0| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|} - 0 \right| < \varepsilon$ ($f(z)$)

$$\left|\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|z|}\right| = \frac{|(\operatorname{Re} z)^2|}{|z|} = \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|} \leqslant \frac{|z|^2}{|z|} \Rightarrow |z| < \delta \leqslant \varepsilon$$

$$\boxed{\delta \leqslant \varepsilon}$$

 توضیح $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |z-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

به طوری که

قدر مطلق = فاصله

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مختصات قطبی دایره ← $z=z_0+re^{i\theta}$

تابع نمایی ← $e^{i\theta}\neq 0$

ب) $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}$

$\lim_{r\to 0}\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} e^{-i\theta}\times e^{-i\theta} = \lim_{r\to 0} e^{-2i\theta} =$ جواب وابسته به θ است پس حد ندارد

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-iy}{x+iy}$

دو تا مسیر میبریم، $x=0$ و یکبار هم $y=0$ اگر جواب یکی نبود که از هر طرف جواب داریم.

(1) در مسیر $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-iy}{x+iy}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-0}{x+0}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$

(2) در مسیر $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-iy}{x+iy}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{0-iy}{0+iy}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{-iy}{+iy}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$

تابع حد ندارد چون جواب مسیرهایمان با هم برابر نیست.

اگر از مختصات قطبی برویم و حد را حساب کنیم دیگر لازم نیست دو مسیر حد حساب کنیم راحتتر است.

تذکر: محاسبه حد در مختصات قطبی برای محاسبه $\lim_{z\to z_0} f(z)$ در مختصات قطبی قرار میدهیم $z=z_0+re^{i\theta}$ سپس r را به سمت صفر میل میدهیم $(r\to 0)$ اگر حد حاصل به θ بستگی داشته باشد آنگاه $f(z)$ در z_0 دارای حد نمیباشد.

مثال: حدهای زیر را حل کنید.

الف) $\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\bar z}$ هر جا z ← $z=z_0+re^{i\theta}$

$z=z_0+re^{i\theta} \Rightarrow z=re^{i\theta}$

$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\bar z} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2e^{2i\theta}}{re^{-i\theta}} = \lim_{r\to 0} re^{3i\theta} \Rightarrow = 0$

دقت $\left(z=re^{i\theta} \Rightarrow \bar z = \overline{re^{i\theta}} = \overline{r(\cos\theta+i\sin\theta)} = r(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow re^{-i\theta}\right.$

به ازای هر $\varepsilon+$

$\forall_{\varepsilon}>0\ \exists\delta>0 \mid 0<|z-0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{z^2}{z}-0\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{z^2}{z}\right| = \frac{|z^2|}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta \leqslant \varepsilon \Rightarrow \boxed{\delta\leqslant\varepsilon}$

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (پنجشنبه ۹۱/۸/۱۷) با توجه به توضیح صفحه اول ★

به جای x ← $(r\cos\theta)$

به جای y ← $(r\sin\theta)$

x^2+y^2 ← r^2

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r^2} \Rightarrow \lim_{r\to 0} \cos\theta\sin\theta$$

$$\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

چون جواب حد به θ بستگی دارد بنابراین تابع در این نقطه حد ندارد.

تذکر: اگر تابع $f(z)$ برابر $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ باشد در این صورت

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

مثال: اگر $f(z)=x^2+iy^3$ در این صورت حد تابع را در نقطه $z=1+2i$ بیابید.

$$\lim_{z\to 1+2i} f(z) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{y\to 2} iy^3$$

$$\lim f(z) = 1+8i$$

پیوستگی در یک نقطه:

تابع $f(z)$ را در نقطه z_0 پیوسته گوییم هرگاه $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقطه $z_0=0$ بررسی کنید:

الف/ $f(z)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ $\quad |z|=r$ اگر $z\to 0 \Rightarrow r\to 0$

$f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ $\quad \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|} \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\overset{x}{r\cos\theta}}{r} \Rightarrow \cos\theta$

تابع حد ندارد بنابراین پیوسته نمی‌باشد.

نکته: اگر تابعی در یک نقطه حد نداشته باشد قطعاً پیوسته هم نیست

Subject:
Year. ۹۰ Month. ۷ Date. ۲۶

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^3}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases} \rightarrow f(z=0) = 0$$

$$f(z) = \frac{\bar{z}^3}{z^2}$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}^3}{z^2} = \lim_{r \to 0} \frac{(re^{-i\theta})^3}{(re^{i\theta})^2} \Rightarrow \lim_{r \to 0} \frac{r^3 e^{-3i\theta}}{r^2 e^{2i\theta}} \Rightarrow \lim_{r \to 0} r e^{-5i\theta} = 0$$

$$\forall_\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |z - 0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\bar{z}^3}{z^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\bar{z}^3}{z^2} \right| = \frac{|\bar{z}^3|}{|z^2|} = \frac{|z|^3}{|z|^2} = |z| < \delta \leq \varepsilon$$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0) = 0$$ تابع در نقطه $z = 0$ پیوسته است.

تعریف مشتق:

فرض کنید تابع $f(z)$ در همسایگی نقطه z_0 تعریف شده باشد در این صورت مشتق در نقطه z_0 از رابطه به دست می‌آید با قرارداد

$$(1) \quad f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

داریم: $\Delta z = z - z_0$

$$(2) \quad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\overbrace{f(\cancel{z_0} + z - \cancel{z_0})}^{f(z)} - f(z_0)}{z - z_0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(z) = z^2$ را بیابید.

$f(z) = z^2$

از فرمول اولی بدست می‌آوریم یعنی از فرمول $f'(z)$
یا فرمول اول بدست می‌آوریم چون z را نداریم ولی
اگر z را داشتیم می‌توانستیم از فرمول ۲ بدست آوریم.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z^2} + (\Delta z)^2 + 2z\Delta z - \cancel{z^2}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(\Delta z + 2z)}{\Delta z} \Rightarrow = 2z$$

«سوال ۲۹ صفحه ۳۲۲ کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته کرویت سیگ»

مثال: با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید تابع $f(z) = Re(z)$ به ازای هیچ z ای مشتق‌پذیر نیست.

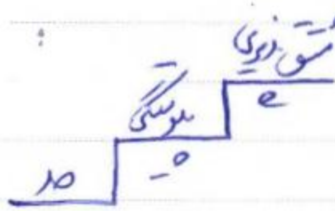
$f(z) = Re(z)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{Re(z+\Delta z) - Re(z)}{\Delta z} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{\Delta x + i\Delta y} \Rightarrow$$

$$z + \Delta z = (x+iy) + (\Delta x + i\Delta y)$$

$$z + \Delta z = \underbrace{(x+\Delta x)}_{Re(z+\Delta z)} + i\underbrace{(y+\Delta y)}_{Im(z+\Delta z)}$$



$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{i\Delta y} = 0 & \Delta x = 0 \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \Delta y = 0 \end{cases}$$

چون حد روی دو مسیر (۱) و (۲)
یکی نیست پس حد ندارد.
پس طبق شکل بالا مشتق‌پذیر هم نیست.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: نشان دهید تابع $f(z)=\bar{z}$ به ازای هیچ z ای مشتق پذیر نمی‌باشد.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}\Rightarrow\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}\Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}\Rightarrow\begin{cases}-1 & \Delta x=0\\ 1 & \Delta y=0\end{cases}$$

$$\overline{z+\Delta z}=\bar{z}+\Delta\bar{z}$$

مشتق پذیر نیست.

تذکر: تمام قواعد مشتق گیری در اعداد حقیقی برای اعداد مختلط نیز برقرارند.

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$

$$(f\cdot g)'=f'g+g'f$$

$$(cf)'=cf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

1) $f(z)=iz^3+(i+1)z$

$f'(z)=3iz^2+(i+1)$

«[۲] سوالات صفحات ۳۲۱ و ۳۲۲ کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته اروین کرویت سیگ حل شود»

2) $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$

$f'(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$

PAPCO

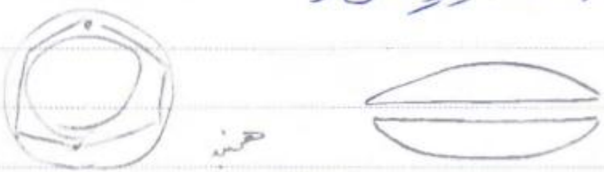
Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعریف مجموعه باز:

مجموعه D را باز می‌گوییم هرگاه شامل نقاط مرزی خودش نباشد

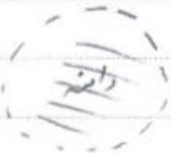
تعریف مجموعه همبند:

مجموعه D را همبند می‌نامیم هرگاه بتوان هر دو نقطه دلخواه از این مجموعه را با خطوط شکسته که تمام یا بخش‌های آن داخل مجموعه باشند به یکدیگر وصل کرد.



همبند غیرهمبند

تعریف دامنه:



مجموعه همبند و باز را دامنه می‌نامیم.

تعریف تابع تحلیلی:

تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی است هرگاه در تمام نقاط D مشتق‌پذیر باشد و

تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در نقطه z_0 مشتق‌پذیر باشد و همسایه‌ای حول نقطه z_0 وجود داشته باشد که تابع $f(z)$ در تمام نقاط این همسایگی مشتق‌پذیر باشد.

تابعی که در تمام صفحات مختلط تحلیلی باشد را تابع تام می‌نامیم:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

تذکر: مشتق‌پذیری در یک نقطه $\not\Rightarrow$ تحلیلی بودن.

روابط شماره ۴ و ۵ صفحات ۱۸۰ و ۱۸۱ کتاب ریاضیات مهندسی پیشرفته ۱۱۵

قضیه (قضیه اول کوشی - ریمان)

فرض کنید تابع $f(z) = u + iv$ در نقطه z مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتقات جزئی توابع u و v وجود دارد و

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{یا} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date.

«صفحه ۱۷۹ کتاب درسی ریاضیات مهندسی پیشرفته کرویت سیگ»

* همچنین درصورتی می‌توان گفت تابع $f(z)$ در D تحلیلی است که دو شرط مقابل صادق باشند $\Longleftarrow$

مهم
$$\begin{cases} \dfrac{\delta u}{\delta x} = \dfrac{\delta v}{\delta y} \\[2ex] \dfrac{\delta v}{\delta x} = -\dfrac{\delta u}{\delta y} \end{cases}$$

به معادلات فوق، معادلات کشی - ریمان گویند.

اثبات اینکه چرا $f'(z)=\dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ؟

$$(*)\ f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i v(x+\Delta x, y+\Delta y)] - [u(x,y) + i v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$\Delta x = 0 \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + i v(x, y+\Delta y) - u(x,y) - i v(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \xrightarrow{\frac{1}{i} = -i}$$

$$f'(z) = \overset{-i}{\frac{1}{i}} \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}$$

$$\boxed{f'(z) = \frac{\delta v}{\delta y} - i\frac{\delta u}{\delta y}}$$

و با توجه به رابطه مشتق (*) در صفحه قبل حال اگر ابتدا $\Delta y \to 0$ و سپس $\Delta z \to 0$ خواهیم داشت:

$$\Delta y = 0 \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} \rightarrow$$ اثبات نکته :

تذکره: اگر تابع تحلیلی باشد $\Rightarrow$ شرایط کشی - ریمان برقرار است ولی عکس این مطلب همیشه برقرار نیست.

مثال: شرایط کشی - ریمان را برای توابع $f(z) = |z|^2$, $f(z) = \bar{z}$ بررسی کنید.

* قضیه کوشی - ریمان شرایط لازم مشتق پذیری هستند نه شرط کافی
مثلاً تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ مشتق پذیر نیست ولی در معادلات کوشی - ریمان صدق می کند

* اگر تابع $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ در معادلات کوشی - ریمان صدق نکند، در آن نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 1 \neq -1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0 \end{array}\right\}$$

شرایط کشی ریمان برقرار نیست. بنابراین تحلیلی نیست.

* یادآوری می شویم که تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در نقطه z_0 مشتق پذیر باشد و بعضی از نقاط همسایگی z_0 نیز مشتق پذیر باشد.

* اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی نباشد ولی در همسایگی آن تحلیلی باشد آنگاه z_0 را نقطه تکین تابع $f(z)$ می

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* تابع $f(z)$ در دامنه D تحلیلی است هرگاه در تمام نقاط D مشتق پذیر باشد

$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$

$$\begin{cases} u=x^2+y^2 \\ v=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad A(0,0)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

معادلات کشی-ریمان فقط در نقطه (۰،۰) برقرار و تابع تحلیلی نیست ← حتماً صفحه ۱۷۷ کتاب درسی ریاضیات مهندسی مطالعه گردد

قضیه (قضیه دوم کشی-ریمان): $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

فرض کنید $f(z)=u+iv$، اگر توابع u، v پیوسته و (v_y, v_x, u_y, u_x) دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند و در دامنه‌ای مانند D در معادلات کشی-ریمان صدق کنند در این صورت تابع $f(z)$ در ناحیه D مشتق پذیر (تحلیلی) می‌باشند.

مثال: تحلیلی بودن توابع زیر را بررسی کنید.

1) $f(z)=xy+iy$

$$\begin{cases} u=xy \\ v=y \end{cases} \quad \text{پیوسته}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y=1$$

$$\text{پیوسته} \Rightarrow \qquad\qquad\qquad A(0,1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1 \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow x=0$$

چون معادلات کشی ریمان فقط در نقطه (۰،۱) برقرارند بنابراین تابع در این نقطه مشتق پذیر است ولی تحلیلی نیست.

Subject:
Year. Month. Date.

۲) $f(z) = e^{z} = e^{x+iy}$

$$f(z) = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}\overbrace{(\cos y + i\sin y)}^{e^{iy}}$$

$$f(z) = \underbrace{e^{x}\cos y}_{u} + i\underbrace{e^{x}\sin y}_{v}$$

$$\begin{cases} u = e^{x}\cos y \\ v = e^{x}\sin y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y$$

پیوسته

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow e^{x}\cos y = e^{x}\cos y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -e^{x}\sin y = -e^{x}\sin y \end{cases}$$

طبق قانون دوم کشی-ریمان تابع $f(z) = e^{z}$ تحلیلی می‌باشد.

معادلات کشی-ریمان در مختصات قطبی

هرگاه $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ در نقطه $z_0 = re^{i\theta_0}$ دارای مشتق باشد، مشتق خودش را داشت:

$y = r\sin\theta$ ، $x = r\cos\theta$ تغییر متغیر

(I) $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)e^{-i\theta}$

(II) معادلات کشی-ریمان در مختصات قطبی به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

اثبات در ص ۳۳۱ و ص ۳۳۲ حل المسائل کودلیک بیگ

نشان داده می‌شود و $f'(z)$ از رابطه $f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ محاسبه می‌گردد.

توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ در R (به نقطه) پیوسته هستند.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: با به کارگیری فرم قطبی معادلات کشی - ریمان تحلیلی بودن تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ $(z\neq 0)$ را بررسی کنید و سپس مشتق تابع را محاسبه کنید.

یادآوری: $e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = [\cos\theta - i\sin\theta]$

$\cos\theta = \cos(-\theta)$ طبق نکته، $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ طبق نکته

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}$$

$$f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{r}\cos\theta \\ v = -\frac{1}{r}\sin\theta \end{cases}$$ پیوسته

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{r}\cos\theta}_{u} \underbrace{-\frac{1}{r}\sin\theta}_{v} i$$

طبق فرض $(z \neq 0 \Rightarrow re^{i\theta} \neq 0 \Rightarrow r \neq 0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{-1}{r^2}\cos\theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{-1}{r}\sin\theta \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{r^2}\sin\theta \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{-1}{r}\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{-1}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\times\frac{-1}{r}\cos\theta \\ &\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\sin\theta = \frac{-1}{r}\times\frac{-1}{r}\sin\theta \end{aligned}$$

طبق قضیه دوم کشی - ریمان تابع تحلیلی است.

مشتق $f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)$$

$$= e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\underbrace{(\cos\theta - i\sin\theta)}_{e^{-i\theta}}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\cdot e^{-2i\theta} = \frac{-1}{r^2e^{2i\theta}}$$

$$= \frac{-1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{-1}{z^2}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date.

$$f(z) = u + iv$$

u را میدهد و دنبال v (u) هستیم

تعیین تابع تحلیلی با استفاده از قسمت حقیقی:

برای بدست آوردن تابع تحلیلی با استفاده از قسمت حقیقی آن از معادلات کشی ـ ریمان استفاده می‌کنیم.

مثال: تابع تحلیلی $f(z)$ را در صورتیکه الف) $u = x^2 - y^2 - x$ و ب) $u = \sin x \cosh y$ باشد را بیابید.

الف) $u = x^2 - y^2 - x$

مشتق — طرفین وسطین

فرمول $\Leftarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int x\,dy = x\int dy = xy + c$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \Rightarrow 2x - 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \partial v = (2x-1)\,\Delta y$$

یادآوری:

$$\int dx = x$$

یعنی اگه dx رو تنها داشتیم روی انتگرال، x بعد انتگرال‌گیری داریم.

