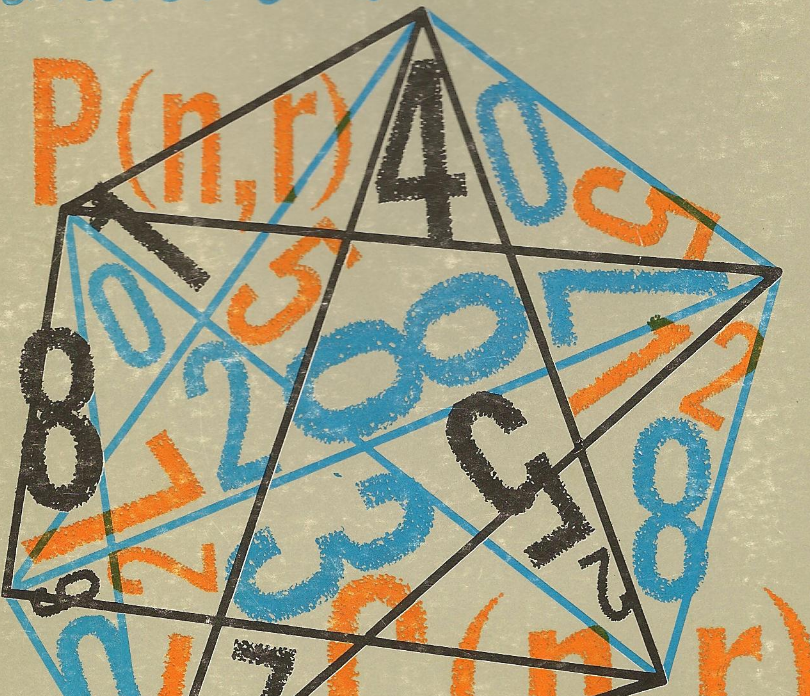
ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

ایوان نیون

ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی



(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۱۵)

ریاضیات انتخاب

یا

چگونه بدون شمارش بشماریم

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی - ۱۵)

ایوان نیون

ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۵۱

مرکز نشر دانشگاهی
۴۵۷

Mathematics of Choice of How to Count without Counting
New Mathematical Library (15)
Ivan Niven
The Mathematical Association of America, 1965

ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم
تألیف ایوان نیون
ترجمهٔ دکتر علی عمیدی، بتول جذبی
ویراستهٔ دکتر علی عمیدی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ سوم ۱۳۷۹
تعداد ۴۰۰۰
حروفچینی: مهدی
لیتوگرافی: بهزاد
چاپ و صحافی: الهادی ـ قم

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

نیون، ایوان مورتن، ۱۹۱۵ ـ　　Niven, Ivan Morton.
ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم / ایوان نیون؛ ترجمهٔ علی عمیدی، بتول جذبی. ـ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
هفت، ۲۲۲ ص. : مصور، جدول. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۵۷. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۵۱) (ریاضیات پیش‌دانشگاهی؛ ۱۵)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی:
Mathematics of Choice or How to count without counting.
کتابنامه: ص. ۲۲۲.
چاپ سوم: ۱۳۷۹.　　ISBN 964-01-0457-3
۱. آنالیز ترکیبی. الف. عمیدی، علی، ۱۳۱۲ ـ　　، مترجم. ب. جذبی، بتول، ۱۳۲۹ ـ　　، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.ه.عنوان: چگونه بدون شمارش بشماریم.
QA۱۶۴/ن۹ر۹　　۵۱۱/۶
۱۳۶۸
کتابخانهٔ ملی ایران　　۲۷۵۸ـ۶۸م

فهرست

عنوان	صفحه

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به‌کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. دربین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آموزش می‌دهند و راهنمایی می‌کنند، عدهٔ کمی این‌توانایی را دارندکه درآن زمینهٔعلمی، وبا رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی‌بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین‌کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جامعهٔ ریاضی آمریکا مجموعه‌ای از این‌گونه کتابها را زیر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد از آنها را منتشرکرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش آنها پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی در یك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل‌ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خود حل کند و فقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. در این کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار و گسترش این گونه فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

پیشگفتار

موضوع این کتاب غالباً «آنالیز ترکیبیاتی» و یا «ترکیبیات» نامیده‌می‌شود. مسائلی که مورد بحث قرار گرفته‌اند از نوع «به‌چند طریق ممکن است که...؟»، یا صورتهای دیگر این عبارت هستند. جایگشتها و ترکیبها بخشی از آنالیز ترکیباتی را تشکیل می‌دهند که شاید خواننده قبلاً با آنها آشنا شده باشد. دراین صورت، ممکن است خواننده با بعضی از مطالب سه فصل اول آشنا باشد.

این کتاب تنها با پیشنیاز مقدمات جبر، مستقلاً قابل استفاده است. خلاصه‌هایی که شامل تمام فرمولهاست در آخر هرفصل داده شده‌اند. در سرتاسر کتاب مسائل زیادی برای خواننده آورده‌ایم. درواقع این کتاب بیشتر یک کتاب مسأله است که درآن اطلاعات پایه‌ای کافی برای حل مسائل عرضه شده‌است. بعد از فصل آخر، فهرستی از مسائل گوناگون آمده است. درپایان کتاب برای مسائل مشکلتر راه حل یا خلاصه‌ای از راه حل را آورده‌ایم و برای مسائل ساده‌تر به پاسخهای عددی اکتفا کرده‌ایم.

اعضای هیأت داوری گروه بررسی ریاضیات مدرسه‌ای، و همچنین هربرت سوکرمان[1] پیشنهادهای مفیدی داده‌اند. ماکس‌بل[2] بعضی‌ازمباحث را با دانشجویان خود درمیان نهاده و نظرات آنان را برای من فرستاده است. مارك كاك[3] عناوین فرعی ظریف و بدیع کتاب را پیشنهاد کرده‌است. مراتب قدردانی خود را برای تمامی این کمکها ابراز می‌دارم.

1. Herbert S. Zuckerman 2. Max Bell 3. Mark Kac

۱

مسائل مقدماتی

هدف این فصل معرفی چند مسألهٔ نمونه برای تشریح موضوع کتاب است. بسط سیستماتیك موضوع از فصل بعدی شروع می‌شود. بعضی از نمونه‌مسائلی راکه در اینجا داده شده‌اند می‌توان بدون داشتن پایهٔ نظری حل کرد، حل بقیهٔ مسائل تا ارائه نظریهٔ لازم به‌تعویق می‌افتد.

ایدهٔ این کتاب بررسی جنبه‌های معین سؤال «چندتا؟» است. ممکن است سؤالهایی، مانند «تعداد صفحه‌ها از صفحهٔ ۱۴ تا ۵۹ چندتاست؟» بسیار ساده باشند؛ دربعضی موارد ممکن است پاسخ سؤالهایی مانند تعداد روزهای ماه اکتبر، یا تعداد یاردها در یك مایل، تنها به‌داشتن معلومات عمومی مربوط باشد. درموارد دیگر ممکن است پاسخ به سؤالاتی مانند تعیین تعداد عناصر شیمیایی که تا زمان حال شناخته شده‌اند، یا تعیین تعداد سانتیمترهای مکعب جا به‌جایی درموتوراتومبیلی معین، به اطلاعات فنی نیاز داشته‌باشد، اما علاقهٔ ما به‌حل مسائلی است که پاسخ آنها به فکر نیاز دارند. همچنین ممکن است پاسخ دادن به این مسائل به بعضی شناختهای قبلی احتیاج داشته باشند که اگر جزء اطلاعات عمومی نباشند در متن کتاب فراهم می‌شوند. به‌کمك بعضی ازفرمولهای ریاضی نیاز است که به‌موقع‌خود

ارائه خواهند شد. ولی حل بیشتر مسائل تنها به کمی قوهٔ ابتکار احتیاج دارند. با یکی ازاین مسائل شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۰۱* درتقویم هرسال، چند جمعه وجود دارندکه سیزدهمین روز ماه باشند؟ کوچکترین تعداد ممکن چیست؟

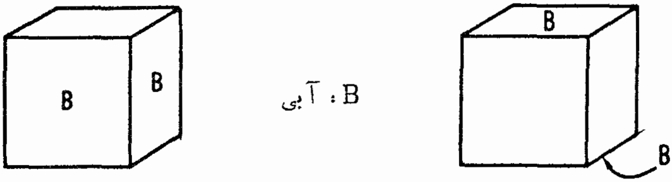
این مسأله، مانند بسیاری از مسائل دیگر این کتاب، در بخش پاسخها و راه حلها در آخر کتاب حل شده‌است. البته از خواننده مصراً خواسته می‌شود که قبل از مراجعه به راه حل کتاب سعی کند شخصاً مسأله را حل کند. مسألهٔ ۱۰۱ را می‌توان با مراجعه‌ای ساده به یك تقویم، ویا به مجموعه‌ای از تقویمهای سالانه‌که تمام آرایشهای ممکن روزهای سال را دارا باشند حل کرد. هدف این است‌که مسأله را، حتی به‌روشی ساده‌تر باابداع یك دستگاه حل کنیم. مثلاً باید توجه‌کرد سالهایی راکه دارای ۳۶۵ روزند می‌توان به هفت نوع مختلف تفکیك نمود. نوعی که با دوشنبه شروع می‌شود، نوعی که با سه‌شنبه شروع می‌شود و قس‌علی‌هذا. به همین ترتیب هفت نوع سال کبیسه وجود دارند، و بنا براین کلاً در ارتباط با این مسأله، چهارده نوع سال وجود دارند. سپس برای بررسی تعداد جمعه‌هایی‌که سیزدهم ماه در این نوع سالها هستند می‌توان نظامی ابداع کرد. لیکن ما دراین‌جا تحلیل مطلب را نمی‌آوریم وبقیهٔ کار را به‌خواننده وا گذار می‌کنیم.

مسألهٔ ۲۰۱ سازنده‌ای برای بچه‌ها مکعبهایی می‌سازد. وجوه هرمکعبی‌که حجمش دو اینچ مکعب است با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌شود. وجوه بعضی ازمکعبها تماماً آبی، وجوه بعضی تماماً قرمز و وجوه بعضی آمیزه‌ای از قرمز وآبی است. سازنده چندنوع مختلف ازاین مکعبها می‌تواند بسازد؟

برای آنکه سؤال دارای معنی دقیق باشد، لازم است منظور از مکعبهای «مختلف»را تعریف کنیم. دومکعب را یکسان می‌گوییم‌که اگرآنها را در وضعیتهای همانند قرار دهیم، وجوه متناظرشان دارای رنگهای یکسان باشند، یعنی به‌قسمی‌که وجوه پایین دارای یك رنگ، وجوه بالا دارای یك رنگ و وجوه مقابل دارای یك رنگ و الخ... باشند. اگر دو مکعب با این مفهوم یکسان نباشند، آنها را دو مکعب مختلف می‌گوییم. مثلاً هردومکعبی‌که پنج وجه‌آنها آبی ویك وجه‌آنها قرمز باشد یکسان‌اند. اما به عنوان مثالی دیگر، دو مکعب را در نظر بگیریدکه چهار

---

* این مسأله، تحت عنوان مسألهٔ E۱۵۴۱ درصفحهٔ ۹۱۹
the American Mathematical Monthly, November, 1962
آمده است.



وجوه آبی مجاورند　　　　وجوه آبی مقابل‌اند (بالا و پایین)

شکل ۱.۰۱

وجه آنها قرمز و دو وجه آنها آبی باشند، این‌چنین دومکعبی ممکن است یکسان باشند ویا نباشند. اگر درهرمکعب دو وجه آبی مجاور یکدیگر باشند، آن گاه این دومکعب یکسان‌اند، یا اگر درهر مکعب دو وجه مقابل آبی باشند، این دو مکعب یکسان‌اند. اما اگر در یکی از مکعبها دو وجه مجاورآبی و در مکعب دیگر دو وجه مقابل آبی باشند، آن گاه این دومکعب مختلف اند. شکل ۱.۰۱ را ببینید.

این مسأله نیز در بخش پاسخها و راه حلها حل شده است، امـا باز توصیه می‌شود که خواننده شخصاً مسأله را حل، و از راه حل آخر کتاب برای کنترل کارش استفاده کند.

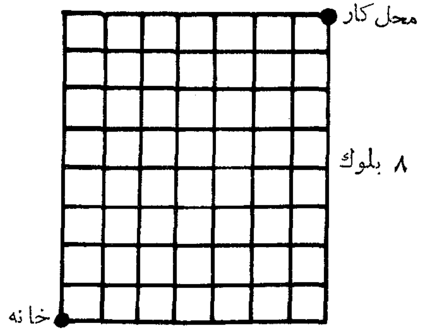
اکنون به سه مسأله کـه قدری مشکلترند و راه حل آنها تا ارائه نظریهٔ لازم به‌تعویق می‌افتد می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱۰۳ مسألهٔ مسیر. شخصی در ساختمانی کار می‌کند که هفت بلوك در شرق و هشت بلوك درشمال‌خانه‌اش قرار دارد. (شکل ۲.۰۱ را ببینید.) بنابراین، برای‌رسیدن به‌محل کارش هر روز پانزده بلوك را طی می‌کند. تمام خیابانهایی کـه در الگوی مستطیل‌شکل وجود دارند برای رفتن او به محل کار قابل‌استفاده‌اند. این شخص با چند مسیر مختلف می‌تواند از منزل به‌محل کارش برود، درصورتی که تنها از پانزده بلوك بگذرد؟

رهیافتی بدیهی برای این مسأله رسم نمودار تمام مسیرهـای ممکن و سپس شمارش آنهاست. اما ۶۴۳۵ مسیر مختلف وجود دارند، و بنابراین رهیافت مستقیم تاحدودی غیرعملی است. اگر به‌طریقی صحیح به‌مسأله نگاه کنیم مسأله خیلی مشکل نیست. راه حل درفصل ۳ داده شده‌است.

اکنون به‌مسألهٔ دیگری می‌پردازیم که راه حل آن موکول به تحلیلی نظری است.

