

Complex Function تمرین اول بخش

(۱) نشان دهید حد زیر وجود ندارد

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)]^2}{|z|^2}$$

(۲) نشان دهید توابع \bar{z} و $|z|^2$ تحلیلی نیستند.

$$(۳) \text{ نشان دهید تابع } f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در صفر مشتق پذیر نمی باشد.

(۴) اگر $u(x, y) = 2x + y^3 - 3x^2y$ باشد تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را پیدا کنید.

(۵) نشان دهید اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد دسته منحنی های $u(x, y) = C_1$ و $v(x, y) = C_2$ بر یکدیگر عمود می باشند. این موضوع را برای تابع $f(z) = z^2$ بررسی کنید.

(۶) در مکانیک سیالات تابع ϕ و ψ به عنوان پتانسیل سرعت و تابع جریان شناخته می شوند. این توابع به صورت $f(z) = \phi + i\psi$ تشکیل یک تابع تحلیلی را می دهند. اگر تابع پتانسیل سرعت برابر مقدار $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$ باشد، تابع جریان را بیابید.

(۷) ثابت کنید در صورتی که $f(z)$ یک تابع تحلیلی باشد و در ناحیه D مقدار $|f(z)|$ برابر با ثابت باشد آنگاه خود تابع نیز تابع ثابت است.