انتگرال‌گیری $\Rightarrow \int \partial v = \int (2x-1)\,\Delta y$

ثابت c انتگرال‌گیری

$$\Rightarrow v = (2x-1)y + k(x)$$

مشتق — مشتق

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \Rightarrow 2y + \frac{dk}{dx} = -(-2y) \Rightarrow \frac{dk}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{k = c}$$

$$\boxed{v = (2x-1)y + c}$$

$$f(z) = u + iv \Rightarrow (x^2 - y^2 - x) + i((2x-1)y + c)$$

ب) $u = \sin x \cosh y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \cos x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \int \partial v = \int \cos x \cosh y \, \partial y \Rightarrow$$

$$V = \cos x \sinh y + k(x)$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \Rightarrow \cancel{-\sin x} \sinh y + \frac{dk}{dx} = -\cancel{\sin x} \sinh y$$

$$\frac{dk}{dx} = 0 \Rightarrow k = c$$

$$V = \cos x \sinh y + c$$

$$f(z)=u+iv \xrightarrow{\text{تحلیلی}} f(z) = \sin x \cosh y + i(\cos x \cdot \sinh y + c)$$

تعریف تابع همساز: (هارمونیک)

تابع $u(x,y)$ را همساز نامیم. هرگاه تابع u پیوسته، دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله لاپلاس $\nabla^2 h = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$ صدق کند.

مثال: همساز بودن تابع $u(x,y) = e^x \sin y$ را بررسی کنید.

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$ پیوسته

نکته: همواره توابع $e^x \sin x$ و $e^x \cos x$ در R پیوسته‌اند.

$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y$ پیوسته

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0 \rightarrow$ تابع u همساز است.

$= 0$

Subject:
Year. Month. Date.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

تبصره: اگر تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد آنگاه توابع u , v همساز می‌باشد.
(شرط لازم و کافی)

مشتقات مرتبه اول تنها

تعریف مزدوج همساز: فرض کنید $f(z)=u+iv$ اگر توابع u و v همساز باشند و در دامنه‌ای از D در معادلات کشی - ریمان صدق کند، در این صورت v را مزدوج همساز u می‌باشند.

تبصره: تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی است اگر و فقط اگر v مزدوج همساز u باشد.

مثال: فرض کنید $u = \cosh x \sin y + 2xy$ در این صورت مزدوج همساز u را بیابید.
* اگر تابع تحلیلی باشد، شرایط کشی - ریمان برقرار است.

معادلات کشی - ریمان برقرارند $\Leftarrow f(z)$ تحلیلی $\Rightarrow v$ مزدوج همساز u

$u = \cosh x \sin y + 2xy$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}$$

طرفین و سطین کردیم

از طرفین $\int$

$$\Rightarrow \sinh x \sin y + 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \partial v = (\sinh x \sin y + 2y)\,\partial y$$

$$\int \partial v = \int (\quad)\,\partial y$$

$$\Rightarrow v = \int (\sinh x \sin y + 2y)\,dy \rightarrow v = \int (\sinh x \sin y)\,dy + \int 2y\,dy$$

$$\Rightarrow v = -\sinh x \cos y + y^2 + k(x)$$

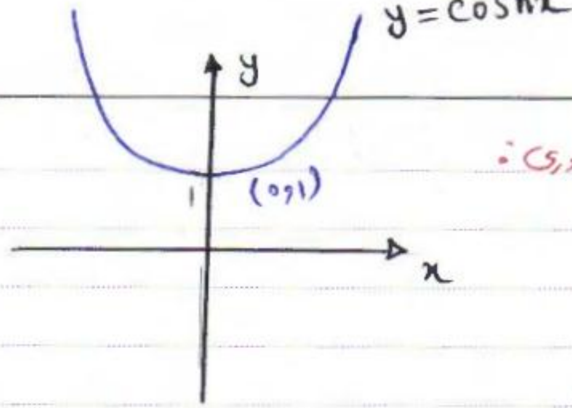
$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \Rightarrow -\cosh x \cos y + \frac{dk}{dx} = -(\cosh x \cos y + 2x)$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dx} = -2x \Rightarrow dk = -2x\,dx \Rightarrow k = -\int 2x\,dx \Rightarrow \boxed{k = -x^2 + C}$$

$$v = -\sinh x \cos y + y^2 - x^2 + C$$

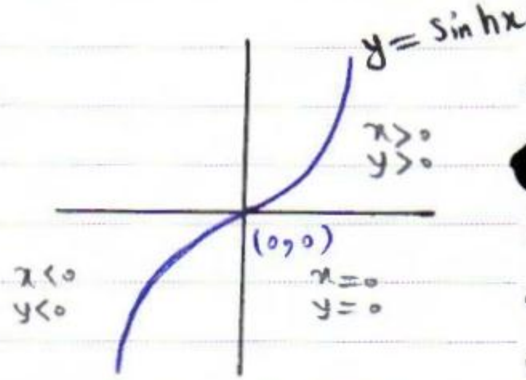
Subject:
Year. ۹۰ Month. ۸ Date. ۱۰

یادآوری :



$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall_x : \cosh x \geq 1 \\ \cosh 0 = 1\end{gathered}}$$



$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$x>0 \Rightarrow \overbrace{\sinh x}^{y} > 0$

$x=0 \Rightarrow \overbrace{\sinh x}^{y} = 0$

$x<0 \Rightarrow \underbrace{\sinh x}_{y} < 0$

توابع مقدماتی :

۱) تابع نمایی $f(z)=e^z$

تابع نمایی e^z بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$w=e^z \Rightarrow w=e^{x+iy}=e^x \cdot e^{iy}$$

$$\Rightarrow w = e^x \underbrace{(\cos y + i\sin y)}_{iy} \Rightarrow e^x\cos y + e^x i\sin y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases} \qquad |e^z| = e^x \qquad \operatorname{Arg}(e^z) = y$$

خواص تابع نمایی :

۱) تابع $f(z)=e^z$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد.

۲) $(e^z)' = e^z$

$e^x \neq 0$

همواره عدد به توان صفر = ۱

Subject: Year. Month. Date.

$2^0 = 1 \neq 0 \quad 2^1 = 2 \neq 0 \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0$

$2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \neq 0$

تحلیلی $f(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$

$e^x \cos y + e^x i \sin y$

$e = 2{,}78$

$e^x \begin{cases} e^{-1} = \frac{1}{e} + & x<0 \\ e^0 = 1 + & x=0 \\ e^2 + & x>0 \end{cases}$

۳) $e^z \neq 0$

برهان خلف فرض کنید $e^z = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \end{cases}$

زاویه‌ای

هیچ y وجود ندارد که بطور همزمان cos و sin آن صفر شود بنابراین $e^z \neq 0$

و این فرض اشتباه می‌باشد.

مهم ۴) فرم قطبی تابع $w = e^z$ (فرم قطبی = بر حسب قدر مطلق و آرگومان)

فرض کنید $Z = x + iy$ و $w = \rho e^{i\phi}$

در این صورت

$w = e^z \Rightarrow \rho e^{i\phi} = e^{x+iy}$

$\Rightarrow \rho e^{i\phi} = e^x \cdot e^{iy}$

$\Rightarrow \begin{cases} \rho = |e^z| = e^x \\ \phi = Arg(e^z) = y \quad , \quad arg(e^z) = y + 2n\pi \end{cases}$

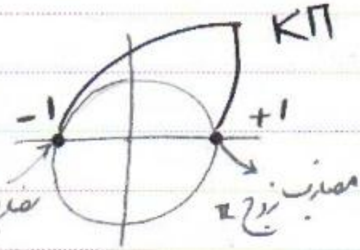
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: معادله $e^z=-2+0i$ را حل کنید.

$$e^z=-2 \Rightarrow e^x\cos y + i e^x \sin y = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x\cos y = -2 \\ e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \\ \Rightarrow \boxed{y=k\pi} \end{cases}$$

مخالف صفر



$$e^x\cos k\pi = -2 \Rightarrow \underbrace{k=2}_{\text{زوج}} \Rightarrow e^x \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} = -2 \Rightarrow e^x=-2$$

تناقض دارد

$$\text{فرد}\ \underbrace{k=2n+1} \Rightarrow e^x \underbrace{\cos(2n+1)\pi}_{-1} = -2 \Rightarrow e^x=+2 \Rightarrow x=\ln 2$$

$$z=x+iy \to \boxed{Z=\underbrace{\ln 2}_{x} + i\underbrace{(2n+1)\pi}_{y}}$$

$$e^x=2 \xrightarrow{\text{از طرفین } \ln}$$

$$\ln e^x = \ln 2 \to x\ln e = \ln 2 \to x=\ln 2$$

۲) توابع مثلثاتی

با دستورات اویلر داریم:

$$\oplus \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases} \Rightarrow e^{ix}+e^{-ix} = 2\cos x \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$$

یادآوری: سینوس و کسینوس هذلولی متغیر z به صورت زیر می‌باشد:

$$\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

$$e^{ix}-e^{-ix} = 2i\sin x$$

$$\boxed{\Rightarrow \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و توابع مثلثاتی مختلط به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

خواص توابع مثلثاتی:

۱) توابع $\sin z$ و $\cos z$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی هستند و توابع $\tan z$ و $\sec z$ همه جا به جز $\cos z = 0$ تحلیلی هستند و توابع $\cot z$ ، $\csc z$ همه جا به جز $\sin z = 0$ تحلیلی هستند.

۲) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4 \underbrace{i^2}_{-1}} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4}$$

$$= 1$$

$$(e^{iz} - e^{-iz})^2 = e^{2iz} + e^{-2iz} - 2\underbrace{(e^{iz})(e^{-iz})}_{e^{iz+(-iz)} = e^0 = 1}$$

PAPCO

۳) مشتق ها

$$(\sin z)' = \cos z \longrightarrow \int \cos z \, dz = \sin z$$

$$(\cos z)' = -\sin z \longrightarrow \int \sin z \, dz = -\cos z$$

$$(\tan z)' = 1 + \tan^2 z = \sec^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(\cot z)' = -(1 + \cot^2 z) = -\csc^2 z = \frac{-1}{\sin^2 z}$$

$$(\sec z)' = \sec z \cdot \tan z$$

$$(\csc z)' = -\csc z \cot z$$

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)'$$

$$= \frac{1}{2i} \left(i e^{iz} + i e^{-iz} \right)$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$(\tan z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z} \right)' = \left(\frac{\cos z \cdot \cos z + \sin z \cdot \sin z}{\cos^2 z} \right)$$

$$= \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z}$$

$$= 1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(\csc z)' = \left(\frac{1}{\sin z}\right)' = \frac{-\cos z}{\sin^2 z}$$

$$= -\frac{\cos z}{\sin z} \cdot \frac{1}{\sin z} = -\cot z . \csc z$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$ *۴ مهم

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow$$

$$\frac{e^{iz} \cancel{+ e^{-iz}} + e^{iz} \cancel{- e^{-iz}}}{2} = e^{iz}$$

همواره دارم :

$$\begin{cases} \overline{\sin z} = \sin \bar{z} \\ \overline{\cos z} = \cos \bar{z} \\ \overline{\tan z} = \tan \bar{z} \end{cases}$$

$\cancel{\sin z = \sin(x + iy)}$ ۵)

$$(\mathrm{I}) \qquad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$\cancel{\cos z = \cos(x + iy)}$

$$(\mathrm{II}) \qquad \cos z = \cos x . \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2}$$

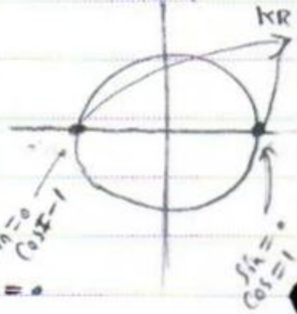
$$= \frac{1}{2}\left[e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)\right]$$

$$= \left[\cos x \underbrace{\left(\frac{e^{-y} + e^{y}}{2}\right)}_{\cosh y} + i \sin x \underbrace{\left(\frac{e^{-y} - e^{y}}{2}\right)}_{-\sinh y}\right]$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در نتیجه $\longrightarrow$ $\boxed{\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}$ رابطه $\cos z$ ثابت شد

۴- جوابهای معادلات $\sin Z = 0$, $\cos Z = 0$

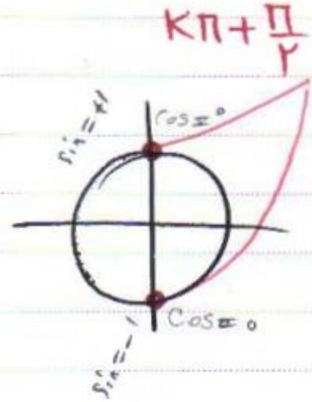


$$\sin Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x \underbrace{\cosh y}_{\geq 1} = 0 \Rightarrow \sin x = 0 & \boxed{x = k\pi} \\ \cos x \sinh y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

جایگذاری در (۲) $\underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} \cdot \sinh y = 0 \Rightarrow \sinh y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\Rightarrow Z = x + iy \Rightarrow \boxed{Z = k\pi + 0i}$$



$$\cos Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \underbrace{\cosh y}_{\geq 1} = 0 & (1) \\ -\sin x \sinh y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

جایگذاری در (۲) $\underbrace{-\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})}_{\pm 1} \times \sinh y = 0$

$$\Rightarrow \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0$$

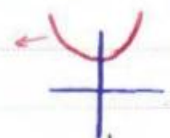
$$Z = x + iy \Rightarrow \boxed{Z = k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Subject:
Year. Month. Date.

همواره $-1 \leq \cos(\text{هرچیزی}),\ \sin(\text{هرچیزی}) \leq 1$

مثال: معادله $\cos Z = 5+0i$ را حل کنید. (سوال امتحان)

$$\cos Z = 5 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cosh y = 5 \\ -\sin x \cdot \sinh y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} \cos x \cdot \underbrace{\cosh 0}_{1} = 5 \Rightarrow \cos x = 5 \ \text{✗ تناقض} \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} \underbrace{\cos k\pi}_{\pm 1} \cdot \cosh y = 5 \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{فرد}\quad k = 2n+1 \Rightarrow \underbrace{\cos(2n+1)\pi}_{-1} \cdot \cosh y = 5 \Rightarrow \cosh y = -5 \ \text{✗} \\ \text{زوج}\quad k = 2n \Rightarrow \underbrace{\cos 2n\pi}_{+1} \times \cosh y = 5 \Rightarrow \cosh y = 5 \Longrightarrow \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = 5 \Rightarrow e^y + e^{-y} = 10 \end{cases}$$

طرفین در e^y ضرب شود

$$e^y \times (e^y + e^{-y} = 10) \Rightarrow e^{2y} + 1 = 10 e^y \Rightarrow e^{2y} - 10 e^y + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow e^y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^y = 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{96}$$

$$\boxed{\Rightarrow y = \operatorname{Ln}\left(5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{96}\right)}$$

$ax^2 + bx^1 + c = 0$ (معادله درجه دو)

$$\Delta = b^2 - 4ac \qquad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\overset{a}{1}\overset{x}{(e^y)^2}\ \overset{b}{-10}\ \overset{x}{(e^y)^1}\ \overset{c}{+1} = 0$$

$$e^y_1, e^y_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(1)(1)}}{2 \times 1}$$

$$\begin{cases} e^y = 5 + \frac{1}{2}\sqrt{96} \xrightarrow{\operatorname{Ln}} \\ e^y = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{96} \xrightarrow{\operatorname{Ln}} \end{cases}$$

$\operatorname{Ln}(e^y) = \operatorname{Ln}\left(5 + \frac{1}{2}\sqrt{96}\right) \rightarrow y = \operatorname{Ln}\left(5 + \frac{1}{2}\sqrt{96}\right)$ ✓

$\operatorname{Ln}(e^y) = \operatorname{Ln}\left(5 - \frac{1}{2}\sqrt{96}\right) \rightarrow y = \operatorname{Ln}\left(5 - \frac{1}{2}\sqrt{96}\right)$ ✓

۳) توابع هیپربولیک :

توابع هیپربولیک مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{۲}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \ , \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \ , \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

خواص توابع هیپربولیک :

۱) توابع $\sinh z$ ، $\cosh z$ در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشند

توابع $\tanh z$ ، $\operatorname{sech} z$ در همه جا بجز $\cosh z = 0$ تحلیلی می‌باشند

و توابع $\coth z$ ، $\operatorname{csch} z$ در همه جا بجز $\sinh z = 0$ تحلیلی می‌باشند.

۲) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2 - e^{2z} - e^{-2z} + 2}{4} = 1$$

Subject:
Year. Month. Date.

$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z$ ۳. مشتق‌ها.