مسألهٔ ۴۰۱ فرماندار یك ایالت در جشن صدمین سال تأسیس یك چاپخانه معروف شرکت مـی‌کند. ناشر بـه منظور ابراز قدردانی، به فرماندار پیشنهاد می‌کند کـه



شکل ۲۰۱

بـه عنوان هدیه، ده کتاب از بیست کتابی را کـه جزو پرفروشترین کتابهای این چاپخانه است، انتخاب کند. فرماندارمجاز است که ده کتاب مختلف از بیست کتاب، یا ده کتاب مشابه (ده نسخه ازیك کتاب)، یا هر ترکیب دلخواه دیگری را که ترجیح می‌دهد انتخاب کند مشروط به اینکه تعداد کتابهـا از ده جلد تجاوز نکند، (الف) فرماندار به‌چندطریق می‌تواند انتخابش‌را انجام دهد؟ (ب) اگر فرماندار بخواهد ده جلد کتاب متمایز انتخاب کند، به چند طریق می‌تواند این انتخاب را انجام دهد؟

سؤال (ب) از سؤال (الف) آسانتر است، زیرا سؤال (ب) مطلب سرراست انتخاب ده شیء از بیست شیء است. تعداد انتخابهای مختلف ده‌شیء از بیست‌شیء را با نماد $C(20, 10)$ نشان می‌دهند و همان طوری کـه در فصل بعد خواهیم دید، به‌راحتی محاسبه می‌شود. حل قسمت (الف) مسأله درصفحهٔ ۶۵ داده شده‌است.

مسألهٔ ۵۰۱ به‌چند طریق ممکن است یك اسکناس یك دلاری را خرد کـرد؟(فرض کنید سکه‌ها به‌صورت ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی باشند، که به سکه‌های یك سنتی، نیکلی، ده سنتی، ربع ونیم دلاری نیز معروف‌اند.)

این مسأله را، نظیربسیاری ازمسائل دیگر این کتاب می‌توان صرفاً باتعیین تمام حالتها و شمارش آنها حل کرد. راهی اصولیتر برای حل آن در فصل ۷ ارائه‌شده‌است.

این فصل را با بیان اصلی اساسی دربارهٔ شمارش به پایان می‌رسانیم، این اصل ازسؤال ساده‌ای، مثل تعیین تعداد صفحه‌ها ازصفحهٔ ۱۴ تا ۵۹، حاصل می‌شود، پاسخ برابر ۴۶ است که یك واحد از تفاضل دوعدد صحیح* ۱۴ و ۵۹ بیشتر است.

* اعداد صحیح کـه بعضی اوقات «اعداد درست» نامیده می‌شوند، بر سه نوع‌اند: اعداد صحیح مثبت یا اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ...، کـه، (...)، به‌جای کلمهٔ «وغیره» به‌کار می‌رود؛ اعداد صحیح منفی ۱—، ۲—، ۳—، و ...؛ و ۰ کـه نه منفی و نه مثبت است. اعداد صحیح نامنفی عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... .

به‌طور کلی تعداد اعداد صحیح از k تا n، برابر $n-k+1$ است که در آن فرض شده است که n بزرگتر از k است، یعنی $n>k$.

مجموعه مسائل ۱

۱. از عدد ۲۵ تا ۷۹ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۲. پنجاه‌وسومین عدد صحیح دنبالهٔ ... ,۸۸ ,۸۷ ,۸۶ کدام است؟

۳. بزرگترین عدد ۱۲۳ عدد متوالی، عدد ۳۰۷ است. کوچکترین عدد این دنباله چند است؟

۴. کوچکترین عدد r عدد متوالی n است، بزرگترین عدد این دنباله چند است؟

۵. بزرگترین عدد r عدد متوالی k است، کوچکترین عدد این دنباله چند است؟

۶. در دنبالهٔ $n, n+۱, n+۲, \ldots, n+h$ چندعدد صحیح وجود دارد؟

۷. چند عدد صحیح x در نابرابریهای $۱۲<\sqrt{x}<۱۵$، یعنی $\sqrt{x}$ بزرگتر از ۱۲ و کوچکتر از ۱۵، صدق می‌کنند؟

۸. در دنباله‌های زیر چندعدد صحیح وجود دارند؟

الف) ۶۰, ۷۰, ۸۰, ..., ۵۴۰؛ ب) ۱۵, ۱۸, ۲۱, ..., ۱۴۴؛

پ) ۱۷, ۲۳, ۲۹, ۳۵, ..., ۲۲۱.

۹. بین ۱ تا ۲۰۰۰ چند عدد صحیح وجود دارد که (الف) مضرب ۱۱ باشند؛ (ب) مضرب ۱۱ بوده ولی مضرب ۳ نباشند؛ (پ) مضرب ۶ بوده ولی مضرب ۴ نباشند؟

۱۰. کمترین تعداد سکه‌های لازم برای پرداخت هزینه‌ای کمتر از یك دلار به‌صورت پول خرد چقدر است؟ (سکه‌ها به ترتیب ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ و ۵۰ سنتی نامگذاری شده‌اند.)

۱۱. شخصی ۴۷ سنت طلبکار است. فرض کنیم پول نقد موجود صندوقدار شامل مقدار زیادی سکه‌های ۱، ۵، ۱۰ و ۲۵ سنتی است. صندوقدار به‌چندطریق مختلف می‌تواند بدهی شخص را بپردازد؟

۱۲. شخصی در یك جعبه تعداد شش جفت دکمه‌سردست دارد. هیچ دوجفتی شبیه به‌هم نیستند. این شخص برای اینکه مطمئناً یك جفت دکمهٔ جور به‌دست آورد، چندتا از

این دکمه سردستها را باید باهم (چشم‌بسته) بیرون بکشد؟

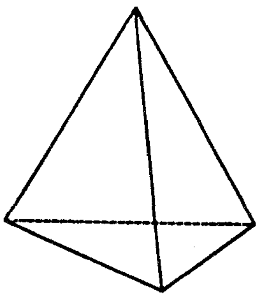
۰۱۳ شخصی دریك‌کشو دوازده جوراب آبی و دوازده‌جوراب مشکی‌که به صورت تصادفی قاطی شده‌اند دارد. او باید چندجوراب را باهم (چشم‌بسته) بیرون بیاورد تا مطمئن باشدکه یك جفت جوراب جور در بین آنهاست؟ (هردو جورابی‌که آبی و هردو جورابی‌که مشکی باشند یك جفت جوراب جور را تشکیل می‌دهند.)

۰۱۴ اندازهٔ یك زاویهٔ چند ضلعی منتظم برحسب درجه عددی صحیح است. چنین چند ضلعیی چندضلع می‌تواند داشته‌باشد؟

۰۱۵ شخصی تعداد زیادی چهار وجهیهای منتظم چوبی دارد که تمام آنها یك اندازه‌اند. (چهاروجهی منتظم عبارت ازجسم صلبی است‌که به‌چهار مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان محدود شده‌است؛ شکل ۳.۱ را ببینید.) اگر او هر وجه مثلث‌شکل را با یکی از چهار رنگ، رنگ‌آمیزی‌کند، واگر تمام ترکیبهای رنگهای مختلف مجاز باشند، چند چهاروجهی رنگ شدهٔ مختلف می‌تواند تهیه نماید؟ (دو بلوك را مختلف‌گویند، اگر نتوان آنها را در وضعیتهای یکسان باوجوه متناظری‌که رنگهای یکسان دارند قرار داد.)

۰۱۶ چند مسیرمختلف، یك رأس‌مکعب را به‌رأس مقابل‌آن وصل‌می‌کند به‌طوری‌که هر مسیر ممکن در روی سه یال از دوازده یال مکعب قرار داشته‌باشد؟

۰۱۷ درکنفرانسهای رسمی دیوان عالی ایالات متحده، هریك از نه‌قاضی درشروع جلسه بابقیه دست می‌دهد. درچنین جلسه‌ای چندبار عمل دست‌دادن انجام می‌گیرد؟



شکل ۳.۱

۲

جایگشتها و ترکیبها

این فصل و فصل بعدی بعضی از ایده‌های اساسی موضوع این کتاب را معرفی می کنند. ممکن است خواننده از روی مطالعات قبلی خود با تعدادی از این مفاهیم آشنا باشد. اما درچندین‌مورد، در فصلهای ۲ و ۳، موضوعها با تفصیلی بیشتر از آنچه معمولاً درکتابهای مقدماتی جبر وجود دارند، مورد بحث قرار می گیرند. اگر خواننده تمام این ایده‌های اساسی را کاملاً بفهمد در فصلهای بعدی برای او راه هموار خواهد بود. اگر او قادر باشد به سؤالهای مجموعه‌های مسائل پاسخ دهد، می تواند اطمینان حاصل کند که موضوع را درك کرده‌است. دراین دو فصل بیشتر نمادهای پایه‌ای ترکیبیاتی بیان می‌شوند. از میان نمادهای مختلفی که در تمام نوشته‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، چند صورت استاندارد را شرح می‌دهیم، اما بعداً تنها بایکی ازاین صورتها کار می کنیم.

برای معرفی موضوع، مسألهٔ سادهٔ زیر را درنظرمی گیریم. یك فروشگاه‌لباس پنج نوع کمربند برای‌آقایان وپسران دارد. واز هرنوع کمربند هفت‌اندازه موجود است. چند نوع مختلف کمربند دراین فروشگاه یافت می‌شود؟

از ضرب ۵ در ۷ می‌توان جواب ۳۵ را به دست آورد، زیرا ۷ کمربند از نوع اول و ۷ کمربند از نوع دوم و...، ۷ کمربند از نوع پنجم وجود دارند، و بنابراین داریم:

$$۷+۷+۷+۷+۷=۵\times۷=۳۵.$$

این مسألهٔ ساده، یك اصل پایه‌ای را توضیح می‌دهد.

۱.۲ اصل ضرب

اگر گردایه‌ای از اشیاء را بتوان به m دستهٔ مختلف تفکیك‌کرد و اگر هریك ازاین دسته‌ها را بتوان به‌صورت k زیردستهٔ مختلف تفکیك نمود، آن‌گاه کلاً mk دستهٔ مختلف وجود دارد.

این اصل را می‌توان، علاوه‌بریك رده‌بندی برحسب دو ویژگی مانند نوع و اندازهٔ کمربندها، به رده‌بندیهایی برحسب سه ویژگی، چهار ویژگی و بیشتر تعمیم داد. به‌عنوان مثال، سؤال زیر را در نظر بگیرید. داروخانه‌ای ازهفت تولیدکنندهٔ مختلف، خمیردندان تهیه می کند. هـر تولیدکننده دو نوع خمیردندان فلوردار و معمولی را در سه اندازهٔ مختلف می‌سازد. داروخانه چند نوع مختلف خمیردندان دارد؟ چـون ۷ تولیدکننده، در ۳ اندازه، ۲ نوع خمیردندان فلوردار و معمولی می‌سازند مبتنی براصل ضرب، پاسخ برابر با $۲\times۳\times۷$ یا ۴۲ است.

اصل ضرب را علاوه بر مورد مسائل مربوط به‌اشیاء رده‌بندی شده، در مورد بسیاری از مسائل دیگر نیز می‌توان به کار برد. به عنوان مثال، شخصی را درنظر بگیریدکه تصمیم دارد با هواپیما به اروپا رفته وبا کشتی برگردد. اگر هشت خط مختلف هوایی و نه شرکت مختلف کشتیرانی موجود باشند، آن‌گاه او به ۹×۸ یا ۷۲ راه مختلف می‌تواند سفر خودرا انجام دهد.

مثال سادهٔ دیگری نیز می‌آوریم. دریك پیك‌نیك بزرگ، ناهارشامل‌ساندویچ (باچهارنوع انتخاب)، نوشیدنی (باانتخاب ازقهوه، شیر، چای) ویك ظرف بستنی (باانتخاب از سه نوع طعم) است. هرشخص به چند راه مختلف می‌تواند ناهـار خودرا انتخاب کند؟ بنابراصل ضرب می بینیم‌که پاسخ برابر با $۳\times۳\times۴$ یا ۳۶ راه است.

به دلیل کاربردهای مختلف اصل ضرب، غالباً این اصل برحسب پیشامدهـا فرمولبندی می‌شود: اگر پیشامدی بتواند به m طریق رخ دهد و پیشامد دوم بتواند

مستقل از اولی به k طریق رخ دهـد، آن گاه این دو پیشامد می‌توانند به $m.k$ طریق مختلف رخ دهند.

واژهٔ «مستقل» دراینجا نقش اساسی دارد، زیرا برای وضعیتهایی کـه پیشامد دوم به‌پیشامد اول وابسته بوده و یا به‌وسیلهٔ آن محدود می‌شود، اصل ضرب الزاماً معتبر نیست. مثلاً دختری با هفت‌دامن و پنج بلوز نمی‌تواند ۳۵ بلوز و دامن جورداشته باشد. زیرا ممکن است بعضی از رنگها یا طرحها ازنظر زیبایی ناهماهنگ باشند، به‌عنوان مثال یك دامن قرمز بخصوص بایك بلوز نارنجی بخصوص به‌هم نمی‌آیند. اما مثال زیر، نوع استانداردوابستگی پیشامدها را نشان می‌دهدکـه درآن باز می‌توان از اصل ضرب استفاده‌کرد.