$(\tanh z)' = 1 - \tanh^2 z = \dfrac{1}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z$

$(\coth z)' = 1 - \coth^2 z = \dfrac{-1}{\sinh^2 z} = -\operatorname{csch}^2 z$

$(\operatorname{sech} z)' = -\operatorname{sech} z \cdot \tanh z$

$(\operatorname{csch} z)' = -\operatorname{csch} z \cdot \cot z$

$$(\cosh z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

$$= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z$$

$$(\operatorname{csch} z)' = \left(\frac{1}{\sinh z}\right)' = \frac{-\cosh z}{\sinh^2 z}$$

$$= -\frac{\cosh z}{\sinh z} \cdot \frac{1}{\sinh z}$$

$$= -\coth z \cdot \operatorname{csch} z$$

۴ـ قسمت حقیقی و موهومی

~~$\sinh z = \sinh(x+iy)$~~

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

~~$\cosh z = \cosh(x+iy)$~~

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

۵ـ رابطه بین توابع مثلثاتی و هیپربولیک

$$\sinh iz = i \sin z$$

$$\cosh iz = \cos z$$

$$\sin iz = i \sinh z$$

$$\cos iz = \cosh z$$

$$\sinh z = -i \sin(iz)$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$\cosh iz = \cos z$ [illegible]

$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \rightarrow$ داریم:

پس:

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\boxed{\Rightarrow \cosh iz = \cos z}$$

$\sin iz = i \sinh z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2i}$$

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}$$

در ضرب و بر تقسیم می‌کنیم

$$= i\,\frac{e^{-z} - e^{z}}{2i \times i}$$

$$= i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)$$

جای e عوض شد

$$\boxed{= i \sinh z}$$

۶. ریشه معادلات $\sinh z = 0$, $\cosh z = 0$ را بدست آورید

$$\sinh z = 0 \begin{cases} \overbrace{\sinh x \cos y}^{\text{حقیقی}} = 0 \quad (1) \\ \overbrace{\underbrace{\cosh x}_{\geq 1} \sin y}^{\text{موهومی}} = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \boxed{y = k\pi} \end{cases}$$

جایگذاری در (۱) $\sinh x \cdot \underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1} = 0 \Rightarrow \sinh x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$$\boxed{Z = k\pi i}$$

$$\cosh z = 0 \begin{cases} \underbrace{\cosh x}_{\geq 1} \cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow \boxed{y = k\pi + \frac{\pi}{2}} \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sinh x \cdot \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{\pm 1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sinh x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\boxed{Z = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) i}$$

Subject:
Year. ۹۰ Month. ۸ Date. ۱۷

۱۴ تابع لگاریتم طبیعی :

تابع لگاریتم برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت $\ln z$ تعریف می‌شود.

$$w = \ln z \qquad z = e^{w} \qquad z \neq 0$$

با قرار دادن $w = u + iv$, $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$w = \ln z \Rightarrow u + iv = \ln r e^{i\theta}$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\Rightarrow u + iv = \ln r + \ln e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow u + iv = \ln r + i\theta \ln e$$

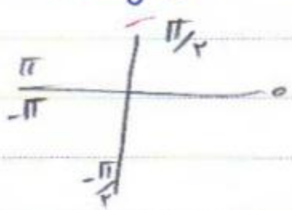
$$\Rightarrow u + iv = \ln r + i\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases} \qquad \boxed{\ln z = \ln r + i\theta}$$

با قرار دادن $\text{Arg } z$ (آرگومان اصلی z) مقدار اصلی $\text{Ln } z$ بدست می‌آید.

$$\text{Ln } z = \ln r + i \,\text{Arg}(z), \quad -\pi < \text{Arg} \leq \pi$$

$$\theta = \text{Arg}(z), \quad -\pi < \theta \leq \pi$$



خواص تابع لگاریتم طبیعی

۱) $e^{\ln z} = z$

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow e^{\ln re^{i\theta}} = e^{\ln r + \ln e^{i\theta}}$$

$$\Rightarrow e^{\ln r} \cdot e^{\ln e^{i\theta}}$$

$$\Rightarrow r \cdot e^{i\theta \cancel{\ln e}}$$

$$\Rightarrow re^{i\theta} = z$$

۲) $\ln e^{z} = z \pm 2n\pi i$

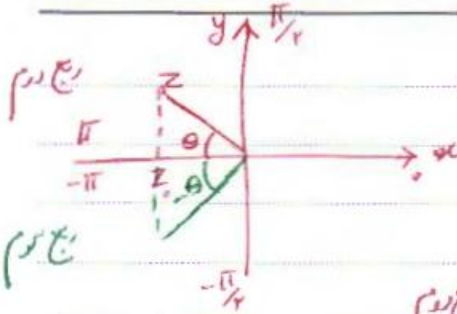
$$\ln z = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z \mp 2n\pi)$$

$$\ln e^{z} = \ln |e^{z}| + i(\operatorname{Arg} e^{z} \pm 2n\pi)$$

$$\ln e^{z} = \ln e^{x} + i(y \mp 2n\pi)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x \cancel{\ln e} + iy}_{=z} \pm 2n\pi i$$

$$\Rightarrow z \pm 2n\pi i$$



۳) تابع Ln روی نیم محور حقیقی منفی پیوسته نمی‌باشد.

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\theta$$

ربع دوم
$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Ln} z = \lim_{z\to z_0} (\operatorname{Ln}|z| + i\theta)$$
$$= \operatorname{Ln}|z_0| + i\pi$$

ربع سوم
$$\lim_{z\to z_0} \operatorname{Ln} z = \lim_{z\to z_0} (\operatorname{Ln}|z| + i\theta)$$
$$= \operatorname{Ln}|z_0| - i\pi$$

چون مقدار حد از دو مسیر مختلف یکسان نیست بنابراین تابع در این نقطه پیوسته نمی‌باشد.

۴) به ازای z های مخالف صفر و مخالف اعداد حقیقی منفی داریم.

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}$$

$$w = \operatorname{Ln} z \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Ln} r \\ v = \theta \end{cases}$$ پیوسته‌اند

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} & \frac{\partial v}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 1 \end{aligned}\right\}$$ پیوسته $\Rightarrow$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$0 = 0 \Leftarrow$ طبق قضیه دوم کوشی-ریمان تابع $\operatorname{Ln} z$ تحلیلی است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i\,x\circ\right)$$

$$= \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$$

$$= \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{Z}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

$$1)\ \mathrm{Ln}\,\underbrace{ie}_{Z}$$

$$\begin{cases} |ie| = |\overset{x}{0} + \overset{y}{e}i| = \sqrt{0 + e^{۲}} = e \\ Z = ie \Rightarrow \tan\theta = \frac{e}{0} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \pi/۲ & \text{ق ق} \\ ۳\pi/۲ & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ln}Z = \mathrm{Ln}|Z| + i\,\mathrm{Arg}z$$

$$\mathrm{Ln}\,ie = \mathrm{Ln}\underbrace{|ie|} + i\,\mathrm{Arg}$$

$$= \mathrm{Ln}\,e + i\frac{\pi}{۲} = 1 + i\frac{\pi}{۲}$$

$$۲)\ \mathrm{Ln}\,(\overbrace{\sqrt{۲} + \sqrt{۲}\,i}^{Z})$$

$$\begin{cases} |\sqrt{۲} + \sqrt{۲}\,i| = \sqrt{(\sqrt{۲})^{۲} + (\sqrt{۲})^{۲}} = ۲ \\ Z = \sqrt{۲} + \sqrt{۲} \to \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta \begin{cases} \pi/۴ & \text{ق ق} \\ \pi + \frac{\pi}{۴} & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ln}Z = \mathrm{Ln}|Z| + i\,\mathrm{Arg}Z$$

$$\mathrm{Ln}Z = \mathrm{Ln}\,|(\sqrt{۲} + \sqrt{۲}\,i)| + i\,\mathrm{Arg}(\sqrt{۲} + \sqrt{۲}\,i)$$

$$= \mathrm{Ln}\,۲ + i\frac{\pi}{۴}$$

۵) توان‌های عمومی :

توان‌های عمومی عدد مختلط Z از رابطه

$$Z^c = e^{c\,\mathrm{Ln}\,Z}$$

بدست می‌آید :

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$|i| = |0+1i| = \sqrt{0+1} = 1$, $Z = i \Rightarrow \tan = \frac{1}{0} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{ق ق} \\ 3\pi/2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$$1)\quad i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i[\ln\underbrace{|i|}_{1} + i\,\mathrm{Arg}\,i]}$$

$$= e^{i[\cancel{\ln 1} + i\pi/2]}$$

$$= e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

$$2)\quad (1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\,\mathrm{Ln}(1+i)}$$

$$= e^{(1-i)[\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i)]}$$

$$= e^{(1-i)[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}]} =$$

$Z = 1+i \to \tan\theta = 1 \to \theta = \begin{cases} \pi/4 & \text{ق ق} \\ 5\pi/4 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

$$e^{(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) + i(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2})} =$$

$$e^{(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right]$$

$$(e^{۳Ln۳}) = e^{Ln۳^۳} = e^{Ln۲۷} = ۲۷$$

$$Ln(-۳) = Ln|-۳| + i Arg(-۳) = Ln۳ + i\pi$$

$$۳)\quad ۳^{۳-i} = e^{(۳-i)Ln۳} = e^{۳Ln۳ - iLn۳} = \underbrace{e^{۳Ln۳}}_{۲۷} \cdot \underbrace{e^{-iLn۳}}_{e^{-ix}}$$

$$= ۲۷(\cos(Ln۳) - i\sin(Ln۳))$$

$$۴)\quad ۲^{۲i} = \overbrace{e^{۲iLn۲}}^{e^{ix}} = \cos(۲Ln۲) + i\sin(۲Ln۲)$$

Subject:
Year. ۹۰ Month. ۹ Date. ۱

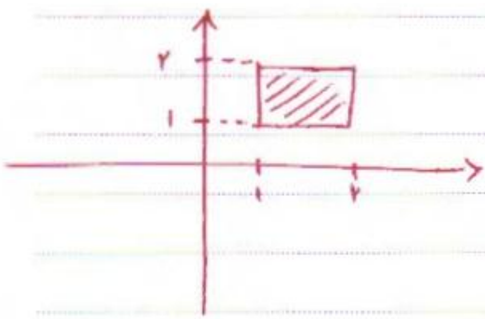
نگاشت‌های مقدماتی : تابع یا تصویر = نگاشت

۱) نگاشت ترسط $w = z + a + bi$

فرض کنید $z = x + iy$ ، $w = u + iv$ ؛ در این صورت

$$u + iv = x + iy + a + bi$$
$$u + iv = (x + a) + i(y + b) \Rightarrow \begin{cases} u = x + a \\ v = y + b \end{cases}$$

مثال : تصویر ناحیه هاشور خورده زیر را تحت نگاشت $w = z + 3i - 2$ را بیابید.

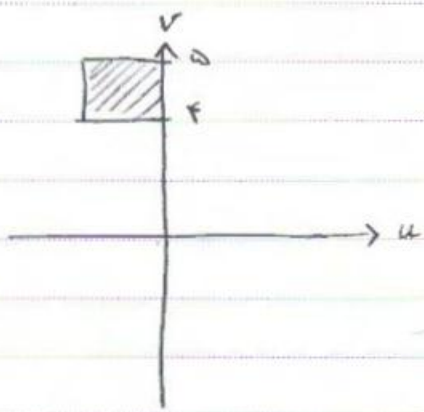


$w = u + iv \quad , \quad z = x + iy$

$w = z + 3i - 2 \Rightarrow u + iv = x + iy + 3i - 2$

$u + iv = (x - 2) + i(y + 3)$

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y + 3 \end{cases}$$



$1 \leq x \leq 2 \qquad 1 \leq y \leq 2$

$-1 \leq x - 2 \leq 0 \qquad 4 \leq y + 3 \leq 5$

$4 \leq v \leq 5$

$\boxed{-1 \leq u \leq 0}$

۲- نگاشت توسط $w = z^n$

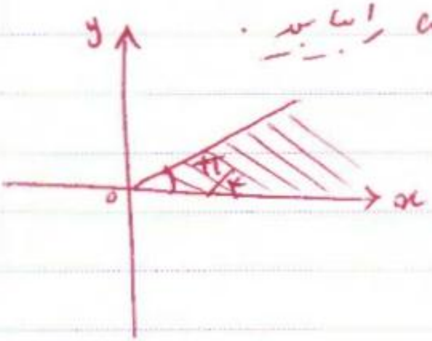
با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ ، $w = \rho e^{i\phi}$ داریم:

$$w = z^n \Rightarrow \rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})^n$$

$$\Rightarrow \rho e^{i\phi} = r^n e^{ni\theta}$$

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \phi = n\theta \end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیه‌ی هاشور خورده زیر را تحت نگاشت $w = z^4$ را بیابید.

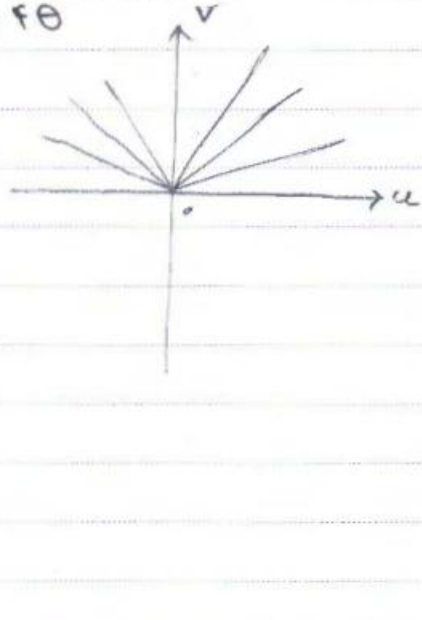


$$w = z^4 \quad \begin{cases} \rho = r^4 \\ \phi = 4\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq 4\theta \leq \pi$$

$$\boxed{0 \leq \phi \leq \pi}$$



جلسه هفتم ۳) نگاشت توسط $w=\frac{1}{z}$ (فرم قطبی و فرم دکارتی)

با درنظر گرفتن $z=x+iy$ و $w=u+iv$ داریم:

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w} \Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}+i\frac{-v}{u^2+v^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

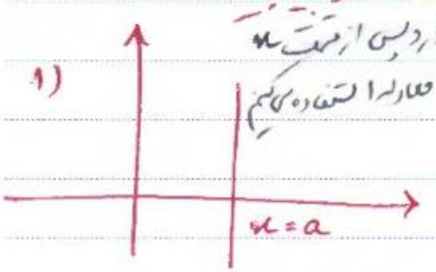
فرم قطبی: فرض کنید $z=re^{i\theta}$ و $w=\rho e^{i\phi}$ در این صورت

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow \rho e^{i\phi}=\frac{1}{re^{i\theta}}$$

$$\Rightarrow \rho e^{i\phi}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho=\frac{1}{r} \\ \phi=-\theta \end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیه‌های داده شده را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ را بیابید.

1)



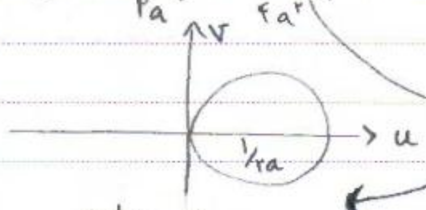
$a=x$ و y محدودیتی ندارد پس از معادله x استفاده می‌کنیم $\longrightarrow x=\frac{u}{u^2+v^2} \Rightarrow a=\frac{u}{u^2+v^2} \Rightarrow$

$$a\times(u^2+v^2)=u \Rightarrow u^2+v^2-\frac{u}{a}=0$$

$$\Rightarrow \left(u-\frac{1}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}+v^2=0 \Rightarrow$$

$$\left(u-\frac{1}{2a}\right)^2+v^2=\frac{1}{4a^2}$$

دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2a},0)$ و شعاع $\frac{1}{2a}$

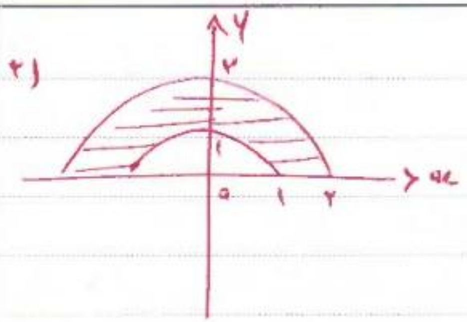


$a=1$, x

فرمول $(x^2-ax)=(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4} \Rightarrow (u^2-\frac{u}{a})=(u^2-\frac{1}{2a})^2-\frac{1}{4a^2})$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲)



$۱ \leq r \leq ۲ \qquad ۰ \leq \theta \leq \pi$

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{1}{r} \\ \varphi = -\theta \end{cases}$$

$۱ \leq r \leq ۲$

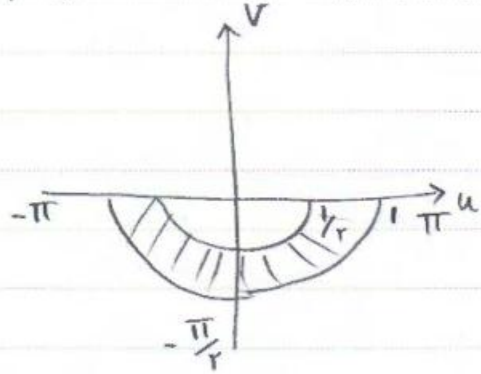
$\frac{1}{۲} \leq \frac{1}{r} \leq ۱$

$\boxed{\frac{1}{۲} \leq \rho \leq ۱}$

$۰ \leq \theta \leq \pi$

$-\pi \leq -\theta \leq ۰$

$\boxed{-\pi \leq \varphi \leq ۰}$



۴) نگاشت توسط $w = e^{z}$

$$w = e^{z} \Rightarrow e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = e^{x}\cos y \\ v = e^{x}\sin y \end{cases}$$

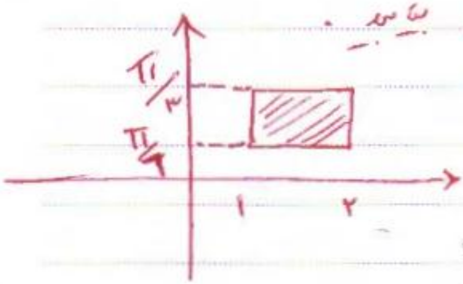
* فرم قطبی

همیشه سعی کنیم از فرم قطبی استفاده کنیم چون ρ و φ بر حسب x دارای است.

$$w = e^{z} \Rightarrow \begin{cases} |e^{z}| = \rho = e^{x} \\ \underbrace{Arg(e^{z})}_{\theta} = y \end{cases} \Longrightarrow \rho = |e^{z}| = e^{x}$$

PAPCO

مثال : تصویر ناحیه هاشور خورده زیر را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.



$$w=e^z=1\begin{cases}\rho=|e^z|=e^x\\ \theta=y\end{cases}$$

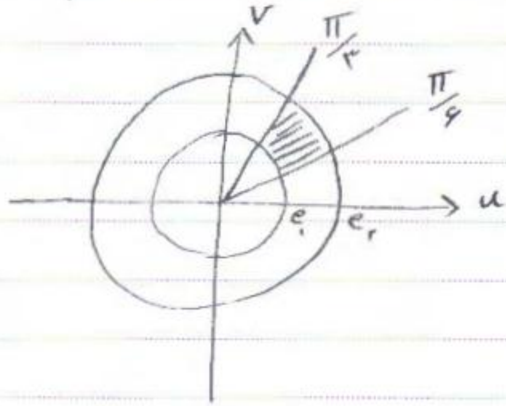
$1\le x\le 2$

$e^1\le e^x\le e^2$

$\boxed{e^1\le\rho\le e^2}$

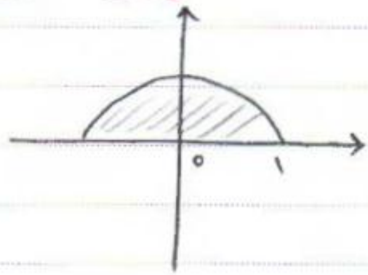
$\frac{\pi}{6}\le y\le\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$



مثال : تصویر ناحیه $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\pi,\ x\le 0\}$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.

$$\begin{cases}\rho=e^x\\ \theta=y\end{cases}$$



$x\le 0 \Rightarrow e^x\le e^0 \Rightarrow \rho\le 1$

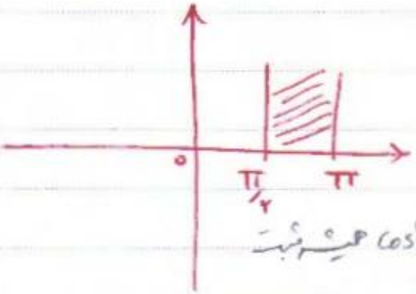
$0\le y\le\pi \Rightarrow 0\le\theta\le\pi$

۵- نگاشت توسط $w=\sin z$ و $w=\cos z$

$$w=\sin z\quad\begin{cases}u=\sin x\cosh y\\ v=\cos x\sinh y\end{cases}$$

$$w=\cos z\quad\begin{cases}u=\cos x\cosh y\\ v=-\sin x\sinh y\end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیه هاشور خورده زیر تحت نگاشت $w = \cos z$ را بیابید.



$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = -\sinh y \leqslant 0 \Rightarrow \underline{v \leqslant 0} \end{cases}$$

$\cosh y$ همیشه مثبت

$$x = \pi \Rightarrow \begin{cases} u = -\underset{\geqslant 1}{\cosh y} \Rightarrow u \leqslant -1 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$w = \cos z \begin{cases} u = \underset{-}{\cos x}\ \underset{+}{\cosh y} \\ v = -\underset{+}{\sin x}\ \underset{+}{\sinh y} \end{cases}$$

منفی

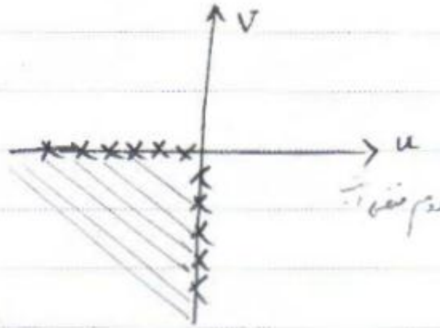
$v < 0$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \\ v = 0 \end{cases}$$

اگر $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$

$\cos \pi \leqslant \cos x \leqslant \cos \frac{\pi}{2}$

$-1 \leqslant u \leqslant 0$



cos در ربع دوم منفی است

۴- نگاشت توسط $w = \sinh z$ ، $w = \cosh z$

$$w = \sinh z \Rightarrow \begin{cases} u = \sinh x \cos y \\ v = \cosh x \sin y \end{cases}$$

$$w = \cosh z \Rightarrow \begin{cases} u = \cosh x \cos y \\ v = \sinh x \sin y \end{cases}$$

مثال: تصویر خط $y=\frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w=\cosh z$ بیابید. (سوال ۱۴ سری اول تمرینها)

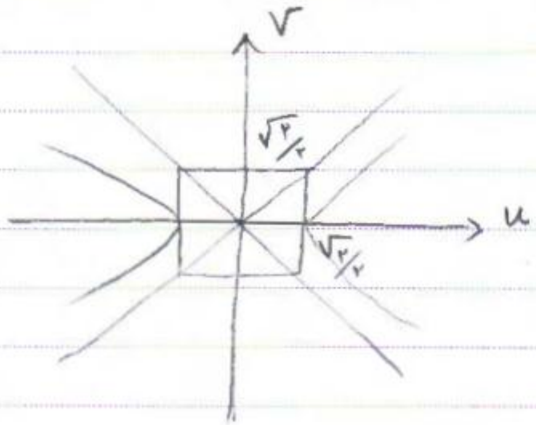
$$w=\cosh z \Rightarrow \begin{cases} u=\cosh x\cos y \\ v=\sinh x\sin y \end{cases}$$

$$y=\frac{\pi}{4} \quad \begin{cases} u=\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh x \\ v=\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh x \end{cases}$$

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$$

$$\boxed{\frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-\frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1}$$

معادله هذلولی

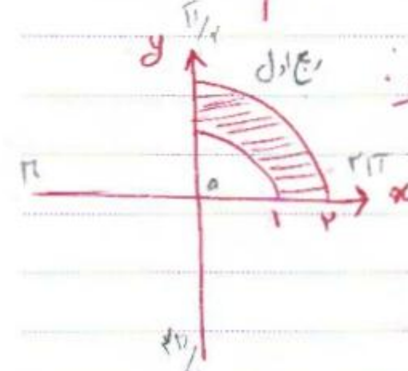


۷- نگاشت توسط $w=\operatorname{Ln}Z$

$$w=\operatorname{Ln}Z \quad \begin{cases} u=\operatorname{Ln}r \\ v=\theta \end{cases}$$

$$\operatorname{Ln}Z=\operatorname{Ln}r+i\theta$$
$$w=u+iv$$

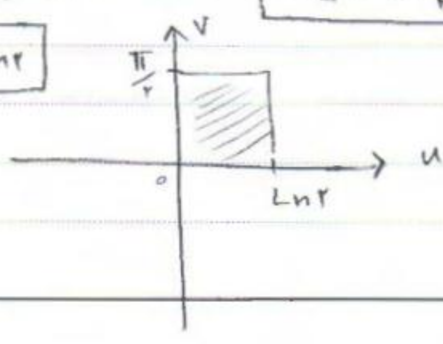
مثال: تصویر ناحیه هاشور خورده زیر را تحت نگاشت $w=\operatorname{Ln}Z$ بیابید.



$$1\le r\le 2 \qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Ln}1\le\operatorname{Ln}r\le\operatorname{Ln}2 \qquad \boxed{0\le v\le\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{0\le u\le\operatorname{Ln}2}$$



Subject :

Year . Month . Date . ( )

PAPCO

انتگرال گیری مختلط

نکته: $e^{u} \to u'e^{u}$

$$Z = e^{it} \to dZ = ie^{it}dt$$

تعریف. معادله پارامتری منحنی دلخواه C در صفحه مختلط به صورت $C: Z(t) = x(t) + iy(t)$ ، $t \in R$ می‌باشد.

تعریف معادله پارامتری خطی که دو نقطه Z_A را به Z_B وصل می‌کند به صورت زیر می‌باشد:

$$Z(t) = Z_A + t(Z_B - Z_A) \,, \quad 0 \leq t \leq 1$$

مثال: معادله پارامتری خط AB را بنویسید.

$Z_A = 1 + i \,, \; Z_B = 2i$

$Z(t) = Z_A + t(Z_B - Z_A)$

$Z(t) = (1+i) + t(2i - 1 - i) \Rightarrow (2i - i) = i$

$$\boxed{Z(t) = 1 + i + t(i-1) \,, \; 0 \leq t \leq 1}$$

تعریف انتگرال:

انتگرال تابع مختلط $f(z)$ روی منحنی C به صورت $\int f(z)dz$ نشان داده می‌شود و اگر C یک منحنی بسته (مثل دایره) باشد به صورت $\oint_C f(z)dz$ نشان داده می‌شود.

خواص اساسی انتگرال

۱) $\int_C (k_1 f_1(z) \pm k_2 f_2(z))dz =$

$k_1 \int_C f_1(z)dz + k_2 \int_{C_2} f_2(z)dz$ (k_1, k_2 اعداد ثابت)

Subject: Year. Month. Date.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{4\pi i} = \underbrace{\cos 4\pi}_{1} + i\underbrace{\sin 4\pi}_{0} \Rightarrow e^{4\pi i} = 1$

$$2-\ \int_c f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_2} f(z)dz$$

[c مسیری شامل مجموع دو مسیر c_1 و c_2 است

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = -\int_{z_1}^{z_0} f(z)dz$$

روشهای انتگرال گیری

روش استفاده از نمایش مسیر

از این روش برای هر تابع پیوسته می‌توان استفاده کرد.

توضیح: فرض کنید منحنی c دارای نمایش پارامتری به صورت زیر باشد

$$c: z = z(t),\quad a \leqslant t \leqslant b$$

و تابع $f(z)$ یک تابع پیوسته روی منحنی c باشد در این صورت

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

مثال. انتگرال تابع $f(z) = z$ را روی $c:|z|=1$ (دایره) محاسبه کنید.

$$\oint_c z\,dz \qquad c:|z| = 1$$

که $r=1$ میباشد

$z = re^{i\theta}$

چون دایره

$$c:|z|=1 \Rightarrow \underbrace{z = e^{it}}_{\text{صفحه}} \quad \text{و} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

$$\oint_c z\,dz = \int_0^{2\pi} e^{it} \cdot ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} ie^{2it}\,dt \Rightarrow \frac{1}{2}e^{2it}\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{4\pi i}}_{1} - \underbrace{e^{0}}_{1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\int i \Rightarrow it$ مشتق $t=1$ و مشتق $ti = i$
مشتق $1 = 0$

مثال: انتگرال $f(z)=\frac{1}{z}$ را روی $C:|z|=1$ محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz \qquad C:|z|=1$$

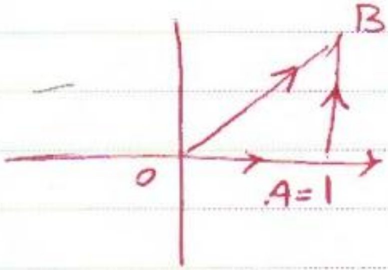
$$i2\pi - i\times 0$$

$$C:|z|=1 \Rightarrow z=e^{it} \Rightarrow 0\leq t\leq 2\pi$$

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}\cdot ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt \Rightarrow it\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

مثال: انتگرال تابع $f(z)=z^2$ را روی مسیر OB و OAB محاسبه کنید.

فرمول $\boxed{\int u'\cdot u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}}$



معادله پارامتری $z(t)=z_A+t(z_B-z_A)$

معادله پارامتری $OA \Rightarrow z(t)=0+t(1-0)$

$$z(t)=t \qquad 0\leq t\leq 1$$

$$AB \Rightarrow z(t)=1+t(1+i-1)$$

$$z(t)=1+ti \;,\quad 0\leq t\leq 1$$

$$\int_{OAB} z^2\,dz = \int_{OA} z^2\,dz + \int_{AB} z^2\,dz$$

$$=\int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 \underbrace{(1+ti)^2}_{u}\cdot \underbrace{i}_{u'}\,dt$$

$$=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(1+ti)^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{(1+i)^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{(1+i)^3}{3}$$

Subject: $\int u' e^u du = e^u + c$

Year. Month. Date. ( )

$oB = z_A + t(z_B - z_A)$

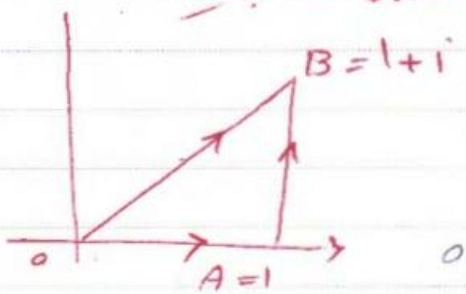
$oB = z(t) = 0 + t(1 + i - 0) = t + it \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\int_{oB} z^2 dz = \int_0^1 \underbrace{(t + it)^2}_{t^2(1+i)^2} \cdot (1+i)\, dt$$

$t^2(1+i)^2 \cdot (1+i)\, dt = \int_0^1 t^2 \underbrace{(1+i)^3}_{\text{عدد ثابت}} dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt =$

$\Rightarrow (1+i)^3 \dfrac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \dfrac{(1+i)^3}{3} + 0$ انتگرال توابع تحلیلی به مسیر انتگرال گیری بستگی ندارد.

مثال: $f(z) = Re z$ را روی مسیر oB و oAB محاسبه کنید.



$oB = z(t) = 0 + t(1+i), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

$oA = z(t) = 0 + t(1 - 0)$

$z(t) = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \longrightarrow t \leftarrow t$ قسمت حقیقی Re

$AB = z(t) = 1 + t(1 + i - 1)$

$z(t) = 1 + it \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \longrightarrow 1 \leftarrow (Re)$ قسمت حقیقی

$dz = 1 \times i$

$$\int_{oAB} Re z\, dz = \int_{oA} Re z\, dz + \int_{AB} Re z\, dz$$

$$= \int_{oA}^1 t \cdot dt + \int_{AB}^1 1 \times i\, dt \Rightarrow \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + it\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2} + i$$

$$\int_{oB} Re z dz = \int_0^1 t \cdot (1+i)\, dt = (1+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \Rightarrow \frac{(1+i)}{2}$$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \;,\; e^{i(1-m)2\pi} = \cos(1-m)2\pi + i\sin(1-m)2\pi = 1$

مثال مهم: $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m}$ را در صورتیکه $C = |z-z_0| = r$ حل کنید. خیلی مهم

$C: |z-z_0| = r \iff z = z_0 + re^{it} \;,\; 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{(re^{it})^m}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^m \cdot e^{mit}}\, dt$$

$$= \frac{1}{r^{m-1}} \int i e^{it} \cdot e^{-mit}\, dt = \frac{1}{r^{m-1}} \int_0^{2\pi} i e^{\overset{u}{(1-m)it}}\, dt$$

$$= \frac{1}{r^{m-1}} \cdot \frac{1}{(1-m)} e^{(1-m)it} \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{(1-m)r^{m-1}} \left(\underset{1}{e^{(1-m)i2\pi}} - \underset{1}{e^0} \right) = 0 \;,\; m \neq 1$$

مثال: $\oint \frac{dz}{(z-z_0)}$ را در صورتیکه $C = |z-z_0| = r$ حل کنید.

$C: |z-z_0| = r \iff z = z_0 + re^{it} \;,\; 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\, dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = it \Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$$

$$\boxed{\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = \begin{cases} 2\pi i & m = 1 \\ 0 & m \neq 1 \end{cases} \qquad C = |z-z_0| = r}$$

فرمول *

فرمول star

مثال :

$\oint_c \frac{dz}{z-1} \to z_0 = 1$ ، $c:|z-1| = 2 \to z_0 = 1$

$\oint_c \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \longrightarrow$ طبق فرمول *

$\oint_c \frac{dz}{z} \to z_0 = 0$ $\qquad c:|z| = 1 \to z_0 = 0$

$\int_c \frac{dz}{z} = 2\pi i \longrightarrow$ طبق فرمول *

$\oint_c \frac{dz}{(z+3)^2} \to m \neq 1$ $\qquad c:|z+3| = 4 \to z_0 = -3$

$z_0 = -3$

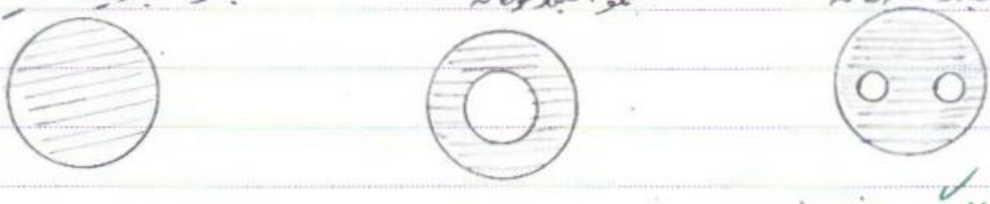
$\int_c \frac{dz}{(z+3)^2} = 0 \longrightarrow$ طبق فرمول * $\longrightarrow \oint \frac{dz}{(z-z_0)} = 0 \quad m \neq 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مجموعه همبند p-گانه (دایره یک کران دارد.)

مجموعه D را مجموعه همبند p-گانه می‌نامیم هرگاه کرانهای آن از p مجموعه همبند تشکیل شده باشد که این مجموعه‌ها با یکدیگر اشتراک نداشته باشند.

مجموعه همبند سه گانه — مجموعه همبند دوگانه — مجموعه همبند یک گانه یا ساده



روش انتگرال گیری نامعین:

قضیه: فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد در اینصورت انتگرال نامعین تابع $f(z)$ وجود دارد یعنی تابع مانند $f(z)$ وجود دارد بطوریکه $F'(z)=f(z)$

و به ازای هر مسیر ساده در D که دو نقطه z_0 و z_1 را به یکدیگر وصل کند داریم:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$$

$$= F(z_1) - F(z_0)$$

مثال: انتگرال $\int_c z^2 dz$ را در صورتیکه $0 \le t \le 1$ و $c: z(t) = t + t^2 i$ بدست آورید.

$$\int_c z^2 dz = \int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3}$$

$\int \cos = \sin$

مثال: انتگرال $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z \, dz$ را محاسبه کنید.