مسألهٔ ۱۰۲ چهار حرف A، B، C و D را به‌چند ترتیب مختلف می‌تـوان طوری نوشت که درهیچ آرایشی هیچکدام از حروف تکرار نشود؟

به‌این‌سؤال می‌توان صرفاً با نوشتن تمام ترتیبهای ممکن $ABCD$، $ACBD$، $ABDC$ وغیره پاسخ داد. اما ساده‌تر است ودرمسائل پیچیده‌تر لازم است‌که برای حل مسأله سیستمی ابداع‌کنیم. درهر آرایش، حرف اول را درنظر بگیرید. برای این حرف دراین موضع، چهار انتخاب وجود دارد. به‌ازای هرانتخاب حرف‌اول، سه انتخاب ممکن برای حرف دوم موجود است. اگـر مثلاً، حرف اول B باشد آن گاه حرف دوم یکی از حرفهای A، C یا D است. به‌طورمشابه بعد ازآنکه از میان چهارحرف دوحرف انتخاب شد، سومین حرف را می‌توان به‌دو راه انتخاب کرد، و وقتی می‌خواهیم حـرف چهارم را به‌دست آوریم تنهـا یك راه انتخاب وجود دارد؛ یعنی تنها یك حرف موجود است‌کـه می‌تواند در محل چهارم قرار بگیرد. بنابراین، اصل ضرب پاسخ

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

را به‌دست می‌دهد. خواننده باید بافهرست‌کردن تمام ۲۴حالت، درستی جواب را تحقیق کند. آرایشهایی راکه باحرف A شروع می‌شوند درزیر ارائه می‌دهیم:

$$ABCD,\ ABDC,\ ACBD,\ ACDB,\ ADBC,\ ADCB.$$

مسألهٔ ۲۰۲ در یـك استان (فـرضی) شمارهٔ پـلاك اتومبیلها به جـای اعـداد با حروف مشخص شده‌اند. برای این کار دقیقاً از سه حرف استفاده شده است، مثلاً BQJ، CCT و DWD. اگـر تعداد حـروف الفبا ۲۶ باشد چند پلاك مختلف

می‌توان ساخت؟

همان‌طوری که مثالها نشان می‌دهند، تکرار حرفها در شمارهٔ اتومبیل مجاز است. باتوجه به‌اینکه برای انتخاب هریك ازسه حرف، ۲۶ انتخاب وجود دارد، جواب برابر است با:

$$۲۶ \times ۲۶ \times ۲۶ = ۱۷۵۷۶.$$

مسألهٔ ۳.۲ اگر در مسألهٔ ۲.۲ در شماره‌گذاری پلاك اتومبیل تکرار حروف مجاز نباشد، پاسخ چه خواهد بود؟

می‌توان استدلالی را به کار برد که با آنچه در حل مسألهٔ ۱.۲ به‌کار رفت مشابه است. برای اولین حرف ۲۶ انتخاب، ولی برای حرف دوم ۲۵ انتخاب و برای حرف سوم تنها ۲۴ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰.$$

مجموعهٔ مسائل ۲

۱. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۲.۲ باحرف Q شروع می‌شوند؟

۲. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۳.۲ با حرف Q شروع می‌شوند؟ چندتا به حرف Q ختم می‌شوند؟

۳. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۲.۲ به‌یکی از حرفهای صدادار (A، E، I، O و U) ختم می‌شوند؟

۴. چندتا ازآرایشهای مسألهٔ ۳.۲ به‌یك حرف صدادار ختم می‌شوند؟

۵. اتاقی دارای شش‌در است. به‌چند طریق می‌توان از یك در وارد و ازدر دیگر خارج شد؟

۶. یك انبارلاستیك ماشین ازنظر اندازه دارای هشت نوع لاستیك است. هرنوع یا با تویی ویا بدون تویی است، وهرلاستیك دارای زه نایلونی و یا زهی از بافتهای سلولزی است وجدار هرلاستیك یا دورسفید ویا کاملاً سیاه است. چندنوع مختلف لاستیك دراین انبار وجود دارد؟

۷. یك کمپانی سفارش کالا، ۲۳ نوع دمپایی زنانه سفارش می‌دهد. اگر دمپاییها

از نظر طولی در ۱۲ اندازه و از نظر عرضی در سه اندازه و از نظر رنگ در شش رنگ باشند، چند نوع مختلف دمپایی زنانه ممکن است در انبار این کمپانی موجود باشد؟

۰۸ بین اعداد ۱۰۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰۰ چند عدد صحیح (درست) وجود دارند که ارقامی بجز ۶، ۷ یا ۸ ندارند؟ چند عدد صحیح موجودند که ارقامی بجز ۶، ۷، ۸ یا ۰ ندارند؟

۲.۲ فاکتوریلها

در بسیاری از وضعیتها برای حاصلضربهایی نظیر

$$۴\times۳\times۲\times۱,\ ۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱,\ ۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱,$$

که هر کدام از آنها حاصلضرب دنباله‌ای از اعداد صحیح متوالی بوده و تمام آنها به یك ختم می‌شوند، داشتن نماد ساده‌ای مفید است. چنین حاصلضربهایی فاکتوریل نامیده می‌شوند. نماد ریاضی استانداردی که معمولاً به‌کار می‌رود یك علامت تعجب است. بنابراین

$$۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴,$$

$$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰,$$

$$۷!=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵۰۴۰.$$

!۴ را «فاکتوریل چهار»، !۶ را «فاکتوریل شش»، !۷ را «فاکتوریل هفت» می‌خوانیم. به طور کلی برای هر عدد صحیح مثبت n، $n!$ را (که فاکتوریل n خوانده می‌شود) به‌صورت

$$n!=n(n-۱)\ (n-۲)\ (n-۳)\ \cdots\ ۱,$$

تعریف می‌کنیم. این، حاصلضرب تمام اعداد صحیح از n تا ۱ است. توجه کنید که !۱ برابر ۱ است.

مجموعه مسائل ۳

۰۱ !۳، !۵، !۸ را به صورت حاصلضرب درآورده، سپس مقدار آنها را محاسبه

کنید.*

۲. هریك ازمقادیر زیر را به دست آورید:

$$\frac{۱۲!}{۱۰!};\ ۲!;\ ۴!+۳!;\ (۴+۳)!\ .$$

۳. مقدار $(n+۱)!$ را درحالت $n=۴$ محاسبه کنید.

۴. مقدار $n!+۱$ را درحالت $n=۴$ محاسبه کنید.

۵. مقدار $(n-۱)!$ را درحالت $n=۴$ حساب کنید.

۶. مقدار $(n-r)!$ را درحالت $n=۱۰$ و $r=۸$ محاسبه کنید.

۷. مقدار $(n-r)!$ را درحالت $n=۱۲$ و $r=۶$ حساب کنید.

۸. مقدار $\frac{n!}{(n-r)!}$ را درحالت $n=۱۲$ و $r=۴$ و همچنین درحالت $n=۱۰$ و $r=۶$ محاسبه کنید.

۹. مقدار $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ را درحالت $n=۱۰$ و $r=۶$ محاسبه کنید.

۱۰. کدام یك از روابط زیر صحیح وکدام یك غلط است؟

الف) $۸!=۸\times۷!$ ب) $\frac{۱۰!}{۹!}=۹$ پ) $۴!+۴!=۸!$

ت) $۲!-۱!=۱!$ ث) $n!=n\times(n-۱)!$ به ازای $n>۱$

ج) $n!=(n^۲-n)\times(n-۲)!$ به ازای $n>۲$.

۳.۲ جایگشتها

جایگشتها آرایشهای مرتب اشیاء هستند. به‌عنوان مثالهایی برای جایگشتها، دوباره مسائل ۱.۲ و ۳.۲ از بخش ۱.۲ را درنظر بگیرید.

---

* اگرچه از خواننده خواسته می‌شودکه اعدادی مانند !۵ و !۸ را محاسبه نماید، ولی نباید از او انتظار داشت که (مثلاً) !۲۰ را حساب کند. اگر چنین عددی پاسخ سؤالی در این کتاب باشد، باید آن را دقیقاً به همان شکل فاکتوریل باقی گذاشت. تکنیکهای شمارشی بسیار اهمیت دارند ولی دراین کتاب روی آنها تأکیدی نمی‌شود.

مسألهٔ ۲.۱ چهار حرف A، B، C، D را به چند ترتیب مختلف می‌توان طوری نوشت که در هیچ آرایشی هیچ حرفی تکرار نشود؟

مسألهٔ بالا نظیر این است که بپرسیم چندجایگشت برای چهارحرف، هردفعه چهارحرف، وجود دارد. تعداد چنین جایگشتهایی‌را بانماد $P(۴,\ ۴)$ نشان می‌دهند.

مسألهٔ ۳.۲ اگر درهر شمارهٔ اتومبیل سه‌حرف وجود داشته باشد و تکرار حروف درشماره‌گذاری مجاز نباشد، چند شمارهٔ متفاوت اتومبیل وجود دارد؟

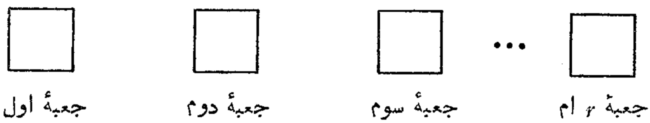
این نظیر آن است که بپرسیم چند جایگشت برای بیست‌وشش حرف، هردفعه سه حرف، وجود دارد؟ تعداد چنین جایگشتهایی با $P(۲۶,\ ۳)$ نشان داده می‌شود. این مسائل را در بخش ۲.۱ حل کرده‌ایم و حالا می‌توان این پاسخها را با نماد جدید به‌صورت

$$P(۴,۴) = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴ \text{ و } P(۲۶,۳) = ۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

نوشت.

هریك از این $P(۲۶,۳) = ۱۵۶۰۰$ جایگشت سه به سه از ۲۶ شیء را یك جایگشت سه‌تایی گویند. به‌طورکلی یك جایگشت r تایی، آرایشی مرتب از r شیء است، و $P(n,\ r)$ تعداد جایگشتهای r تایی یك مجموعه از n شیء متمایز را نشان می‌دهد. این نظیر آن است که بگوییم $P(n,\ r)$ تعداد جایگشتهای r به r از n شیء است. البته از پیش فرض می‌شود که r از n تجاوز نکند یعنی $r \leqslant n$. توجه کنید که n شیء باید متمایز باشند، یعنی باید بتوانیم آنهارا از یکدیگر تمیز دهیم.

به منظور به دست آوردن فرمولی برای $P(n,\ r)$، r جعبهٔ متمایز در نظر می‌گیریم که n شیء را بتوان در داخل آنها قرار داد:



بنابراین $P(n,\ r)$ را ممکن است تعداد راههایی درنظر گرفت که می‌توان n شیء متمایز را در داخل r جعبه قرار داد، به‌شرطی که درهرجعبه یك شیء قرارگیرد.

ابتدا حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که تعداد اشیاء به‌اندازهٔ تعداد جعبه‌ها باشد. برای اولین جعبه می‌توان هریك از n شیء را انتخاب کرد. بعداز انجام این کار، $n - ۱$ شیء باقی می‌مانند که می‌توان یکی از آنها را برای جعبهٔ دوم انتخاب

کرد. به‌همین‌ترتیب $n-۲$ شیء باقی می‌مانند که می‌توان یکی‌از آنها را برای جعبهٔ سوم انتخاب کرد. با ادامهٔ این روش می‌بینیم کــه وقتی به جعبهٔ آخر می‌رسیم فقط یك شیء باقی می‌ماند و بنابراین تنهــا یك انتخاب وجود دارد. بنا بر اصل ضرب داریم

$$P(n, n)=n(n-۱)\,(n-۲)\cdots۱ \quad \text{یا} \quad P(n, n)=n!\,.$$

مثلاً

$$P(۷, ۷)=۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷!,$$

$$P(۲۸, ۲۸)=۲۸\times۲۷\times۲۶\times\cdots\times۳\times۲\times۱=۲۸!.$$

می‌توان همــان استدلالی را کــه برای محاسبهٔ $P(n, n)$ به کار رفت برای محاسبهٔ $P(n, r)$ به‌کار برد. به‌عنوان نمونه توجه‌کنید‌که

$$P(۲۸, ۵)=۲۸\times۲۷\times۲۶\times۲۵\times۲۴.$$

مشاهده‌کنیدکــه دراین حاصلضرب ۵ عدد صحیح متوالی، تفاضل بین‌بزرگترین و کوچکترین عدد، یعنی تفاضل بین ۲۴ و ۲۸، برابر ۴ است. به‌طور کلی $P(n, r)$ حاصلضرب r عدد صحیح n، $n-۱$، $n-۲$، ...، $n-r+۱$ است:

$$P(n, r)=n(n-۱)\,(n-۲)\cdots(n-r+۱).$$

برای آنکــه ببینیم $P(n, r)$، حاصلضرب r عــدد صحیح متوالی است، یادآوری می‌کنیم‌که تعداد اعداد صحیح‌از k تا n و خود n، برابر $n-k+۱$ است (صفحهٔ ۶ را ببینید). بنابراین تعداد اعداد صحیح از $n-r+۱$ تا n و خود n، برابر

$$n-(n-r+۱)+۱=r$$

است. توجه‌کنید‌که اگر $r=n$، فرمول $P(n, r)$ با فرمول قبلی

$$P(n, n)=n(n-۱)\,(n-۲)\cdots۱$$

هماهنگی دارد.

اکنون به‌تهیهٔ فرمول دیگری برای $P(n, r)$ می‌پردازیم. به‌عنوان مثال‌توجه کنید‌که

$$P(۱۰, ۴)=۱۰\times۹\times۸\times۷,$$

که بااستفاده از کسری شامل فاکتوریلها می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$P(۱۰, ۴) = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷$$
$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱۰!}{۶!}.$$

همین شیوه درمورد حالت کلی $P(n, r)$ به‌کار می‌رود:

$$P(n, r) = n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)$$
$$= \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)(n-r)\cdots ۱}{(n-r)(n-r-۱)\cdots ۱},$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۱.۲)$$

مثال: بین اعداد صحیح ۱۰۰ تا ۹۹۹ وخود این عدد چندعدد صحیح وجود دارند که رقمهای آنها اعداد فرد متمایزند.

حل : رقمهای فرد عبارت‌اند از ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و رقمهای زوج عبارت‌اند از ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ . عدد صحیحی مانند ۷۲۳ به حساب نمی‌آید زیرا شامل ۲ است؛ وعدد صحیحی مانند ۳۷۳ نیز به‌حساب نمی‌آید زیرا این عدد شامل رقمهای متمایز نیست. این سؤال به سؤال دربارهٔ تعداد جایگشتهای ۵ رقم متمایز ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، هربار سه رقم، برمی‌گردد. پاسخ برابر است با

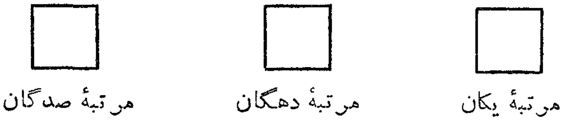
$$P(۵,۳) = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰.$$

فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ را نمی‌توان در حل تمام مسائل مربوط به جایگشتها به کار برد، زیرا تمام آرایشهای مرتب n شیء متمایز، هربار r تا، پاسخ چنین مسائلی نیستند. همان طوری که مثالهای زیر نشان می‌دهند، گاهی یك مسأله با استفادهٔ مستقیم از اصل ضرب قابل حل است.