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z \, dz = \sin z \Big|_{-\pi i}^{\pi i} \qquad \boxed{\sin iz = i \sinh z}$$

$$= \sin(\pi i) - \sin(-\pi i)$$

$$= i\sinh\pi + i\sinh\pi = 2i\sinh\pi$$

قضیه (قضیه انتگرال کشی):

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد و C یک مسیر ساده بسته در D باشد در این صورت

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

مثال. انتگرالهای زیر را حل کنید.

1) $\oint_C e^z \, dz = 0 \qquad C: |z| = 1$

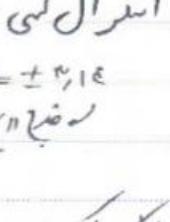
طبق قضیه انتگرال کشی جواب صفر شد.

$z = k\pi \qquad z = \pm 1 \to z = \pm 3{,}14$ که خارج دایره

2) $\oint_C \sin z \, dz = 0 \qquad C: |z| = 1$

طبق قضیه انتگرال کشی

3) $\oint_C \frac{1}{z^2+4} \, dz = 0 \qquad C: |z| = 1 \rightarrow$ * توضیح صفحه بعد.



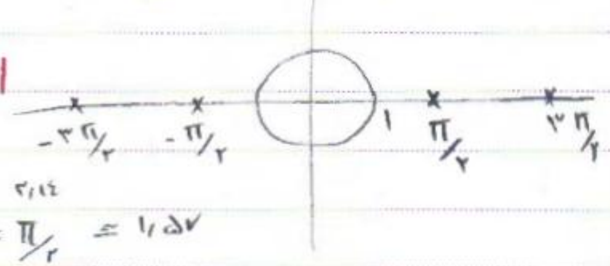
$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow \pm\sqrt{-4}$ ($2i$)

$\Rightarrow z = \pm 2i$ نقاط غیرتحلیلی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* چون نقاط غیرتحلیلی تابع خارج از مسیر C می باشد بنا براین طبق قضیه کشی حاصل انتگرال صفر می باشد

۴) $\int_c \sec dz = 0 \qquad c: |z| = 1$



$\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = k\pi + \pi/2 \begin{cases} z_0 = \pi/2 = 1.57 \quad (3.14) \\ z_1 = 3\pi/2 \\ z_2 = -\pi/2 \end{cases} \longleftarrow \text{نقاط غیرتحلیلی}$$

نقاط غیرتحلیلی خارج از ناحیه انتگرال‌گیری می باشد.

۵) $\oint_c \bar{z}\, dz \qquad c: |z| = 1$

از قضیه اول حل می کنیم

$c: |z| = 1 \Rightarrow z = e^{it}$

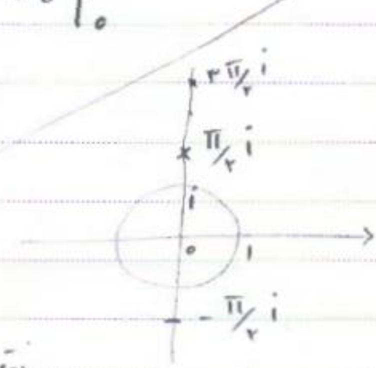
$\bar{z}$ تحلیلی نیست.

$$\oint_c \bar{z}\, dz = \int_0^{2\pi} (\overline{e^{it}}) . i e^{it} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cancel{e^{-it}} . i \cancel{e^{it}}}_{1} dt = \int_0^{2\pi} i dt = it \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi i$$

۶) $\oint_c \tanh z\, dz \underset{\text{طبق کشی چون}}{=} 0 \quad c: |z| = 1 \longrightarrow$



$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$

نقاط غیرتحلیلی

$$\cosh z = 0 \Rightarrow z = (k\pi + \pi/2) i \longrightarrow \begin{cases} z_0 = \frac{\pi}{2} i \longrightarrow 1.5 i \\ z_1 = 3\pi/2\, i \\ z_2 = -\pi/2\, i \end{cases}$$

Subject.
Year. ۹۰ Month. ۹ Date. ۲۲

تمام انتگرال‌ها در جهت مثلثاتی ↶

قضیه (قضیه کشی برای دامنه همبند دوگانه)

فرض کنید تابع $f(z)$ روی مسیرهای C_1, C_2 و ناحیه بین آنها تحلیلی باشد در این صورت

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

مثال: انتگرال را در هر یک از حالات زیر حل کنید.

درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد ← کسر حقیقی

$$\oint_C \frac{z^0\,dz}{z^2-1}$$

$z_0 = 1$

الف - $C: |z-1| = 1$

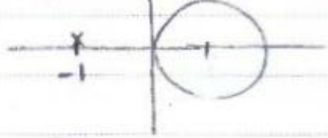
$z^2-1=0 \Rightarrow \boxed{z=\pm 1}$ ← نقاط غیرتحلیلی

توضیح صفحه بعد (*)

چون - انتگرال را جدا می‌نویسیم

$$\oint_C \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2}\oint\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz \Rightarrow \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1}$$

تجزیه کسر انجام می‌دهیم



الف - $\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi i - \frac{1}{2}(0) = \pi i$

* طبق فرمول (انتگرال) ← طبق قضیه انتگرال کشی

$C_1 = |z-1| = r_1$

مهم ب - $|z| = 2$ → دایره به شعاع ۲ به مرکز صفر

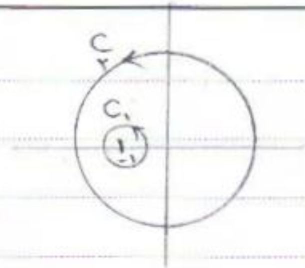
$$\oint_C \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\oint \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{2}\oint_C \frac{1}{z+1}dz$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{C_1} \frac{1}{z-1}dz - \frac{1}{2}\oint_{C_2} \frac{1}{z+1}dz$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$= \frac{۱}{۲} \cdot ۲\pi i - \frac{۱}{۲}\, ۲\pi i = ۰$

طبق فرمول است



(تجزیه کسر) توضیح * صفحه قبل

$$\frac{۱}{(z+۱)(z-۱)} = \frac{A}{z+۱} + \frac{B}{z-۱}$$

$$\frac{۱}{(z+۱)+(z-۱)} = \frac{A(z-۱)+B(z+۱)}{(z+۱)(z-۱)}$$

$$۱ = A\,(z-۱) + B\,(z+۱)$$ ریشه‌های مخرج را به‌جای z می‌گذاریم

$$z = -۱ \Rightarrow ۱ = -۲A \Rightarrow A = -\frac{۱}{۲}$$

$$z = ۱ \Rightarrow ۱ = ۲B \Rightarrow B = \frac{۱}{۲}$$

مثال: $\oint_C \frac{z^۲ - z + ۱}{z^۳ - z^۲}\, dz$ را در صورتیکه

الف - $C: |z| = ۲$

ب - $C: |z| = \frac{۱}{۲}$

حل کنید.

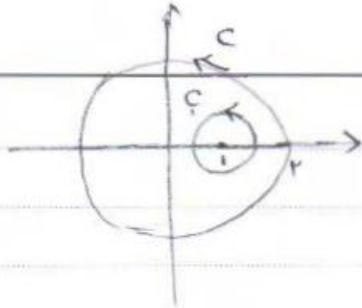
$$z^۳ - z^۲ = ۰ \Rightarrow \underset{\text{فاکتور گرفتیم}}{z^۲(z-۱)} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} z = ۰ \\ z = ۱ \end{cases}$$ نقاط غیر تحلیلی

$$\oint \frac{\overbrace{z^۲ - z + ۱}^{z^۲ - (z-۱)}}{z^۲(z-۱)}\, dz = \oint_C \left(\frac{۱}{z-۱} - \frac{۱}{z^۲}\right) dz$$

$$= \oint_C \frac{۱}{z-۱}\, dz - \oint_C \frac{۱}{z^۲}\, dz$$

Subject:
Year. Month. Date.

الف/ $C: |z| = 2$



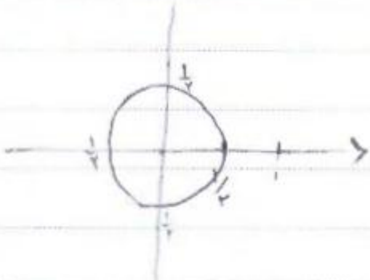
$$\text{جواب} = \oint_{C} \frac{1}{z-1}\,dz - \underset{}{0}$$

* طبق فرمول star

$$= 2\pi i - 0 = 2\pi i$$

به طبق فرمول star

ب/ $|z| = \frac{1}{2}$



طبق فرمول star

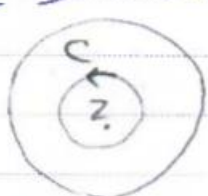
$$\text{جواب} = 0 - 0 = 0$$

طبق قضیه کوشی

قضیه - قضیه فرمول انتگرال کوشی:

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد و C یک مسیر ساده بسته در D شامل نقطه z_0 باشد در اینصورت

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$



مثال. $\oint \frac{z^3-6}{2z-i}\,dz$ را در صورتیکه C یک مسیر بسته شامل نقطه $\frac{i}{2}$ باشد را حل کنید

ص ۲۴۵ کتاب درسی

$$\oint_C \frac{z^3-6}{2(z-\frac{i}{2})}\,dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{\overbrace{z^3-6}^{f(z)}}{z-\frac{i}{2}}\,dz \quad \longrightarrow z_0 = \frac{i}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\pi i\, f\left(\frac{i}{2}\right)$$

$$= \pi i\left[\underbrace{\left(\frac{i}{2}\right)^3}_{-\frac{i}{8}} - 6\right] = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$$

زمانیکه درجه صورت و مخرج یکی باشد کسر حقیقی نیست . $\Rightarrow z_0 = 1$

تمال . $\oint \frac{z^2+1}{z^2-1}\, dz$ را در صورتیکه $\left\{ \begin{array}{l} c: |z-1| = 1 \\ c: |z+\frac{1}{2}| = 1 \end{array} \right.$ حل کنید

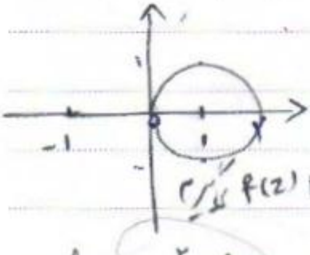
کسر حقیقی نیست

الف/ $c = |z-1| = 1$

نقاط غیر تحلیلی $z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$

$\rightarrow z = -1 \rightarrow$ که اصلاً توی دایره نمی‌افتد پس حذف فقط

$z = 1$ که درگیر دارم



اون قسمتی که $z=1$ ریشه‌اش نیست را $f(z)$ بگیر

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-1)(z+1)}\, dz = \oint_C \underbrace{\frac{z^2+1}{z+1}}_{f(z)} \times \frac{dz}{z-1} \xrightarrow{\text{طبق ز۱}} 2\pi i\, f(1)$$

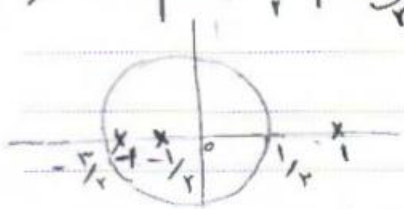
$$= 2\pi i \left(\frac{1+1}{1+1}\right)$$

$$= 2\pi i$$

$z_0 = -\frac{1}{2}$

ب/ $c: |z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ مرکز

$z = \pm 1 \left\langle \begin{array}{l} z = 1 \rightarrow \text{در دایره نیست پس حذف نقطه} \\ z = -1 \text{ که درگیر دارم} \end{array} \right.$



$$\oint_C \underbrace{\frac{z^2+1}{z-1}}_{f(z)} \times \frac{dz}{z+1} = 2\pi i\, f(-1)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{(-1)^2+1}{-1-1}\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1+1}{-1-1}\right) = 2\pi i \left(\frac{2}{-2}\right) = -2\pi i$$

اونایی رو $f(z)$ گرفتیم که $z=-1$ توشون ولید نمی‌شه ریشه‌شون نیست

قضیه (قضیه مشتقات توابع تحلیلی)

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد در این صورت مشتقات تابع f از هر مرتبه وجود دارد و این مشتقات در D تحلیلی می باشند و مقدار مشتق تابع در نقطه z_0 از روابط زیر بدست می آید:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\, dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}\, dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

بطوریکه C یک مسیر بسته در D شامل نقطه z_0 باشد.

مثال: انتگرال توابع زیر را روی منحنی $C:|z|=2$ محاسبه کنید.

1) $f(z)=\dfrac{z^2}{(2z-1)^2}$

تحلیلی $f(z) = z^2 \qquad f'(z^2) = 2z$

$$\oint \frac{z^2}{(2z-1)^2}\,dz = \frac{1}{4}\oint_C \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}\,dz = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot \cancel{2}\pi i\, f'(\tfrac{1}{2})$$

$(2z-1)^2 \rightarrow \left[2(z-\frac{1}{2})\right]^2 \qquad \rightarrow z_0=\frac{1}{2}$

$$= \frac{\pi}{2} i\,(\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}})$$

داخل دایره $|z|=2$

$$= \frac{\pi}{2} i$$

2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2}$

تحلیلی $f(z) \xrightarrow{z^2} f'(z) = -\sin z$

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2}\,dz = 2\pi i \times f'(0)$$

$z^2 \rightarrow z_0 = 0$

$$= 2\pi i\,(-\sin 0)$$

داخل دایره $|z|=2$

$$=0$$

3) $f(z)=\dfrac{z^3}{(2z+i)^3}$

تحلیلی $f(z)$

$$\oint \frac{z^3}{(2z+i)^3}\,dz = \frac{1}{8}\oint \frac{z^3}{(z+\frac{i}{2})^3}\,dz = \frac{1}{8}\cdot\frac{2\pi i f''(-\frac{i}{2})}{2!}$$

$\rightarrow z_0 = -\frac{i}{2}$

$$= \frac{\pi}{8} i \cdot \cancel{6}^{3}\,(-\frac{i}{\cancel{2}})$$

$f'(z) = 3z^2$

$f''(z) = 6z$

داخل دایره $|z|=2$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-4i)^2}$

تحلیلی $f(z)$

$\oint \dfrac{z^4}{(z-3i)^2}\,dz = 0$ طبق قضیه انتگرال کشی اول

$\searrow z_0 = 3i$

$|z| = 2$ زیرا نقطه $z = 3i$ خارج از فضای دایره میباشد

۵) $f(z) = \dfrac{e^{-z}\sin z}{z^2}$

تحلیلی $f(z)$

$\oint \dfrac{e^{-z}\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0)$

$\searrow z_0 = 0$

$= 2\pi i\left(-e^{-z}\sin z + e^{-z}\cos z\right) \rightarrow z = 0$ ، هرجا z

$= 2\pi i(0+1) = 2\pi i$

سری های توانی

هر سری توانی برحسب توان های $z-z_0$ به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

نشان داده می شود به طوری a_n ضرایب سری و z_0 مرکز سری می باشد.

بنابراین از روی نسبت سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ همگراست هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n (z-z_0)^n} \right|$$

حد مورد نظر از یک کمتر باشد.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z-z_0| \right) < 1$$

$$|z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$|z-z_0| < \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}_{R \text{ شعاع همگرایی}}$$

سه حالت برای R در نظر می گیریم

اگر $R=0$ باشد در اینصورت سری در مرکز خود (نقطه z_0) همگراست.

" $R=\infty$ " " سری به ازای هر z همگراست

" $R>0$ باشد در اینصورت سری درون دایره ای به مرکز z_0 و شعاع R همگراست.

مثال . شعاع همگرایی هر یک از سری های زیر را بیابید.

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n!}_{a_n} z^n$$

$$a_n = n!$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{n!}}{\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cancel{n!}}}\right|$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

$R=0$ یعنی سری فقط در مرکز خودش نقطه $z=0$ همگراست.

$$2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{2^n}{n!}}^{a_n} z^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| \qquad a_n = n!$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2^n}\cdot \overbrace{(n+1)!}^{(n+1)\cancel{n!}}}{\underset{2}{\cancel{2^{n+1}}}\ \cancel{n!}}\right|$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = \infty$$

بنابراین سری به ازای هر z همگراست.

$$3)\ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad a_n = 1$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1} = 1 \implies R = 1$$

بنابراین سری درون دایره‌ای به مرکز $z=0$ و شعاع 1 ($|z|<1$) همگراست.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 \dots ,\ |z|<1}$$

سری هندسی

$$4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \overset{a_n}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}\,(z-\overset{z_0}{3i})^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}\right| \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(2n)!}\,\overset{[(n+1)n!]^2}{[(n+1)!]^2}}{\underset{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(2n+2)!}\,(n!)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \frac{1}{4}$$

$$|z-3i| < \frac{1}{4}$$

بنابراین سری درون دایره‌ای به مرکز $3i$ و شعاع $\frac{1}{4}$ همگراست.

قضیه تیلور:

فرض کنید تابع $f(z)$ در دامنه همبند ساده D تحلیلی باشد و z_0 مرکز دایره‌ای در D شامل نقطه z باشد، در این صورت $f(z)$ را می‌توان به صورت

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{a_n}(z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

بسط تیلور حول نقطه z_0

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f'(z_0)+(z-z_0)^2\frac{f''(z_0)}{2!}+\cdots$$

تذکر: بسط تیلور حول نقطه $z_0=0$ را بسط مک لورن می‌نامیم.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

$$f(z)=f(0)+zf'(0)+\frac{z^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

مثال : بسط مک لورن توابع زیر را بیابید سپس شعاع همگرایی آنها را محاسبه کنید.

$$f(z)=e^{z} \Rightarrow f(z)=e^{z} \Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(z)=e^{z} \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(z)=e^{z} \Rightarrow f''(0)=1$$
$$\vdots$$

$$e^{z}=1+z(1)+\frac{z^{2}}{2!}(1)+\frac{z^{3}}{3!}(1)+\cdots$$

$$e^{z}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}$$

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}, \quad a_n=\frac{1}{n!}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\overbrace{(n+1)!}^{(n+1)\cancel{n!}}}{\cancel{n!}}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}|n+1| \Longrightarrow \boxed{R=\infty}$$ یعنی سری به ازای هر Z همگرا است.

$$f(z) = \cos z \implies f(0) = 1$$

$$f'(z) = -\sin z \implies f'(0) = 0$$

$$f''(z) = -\cos z \implies f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = \sin z \implies f'''(0) = 0$$

$$\cos z = 1 + z \times 0 + \frac{z^2}{2!}(-1) + \frac{z^3}{3!}(0) + \frac{z^4}{4!}(1) + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \implies \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}} \right| \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| -\frac{\overset{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)!}}{(2n)!} \right| \implies \lim_{n\to\infty} \left| (2n+2)(2n+1) \right| = \infty$$

$$\boxed{R = \infty}$$

یعنی سری همه جا همگراست .

Subject:

Year. Month. Date.

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \Rightarrow f(0) = 1 = 0!$$

$$(1-z)^{-2} \to +2(1-z)^{-3}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^{2}} \Rightarrow f'(0) = 1 = 1!$$

$$2(1-z)^{-3} \to 2(+3)(1-z)^{-4}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^{3}} \Rightarrow f''(0) = 2 = 2!$$

$$f'''(z) = \frac{6}{(1-z)^{4}} \Rightarrow f'''(0) = 6 = 3!$$

$$f^{(4)}(z) = \frac{24}{(1-z)^{5}} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24 = 4!$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z(1) + \frac{z^2}{2!}(2) + \frac{z^3}{3!}(6) + \frac{z^4}{4!}(4!) + \cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1} \longrightarrow$$ سری هندسی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + \underbrace{z^4}_{(z^2)^2} + \underbrace{z^6}_{(z^2)^3} + \dots, \quad |z^2| < 1$$

$$|z|^2 < 1$$

$$|z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad |z| < 1$$

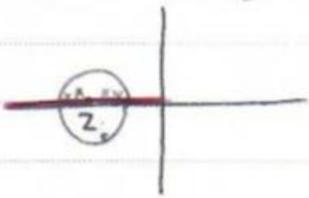
$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{\underbrace{1-(-z)}_{+}} = 1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + (-z)^4 + \dots, \quad |-z| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots, \quad |z| < 1}$$

$$f(z) = \ln z$$

تابع $\ln z$ روی نیم محور حقیقی منفی تحلیلی نمی‌باشد و این نقاط، نقاط تکین غیرتنها از نوع انشعابی می‌باشد.

(چون روی یک خط است تحلیلی نیست)



نقاط تکین :

تعریف نقطه تکین تنها :

نقطه z_0 برای تابع $f(z)$ تکین تنها است هرگاه

۱) تابع در z_0 تحلیلی نباشد
۲) همسایگی حول نقطه z_0 وجود داشته باشد که تابع در تمام نقاط آن همسایگی تحلیلی باشد.

تعریف نقطه تکین غیرتنها :

نقطه z_0 برای تابع $f(z)$ نقطه تکین غیرتنها است هرگاه

۱) تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد
۲) هر همسایگی حول نقطه z_0 شامل نقاط تحلیلی و غیرتحلیلی باشد.

مثال : نقاط تکین توابع زیر را بیابید.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$

$z=1$ ، $z=2$ نقاط تکین تنهای تابع $f(z)$ هستند.

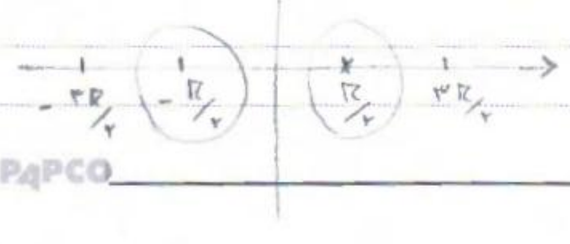
$f(z)=\frac{1}{1-z}$

$z=1$ نقطه تکین تنها است.
در این نقطه تحلیلی نیست.

$f(z)=\tan z$

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} z_0 = \pi/2 \\ z_0 = 3\pi/2 \\ \vdots \\ z_0 = -\pi/2 \end{cases}$$

نقاط تکین تنها



$f(z) = \sin\frac{1}{z}$ — تابع sin همه جا تحلیلی است

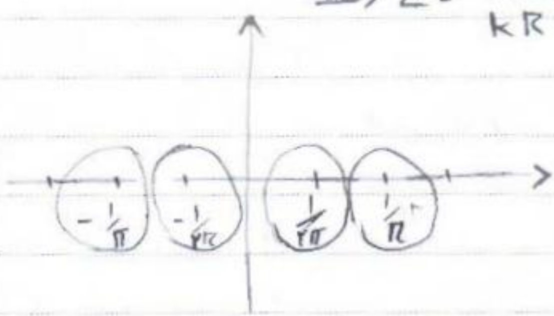
$z=0$ نقطه تکین تنها
در این نقطه تحلیلی است.

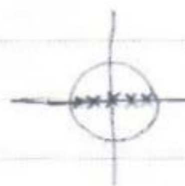
$f(z) = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ (sin در $k\pi = 0$)

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} = k\pi$$

$$\Longrightarrow z = \frac{1}{k\pi} \longrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{\pi} \\ z = \frac{1}{2\pi} \\ z = -\frac{1}{\pi} \end{cases}$$

نقاط تکین تنها





$z=0$ نقطه تکین غیرتنها است
(چون همه آنها به صفر نزدیک می‌شوند)

$f(z) = \bar{z}$ — $\bar{z}$ به ازای هیچ z ای مشتق‌پذیر نیست.
تابع تحلیلی نیست بنابراین نقطه تکین ندارد.

بسط لوران:
بسط توابع حول نقاط تکین تنها را بسط لوران می‌نامیم.

قضیه لوران:
فرض کنید تابع $f(z)$ در سراسر حلقه $r_1 < |z - z_0| < r_2$
تحلیلی باشد و C یک مسیر ساده بسته شامل نقطه z_0 درون حلقه باشد در این

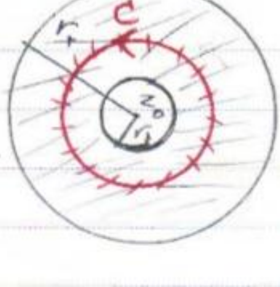
Subject:

Year. Month. Date. ( )

صورت سری لوران تابع $f(z)$ حول نقطهٔ z_0 به صورت زیر باشد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$



$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,dz$$

مثال- سری لوران توابع زیر را حول نقطهٔ $z_0=0$ بنویسید.

sin فرد $z-\frac{z^3}{3!}$ ، cos زوج $1-\frac{z^2}{2!}$ در بسط تک لوران

بسط لوران $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

بسط sin حول نقطهٔ صفر

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\cdots \Leftarrow$$ بسط لوران

sin, cos تعیین اساسی.

Subject.
Year. Month. Date. ( )

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \Longrightarrow$$ بسط لوران

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{(\frac{1}{z})^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{z})^3}{3!} + \dots$$

$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \dots\right)$$

$$f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \underbrace{\frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots}$$

قسمت اصلی سری لوران (تعداد جملات نامحدود (تکین اساسی))

سری لوران $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ را حول نقطه $z = 0$ بنویسید.

دوتا بسط دارد.

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-z}} \quad \frac{1}{z^3}\cdot(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$$

از z^3 فاکتور

$$= \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n , \quad |z| < 1$$ سری هندسی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} , \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{-z^4\left[1 - \frac{1}{z}\right]} = \frac{-1}{z^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

از $-z^4$ فاکتور

$$f(z) = \frac{-1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n , \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

نکته: وقتی $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ باشد یعنی $|z| > 1$ میباشد.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+4}} , \quad |z| > 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سری لوران حول نقاط $z=z_0$

برای محاسبه سری لوران به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱) ابتدا با تغییر متغیر $t=z-z_0$ سری را به حول نقطه $t=0$ تبدیل می‌کنیم

۲) از بسط مک لوران توابع مثلثاتی، نمایی و ... استفاده می‌کنیم. (بسط مک لوران حول نقطه صفر است)

مثال: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ را حول نقطه $z_0=i$ بنویسید.

$$t=z-z_0 \Rightarrow t=z-i \Rightarrow \underbrace{z=t+i}$$

$$f(t)=\frac{1}{(t+i)^2+1}=\frac{1}{t^2\cancel{-1}+2ti\cancel{+1}}=\frac{1}{t^2+2ti}$$

i^2

$$f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+2i}$$

$$(1)\quad f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t\left(1+\frac{2i}{t}\right)}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{2i}{t}\right)}_{Z}}$$

بسط از t فاکتور گرفتیم

$$f(t)=\frac{1}{t^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\overbrace{\left(\frac{-2i}{t}\right)}^{Z}{}^{n},\quad \left|\frac{-2i}{t}\right|<1$$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{t^{n+2}},\quad \underbrace{|-2i|}_{2}<|t|$$

$$\boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}},\quad |z-i|>2}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month $f(t) =$ Date $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t+2i}$

(2) $$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2i\left[1+\frac{t}{2i}\right]} = \frac{1}{2ti} \cdot \frac{1}{1-\underbrace{\left(-\frac{t}{2i}\right)}_{z}}$$

از 2i فاکتور گرفتیم

$$f(t) = \frac{1}{(2i)t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{2i}\right)^n , \quad \left|\frac{-t}{2i}\right| < 1$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{(2i)^{n+1}} , \quad |t| < \overbrace{|-2i|}^{2}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}} , \quad |\overbrace{z-i}^{t}| < 2}$$

نکته: اگر سری لوران (خواسته شده) در ناحیه $|z-z_0| < r$ داده شده باشد (در این صورت) بعد از تغییر متغیر از عدد ثابت فاکتور می‌گیریم و اگر ناحیه (داده شده) به صورت $|z-z_0| > r$ باشد بعد از تغییر متغیر از $\underbrace{\text{متغیر جدید } (t)}_{\text{یا مجهول}}$ فاکتور می‌گیریم. اگر حول نقطه صفر بود تغییر متغیر هم نمی‌خواهد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$a+b \quad a^2+2ab+b^2$

مثال: بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ را در ناحیه $|z-\overset{z_0}{1}|>2$ بیابید. (سوال امتحان)

$$t=z-z_0 \Rightarrow t=z-1 \Rightarrow z=t+1$$

$$f(t)=\frac{1}{(t+1)^2-1}=\frac{1}{t^2+2t+\cancel{1}-\cancel{1}}=\frac{1}{t^2+2t}=\frac{1}{t(t+2)}$$

$$f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t+2}$$

چون ناحیه بزرگتر از ۲ است از t فاکتور میگیریم

از t فاکتور

$$f(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t\left[1+\frac{2}{t}\right]}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\underbrace{1}_{t}-\underbrace{\left(-\frac{2}{t}\right)}_{z}}$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{t}\right)^n,\quad \left|\frac{-2}{t}\right|<1$$

$$\left|\frac{-2}{t}\right|<1$$

$$\frac{|-2|}{|t|}<1 \rightarrow |t|>2$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{t^{n+2}},\quad |2|<|t|$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}},\quad |z-1|>2$$

انواع نقاط تکین تنها :

در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 سه حالت وجود دارد:

۱) اگر جملات اصلی سری لوران حول نقطه z_0 نامحدود باشد در این صورت z_0 را نقطه تکین اساسی (ویژه اساسی) می‌نامیم

۲) اگر جملات اصلی سری لوران محدود باشد $\left(\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \right)$ در اینصورت z_0 را قطب درجه m می‌نامیم

۳) اگر جملات اصلی سری لوران حذف شود در اینصورت z_0 نقطه حذف‌شدنی می‌نامیم.

مثال. نقطه $z_0 = 0$ برای توابع زیر چه نوع نقطه‌ای می‌باشد.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots}_{\text{تعداد جملات اصلی (نامحدود)}}$$

$z_0 = 0$ تکین اساسی

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

$z_0 = 0$ نقطه حذف‌شدنی

$$f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)$$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2!\,z}}_{\text{قسمت اصلی سری لوران}}+\frac{z}{4!}-\dots$$

$z=0$ قطب از رتبه ۳

صفرهای توابع تحلیلی:

فرض کنید که تابع $f(z)$ در دامنه D تحلیلی باشد و z_0 نقطه‌ای در D باشد در این صورت: اگر $f(z_0)=0$ و $f'(z_0)\neq 0$ در اینصورت z_0 را صفر ساده (صفر رتبه اول) تابع f می‌نامیم.

اگر $f(z_0)=0$, $f'(z)=0$, $f''(z_0)\neq 0$ در اینصورت z_0 را صفر رتبه دوم تابع f می‌نامیم.

اگر $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ و $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ در اینصورت z_0 را صفر رتبه n ام می‌نامیم.

مثال: صفرهای توابع زیر را بیابید.

$$f(z)=1+z^2$$

$$f(z)=0 \Rightarrow 1+z^2=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_0=\pm i$$

$$f'(z)=2z \Rightarrow f'(\pm i)=\pm 2i\neq 0$$

$z_0=\pm i$ صفر ساده (صفر رتبه اول) تابع هستند.

$f(z)=1-\cos z$ چونکه $\cos=0$ است.

$1-\cos z=0 \Rightarrow \cos z=1 \Rightarrow z_0=2k\pi$

$f'(z)=\sin z \Rightarrow f'(2k\pi)=0$

$f''(z)=\cos z \Rightarrow f''(2k\pi)=1 \neq 0$

$z_0=2k\pi$ صفر مرتبه دوم تابع است.

رابطه بین قطب ها و صفرهای تابع:

فرض کنید تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی و z_0 صفر مرتبه nام تابع $f(z)$ می‌باشد در اینصورت z_0 برای تابع $\frac{1}{f(z)}$ قطب مرتبه nام است.

$f(z) \curvearrowright z_0$
صفر مرتبه nام

$$f(z)=\frac{1}{\underbrace{(z-2)^3}_{g(z)}}$$

$g(z)=(z-2)^3,\quad g(z)=0 \Rightarrow z=2$ $\downarrow$ صفر مرتبه سوم مخرج

$g'(z)=3(z-2)^2,\quad g'(2)=0$

$g''(z)=6(z-2),\quad g''(2)=0$

$g'''(z)=6 \longrightarrow g'''(2)=6 \neq 0$

$z_0=2$ قطب مرتبه سوم تابع $f(z)$ است.

نکته: فرض کنید توابع $f(z)$ و $g(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی و z_0 صفر مرتبه nام تابع $f(z)$ و صفر مرتبه mام تابع $g(z)$ باشد در اینصورت برای تابع

$\frac{f(z)^{(n)}}{g(z)^{(m)}}$ داریم

۱) اگر $n \geq m$ نقطه z_0 نقطه حذف شدنی است.

۲- اگر $m>n$ نقطه z_0 قطب از رتبه $m-n$ است.

مثال - نقطه $z_0=0$ برای تابع $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$ چه نوع تکینی می‌باشد.

$$f(z)=\frac{\overbrace{e^z-1}^{h(z)}}{\underbrace{z^2}_{g(z)}}$$

$g(z)=z^2 \longrightarrow g(z)=0 \Rightarrow \boxed{z_0=0} \rightarrow$ صفر رتبه دوم مخرج

$g'(z)=2z \longrightarrow g'(0)=0$

$g''(z)=2 \longrightarrow g''(0)=2 \neq 0$

$h(z)=e^z-1 \rightarrow h(0)=e^0-1=0$

$h'(z)=e^z \longrightarrow h'(0)=1 \neq 0 \longrightarrow z_0=0 \longrightarrow$ صفر رتبه اول صورت

$z=0$ قطب رتبه اول (ساده) تابع $f(0)$ است

مثال: نقاط تکین توابع زیر را بیابید.

$$1)\ f(z)=\frac{\overbrace{z}^{h(z)}}{\underbrace{1-\cos z}_{g(z)}}$$

$g(z)=1-\cos z \longrightarrow g(z)=0 \Rightarrow \cos z=1 \Rightarrow \boxed{z_0=2k\pi}$

صفرهای رتبه ۲ مخرج

$g'(z)=\sin z \Rightarrow g'(z_0)=0$

$g''(z)=\cos z \Rightarrow g''(z_0)=1 \neq 0$

$z_0=2k\pi\ , k\neq 0 \longrightarrow$ قطب رتبه ۲

$\left.\begin{array}{l} h(z)=z\ ,\ h(0)=0 \\ h'(z)=1\ ,\ h'(0)=1\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $z_0=0$ صفر رتبه اول صورت

$z_0=0$ قطب رتبه اول تابع $f(z)$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$2)\ f(z) = \frac{z}{(z^2+1).\sin z}$$

۱- صفرهای مخرج را پیدا کرده جاهایی که مخرج صفر می‌شود

۲- و بعد می‌بینیم صورت را صفر می‌کند یا نه.