مثال: بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ چندعدد صحیح با رقمهای متمایز وجود دارند؟

حل : جواب، صرفاً $P(۱۰,۳)$، یعنی تعداد جایگشتهای سه به سه تمام ۱۰ رقم نیست، زیرا مثلاً ۰۸۶ عددی بین ۱۰۰ تا ۹۹۹ نیست. رقم ۰ می‌تواند درمرتبهٔ

یکان (مانند ۸۶۰) یا درمرتبهٔ دهگان (مانند ۸۰۶) قرارگیرد ولی درمرتبهٔ صدگان قرار نمی‌گیرد. سه جعبه درنظر بگیرید که هریك با رقمی از رقمهای اعداد صحیح موردنظر پر شود:



برای مرتبهٔ صدگان نه‌انتخاب وجود دارد زیرا از صفر نمی‌توان استفاده‌کرد. سپس برای مرتبهٔ دهگان نیز نه انتخاب، یعنی صفر و هشت رقم غیرصفر که قبلاً از آنها استفاده نشده است، وجود دارد. به همین‌ترتیب برای انتخاب رقم مرتبهٔ یکان هشت انتخاب موجود است. بنابراین پاسخ برابر با ۸ × ۹ × ۹ یا ۶۴۸ است.

مثال: درمیان ۶۴۸ عدد صحیح مسألهٔ قبل، چند عدد فرد وجود دارند.

حل : عددی فرد است که رقم یکان آن فرد باشد، یعنی یکی از رقمهای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ در مرتبهٔ یکان آن قرارگیرد. بنابراین بهتر است که استدلال را با این سؤال آغاز کنیم که چند انتخاب برای رقمی که در مرتبهٔ یکان قرار می‌گیرد وجود دارد؛ پاسخ، پنج است. سپس، به مرتبهٔ صدگان برمی‌گردیم؛ هشت رقم، یعنی تمام رقمهای مخالف صفر بجز رقمی که قبلاً برای مرتبهٔ یکان انتخاب شده است وجود دارند که می‌توان از میان آنها رقم صدگان را انتخاب کرد. سرانجام برای تعیین رقم‌مرتبهٔ‌دهگان نیز هشت انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر با ۸ × ۸ × ۵ یا ۳۲۰ است.

بعضی‌از مسائل‌را می‌توان بادرنظر گرفتن حالتهای جدا ازهم سریعتر حل کرد.

مثال: چند عدد از اولین ۱۰۰۰ عدد صحیح هستند که رقمهای آنها ازهم متمایزند؟

حل : عدد صحیح ۱۰۰۰ راکه رقمهای آن متمایز نیستند کنار گذاشته، بقیه را به‌سه‌دستهٔ مختلف تقسیم می‌کنیم:

اعداد صحیحی که یك رقم دارند: ۱, ۲, ۳, ..., ۹

اعداد صحیحی که دو رقم دارند: ۱۰, ۱۱, ۱۲, ..., ۹۹

اعداد صحیحی که سه رقم دارند: ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۲, ..., ۹۹۹

همان طور که درمثال قبل نشان داده شد تعداد اعداد صحیح سه رقمی، با رقمهای متمایز، برابر ۶۴۸ است. استدلال‌مشابهی نشان‌می‌دهد که ۸۱ عدد صحیح دو رقمی و البته ۹ عدد یك رقمی وجود دارند که دارای رقمهای متمایزند. از اینرو پاسخ برابر است با:

$$۶۴۸+۸۱+۹=۷۳۸.$$

ایده‌ای که در اینجا از آن استفاده شده است اصل جمع نامیده می‌شود: اگر اشیاء به‌حالتهای جدا ازهم‌شمارش‌شوند، تعدادکل، برابر مجموع تعداد درحالتهای مختلف است.

۴.۲ فاکتوریل صفر

اگر از فرمول (۱.۲) برای $P(n, r)$ درحالتی مانند

$$P(۷, ۷)=\frac{۷!}{(۷-۷)!}=\frac{۷!}{۰!}$$

استفاده شود، پدیدهٔ جالبی رخ می‌دهد. نماد !۰ راکه تاکنون تعریف نشده‌است «فاکتوریل صفر» می‌گویند. در ریاضیات می‌توانیم مفهوم نمادها را به هرراهی که بخواهیم تعریف‌کنیم، البته به‌شرط آنکه دراین تعریف سازگاری وجود داشته‌باشد. درحالت فعلی چون قبلاً تعیین‌کردیم که مقدار $P(۷, ۷)=۷!$، سازگاری ایجاب می‌کندکه داشته‌باشیم

$$P(۷, ۷)=۷!=\frac{۷!}{۰!}.$$

بنابراین باید فاکتوریل صفر را برابر ۱ تعریف‌کرد:

$$۰!=۱.$$

ممکن است این تعریف عجیب به‌نظرآید، ولی، تعریف مفیدی است. این تعریف نه‌تنها به $P(n, r)$، بلکه به نمادگذاری ترکیبیاتی دیگری نیز مربوط می‌شود.

مجموعه مسائل ۴

۱. $P(۷, ۳)$ و $P(۸, ۴)$ و $P(۲۰, ۲)$ را محاسبه کنید.

۲. تحقیق‌کنیدکه $P(۱۵, ۲)=P(۷, ۳)$ و $P(۶, ۳)=P(۵, ۵)$.

۰۳ ثابت کنید به ازای تمام اعداد صحیح مثبت m و n،

$$P(n, ۱)+P(m, ۱)=P(n+m, ۱).$$

۰۴ ثابت کنید به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت n، $P(n, n)=P(n, n-۱)$.

۰۵ از سه حرف مختلف یونانی، چند اسم برای سازمان دانشجویی می‌توان ساخت؟ (تعداد حروف الفبای یونانی بیست‌وچهارتاست.)

۰۶ اگر تکرار حروف در مسألهٔ قبل مجاز باشد، پاسخ چه‌خواهد بود؟ اگر تکرار حروف مجاز باشد و اسامی دوحرفی نیز به‌حساب بیایند، پاسخ چه‌خواهد شد؟

۰۷ از اعداد ۱۰۰۰ تا ۹۹۹۹ چند عدد صحیح هستند که رقمهایشان متمایزند؟ چندتا ازاین اعداد فردند؟

۰۸ با رقمهای ۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ چند عدد چهار رقمی با رقمهای متمایز می‌توان ساخت؟ چندتا ازاین اعداد فردند؟

۰۹ با رقمهای ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ چندعدد چهاررقمی بارقمهای متمایزمی‌توان ساخت؟ چندتا ازاین اعداد زوج‌اند؟

۱۰. چندعدد صحیح بزرگترازه ۵۳۰۰۰ وجود دارندکه دارای دوویژگی زیرباشند:

الف) رقمهای هرعدد صحیح ازهم متمایز باشند

ب) رقمهای ۰ و ۹ درعدد ظاهر نشوند.

۱۱. در مسألهٔ قبل اگر شرط (ب) با شرط «رقمهای ۸ و ۹ در عدد ظاهر نشوند» عوض شود، پاسخ چه‌خواهد بود؟

۵۰۲ ترکیبها

درحالی‌که یك جایگشت، آرایش مرتب اشیاء است، یك ترکیب، انتخابی بدون درنظرگرفتن ترتیب است. از نماد $C(n, r)$ برای نمایش تعداد ترکیبهای یك نوع خاص، به موازات نماد $P(n, r)$ برای نمایش تعداد جایگشتها، استفاده می‌شود. بنابراین $C(n, r)$، تعداد ترکیبهای، هر بار r تا، را که می‌توان از میان کل n شیء متمایز انتخاب کرد، نشان می‌دهد.

مثلاً، $C(۵, ۳)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید پنج شیء، A، B، C، D و E باشند. بنابراین می‌توان دیدکه $C(۵, ۳)=۱۰$، زیرا ده ترکیب از اشیاء، که

هر بار سه‌تا از آنها انتخاب شود، وجود دارند:

$$A, B, C \quad A, B, D \quad A, B, E \quad A, C, D \quad A, C, E$$
$$A, D, E \quad B, C, D \quad B, C, E \quad B, D, E \quad C, D, E \qquad (۲.۲)$$

توجه کنید که هر کدام از این ده سه‌تایی صرفاً گردایه‌ای است که درآن ترتیب اهمیت ندارد. مثلاً سه‌تایی C, D, E را می‌توان به‌صورت D, E, C یا E, C, D و یا هر ترتیب دیگری نوشت، که همگی یک سه‌تایی به‌حساب می‌آیند.

n شیء متمایز داده شده‌اند. $C(n, r)$ تعداد راههای انتخاب r شیء از گردایهٔ کلی است. البته فرض می‌شود که r از n تجاوز نمی‌کند، یعنی $r \leqslant n$. مفهوم $C(n, r)$ را می‌توان برحسب مجموعه‌ای از n عنصر نیز بیان کرد. $C(n, r)$ تعداد زیر مجموعه‌هایی است که شامل r عنصر هستند. مثلاً فهرست (۲.۲) در بالا، تمام زیرمجموعه‌های سه عنصری منتخب از مجموعهٔ A, B, C, D, E را به‌دست می‌دهد.

قبل از به دست آوردن یک فرمول کلی برای $C(n, r)$، به منظور تشریح استدلال، مقدار $C(۲۶, ۳)$ را محاسبه می کنیم. می‌توان $C(۲۶, ۳)$ را به عنوان تعداد راههای انتخاب سه حرف از ۲۶ حرف الفبا درنظر گرفت. مثلاً چنین انتخابی، سه‌تایی D, Q, X است که بدون درنظر گرفتن ترتیب انتخاب می‌شود. این ترکیب D,Q,X، با شش جایگشت متمایز

$$DQX \quad DXQ \quad QDX \quad QXD \quad XDQ \quad XQD$$

متناظر است.

در واقع هریک از $C(۲۶, ۳)$ ترکیب، با $P(۳, ۳)$ یا $۶ = !۳$ جایگشت متناظر است. از اینرو به ازای هر ترکیب، شش جایگشت وجود دارد:

$$P(۲۶, ۳) = ۶C(۲۶, ۳).$$

اما قبلاً مقدار

$$P(۲۶, ۳) = ۲۶ \times ۲۵ \times ۲۴ = ۱۵۶۰۰$$

را در مسألهٔ ۳.۲ محاسبه کردیم. بنابراین داریم:

$$۶C(۲۶, ۳) = ۱۵۶۰۰ \text{ به طوری که } C(۲۶, ۳) = ۲۶۰۰.$$

اکنون برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بین $C(n, r)$ و $P(n, r)$، این استدلال

را تعمیم داده، سپس مقدار $C(n, r)$ را، با استفاده از فرمول(۱۰۲) برای $P(n, r)$، محاسبه می‌کنیم. با n شیء متمایز، $C(n, r)$ تعداد راههای انتخاب r شیء از n شیء بدون درنظر گرفتن ترتیب است. هر یك از این انتخابها صرفاً گردایه‌ای از r شیء است. چنین گردایه‌ای را به $r!$ راه مختلف می‌توان مرتب کرد. چون هر یك از چنین ترکیبهایی متناظر با $r!$ جایگشت است، تعداد جایگشتها $r!$ برابر تعداد ترکیبهاست:

$$P(n, r) = r!C(n, r) \text{ یا } C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}.$$

اما بنا برفرمول(۱۰۲) می‌دانیم که $P(n, r)$ برابر $n!/(n-r)!$ است، و لذا فرمولی اساسی برای $C(n, r)$ به دست می‌آوریم،

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{۳۰۲}$$

شاید این پراستفاده‌ترین فرمول آنالیز ترکیبیاتی باشد. عدد $C(n, r)$ اغلب به صورتهای دیگری نشان داده می‌شود. مثلاً

$$nCr, \quad {}^nC_r, \quad C_r^n \text{ و } \binom{n}{r}.$$

آخرین نماد خیلی متداول است و آن را «n روی r» یا «ضریب دوجمله‌ای n روی r» می‌نامند. ضریبهای دوجمله‌ای دربسط توانی از مجموع دوجمله مانند $(x+y)^8$ ظاهر می‌شوند؛ این یکی ازعنوانهای فصل بعدی است.

یك ویژگی سادهٔ $C(n, r)$ که تقریباً بدیهی است عبارت است از

$$C(n, r) = C(n, n-r) \tag{۴۰۲}$$

فرض کنیم به عنوان مثال قرار دهیم $n=5$ و $r=3$. آن گاه معادلهٔ (۴۰۲) به‌صورت $C(5, 3) = C(5, 2)$ درمی‌آید، و می‌توان درستی آن‌را به‌صورت زیر تحقیق کرد. ۵ شیء A، B، C، D، و E را اختیار می‌کنیم. می‌بینیم که $C(5, 3) = 10$، این ۱۰ سه‌تایی در(۲۰۲) به تفصیل نوشته شده‌اند. حال وقتی که یك سه تایی مانند A, C, D انتخاب می‌شود یك زوج (در این حالت B, E) انتخاب نشده باقی می‌ماند. بنا براین متناظر با هر سه‌تایی که در(۲۰۲) انتخاب شده

است می‌توان یك زوج متناظر انتخاب نشده را (در پرانتز) نوشت:

$$A, B, C(D, E) \qquad A, B, D(C, E) \qquad A, B, E(C, D)$$
$$A, C, D(B, E) \qquad A, C, E(B, D) \qquad A, D, E(B, C)$$
$$B, C, D(A, E) \qquad B, C, E(A, D) \qquad B, D, E(A, C)$$
$$C, D, E(A, B)$$

نتیجه می‌شود کـه تعداد راههای انتخاب سه شیء از ۵ شیء، برابر تعداد راههای انتخاب ۲ شیء از ۵ شیء است، بنابراین $C(۵, ۳) = C(۵, ۲) = ۱۰$.