$g(z) = (z^2+1)\sin z$

$$g(z) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z^2+1 = 0 \Rightarrow z_0 = \pm i \\ \sin z = 0 \Rightarrow z_0 = k\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{صفرهای مخرج}$$

$g'(z) = 2z\sin z + (z^2+1)\cos z$

$g'(z_0) \neq 0$

صفرهای رتبه اول مخرج

$\boxed{z_0 = \pm 1\ ,\ z_0 = k\pi\ ,\ k \neq 0}$ قطب‌های رتبه اول تابع $f(z)$ هستند.

$h(z) = z\ ,\ h(0) = 0 \longrightarrow$ $z_0 = 0$ صفر رتبه اول صورت

$h'(z) = 1\ ,\ h'(0) \neq 0$

$\boxed{z_0 = 0}$ نقطه حذف شدنی تابع $f(z)$ است.

$$3)\ f(z) = \frac{\overset{h(z)}{z - \sin z}}{\underset{g(z)}{z^3}}$$

$g(z) = z^3,\ g(z) = 0 \Rightarrow z_0 = 0$

$g'(z) = 3z^2\ ,\ g'(0) = 0$

$g''(z) = 6z\ ,\ g''(0) = 0$

$g'''(z) = 6\ ,\ g'''(0) \neq 0$

$z_0 = 0$ صفر رتبه سوم مخرج است.

$h(z) = z - \sin z$

$h(0) = 0\ ,\ h'(z) = 1 - \cos z \rightarrow h'(0) = 0$

$h''(z) = \sin z \longrightarrow h''(0) = 0$

$h'''(z) = \cos z \longrightarrow h'''(0) = 1$

$z_0 = 0$ صفر رتبه سوم صورت است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تذکر: اگر نقطه z_0 برای تابع $f(z)$ نقطه تکین تنها باشد آنگاه z_0 برای توابع $\sin f(z)$ ، $\cos f(z)$ ، $\sinh f(z)$ ، $\cosh f(z)$ ، $e^{f(z)}$ نقطه تکین اساسی است و برای توابع $\tan f(z)$ ، $\sec f(z)$ ، و $\csc f(z)$ تکین غیرتنها می باشد.

$\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ $f(z)$ — $z_0=0$ تکین اساسی

$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$ — $z_0=1$ تکین اساسی

$e^{\frac{1}{z+2}}$ — $z_0=-2$ تکین اساسی

تعریف مانده: ضریب $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه z_0 مانده نامیده می شود.

تذکر ۱: اگر نقطه z_0 نقطه حذف شدنی باشد آنگاه مانده (b_1) صفر است.

تذکر ۲: اگر نقطه z_0 نقطه تکین اساسی باشد تنها راه محاسبه مانده، نوشتن سری لوران تابع حول نقطه z_0 می باشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ را در نقطه $z=0$ بنویسید.

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$f(z)=(1+z+z^2+z^3+\dots)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right)$$

$$\text{مانده}=\text{ضریب } \frac{1}{z}=\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\dots\right)=e-1$$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$$

$$e^1=\underbrace{1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots}$$

مثال: مانده تابع $f(z)=z\,e^{-\frac{1}{z-1}}$ را بیابید.

$z_0=1$ تکین اساسی

۱. نقطه تکین $=1$

۲. از چه نوعی = اساسی

۳. مانده از روش بسط لوران.

$z-1=t \Rightarrow z=t+1$ تغییر متغیر انجام دادیم

$$g(t)=(t+1)\,e^{-\frac{1}{t}}$$

$$=(t+1)\cdot\left[1-\frac{1}{t}+\frac{1}{2!t^2}-\frac{1}{3!t^3}+\dots\right]$$

$$\text{مانده}=\text{ضریب } \frac{1}{t}=\left(\frac{1}{2!}-1\right)=-\frac{1}{2}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

محاسبه مانده در قطب ها:

فرض کنید z_0 قطب رتبه m ام تابع $f(z)$ باشد در اینصورت

$$b_1=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\Big[(z-z_0)^{m}f(z)\Big]^{(m-1)}$$

توان ← m ، مشتق رتبه $m-1$

$$m=1 \Rightarrow \boxed{b_1=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$$

مثال. مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}$ را در نقطه $z_0=1$ بیابید. $z=0$ نقطه اساسی

① $z=1$ قطب رتبه اول

$g(z)=1-z$, $g(z)=0 \Rightarrow z_0=1$ صفر ساده مخرج ، $g'(z)=-1\neq 0$

$z_0=1$ قطب ساده تابع $f(z)$ است.

② $h(z)=\cos\frac{1}{z}$, $h(1)=\cos 1\neq 0$

$$b_1=\lim(z-1)\cdot\frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}$$

$$=-\lim\cos\frac{1}{z}=-\cos 1 \Rightarrow \boxed{b_1=-\cos 1}$$

مثال. مانده تابع $f(z)=\dfrac{5z}{(z+4)(z-1)^2}$ ($h(z)$ صورت، $g(z)$ مخرج) را در نقطه $z=1$ بنویسید. $z=-4$ مخرج را

صفر میکند اما صورت را نه پس میشود قطب رتبه اول . $z=1$ ریشه مخرج است و ریشه صورت نیست پس میشود قطب از نوع رتبه دوم (از روی توان گفتیم)

$z=1$ قطب رتبه دوم ، توان $m=2$

$$b_1=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{5z}{(z+4)(z-1)^2}\right]'=\lim_{z\to 1}\left[\frac{5(z+4)-5z}{(z+4)^2}\right]=$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{20}{(z+4)^2}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$$

← مانده در نقطه ۱

محاسبه انتگرال به روش مانده ها :

می‌دانیم بسط لوران تابع $f(z)$ حول نقطه z به صورت زیر می‌باشد :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)}$$

بطوریکه

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz$$

$$n = 1 \Longrightarrow b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) \, . \, dz$$

$$\boxed{\oint f(z) \, . \, dz = 2\pi i \, . \, b_1}$$

مثال. انتگرال های زیر را به روش مانده ها حل کنید. (تماما در امتحان می آید.)

1) $\oint_C e^{\frac{1}{z}}\, dz \qquad C: |z| = 1$

$z_0 = 0$ نقطه تکین اساسی

سری لوران $\Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots$

$b_1 = \frac{1}{z}$ ضریب $= 1$

جواب انتگرال $\Rightarrow 2\pi i(1) = 2\pi i$

2) $\oint_C \cot z\, dz \;, C: |z| = 1 \qquad f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$

تکینهای تابع $f(z)$

$z_0 = 0 \rightarrow$ داخل مسیر C

$\cot = \frac{\cos}{\sin} \;/\; \sin z = 0 \Rightarrow z_0 = k\pi \Rightarrow \left.\begin{matrix} z = \pi \\ z = 2\pi \end{matrix}\right\}$ خارج از مسیر

$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$

$b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$

$b_1 = \lim_{z \to 0} z \cdot \frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z} \cdot \lim_{z \to 0} \cos z \Rightarrow 1 \times 1 = 1$

جواب $= 2\pi i(1) = 2\pi i$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه مانده ها:

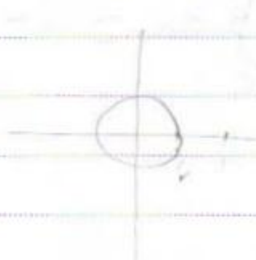
فرض کنید تابع $f(z)$ درون مسیر بسته c به جز تعداد متناهی نقاط تکین تنهای z_1 ، z_2 ، ... ، z_k تحلیلی باشد. درانصورت

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} b_j$$

مثال. انتگرال های زیر را به روش مانده ها حل کنید.

$$\oint_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\,dz \qquad c: |z| = \tfrac{1}{2}$$

شعاع دایره $= \frac{1}{2}$



$z_0 = 0$ تکین اساسی $\longrightarrow$ داخل مسیر c

$z_1 = 1$ قطب ساده $\longrightarrow$ خارج از مسیر c

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\, e^{\frac{1}{z}}$$

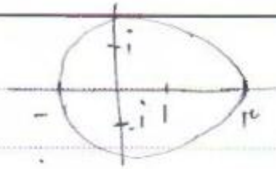
$$f(z) = (1 + z + z^2 + \dots)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \dots\right)$$

مانده = ضریب $\frac{1}{z}$ $= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) = e - 1$

$$\oint_c \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\,dz = 2\pi i\,(e-1)$$

مرکز ۱ و شعاع ۲

۲) $\oint_c \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz \qquad c: |z-i| = 2$



$z^2+1=0 \Rightarrow z_0 = \pm i \longrightarrow$ قطب ساده اند

$\boxed{z_0 = i} \Rightarrow b_1 = \lim_{z\to i}(z-i)\underbrace{\frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)}}_{f(z)} = \frac{e^{zt}}{2i}$

$\boxed{z_0 = -i} \Rightarrow b_1 = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{e^{zt}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-it}}{-2i}$

جواب انتگرال $= 2\pi i\left(\frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i}\right) = 2\pi i \sin t$

۳) $\oint_c \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}\,dz \qquad c: |z| = 2$ سؤال امتحان ترم قبل

$\left.\begin{array}{l} \text{تکین اساسی} \quad z_0 = 0 \\ \text{قطب ساده} \quad z_0 = 1 \end{array}\right\}$ داخل دایره

$f(z) = \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$

از بسط های لورن بریم

$f(z) = \frac{-1}{1-z}\sin\frac{1}{z} = -(1+z+z^2+z^3+\dots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5}\dots\right)$

$b_1 = \frac{1}{z}$ ضریب $= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots\right) = \boxed{-\sin 1}$ در نقطه $z_0 = 0$

$z=1 \Rightarrow b_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} = \boxed{\sin 1}$

جواب انتگرال $= 2\pi i(-\sin 1 + \sin 1) = 0$

سری فوریه:

سری فوریه یک سری مثلثاتی برحسب جملات سینوسی و کسینوسی می‌باشد که در حل معادلات مشتقات جزئی کاربرد دارد.

تعریف: فرض کنید تابع $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2L$ باشد، در این صورت سری فوریه تابع $f(x)$ برابر با:

$$f(x) = \frac{a_0}{\cancel{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

فرمول اویلر

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \\[2ex] a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\[2ex] b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases}$$

تذکر: سری فوریه در نقاط پیوسته به تابع $f(x)$ و در نقاط ناپیوسته به میانگین حد چپ و راست در آن نقطه همگراست.

مثال: سری فوریه $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ را بیابید.

$$T = 2L = 2\pi \Rightarrow \boxed{L = \pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2\pi}x\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$\sin n\pi = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\Big[\cancel{\overset{0}{\sin n\pi}} - \cancel{\overset{0}{\sin 0}}\Big] \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{-1}{n\pi}\Big[\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{1}\Big] \Rightarrow b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cancel{\overset{0}{a_n}}\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{\underset{\pi}{L}}x\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx\right)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سری فوریه توابع زوج فرد

یادآوری: اگر تابع $f(x)$ تابع زوج باشد ($f(-x)=f(x)$) دراینصورت

انتگرال $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$

واگر تابع $f(x)$ تابع فرد باشد ($f(-x)=-f(x)$) درانیصورت انتگرال

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

تعریف: اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد دراینصورت سری فوریه بصورت زیر تعریف می‌کرد.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = 0$$

Subject:
Year. Month. Date.

اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد در اینصورت سری فوریه این تابع بصورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

مثال. سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ (تابع زوج) را در بازه $(-L, L)$ بنویسید.

$$f(x) = x^2 = \text{زوج} \Rightarrow b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L x^2 \, dx = \frac{1}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^3}{3} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{L^2}{3}}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	$\cos \frac{\pi}{L} x$
$2x$	$-$	$\frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x$
2	$+$	$\frac{-L^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} x$
0		$-\frac{L^3}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{L} x$

برای حل این انتگرال می‌توان بصورت جزء‌جزء آن را حل کرد بدین صورت که از یکی مشتق گرفته و از یکی انتگرال می‌گیریم. از اینکه مشتق آن به سمت صفر می‌رود مشتق می‌گیریم و از یکی دیگر انتگرال

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\frac{L}{n\pi} x^2 \sin \frac{n\pi}{L} x + \frac{2L^2}{n^2\pi^2} x \cos \frac{n\pi}{L} x \frac{-2L^3}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{L} x \right] \Bigg|_0^L$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{L}\left[\left(0 + \frac{2L^3}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right) - 0\right]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}\cdot(-1)^n}$$

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

مثال. سری فوریه تابع $f(x) = x$ را در بازه $(-L , L)$ بنویسید.

$f(x) = x$ تابع فرد $\Rightarrow a_n = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \cdot \sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow$$

از نتایج مشتق از نتایج انتگرال

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin\frac{n\pi}{L}x$
1	$-$	$-\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x$
0		$-\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x$

$$b_n = \frac{2}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_0^L$$

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi\right) - (0)\right] =$$

$$b_n = -\frac{2L}{n\pi}(-1)^n \Rightarrow$$

$$\boxed{b_n = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بسط نیم دامنه‌ای:

برای بدست آوردن سری فوریه تابع $f(x)$ که در نیم دامنه $(0, L)$ تعریف شده است توسط توابع کمکی بازه را به بازه $(-L, L)$ گسترش می‌دهیم.

فرض کنید تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$

چون تابع $f(x)$ تابع زوج است بنابراین

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L F(x)\, dx$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx}$$

بنابراین تابع $F(x)$ دارای سری فوریه با جملات کسینوسی که در بازه $(0, L)$ برابر $f(x)$ است و این سری فوریه به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

می‌باشد و به آن سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ گوییم.

اگر تابع $G(x)$ را به صورت
$$G(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$$
تعریف کنیم چون،

تابع $G(x)$ فرد است بنابراین

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L G(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

بنابراین تابع $G(x)$ دارای جملات سینوسی می‌باشد که در بازه $(0, L)$ برابر با تابع $f(x)$ است و سری فوریه بدست آمده به صورت

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x\, dx$$

مثال • سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=x-1$ را در بازه $(0,1)$ بنویسید.

$\boxed{L=1}$

مشتق انتگرال

$x-1 \quad + \quad \sin n\pi x$

$1 \quad - \quad \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$

$0 \quad \quad \frac{-1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$ فرد

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\,dx$$

$$b_n=2\left[-\frac{(x-1)}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1$$

$$b_n=\left[0-\left(\frac{1}{n\pi}-0\right)\right] \Rightarrow b_n=\frac{-2}{n\pi}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n\pi}\right)\sin n\pi x}$$

مثال. سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=x$ را در بازه $(0, \pi)$ بیابید. $L=\pi$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx \Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos nx$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\cos nx$
1	$-$	$\frac{1}{n}\sin nx$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

انتگرال فوریه:

اگر تابع $f(x)$ متناوب نباشد در اینصورت به جای سری فوریه انتگرال فوریه تابع $f(x)$ را بدست می‌آوریم.

انتگرال فوریه تابع نامتناوب $f(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx\right]dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال. انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \quad (-1 < x < 1) \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ را بنویسید.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \cos \omega x \, dx$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_{0}^{1}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi \omega} \left(\sin \omega - \underbrace{\sin(-\omega)}_{-\sin \omega} \right) \Rightarrow \boxed{A(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega}}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sin \omega x \, dx$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi \omega} \cos \omega x \Big|_{-1}^{1} \Rightarrow B(\omega) = \frac{-1}{\pi \omega} \left(\cos \omega - \underbrace{\cos -\omega}_{-\cos \omega} \right) = 0$$

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \cdot \cos \omega x \, dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \cos \omega x \, d\omega = \frac{\pi}{2} f(x)$$

$$x = 0 \Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \overbrace{f(0)}^{1} \Rightarrow \boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}}$$

PaPCO

Subject:
Year. ۹۰ Month. ۱۰ Date. ۲۰

اگر در صورتی که انتگرال فوریه تابع $f(x)$، $B(\omega)=0$ باشد در اینصورت داریم

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

به طوریکه

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x\,dx$$

که به آن انتگرال فوریه کسینوسی می‌گوئیم.

و اگر $A(\omega)=0$ باشد در این صورت $f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,dx$ به طوریکه

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

که به آن انتگرال فوریه سینوسی می‌گوئیم.

مثال. با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید.