به‌طور کلی متناظر با انتخاب هر r شیء از میان n شیء، یك مجموعهٔ $n-r$ عنصری ازاشیاء انتخاب نشده‌که هیچکدام درانتخاب وجود ندارند، موجود است. بنابراین تعداد راههای انتخاب r شیء باید برابر تعداد راههـای انتخاب $n-r$ شیء باشد و درنتیجه فرمول (۴.۲) برقرار است.

اگـر در فرمول (۴.۲) به جای r، صفر قـرار دهیم، بـه‌دست مـی‌آوریم $C(n, ۰) = C(n, n)$. اما $C(n, n)$ به معنای تعداد راههـای انتخاب n شیء از میان n شیء است، بنابراین $C(n, n) = ۱$. اما به‌نظر می‌رسد که $C(n, ۰)$: «تعداد راههای انتخاب هیچ شیء ازمیان n شیء» بی‌معنی است. مناسب است‌که $C(n, ۰)$ را برابر ۱ تعریف‌کنیم. توجه کنیدکه این تعریف بافرمول (۳.۲) که برای $r = ۰$، برابری

$$C(n, ۰) = \frac{n!}{۰!(n-۰)!} = \frac{n!}{۰!n!} = ۱$$

را بـه دست می‌دهـد هماهنگی دارد، زیـرا $۰! = ۱$. همچنین تعریف مـی‌کنیم $C(۰, ۰) = ۱$.

بجاست کـه تعریف $C(n, r)$ را به تمام اعداد صحیح n و r، حتی اعداد صحیح منفی؛ تعمیم داد، زیرا در این صورت فرمولهـای مختلف را می‌توان بدون توصیف یا توضیح اضافی نوشت. اگر n عـددی منفی، اگر r عددی منفی، یا اگر $r > n$ باشد، $C(n, r)$ برابرصفر تعریف می‌شود. مثلاً $C(-۱۰, ۸)$، $C(۵, -۸)$، و $C(۱۰, ۱۲)$ بنا بر تعریف برابر صفرند. به‌عبارت دیگر

درحالتی‌که یکی یا چندتا از مقادیر n، r، $n-r$ منفی باشند، $C(n, r) = ۰$

درحالتهای دیگر، $$C(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مجموعه مسائل ۵

۱. مقدار $C(۶, ۲)$، $C(۷, ۴)$ و $C(۹, ۳)$ را محاسبه کنید.

۲. به‌وسیلهٔ جفت کردن زیرمجموعه‌های دوعنصری با زیرمجموعه‌های چهارعنصری مجموعهٔ A، B، C، D، E، F نشان دهید که $C(۶, ۲)=C(۶, ۴)$.

۳. امتحانی شامل ده سؤال است که هر دانشجو باید به هشت سؤال جواب داده و ۲ سؤال را نادیده بگیرد. (الف) دانشجو به چند طریق می‌تواند سؤالهای خودرا انتخاب کند؟ (ب) اگر دانشجویی به‌دوسؤال جواب داده وهشت‌سؤال را حذف کند، به‌چند طریق می‌تواند سؤالهای خودرا انتخاب کند؟

۴. دانشکده‌ای ۷۲۰ دانشجو دارد. به چند طریق می‌توان هیأتی ده نفری برای نمایندگی دانشکده انتخاب کرد؟ (پاسخ را به‌شکل فاکتوریل باقی بگذارید)

۵. بااستفاده از فرمول (۳.۲) درستی $C(n, r)=C(n, n-r)$ را تحقیق کنید.

۶. ۲۰ نقطه طوری در صفحه‌ای قرار دارند که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نیستند، یعنی هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط مستقیم قرار ندارند. با وصل کردن هر دوتای این نقاط، چندخط مستقیم می‌توان رسم کرد؟ با اتصال هرسه نقطه ازاین نقاط چندمثلث می‌توان ساخت؟

۷. به‌چندطریق می‌توان ده نفر را دریك ردیف نشاند به‌طوری که دونفر مشخص آنها کنار هم قرار نگیرند.

۸. ثابت کنید که حاصلضرب پنج‌عدد صحیح متوالی بر !۵ تقسیم‌پذیر است وبه‌طور کلی ثابت کنید که حاصلضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ تقسیم‌پذیراست؟ پیشنهاد: فرمول را برای $C(n, r)$ امتحان کنید.

۹. نه جلدکتاب مختلف درقفسه‌ای قرار دارند. چهار جلدآنها قرمز وپنج جلدآنها سبزند. به‌چند ترتیب مختلف می‌توان کتابها را در قفسه‌ای مرتب کرد،

الف) اگر هیچ شرطی وجود نداشته باشد؛

ب) اگر کتابهای قرمز کنار هم و کتابهای سبز کنار هم باشند؛

پ) اگر کتابهای قرمز کنار هم باشند ولی در عین حال امکان داشته باشد که کتابهای سبز پهلوی هم باشند ولی نه الزاماً؛

ت) اگر رنگها یك‌درمیان باشند، یعنی هیچ دو کتاب همرنگی مجاور یکدیگر نباشند؟

۱۰۰. یك باشگاه مخصوص آقایان شصت عضو دارد، سی نفر آنها در کار تجارت وسی نفر آنها استادند. به‌چندطریق می‌توان کمیته‌ای مرکب از هشت نفر تشکیل داد که

الف) حداقل سه نفر درکار تجارت وحداقل سه‌نفر استاد باشند؛

ب) تنها شرط آن باشد که حداقل یکی از هشت نفر در کارتجارت باشد.

(پاسخها را به‌صورت $C(n, r)$ باقی بگذارید.)

۰۱۱. اگر قرار باشد که یك شهروند به‌یکی از سه نفر داوطلب مقام شهردار، به‌یکی از چهار نفر داوطلب عضویت انجمن شهرداری و به‌یکی از سه نفر داوطلب وکالت ناحیه رأی دهد، به چند طریق یك برگه رأی به‌صورتی معتبر نوشته می‌شود؟ لازم نیست که هر شهروند به هرسه مقام رأی دهد ولی از او انتظار می‌رود که حداقل به‌یکی ازاین افراد رأی دهد.

۰۱۲. اگر !۲۰ به‌صورت حاصلضرب نوشته شود درانتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی ظاهر خواهند شد؟

۰۱۳. اگر !۵۲ به‌صورت حاصلضرب نوشته شود درانتهای راست عدد حاصل چند صفر متوالی وجود خواهند داشت؟

۰۱۴. باحرکت دادن پرچمهایی از پنج رنگ در بالای یك دکل، علامتهایی داده می‌شود. اگر ذخیره‌ای نامحدود از پرچمهایی که از هفت رنگ مختلف‌اند وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

۰۱۵. پاسخ مسألهٔ قبل چه‌خواهدبود، اگر(الف) درعلامتی که داده می‌شود پرچمهای مجاور از یك رنگ نباشند؛ (ب) در علامتی که داده می‌شود هرپنج پرچم رنگهای مختلف داشته‌باشند؟

۰۱۶. در ۲۶ حرف الفبا، چند زیرمجموعهٔ سه حرفی وجود دارد به قسمی که هیچ دوحرفی ازسه حرف مزبور حرفهای متوالی الفبا نباشند؟

۱۷. به‌چندطریق می‌توان تمام n شیء متمایز را در k جعبهٔ متمایز قرار داد به‌شرطی که درهرجعبه بیش‌ازیك شیء قرارنگیرد، وتعداد جعبه‌ها بیشتراز تعداد اشیاء باشد.

۶.۲ جایگشتهای اشیاء واقع بریك دایره

جایگشتهایی را که تاکنون بررسی کردیم جایگشتهای خطی می‌نامند، زیرا جایگشتهایی از اشیاء واقع بریك خط یا دریك سطرند. جایگشتهای اشیاء بریك دایره یا جایگشتهای دوری درمسأله‌ای مانند مسألهٔ زیر پیش می‌آیند: به‌چند طریق می‌توان پنج نفر را دور یك میز نشاند؟

راه حل اول. اگر افراد را با A، B، C، D و E نامگذاری کنیم، می بینیم که پنج جایگشت خطی

$$ABCDE, \quad BCDEA, \quad CDEAB, \quad DEABC, \quad EABCD,$$

وقتی آنها را به عنوان یك جایگشت دوری درنظر بگیریم، یکی هستند. این مطلب بدین‌دلیل است‌که دوآرایش ازافراد در دور یك‌میز را یك جایگشت دوری واحد درنظر می گیرند اگر یکی ازآنها از دیگری با دوران هرفردی به‌یك اندازه و در یك جهت حول یك دایره به دست‌آید. مثلاً این نظیر موردی است‌که هر فرد به صندلی سمت‌راست تغییرمکان دهد. از این‌رو می‌توانیم با مربوط‌کردن جایگشتهای دوری به جایگشتهای خطی تعدادآنها را به دست‌آوریم: هرجایگشت دوری با پنج جایگشت خطی متناظر است، بنابراین تعداد جایگشتهای دوری، فقط ۱/۵ تعداد جایگشتهای خطی است. اما پنج شیء دارای !۵ جایگشت خطی است و لذا، پاسخ مسأله برابر است با

$$\frac{۱}{۵}(۵!) = \frac{۱}{۵}(۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۴! \cdot$$

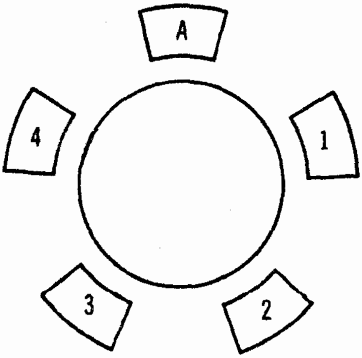
راه حل دوم. چون وقتی هرشیء (یا هرفرد) به طور یکنواخت به اندازهٔ یك مکان به سمت راست ویا به‌طور یکنواخت به‌اندازهٔ دو مکان به سمت راست وغیره حرکت کند، یك آرایش دوری تغییر نمی‌کند، می‌توانیم یك مکان را برای اولین فرد ثابت نگهداشته و دیگران را در مقایسه با مکان این فرد دور میز مرتب‌کنیم. A را در یك مکان ثابت قرار می‌دهیم، می‌بینیم که هریك از چهار نفر می‌تواند بلافاصله در سمت راست A قرار گیرد، آن‌گاه هریك ازسه نفر باقیمانده، در سمت

راست مکان جدید وهریك ازدونفر بعدی درمکان بعدی و فرد باقیمانده درمکان آخر قرارمی گیرد؛ شکل ۱۰۲ را ببینید. با استفاده از اصل ضرب، پاسخ ۱ × ۲ × ۳ × ۴ را به‌دست می آوریم.

درحالت کلی تعداد جایگشتهای دوری n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است. برای نشان دادن این مطلب می‌توان مانند آنچه در راه‌حلهایی که دربالا برای حالت خاص $n=5$ انجام دادیم استدلال کرد. بخصوص راه حل دوم را دنبال می کنیم. فرض می کنیم که n فرد A، B، C، D، ... در دور میزی نشسته باشند. چون دوران یکنواخت افراد، یك آرایش را تغییر نمی‌دهد، باید شخص A را در مکانی ثابت قرار داده، آن گاه تعداد راههای آرایش‌دادن بقیه را بررسی کنیم. در صندلی سمت راست A می توانیم هر یك از $n-1$ فرد دیگر را قرار دهیم. بعد از انجام این عمل، می‌توانیم هریك از $n-2$ فرد باقیمانده را در صندلی بعدی سمت راست قرار دهیم. با ادامهٔ این روش در دور میز، درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، می بینیم که اصل ضرب پاسخ

$$(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\cdots 1=(n-1)!$$

را به‌دست می‌دهد.



شکل ۱۰۲

مجموعه مسائل ۶

۰۱ به‌چند طریق می‌توان هشت نفر را دور یك میز نشاند؟

۰۲ در مسألهٔ قبل اگر دو شخص معین از هشت نفر نتوانند در دو صندلی مجاور بنشینند، پاسخ چه‌خواهد بود؟

۰۳ به‌چندطریق چهار مرد وچهار زن را می‌توان دور یك میز نشاند، به‌شرط آنکه هیچ دو مردی در دوصندلی مجاور قرار نگیرند؟

۰۴ درمسألهٔ قبل فرض می‌کنیم که اشخاص، چهار زن و شوهر باشند، اگر هیچ زن و شوهری و همچنین هیچ دومردی پهلوی هم قرار نگیرند پاسخ چه‌خواهدبود؟

۰۵ دریك موتور شش سیلندر از لحاظ نظری جرقه‌زدن به‌چند ترتیب مختلف ممکن است صورت بگیرد؟ (اگر سیلندرها از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شوند، ترتیب جرقه‌زدن فهرستی مانند ۱، ۴، ۲، ۵، ۳، ۶ است که یك ترتیب دورانی را می‌دهد که درآن سوخت در سیلندر می‌سوزد.)

۰۶ چند بلوك رنگ شدهٔ **مکعب شکل می‌توان** ساخت به شرطی که ازشش رنگ استفاده شود و هر یك از شش وجه هر بلوك با رنگی متفاوت با رنگ وجوه دیگر، رنگ‌آمیزی شود؟ تعریف بلوکهای رنگی متفاوت همان است که در مسألهٔ ۲.۱ی فصل اول آمده‌است.

۰۷ چند مکعب مختلف، که شش وجه هریك را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌اند، می‌توان ساخت که مجموع اعداد روی هرجفت از وجوه مقابل برابر ۷ باشد؟

۷.۲ خلاصه

اصل ضرب: اگر پیشامدی به m راه و پیشامد دوم به k راه مستقل از راههای اول رخ دهد، آن‌گاه دو پیشامد به mk راه رخ می‌دهند.

فرمول فاکتوریل n:

برای اعداد صحیح مثبت n، $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$

$0! = 1$.

تعداد جایگشتها (یعنی آرایشهــای مرتب) r به r از n شیء متمایــز، برابر است با

$$P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

تعداد ترکیبهای (یعنی تعداد انتخابهای بدون درنظرگرفتن ترتیب) r به r از n شیء متمایز برابر است با

$$C(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$C(n, r)$ را می‌توان به عنوان تعداد زیرمجموعه‌هــای rتایی (زیرمجموعه‌هــایی شامل r عنصر) یک‌مجموعه‌ای از n شیء تعبیر کرد. یک نماد دیگر برای $C(n, r)$، که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، $\binom{n}{r}$ است. ویژگی پایه‌ای $C(n, r)$ عبارت است از

$$C(n, r)=C(n, n-r).$$

نماد $C(n, r)$، مقدار عددی زیر بەازای تمام زوجهای اعداد صحیح n و r است:

درحالتی‌که یک یا چندتا از مقادیر n، r، $n-r$ منفی باشند، $C(n, r)=0$

درتمام حالتهای دیگر، $C(n, r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

تعداد جایگشتهای دوری (یعنی آرایشهای روی دایره) n شیء متمایز برابر $(n-1)!$ است.

فرمولهای $P(n, r)$ و $C(n, r)$ تنها در وضعیتهای خاص‌آرایشهای مرتب و انتخابهای نامرتب که درآنها n شیء متمایزند و تکرارها درمجموعه‌های r عنصری مجازنیستند، به‌کار می‌روند. اینها فرمولهای کلی جایگشتها و ترکیبها نیستند. اما در فصلهای بعدی بسیاری از مسائل به‌این حالتهای خاص تبدیل می‌شوند.

۳

ترکیبها و ضریبهای دوجمله‌ای

برای نگرش به $C(n, r)$، یعنی تعداد ترکیبهای r به r از n شیء مختلف، راههای دیگری نیز به‌غیر از راههای فصل‌قبل وجود دارند. بعضی ازاین راهها دراین‌فصل مطالعه می‌شوند. کار را با اشاره بدین مطلب آغاز می‌کنیم که به‌آسانی می‌توانیم مسألهٔ مسیر را که به‌عنوان مسألهٔ ۳.۱ درفصل اول آمده بود حل کنیم. برای راحتی صورت مسأله را تکرار می‌نماییم.

۱.۳ مسألهٔ مسیر

شخصی درساختمانی کارمی‌کندکه هفت بلوك درشرق و هشت بلوك در شمال خانه‌اش قرار دارد. بنابراین، برای رسیدن به‌محل‌کارش هرروز پانزده بلوك را طی می‌کند. تمام خیابانهایی که درالگوی مستطیل شکل‌وجود دارند برای رفتن او به‌محل‌کارش قابل استفاده‌اند. این شخص باچند مسیر مختلف می‌تواند ازمنزل به‌محل‌کارش برود، درصورتی‌که تنها از پانزده بلوك بگذرد؟

حرکت شخصی به‌اندازهٔ يك‌بلوك به‌طرف شرق را با E و به‌اندازهٔ يك‌بلوك

به‌طرف شمال را با N نشان می‌دهیم، و رشته‌ای شامل Eها و Nها مانند

$$EENNNENN$$

را (که ازچپ به راست خوانده می‌شود) به‌این معنا تعبیر می‌کنیم که شخص دو بلوك به‌طرف شرق رفته و سپس سه بلوك بـه طرف شمال و بعد یك بلوك به‌طرف شرق و سرانجام دو بلوك به‌طرف شمال می‌رود. بنابراین هر مسیری ازخانه تا محل کار را می‌توان با الگوی مناسبی از هفت E و هشت N واقع دریك ردیف مشخص کرد. مثلاً مسیری که با سه بلوك به‌طرف شرق شروع می‌شود، سپس با دو بلوك به طرف شمال، و چهار بلوك به‌طرف شرق و سرانجام شش بلوك به‌طرف شمال ادامه می‌یابد به‌صورت زیر است:

$$EEENNEEEENNNNNN$$

لذا به هرچنین مسیری رشته‌ای ازهفت E و هشت N متناظرمی‌شودکه درست دریك ردیف پراکنده شده‌اند؛ وبرعکس به‌هرچنین رشته‌ای از Eها و Nها دقیقاً یك‌مسیر متناظر است. بنابراین‌می‌توان مسأله را به‌صورت زیر از نو بیان کرد: به‌چند طریق هفت E و هشت N را می‌توان دریك ردیف قرار داد؟

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

اگر پانزده جعبه را کـه با هفت E و هشت N پر می‌شوند در نظر بگیریم، می‌بینیم که پاسخ این سؤال درست برابر تعداد راههایی است که می‌توان هفت‌جعبه را از میان پانزده جعبه برای پر کردن با Eها انتخاب کرد، و این تعداد برابراست با

$$C(۱۵, ۷)=\frac{۱۵!}{۸!۷!}=\frac{۱۵\times ۱۴\times ۱۳\times ۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹}{۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲}=۶۴۳۵.$$

این‌همان تعداد راههایی‌است که می‌توان‌هشت جعبه از پانزده جعبه را برای‌پر کردن با Nها انتخاب کرد، یعنی همان $C(۱۵، ۸)$ است. در فصل ۲ دیدیم که

$C(n, r)=C(n, n-r)$، و بنابراین $C(۱۵, ۷)=C(۱۵, ۸)=۶۴۳۵$.

۲.۳ جایگشتهای اشیایی که همهٔ آنها یکسان نیستند

هم‌اینك دیدیم که $C(۱۵،۷)$ رامی‌توان به‌عنوان‌تعدادجایگشتهای پانزده‌شیء که‌هفت‌تای آنها یکسان وهشت‌تای دیگر آنها نیز یکسان‌اند تعبیر کرد. به‌طور کلی $C(n, r)$ را

می‌توان به‌صورت تعداد جایگشتهای n شیء که r تای آنها یکسان و $n-r$ تای آنها نیز یکسان‌اند، تعبیر کرد. این ایده را می‌توان از دو دسته از اشیاء مانند Eها و Nها به تعداد بیشتری از دسته‌ها تعمیم داد. با یک مثال شروع می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۰۳ اگر تمام حرفهای کلمهٔ *Mississippi* را با هم درنظر بگیریم، چندجایگشت مختلف ازحرفهای این کلمه وجود دارند؟ به‌عبارت دیگر حرفهای کلمهٔ *Mississippi* را به‌چند ترتیب مختلف می‌توان نوشت؟

راه‌حل اول. یازده‌حرف وجود دارند که‌چهارتای آنها(iها) یکسان‌وچهارتای دیگر آنها (sها) یکسان و دوتای دیگر آنها (pها) نیز یکسان‌اند. برای به دست آوردن جایگشتهای مختلف، یازده جعبه برای جادهی این حرفها در نظر می‌گیریم. چهارتا ازاین‌جعبه‌ها را برای iها انتخاب می‌کنیم. برای‌انجام این‌عمل $C(۱۱، ۴)$ راه مختلف وجود دارد. سپس از هفت جعبهٔ باقیمانده چهار جعبه برای sها انتخاب می‌کنیم. برای انجام این‌کار $C(۷، ۴)$ راه وجود دارد. آن‌گاه ازسه‌جعبهٔ باقیمانده دوجعبه برای pها انتخاب می‌کنیم. برای انجام این کار $C(۳، ۲)$ راه وجود دارد. حرف M جعبهٔ باقیمانده را پر می‌کند. بنابر اصل ضرب، پاسخ مسأله به‌صورت

$$C(۱۱, ۴)\times C(۷, ۴)\times C(۳, ۲)=\frac{۱۱!}{۴!۷!}\times\frac{۷!}{۴!۳!}\times\frac{۳!}{۲!۱!}=\frac{۱۱!}{۴!۴!۲!۱!}$$

به‌دست می‌آید. البته اگرحرفها را برای جعبه‌ها به‌ترتیب دیگری‌انتخاب‌می‌کردیم، درمحاسبات کمی اختلاف به‌چشم می‌خورد، ولی‌پاسخ نهایی همان است. مثلاً فرض کنیم که ابتدا از میان یازده جعبه، یک جعبه را برای حرف M، سپس چهار جعبه را برای sها،آن‌گاه دوجعبه را برای pها، وچهارجعبهٔ باقیمانده را برای iها؛ انتخاب کنیم؛ بنابراین تعدادکل آرایشهای مختلف حرفها برابر است با

$$C(۱۱, ۱)\times C(۱۰, ۴)\times C(۶, ۲)=\frac{۱۱!}{۱!۱۰!}\times\frac{۱۰!}{۴!۶!}\times\frac{۶!}{۲!۴!}=\frac{۱۱!}{۴!۴!۲!۱!},$$

که‌همان پاسخ قبلی است.

راه‌حل دوم. استدلال دیگری که از نوعی کاملاً متفاوت با استدلال بالاست به‌شرح زیراست: فرض‌کنیم تعدادجایگشتهای پاسخ را با x نشان دهیم. اگر چهار i را باچهارحرفی که هم بایکدیگر و هم با بقیهٔ حروف *Mississippi* متفاوت‌اند مانند i، j، k و l عوض‌کنیم از x اصلی $x\times ۴!$ جایگشت به دست خواهیم‌آورد،

زیرا در هریك از جایگشتهای اصلی، !۴ جایگشت حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب اگر چهار s باچهارحرف مختلف‌عوض شود، باز !۴ برابرجایگشتها، جایگشت به‌دست‌می آوریم. و اگر دو p با دو حرف مختلف عوض شود، !۲ برابر جایگشتهای قبلی، جایگشت به‌دست می‌آید. اما اکنون یازده حرف تماماً متفاوت‌اند و در نتیجه !۱۱ جایگشت خواهیم داشت. این مطالب، معادلهٔ

$$x \times ۴! \times ۴! \times ۲! = ۱۱!$$ ، و بنابراین $$x = \frac{۱۱!}{۴!۴!۲!}$$

را به‌دست می‌دهد.

به‌طور کلیتر اگر n شیء موجود باشند که a تای آنها یکسان، b تای دیگر یکسان و c تای دیگر آنها یکسان و بالاخره d تای باقیمانده نیز یکسان باشند، با استدلالی مشابه می‌توان تعداد جایگشتهای $n = a + b + c + d$ شیء را، که همگی را یکجا در نظر گرفته‌ایم، بیابیم. اگر تعداد جایگشتهای مختلف را با x نشان دهیم،

$$x \times a! \times b! \times c! \times d! = n!$$ ، بنابراین $$x = \frac{n!}{a!b!c!d!}.$$

نیازی نیست که فقط چهار دسته از اشیاء وجود داشته باشند. به‌طور کلی اگر n شیء موجود باشند که a تای آنها یکسان، b تای دیگر یکسان، c تای دیگر یکسان باشند و غیره، آن‌گاه تعداد جایگشتهای n شیء، که همه باهم درنظر گرفته می‌شوند، برابر است با

$$\frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$ ، که‌در آن $$n = a + b + c + \ldots.$$ (۱۰)

در این کسر، نقطه‌ها در مخرج به جای «و غیره»، یعنی به تعدادی که جمله‌های فاکتوریل اضافی لازم باشند، منظور شده‌اند.

مجموعه مسائل ۷

۱. چند جایگشت از حرفهای کلمهٔ (الف) *assesses* و (ب) *humuhumunukunukuapuaa* (واژه‌ای هاوایی برای نام یك نوع ماهی)، که یکجا در نظر گرفته می‌شوند، وجود دارد؟

۲. مطابق با اولین استدلالی که برای مسألهٔ ۱.۳ داده شد، در حالتی که $n = a + b + c + d$، فرمول (۱۰۳) را نتیجه بگیرید.

۳. در مسألهٔ مسیر بخش ۱.۳، خیابانهای شمال-جنوبی را با A، B، C، ...، H وخیابانهای شرقی - غربی را با خیابانهای اول، دوم، ...، نهم نشان دهید. فرض کنید که شخص در تقاطع خیابان اول و خیابان A زندگی می‌کند و محل کار او در تقاطع خیابان نهم وخیابان H قراردارد. این آگاهی را داریم که شخص می‌تواند از تمام خیابانها بجز یك خیابان عبور کند، یعنی در خیابان E نمی‌توان از خیابان پنجم به ششم رفت، با چند مسیر مختلف شخص می‌تواند از منزل به محل کار خود برود، به‌شرط آنکه فقط از پانزده بلوك بگذرد؟

۴. بـه عنوان تعمیم مسألهٔ مسیر به سه بعد، یك‌چـوب بست‌فلزی سه‌بعدی را درنظر بگیرید. به‌وسیلهٔ چندمسیر پانزده‌واحدی می‌توان‌ازیك‌نقطهٔ تقاطع چوب بست‌به‌نقطهٔ دیگری رفت که در چهار واحد به سمت راست، پنج واحد به سمت عقب، و شش واحد در بالای نقطهٔ تقاطع قراردارد؟

۵. ۱۷ حرف زیر را به چند ترتیب مختلف می‌توان نوشت؟

$$xxxx\ yyyyy\ zzzzzz\ ww$$

۳.۲ فرمول پاسکال برای $C(n, r)$

زیرمجموعه‌های rتایی، یعنی زیرمجموعه‌هایی r عنصری مجموعـه‌ای از n شیء را درنظرمی‌گیریم. تعداد این‌زیرمجموعه‌های rتایی برابر $C(n, r)$ است. ازمجموعهٔ nشیء، یك‌شیءرا خارج کرده وآن‌را T می‌نامیم. زیرمجموعه‌های rتایی رامی‌توان به‌دونوع تقسیم کرد.

الف) آنهایی‌که شامل شیءT هستند؛

ب) آنهایی‌که شامل شیءT نیستند.