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\sin\omega x\,dx=\begin{cases}\pi/2 & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin\omega x\,dx$$

$$B(\omega)=\frac{-1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^\pi=-\frac{1}{\omega}(\cos\omega\pi-1)\Rightarrow\boxed{B(\omega)=\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega\pi)}$$

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\int_0^\infty\frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}\sin\omega x\,d\omega=\begin{cases}\pi/2 & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تابع نمایی مشتق $\neq 0$

مثال. با استفاده از انتگرال فوریه نشان دهید.

$$\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad , \quad x>0$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad , x>0$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2} e^{-x}\cdot \cos wx\,dx$$

مشتق		انتگرال
$\cos wx$	$+$	e^{-x}
$-w\sin wx$	$-$	$-e^{-x}$
$-w^2\cos wx$	$+$	e^{-x}

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx = -e^{-x}\cos wx + we^{-x}\sin wx - w^2\int e^{-x}\cos wx\,dx$$

$$(1+w^2)\int_0^\infty e^{-x}\cos w\,dx = -e^{-x}\cos wx + we^{-x}\sin wx\Big|_0^\infty$$

$$(1+w^2)\int_0^{\infty} e^{-x}\cos wx\,dx = (0+0)-(-1) = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos wx\,dx = \frac{1}{1+w^2} \Rightarrow \boxed{A(w) = \frac{1}{1+w^2}}$$

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\,dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{1+w^2}\cos wx\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-x} , x>0$$

فصل سوم - معادلات مشتقات جزئی

تعریف - معادلات مشتقات جزئی رابطه‌ای بین یک یا چند مشتق از تابع مجهول نسبت به چند متغیر مستقل.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله موج

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ معادله گرما

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ معادله لاپلاس

حل معادله موج به روش ضرب (جداسازی متغیرها):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(u_{tt} = c^2 u_{xx}\right)$$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq L$$

شرایط اولیه
$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) & \text{انحراف اولیه} \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{سرعت اولیه} \end{cases}$$

تابع جواب $= u(x, t) \Rightarrow$ x مکان، t زمان

Subject:

Year. Month. Date. ( )

برای حل این معادله سه مرحله درنظر می‌گیریم :

مرحله اول . بدست آوردن دو معادله دیفرانسیل معمولی

فرض می‌کنیم :
$$u(x,t) = F(x).G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\ddot{G}$$

زمانیکه هر دو عدد ثابت k باشند با هم مساوی‌اند .

جایگذاری :
$$F\ddot{G} = c^2 F'' G \Rightarrow \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{F''}{F} = k \Rightarrow F'' - kF = 0 \\ \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k \Rightarrow \ddot{G} - c^2 k G = 0 \end{cases}$$

مرحله ۲ برقراری شرایط مرزی .

اگر G $t=0$ جواب معادله صفر که به درد ما نمی‌خورد (ما جواب غیرصفر معادله

$$u(0,t) = F(0).G(t) = 0 \xRightarrow{G(t)\neq 0} \boxed{F(0) = 0}$$

$$F(L,t) = 0 \Rightarrow F(L).G(t) = 0 \Rightarrow \boxed{F(L) = 0}$$

$$1)\ k = 0 \Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = ax + b$$
$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$$

ادامه پشت صفحه

$F(x) = ax \;,\; F(L) = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \Rightarrow$

$a = b = 0 \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ ✗

یادآوری:

$ay'' + by' + cy = 0$

$am^2 + bm + c = 0$ معادله مشخصه $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0 \Rightarrow y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

$\Delta = 0 \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$

$\Delta < 0 \Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

$m = \alpha \pm i\beta$

۲ از حالت $k \leftarrow k^2 = \mu^2 \;,\; k \neq 0$

$F'' - \mu^2 F = 0 \Rightarrow m^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\mu$

$\Rightarrow F(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}$

$F(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -C_2}$

ادامه صفحه بعد ⇐

$$F(x) = C_1 e^{\mu x} - C_1 e^{-\mu x}$$

$$F(x) = C_1 (e^{\mu x} - e^{-x})$$

$$F(L) = 0 \Rightarrow C_1 (e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow u(x,y) = 0 \ \times \\ e^{\mu L} \,\big|\, (e^{\mu L} - e^{-\mu L} = 0) \Rightarrow \mu L = 0 \ \times \end{cases}$$

$$e^{2\mu L} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2\mu} = 1$$

۴) $k = -p^2$

$$F'' - kF = 0 \Rightarrow F'' + p^2 F = 0 \Rightarrow m^2 + p^2 = 0 \Rightarrow m = \pm p i$$

$\alpha = 0$, $\beta = p$

$$F(x) = A \cos p(x) + B \sin px$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$F(x) = B \sin px, \ 0$$

$$F(L) = 0 \Rightarrow B \sin pL = 0 \Rightarrow \sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow \boxed{p = \frac{n\pi}{L}}$$

$$F(x) = B \sin \frac{n\pi}{L} x, \ B = 1 \Rightarrow \boxed{F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \ n = 1, 2, \dots}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\ddot{G} - c^2 k G = 0 , \quad k = -p^2$$

$$\ddot{G} + c^2 p^2 G = 0 , \quad cp = \lambda_n$$

$$\ddot{G} + \lambda_n^2 G = 0 \Rightarrow m^2 + \lambda_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = \underbrace{\pm}_{\alpha = 0} \underbrace{\lambda_n}_{\beta = \lambda_n} i$$

$$\boxed{G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t}$$

عدد ثابت

$$u_n(x,t) = (B_n \cos_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

عدد ثابت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t \right] \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}}$$

مرحله ۳ ـ برقراری شرایطِ اولیه.

$$u(x,0) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \Rightarrow \boxed{B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$u_t(x,0)=g(x)$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-B_n\lambda_n t+B_n^*\lambda_n\cos\lambda_n t\right]\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\lambda_n\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x\implies$$

$$B_n^*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$B_n^*=\frac{2}{\cancel{L}\cdot\lambda_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad \lambda_n\to c\frac{n\pi}{\cancel{L}}$$

$$\boxed{B_n^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx}$$

به طور خلاصه جواب معادله موج به صورت زیر نمایش داده می‌گردد:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$B_n^*=\frac{2}{Cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad \boxed{\lambda_n=\frac{Cn\pi}{L}}$$

مثال. معادله‌ی زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad c^2 = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} \text{شرایط مرزی} \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x,0) = 0/01 \sin x = f(x)$$

$$u_t(x,0) = 0 = g(x)$$

$$L = \pi \,,\; c = 1 \,,\quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\pi} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = n}$$

$$B_n^* = 0$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0/01 \sin x \cdot \sin nx \, dx$$

$$B_n = \frac{0/02}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx \, dx \Rightarrow n = 1 \Rightarrow B_1 = \frac{0/02}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{B_1 = 0/01}$$

$$\boxed{n \neq 1 \Rightarrow B = 0}$$

$$\int_0^{\pi} \begin{array}{l} \sin mx \sin nx \, dx \\ \cos mx \cos nx \, dx \end{array} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos \lambda_n t + \underbrace{B_n^* \sin \lambda_n t}_{0} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,t) = B_1 \cos \lambda_1 t \cdot \sin \frac{\pi}{L} x \quad , \; L \to \pi$$

$$\boxed{u(x,t) = 0.01 \cos t \cdot \sin x}$$

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad c = 1 \;,\; L = \pi$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = k \sin 2x = f(x)$$

$$u_t(x,0) = 0 = g(x)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{\pi} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = n}$$

$B_n^* = 0 \Rightarrow$ چون $g(x) = 0$ بنابراین $B_n^* = 0$ است.

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin 2x \cdot \sin nx \, dx$$

$$n = 2 \Rightarrow B_2 = \frac{2}{\pi} \cdot k \cdot \frac{\pi}{2} \to \boxed{B_2 = k}$$

$$n \neq 2 \Rightarrow \boxed{B_n = 0}$$

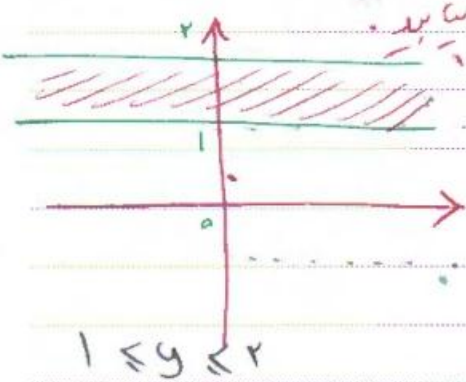
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$u(x,t) = B_2 \cos \lambda_2 t \cdot \sin \frac{\overset{2}{n}\pi}{\underset{\pi}{L}} x$$

$$u(x,t) = k \cos 2t \sin 2x$$

PAPCO

۱- تصویر ناحیه هاشور خورده زیر را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.



$1 \le y \le 2$

$$w=\frac{1}{z} \longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$1 \le \frac{-v}{u^2+v^2} \le 2$$

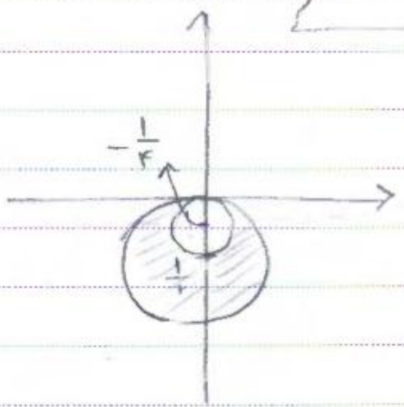
(I) $1 \le \frac{-v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2 \le -v \longrightarrow u^2+v^2+v \le 0$ مربع کامل

$\boxed{u^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}}$ نقاط درون دایره ای به مرکز $(0,-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{1}{2}$

(II) $-\frac{v}{v^2+u^2} \le 2 \Rightarrow 2(u^2+v^2) \ge -v$

$\Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{2} \ge 0$

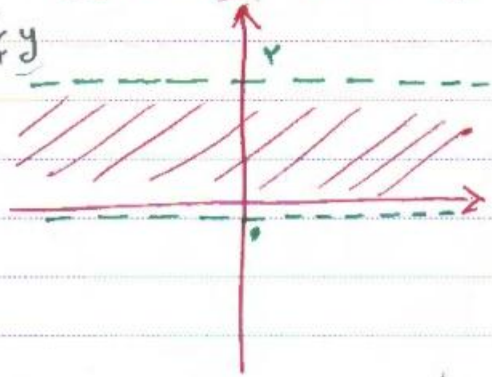
$\Rightarrow \boxed{u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2 \ge \frac{1}{16}}$ نقاط خارج دایره ای به مرکز $(0,-\frac{1}{4})$ و شعاع $\frac{1}{4}$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

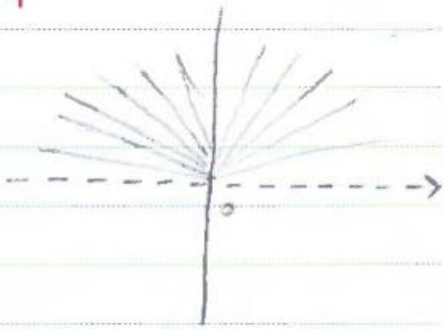
۲- تصویر ناحیه‌ی هاشور خورده زیر را تحت تابع $\omega = e^{\frac{\pi}{2}z}$ بیابید.



$$\omega = e^{\frac{\pi}{2}z} = e^{\frac{\pi}{2}(x+iy)} = e^{\underbrace{\frac{\pi}{2}x + i\frac{\pi}{2}y}}$$

$$\omega = e^{z} \Rightarrow \begin{cases} |\omega| = e^{x} \\ \theta = y \end{cases}$$

$$\omega = e^{\frac{\pi}{2}z} \Rightarrow \begin{cases} |\omega| = e^{\frac{\pi}{2}x} \\ \varphi = \frac{\pi}{2}y \end{cases} \leftarrow \text{مهم}$$



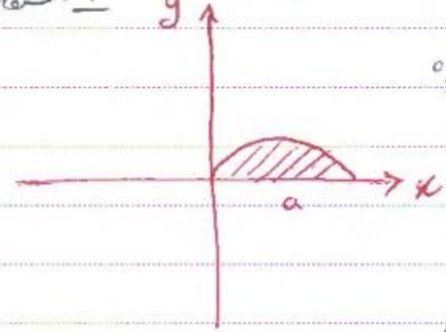
$-\infty < x < \infty$ $\qquad$ $0 < y < 2$

$e^{-\infty} < e^{\frac{\pi}{2}x} < e^{+\infty}$ $\qquad$ $0 < \frac{\pi}{2}y < \pi$

$0 < |\omega| < \infty$ $\qquad$ $0 < \theta < \pi$

۳- تصویر ناحیه هاشور خورده زیر را تحت تاج $w=\frac{1}{z}$ بیابید.

چون مرز دایره میدانیم نگاشته از ۳ استفاده کرد.



معادله دایره $(x-a)^2+y^2=a^2$

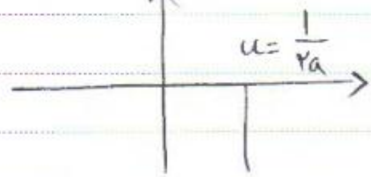
$$x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$$

$$x^2-2ax+y^2=0$$

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2-2a\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}}-\frac{2au}{u^2+v^2}=0$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2au}{v^2+u^2}=0 \xrightarrow{\text{مخرج ها مساوی}} 1-2au=0 \Rightarrow \boxed{u=\frac{1}{2a}}$$ معادله خط



a مثبت + (با توجه به شکل)

مقادیری از z را بیابید که $|e^{-2z}|<1$

$$|e^z|=e^x$$

$$|e^{-2z}|=e^{-2x}<1$$

$$e^{-2x}<1 \Rightarrow \ln e^{-2x}<\ln 1$$

$$\Rightarrow -2x\,\cancel{\ln e}<0 \Rightarrow -2x<0$$

$$\Rightarrow x>0$$

$$\Rightarrow Re(z)>0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$e^{iz} = e^{\overline{iz}}$$ مقادیری از z را بیابید

$$e^{i(x-iy)} = e^{\overline{i(x+iy)}}$$

$$e^{i(x-iy)} = e^{\overline{ix-y}}$$ ← زیرا $z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy$

$$e^{ix+y} = e^{-y-ix}$$

$$e^{y}(\cos x + i\sin x) = e^{-y}(\cos x - i\sin x)$$

$$\begin{cases} e^{y}\cos x = e^{-y}\cos x \Rightarrow \cos x\,(e^{+y} - e^{-y}) = 0 & (1) \\ e^{y}\sin x = -e^{-y}\sin x \Rightarrow \sin x\,(e^{y} + e^{-y}) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

جایگذاری در (1) $\underbrace{\cos(k\pi)}_{\pm 1}(e^{y} - e^{-y}) = 0$

$$e^{y} - e^{-y} = 0 \xrightarrow{\times e^{y}} e^{2y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{2y} = 1 = e^{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\Rightarrow z = x+iy \Rightarrow z = k\pi + 0i$$

PaPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مقادیری از z را بیابید که $e^z \in R$

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y \in R$$

$$\Rightarrow e^x \sin y = 0 \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow \boxed{y = k\pi}$$

$$\boxed{z = x + k\pi i}$$

هرگاه تابع $f(z)$ در دامنه D تحلیلی باشد و در همه نقاط D داشته باشیم $f'(z)=0$ آنگاه $f(z)$ ثابت است.

تحلیلی f : $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

$$f'(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

تحلیلی f :
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x,y) = \text{ثابت}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(x,y) = \text{ثابت}$$

$f(z) = u + iV \longrightarrow$ تابع ثابت $f(z)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

هرگاه $f(z)$ درناحیه D تحلیلی باشد $|f(z)|=k$ آنگاه $f(z)$ در D ثابت.

$$f(z)=u+iv$$

$$|f(z)|=k \Rightarrow |f(z)|^2=k^2 \Longrightarrow \boxed{u^2+v^2=k^2}$$

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\[2ex] 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & \Longrightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 & \Longrightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} u\times \\ v\times \end{array}\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}+v^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(u^2+v^2)=0$$

$$\begin{cases} u^2+v^2=0 \Rightarrow u=v=0 \Rightarrow f(z)=0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

f تحلیلی است

$$\begin{array}{l} v\times \\ -u \end{array}\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\[2ex] -u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$v^2\frac{\partial v}{\partial x}+u^2\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$(v^2+u^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} u^2+v^2=0 \Longrightarrow u=v=0 \Rightarrow f=0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$

f تحلیلی است

نتیجه‌طی $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \to u=$ ثابت

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \longrightarrow v=$ ثابت

$f(z)=$ تابع ثابت

۴ منظور از عدد ۱، مختلط $1+0i$ است بصورتی

Subject: $f'(1+0i) = ?$ → $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Year. Month. Date. ( )

اگر قسمت حقیقی تابع تحلیلی f برابر با $u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ باشد در این صورت $f'(1)$ را محاسبه کنید.

$$f(z) = u + iv$$

تحلیلی f : $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \left(2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2y\sin 2xy \cdot e^{x^2-y^2}\right) - i$$
$$\left(-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy - 2x\sin 2xy \cdot e^{x^2-y^2}\right)$$

$$f'(1) = (2e) - i(0) = 2e$$

$x=1$
$y=0$

با استفاده از تعریف مشتق تابع $f(z)=|z|^2$ را در $z=0$ بیابید.

و چون ← $|z|^2 = z.\bar{z}$

$$f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)\overbrace{(\overline{z+\Delta z})} - z.\bar{z}}{\Delta z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z.\bar{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z.\bar{z} + \Delta z.\overline{\Delta z} - z.\bar{z}}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to 0}\left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}\right) \Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}\left(z.\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \bar{z} + \Delta x - i\Delta y\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} (-z + \bar{z} - i\Delta y)$$

$$\boxed{f'(z) = -z + \bar{z}}$$

$$\Rightarrow \Delta y = 0 \Rightarrow f'(z) = \lim (z + \bar{z} + \Delta x) = z + \bar{z}$$

$$-z + \bar{z} = z + \bar{z} \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0} \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

پیوستگی تابع

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Im} z^2}{|z|^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

را در نقطه $z = 0$ بررسی کنید.

$$z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{Re} + \underbrace{2xyi}_{Im}$$

$$\operatorname{Im} z^2 = 2xy$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im} z^2}{|z|^2} = \lim_{z \to 0} \frac{2xy}{|z|^2} \Rightarrow \lim_{r \to 0} \frac{2 r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2}$$

$$= 2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$$

جون مقدار حد به θ بستگی دارد بنابراین تابع حد ندارد.