تعدادآنهایی‌که شامل شیءT هستند برابر $C(n-1, r-1)$ است، زیرا همراه با T در هر زیرمجموعهٔ rتایی، $r-1$ شیء دیگر که از $n-1$ شیء انتخاب شده‌اند وجود دارند. تعداد آنهایی‌که شامل T نیستند برابر $C(n-1, r)$ است، زیرا این زیرمجموعه‌های rتایی، وقتی T را کناربگذاریم، از $n-1$شیء انتخاب شده‌اند. بدین‌ترتیب گردایهٔ‌تمام زیرمجموعه‌های r تایی را به‌دونوع‌تقسیم کرده وسپس تعداد هر نوع را به دست آوردیم، بنابراین فرمول پاسکال به‌صورت زیر برقرار می‌شود

$$C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1). \qquad (۲.۳)$$

این، ابزار ساده‌ای است که استفاده از چنین فرمولهایی را گسترش می‌دهد. می‌بینیم استدلالی که به رابطهٔ (۲.۳) منجر می‌شود به تعداد مشخصی از اشیاء n یا r بستگی ندارد. اگر با m شیء شروع، و از آن، برای تشکیل دادن زیرمجموعه‌های k عنصری، k شیء انتخاب کنیم استدلال مطلب بـه همان اندازهٔ بالا منطقی است، و به‌فرمول

$$C(m,\, k)=C(m-۱,\, k)+C(m-۱,\, k-۱),$$

کـه همان مفهوم فرمول قبلی را دارد، منجر می‌شود. همچنین، اگر با $n+۱$ شیء شروع و از آنها r شیء انتخاب می‌کردیم فرمول

$$C(n+۱,\, r)=C(n,\, r)+C(n,\, r-۱) \qquad (۳.۳)$$

نتیجه می‌شد. حقیقتاً لازم نیست که دربارهٔ تمام فرایند به‌دست آوردن فرمول (۳.۳) دوباره بیاندیشیم؛ باقراردادن $n+۱$ به‌جای n درفرمول (۲.۳) می‌توان این‌فرمول را به‌دست آورد؛ بنابراین

$C(n,\, r)$ به‌صورت $C(n+۱,\, r)$ درمی‌آید؛

$C(n-۱,\, r)$ به‌صورت $C(n+۱-۱,\, r)$ یا به‌صورت $C(n,\, r)$ درمی‌آید؛

$C(n-۱,\, r-۱)$ به‌صورت $C(n+۱-۱,\, r-۱)$ یا $C(n,\, r-۱)$درمی‌آید؛

و فرمول (۲.۳) به‌صورت فرمول (۳.۳) درمی‌آید.

در فرمول (۲.۳) می‌توان $n+۱$ را به‌جای n قرارداد و با یك فرمول معتبر بحث را به‌پایان رساند، زیرا فرمول (۲.۳) به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n و r، تنها به‌شرط $n \geqslant r$، برقرار است. بنابراین می‌تـوان به‌جای نمادهای n و r از نمادهای دیگری‌استفاده کرد که‌تنها‌مقید به‌این‌شرایط باشند که: (i) نمادهای‌جدید، اعدادصحیح مثبت را نشان دهند و (ii) نمادی که به‌جای n قرار می گیرد عدد صحیحی رانشان دهدکه حداقل به‌همان بزرگی عدد صحیحی باشد کـه جانشین r می‌شود. مثلاً در فرمول (۲.۳) می‌توان به‌جای n اعداد $n+۱$، $n+۲$، $n+۳$ را قرارداد. [به‌دلیل شرط(i)، به‌جای n نمی‌توان $(n+۱)/۲$ را قرارداد و به‌دلیل شرط (ii) نیز به‌جای n نمی‌توان $r-۳$ را قرار داد.]

به‌معنای دیگر، چنین جایگذاریهایی هیچ اطلاع جدیدی بـه‌دست نمی‌دهند. مثلاً فرمول (۲.۳) به‌ازای $n=۲۰$ و $r=۶$ اطلاع

$$C(۲۰,\, ۶)=C(۱۹,\, ۶)+C(۱۹,\, ۵),$$

را فراهم‌می‌کند. با قراردادن ۱۹ $=n$ و ۶ $=r$ در(۳.۳) دقیقاً همین برابری‌حاصل می‌شود. اما اگرمعادله‌های (۲.۳) و (۳.۳) را باهم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$C(n,\ r)+C(n+۱,\ r)$$
$$=C(n,\ r)+C(n,\ r-۱)+C(n-۱,\ r)+C(n-۱,\ r-۱);$$

و با کم‌کردن $C(n,\ r)$ از دوطرف این‌برابری، فرمول‌جدید

$$C(n+۱,\ r)=C(n,\ r-۱)+C(n-۱,\ r)+C(n-۱,\ r-۱),\quad (۴.۳)$$

را به‌دست می‌آوریم. مطلب‌بالا این‌واقعیت را نشان‌می‌دهد که از فرمولهای‌ساده‌تری مانند (۲.۳)، بدون ارائهٔ هیچ‌بحثی دربارهٔ معنی خود نمادها، فقط با دستکاری نمادگذاری، می‌توان فرمولهای جدیدی به‌دست آورد.

مجموعه مسائل ۸

۱. مقدار $C(۶,\ ۲)$، $C(۵,\ ۲)$ و $C(۵,\ ۱)$ رامحاسبه‌کرده، تحقیق‌کنید که اولی‌برابر مجموع دوتای دیگراست.

۲. مجموع $C(۹,\ ۴)+C(۹,\ ۳)$ را به‌صورت تك‌ترکیب $C(n,\ r)$ بنویسید.

۳. $C(۵۰,\ ۱۰)-C(۴۹,\ ۹)$ را به‌صورت تك‌ترکیب $C(n,\ r)$ بنویسید.

۴. اگر (الف) درفرمول (۲.۳)، $n-۱$ را به‌جای n قرار دهیم؛ (ب) در (۲.۳)، $n-۱$ را به‌جای n و $r-۱$ را به‌جای r قرار دهیم، برابری حاصل‌چیست؟

۵. اگر در

$$C(n,\ r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

الف) $n-۱$ را به جای n قرار دهیم؛ ب) $n-۱$ را به جای n و $r-۱$ را به‌جای r قرار دهیم، فرمولهای حاصل چه خواهندبود؟

۶. بااستفاده از نتایج مسألهٔ قبل وبااستدلالی که متضمن فاکتوریلهاست، برای‌فرمول (۲.۳) برهانی ارائه دهیدکه باآنچه درمتن آمده‌است متفاوت باشد.

۷. برهانی‌که برای فرمول (۲.۳) درمتن‌کتاب آمدشامل ملاحظاتی دربارهٔ یك‌شیء

خاص T از n شیء بود. اکنون دوشیء خاص مانند S و T را درنظر بگیرید. ترکیبها را می‌توان به‌چهار رده تقسیم کرد: آنهایی که شامل S و T هستند؛ آنهایی که تنها شامل S بوده و شامل T نیستند؛ آنهایی که‌تنها شامل T هستند ولی‌شامل S نیستند؛ آنهایی که نه‌شامل T و نه‌شامل S هستند. اگر $C(n, r)$ مجموع تعداد اعضای این‌چهار رده باشند، چه فرمولی نتیجه‌می‌شود؟ سپس با استفاده از فرمول (۲.۳)، به‌راه دیگری‌این فرمول را نتیجه بگیرید.

۸. صرفنظر از یك استثناء، فرمول‌پاسکال (۲.۳) به‌ازای‌تمام زوجهای اعداد صحیح n و r، مثبت، منفی یا صفر برقرار است. این استثناءکدام است؟

۴.۳ بسط دوجمله‌ای

مجموع هر دو نماد مختلف مانند $x+y$ را یك دوجمله‌ای گویند. بسط دوجمله‌ای یا قضیهٔ دوجمله‌ای، فرمولی برای توانهای دوجمله‌ای است. اگر چندتوان اول $x+y$ را محاسبه‌کنیم به‌دست می‌آوریم

$$(x+y)^1 = x+y;$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2;$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3;$$

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4;$$

$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5. \quad (۵.۳)$$

با استفاده از برابری (۵.۳) به‌عنوان‌پایه‌ای‌برای بحث، توجه می‌کنیم که‌سمت‌راست آن‌دارای شش‌جملهٔ x^5، $5x^4y$، $10x^3y^2$، $10x^2y^3$، $5xy^4$ و y^5 است. آنچه ما می‌خواهیم انجام دهیم بیان ضریبهای‌این‌جمله‌ها، یعنی‌۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱، به‌وسیلهٔ نظریهٔ ترکیبهاست.

ابتدا نتایج ضرب چند دو جمله‌ای را بررسی می‌کنیم. مثلاً برای ضرب $(a+b)$ در $(c+d)$ قانون توزیعپذیری را به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم که

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c+(a+b)d = ac+bc+ad+bd.$$

دراین‌مجموع هر کدام‌از‌جمله‌ها، حاصلضرب دو نماد است، که یکی از اولین پرانتز

حاصلضرب اصلی و دیگری از پرانتز دوم گرفته شده‌است. توجه کنید که برای انتخاب یك نماد از دوجمله‌ای اول و یك نماد از دوجمله‌ای دوم دقیقاً ۴ = ۲ × ۲ راه مختلف وجود دارد.

اکنون حاصلضرب سه دوجمله‌ای را بررسی می‌کنیم

$$(a+b)(c+d)(e+f)=$$
$$=ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf,$$

ومشاهده می‌کنیم که این عبارت شامل هشت جمله است، که هر یك، حاصلضرب سه نمادی است که به‌ترتیب ازسه دوجمله‌ای انتخاب شده‌اند. مجدداً می‌بینیم که ۸ = ۲ × ۲ × ۲، دقیقاً برابر تعداد راههای مختلفی است که می‌توان سه نماد را، که هر کدام از یك دوجمله‌ای هستند، انتخاب کرد. نتایج مشابهی برای حاصلضرب توسیع یافتهٔ چهار یا چند دوجمله‌ای وجود دارد. حال حاصلضرب

$$(a+b)(c+d)(e+f)(p+q)(r+s)$$

را درنظر می‌گیریم. بسط عبارت، که آن‌را به‌تفصیل نمی‌نویسیم، مجموع $۳۲ = ۲^۵$ جمله است. به‌عنوان نمونه‌ای از جمله‌ها، دوجملهٔ

$bceps$ و $adeqs$

را ذکر می‌کنیم. هر جمله، حاصلضرب پنج نماد است که هر نماد از یکی از پنج دوجمله‌ای اصلی انتخاب شده‌است.

اکنون با توجه به‌این مشاهدات، $(x+y)^۵$ را به‌صورت حاصلضرب

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

درنظرمی‌گیریم. برای انتخاب پنج نماد، هر کدام از یك پرانتز، ۳۲ راه وجود دارد، اما ۳۲ جملهٔ حاصل همگی ازهم متمایز نیستند. مثلاً، ضرب xها و yهای بخصوصی که در

$$\overset{\downarrow}{(x}+y)(\overset{\downarrow}{x}+y)(x+\overset{\downarrow}{y})(\overset{\downarrow}{x}+y)(x+\overset{\downarrow}{y})$$

با فلشهای جهت‌دار نشان داده شده‌اند درحاصلضرب به‌صورت

$$xyyxx=x^۳y^۲$$

نتیجه‌می‌شود. اما اگر xها را ازسه پرانتز اول و yها را ازدو پرانتز باقیمانده انتخاب

کنیم، باز $x^۳y^۲$ به‌دست می‌آید. در واقع، عبارت $x^۳y^۲$ در بسط $(x+y)^۵$، دقیقاً به‌تعداد راههایی که سه x و دو y را بتوان با ترتیبهای مختلف نوشت حاصل می‌شود:

$xyyxx$، $xxxyy$، $yxxxy$، و غیره

بنابر نظریهٔ بخش ۲.۳، تعداد

$$C(۵, ۲)=\frac{۵!}{۲!۳!}=۱۰$$

آرایش مختلف برای این نمادها وجـود دارد. این تحلیل، عدد ۱۰ را که ضریب $x^۳y^۲$ در برابری (۵.۳) از بسط $(x+y)^۵$ است، نشان می‌دهد. بـا روشی مشابه می‌توان ضریبهای دیگر را به‌دست آورد، بنابراین داریم

$$(x+y)^۵=C(۵, ۰)x^۵+C(۵, ۱)x^۴y+C(۵, ۲)x^۳y^۲$$
$$+C(۵, ۳)x^۲y^۳+C(۵, ۴)xy^۴+C(۵, ۵)y^۵.$$

این فرمول به‌اختصار فرمول (۵.۳) نیست ولی یك الگوی کلی را القا می‌کند. این فرمول القا می‌کند که ضریب $x^۳y^۳$ در بسط $(x+y)^۶$ برابر $C(۶,۳)$، یعنی تعداد راههای نوشتن سه x و سه y در یك ردیف است؛ و ضریب $x^۲y^۴$ در همان بسط برابر $C(۶, ۴)$ یعنی، تعداد راههای نوشتن دو x و چهار y در یـك ردیف است. (البته $C(۶, ۴)$ همان $C(۶, ۲)$ است، اما ما از نماد ترکیبی استفاده می‌کنیم که به جای تعداد xها از تعداد yها تبعیت می‌کند.)

اکنون فرض کنیم n یك عدد صحیح مثبت دلخواه باشد. عبارت $(x+y)^n$ به‌صورت

$$(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y), \qquad (n \text{ عامل})$$

تعریف می‌شود.

دربسط این حاصلضرب، $x^{n-j}y^j$ به‌همان تعدادی که می‌توان $n-j$ تا x و j تا y را دریك ردیف نوشت، ظاهرمی‌شود. ازاین‌رو ضریب $x^{n-j}y^j$ برابر $C(n, j)$ است. بنابراین بسط دوجمله‌ای را می‌توان به‌صورت

$$(x+y)^n=C(n, ۰)x^n+C(n, ۱)x^{n-۱}y+C(n, ۲)x^{n-۲}y^۲$$
$$+C(n, ۳)x^{n-۳}y^۳+\cdots+C(n, j)x^{n-j}y^j+\cdots+C(n, n)y^n,$$

نوشت. همان‌طور که در فصل ۲ خاطرنشان کردیم، نماد $\binom{n}{j}$ اغلب، خصوصاً در بسط دوجمله‌ای، به‌جای $C(n, j)$ به‌کار می‌رود. بنابراین در بسیاری از کتابها بسط دوجمله‌ای به‌صورت زیر می‌آید:

$$(x+y)^n=\binom{n}{۰}x^n+\binom{n}{۱}x^{n-۱}y+\binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲+\binom{n}{۳}x^{n-۳}y^۳+\cdots$$

$$+\binom{n}{j}x^{n-j}y^j+\cdots+\binom{n}{n}y^n.$$

جمله‌های اول و آخر را می‌توان به صورت ساده‌تر x^n و y^n نوشت، و این، شکل دیگری از بسط دوجمله‌ای را ارائه می‌دهد که اغلب به‌صورت

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-۱}y+\frac{n(n-۱)}{۲\times۱}x^{n-۲}y^۲$$

$$+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳\times۲\times۱}x^{n-۳}y^۳+\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}x^{n-۴}y^۴$$

$$+\cdots+y^n,$$

داده می‌شود.

مجموعه مسائل ۹

۱. در بسط $(x+y)^۵$ چندجمله وجود دارد؟ در بسط $(x+y)^n$ چندجمله؟

۲. بسط $(x+y)^۶$ را باضریبهایی به‌صورت $C(n, r)$ به‌تفصیل بنویسید. به‌جای x عدد ۱ و به‌جای y عدد ۱ قرار دهید و سپس مجموع

$$C(۶, ۰)+C(۶, ۱)+C(۶, ۲)+C(۶, ۳)+C(۶, ۴)$$

$$+C(۶, ۵)+C(۶, ۶),$$

را محاسبه کنید.

۳. در بسط $(x+y)^۶$ به جای x عدد ۱ و به جای y عدد ۱ — را قرار دهید و سپس مجموع

$$C(۶,۰)-C(۶,۱)+C(۶,۲)-C(۶,۳)+C(۶,۴)\\ -C(۶,۵)+C(۶,۶),$$

را محاسبه کنید.

۴. ضریب $u^۳v^۷$ در $(u+v)^{۱۰}$ که به‌شکل یك‌عدد طبیعی بیان می‌شود، چیست؟

۵. بسط کامل $(u+v)^۷$ را با ضرایبی به‌صورت اعداد طبیعی بنویسید.

۶. تحقیق کنید کـه بسط $(x+y)^۸$ را می‌توان بدین طریق نوشت: مجموع تمام جملاتی به‌صورت

$$\frac{۸!}{a!b!}x^a y^b,$$

که در آنها a و b روی تمام زوجهای اعداد صحیح نامنفی به شرط $a+b=۸$، تغییر می کند.

۷. تحقیق کنید که $(x+y)^n$ مجموع تمام جمله‌هایی به‌صورت

$$\frac{n!}{a!b!}x^a y^b$$

است که‌در آنها a و b روی تمام زوجهای اعدادصحیح نامنفی باشرط $a+b=n$ تغییر می کنند.

۸. بدون بسط حاصلضرب

$$(a+b+c)(d+e+f)(p+q+r+s)(x+y+u+v+w)$$

بـه سؤالهای زیـر پاسخ دهید: چند جمله وجـود دارد؟ کـدام یك از جمله‌های $adps$، $bdsw$، $bfpu$، $bfxw$ در بسط عبارت بالا، جمله‌های واقعی هستند؟

۵.۳ بسط چندجمله‌ای

ایدهٔ‌بخش قبل از دوجمله‌ایها به مجموعهـای بیشتر از دو عنصـر قابل تعمیم است. به‌عنوان مثال عبارت

$$(x+y+z+w)^{۱۷};$$

را درنظر بگیرید. طبق تعریف، این عبارت، حاصلضرب هفده عامل همانند $x+y+z+w$ است:

$$(x+y+z+w)(x+y+z+w)\cdots(x+y+z+w).$$

بسط این ضرب، دارای جمله‌ای به‌صورت $x^{۴}y^{۵}z^{۶}w^{۲}$ است، زیرا مجموع توانهای آنها برابر $۱۷ = ۲ + ۶ + ۵ + ۴$ است. این جملهٔ بخصوص در بسط ضرب، به‌همان تعدادی ظاهر می‌شود که می‌توان x را از چهار عامل از هفده عامل، و y را از پنج عامل از سیزده عامل باقیمانده و z را از شش عامل از هشت عامل باقیمانده و سپس w را خود به‌خود از دوعامل باقیمانده انتخاب کرد. نظیر استدلالی که در حالت بسط دوجمله‌ای ارائه شد به‌سادگی می‌بینیم که

$$C(۱۷, ۴)\times C(۱۳, ۵)\times C(۸, ۶)\times ۱=\frac{۱۷!}{۱۳!۴!}\times\frac{۱۳!}{۸!۵!}\times\frac{۸!}{۶!۲!}=\frac{۱۷!}{۴!۵!۶!۲!}.$$

بدین‌طریق نشان داده‌ایم که بسط $(x+y+z+w)^{۱۷}$ شامل جملهٔ

$$\frac{۱۷!}{۴!۵!۶!۲!}x^{۴}y^{۵}z^{۶}w^{۲}$$

است. این‌ضریب شباهتی زیاد به‌اعدادی دارد که در بخش ۲.۳ به‌دست آمدند؛ این مطلب شگفت‌آور نیست، زیرا آنچه در اینجا محاسبه کردیم، تعداد راههای مرتب کردن هفده حرف زیر است:

$$xxxxyyyyyzzzzzzww.$$

به‌طور کلیتر می‌توانیم بگوییم که بسط $(x+y+z+w)^{۱۷}$ برابر مجموع تمام جمله‌هایی به‌صورت

$$\frac{۱۷!}{a!b!c!d!}x^{a}y^{b}z^{c}w^{d}$$

است که‌درآن a و b و c و d روی تمام مجموعه‌های ممکن اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند و درشرط $a+b+c+d=۱۷$ صادق‌اند. به‌عنوان حالتی ساده به‌جواب $a=۱۷$، $b=۰$، $c=۰$ و $d=۰$ که متعلق به جملهٔ

$$\frac{۱۷!}{۱۷!۰!۰!۰!}x^{۱۷}y^{۰}z^{۰}w^{۰}$$

یا به‌طور ساده‌تر متعلق به $x^{۱۷}$ در بسط است توجه کنید. جوابهای دیگر

$$a+b+c+d=۱۷$$

مثلاً عبارت اند از $a=۴$، $b=۵$، $c=۶$، $d=۲$ و $a=۴$، $b=۵$، $c=۲$، $d=۶$ که به‌ترتیب به‌جمله‌های

$$\frac{۱۷!}{۴!۵!۶!۲!}x^{۴}y^{۵}z^{۶}w^{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۱۷!}{۴!۵!۲!۶!}x^{۴}y^{۵}z^{۲}w^{۶}$$

متعلق اند.

تعمیم بیشتر به‌وضوح انجام می‌شود. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n (به‌جای عدد خاص ۱۷) می‌بینیم کـه بسط $(x+y+z+w)^n$ مجموع تمام جمله‌هایی به‌صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!}x^{a}y^{b}z^{c}w^{d}$$

است که در آن a و b و c و d روی تمام جوابهای $a+b+c+d=n$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند.

دلیلی ندارد که توجه خودرا به‌یك مجموع چهارعنصری x، y، z و w محدود کنیم. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، بسط چندجمله‌ای

$$(x+y+z+w+\cdots)^n$$

برابر بامجموع تمام جمله‌هایی به‌صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!\cdots}x^{a}y^{b}z^{c}w^{d}\cdots$$

است که در آن a، b، c، d، ... روی تمام جوابهای

$$a+b+c+d+\cdots=n$$

از مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی تغییر می‌کنند.

مجموعه مسائل ۱۰

۱. بسط سه‌جمله‌ای $(x+y+z)^{۴}$ را به‌تفصیل بنویسید.

۲. ضریب $x^2y^2z^2w^2u^2$ در بسط $(x+y+z+w+u)^{10}$ چیست؟

۳. ضریب $xyzwuv$ در بسط $(x+y+z+w+u+v)^6$ چیست؟

۴. مجموع تمام ضریبها در بسط $(x+y+z)^8$ چقدر است؟ در بسط $(x+y+z+w)^{17}$ چقدر؟

۵. مجموع تمام اعدادی به‌صورت

$$\frac{12!}{a!b!c!}$$

که در آن a و b و c روی تمام اعداد صحیح نامنفیی تغییر می‌کنند که در شرط $a+b+c=12$ صادق‌اند چقدر است؟

۶.۳ مثلث پاسکال

ضریبهای دوجمله‌ای بسط $(x+y)^n$ اگر برحسب مقادیر صعودی n فهرست شوند، الگوی جالبی تشکیل می‌دهند. برای دادن ویژگی تقارن به‌جدول، از $(x+y)^0=1$ شروع می‌کنیم:

از $(x+y)^0$،	۱
از $(x+y)^1$،	۱ ۱
از $(x+y)^2$،	۱ ۲ ۱
از $(x+y)^3$،	۱ ۳ ۳ ۱
وغیره.	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
	۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱
	۱ ۸ ۲۸ ۵۶ ۷۰ ۵۶ ۲۸ ۸ ۱

این آرایه، که دراینجا تا $n=8$ فهرست شده است، مثلث پاسکال نامیده می‌شود.

رابطهٔ بازگشتی $C(n, r) = C(n-۱, r) + C(n-۱, r-۱)$ بخش ۳.۳ نشان‌می‌دهد که‌چطور بدون‌هیچ اشکالی می‌توان این جدول را ساخت و توسیع‌داد. مثلاً، سه‌عدد ۲۱و۳۵ و ۵۶ که دور آنها دایره کشیده‌شده‌است همان‌مقادیر $C(۷, ۲)$، $C(۷، ۳)$ و $C(۸، ۳)$ هستند که بنابر رابطهٔ بازگشتی، آخری برابر مجموع دوتای اول است. بنابراین، در مثلث پاسکال هرعدد $C(n, r)$، برابر مجموع عدد مستقیماً بالایی $C(n-۱, r)$ وعددسمت‌چپ آن، $C(n-۱, r-۱)$، است. مثلاً، اگر بخواهیم سطر بعدی جدول بالا، یعنی سطر دهم را به‌دست آوریم، باید بنویسیم.

$$۱, ۱+۸, ۸+۲۸, ۲۸+۵۶, ۵۶+۷۰, ۷۰+۵۶, ۵۶+۲۸, ۲۸+۸, ۸+۱, ۱$$

یا

$$۱, ۹, ۳۶, ۸۴, ۱۲۶, ۱۲۶, ۸۴, ۳۶, ۹, ۱.$$

این اعداد همان ضریبهای بسط $(x+y)^۹$ هستند، و اگر در این رابطه قرار دهیم $x = ۱$ و $y = ۱$، پاسخ $(۱+۱)^۹$ یا $۲^۹$ را به‌دست‌می‌آوریم. ازاین‌رومجموع عنصرهای‌دهمین سطرمثلث پاسکال $۱+۹+۳۶+۸۴+\dots$ برابر $۲^۹$ است. به‌طور کلی، اگر در $(x+y)^n$ قرار دهیم $x = ۱$ و $y = ۱$، جواب ۲^n به‌دست می‌آید و بنابراین نتیجه می‌گیریم که مجموع عناصر $(n+۱)$ امین سطر مثلث پاسکال برابر است با

$$C(n, ۰)+C(n, ۱)+C(n, ۲)+\dots+C(n, n) = ۲^n. \qquad (۶.۳)$$

ازطرف دیگر اگر در $(x+y)^n$ قرار دهیم $x = ۱$ و $y = -۱$، جواب ۰^n یا ۰ را به‌دست می‌آوریم، و بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$C(n, ۰)-C(n, ۱)+C(n, ۲)-C(n, ۳)+\dots+(-۱)^n C(n, n) = ۰. \qquad (۷.۳)$$

مجموعه مسائل ۱۱

۱. مثلث پاسکال را تا، $n = ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳$ گسترش دهید.

۲. ثابت‌کنید مجموع عنصرهای سطر نهم‌برابر با مجموع عنصرهای تمام سطرهای قبلی به علاوه یك است.

۰۳ ثابت کنید که در هرسطر مثلث پاسکال مجموع اولین، سومین، پنجمین،...عنصر، برابر مجموع؛ دومین، چهارمین، ششمین، ... عنصر است.

۷.۳ تعداد زیرمجموعه‌های یك مجموعه

مردی به‌پسرش می‌گوید: «موقع تمیز کردن اتاق زیرشیروانی به‌هفت جلد مجلهٔ قدیمی برخورد کردم. آنها را بررسی کن و هرکدام را که می‌خواهی انتخاب کن. آنچه‌را نمی‌خواهی دور می‌ریزم.» چند انتخاب مختلف ممکن است انجام بگیرد؟ راه دیگر برای بیان مسأله چنین است: یك مجموعهٔ هفت عنصری چند زیرمجموعه دارد؟

یك راه حل مسأله آن است که بگوییم این پسر ممکن است تمام هفت عنصر، $C(۷, ۷)$، یا شش عنصر از هفت عنصر، $C(۷, ۶)$، یا پنج عنصر از هفت عنصر، $C(۷, ۵)$، و غیره را انتخاب کند. این راه، پاسخ

$$C(۷, ۷)+C(۷, ۶)+C(۷, ۵)+C(۷, ۴)+C(۷, ۳)+C(۷, ۲)$$
$$+C(۷, ۱)+C(۷, ۰)$$

را به‌دست‌می‌دهد. طبق فرمول (۶.۳) صفحهٔ ۴۵، این همان $۲^۷$ است.

راه‌حل دیگری برای مسأله آن است که به‌جای تمرکز توجه بر روی مجموعهٔ مجله‌ها، توجه‌خود را روی نسخه‌های تکی مجله متمرکز کنیم: فرض کنیم هفت نسخهٔ مجله را با A، B، C، D، E، F، G نشان دهیم. بنابراین ممکن‌است A انتخاب یا رد شود (دو امکان)؛ ممکن است B انتخاب یا ردشود (دو امکان)؛ ... ؛ ممکن‌است G انتخاب یا رد شود (دو امکان). با استفاده از اصل ضرب، پاسخ

$$۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۷,$$

را داریم.

بنابراین مجموعه‌ای که دارای هفت عنصرمتفاوت‌است، دارای $۲^۷$ زیرمجموعه است که هم شامل خود مجموعه و هم شامل مجموعهٔ تهی یا هیچ است که دارای عنصری نیست. اگر کل‌مجموعه‌را نادیده بگیریم، بقیه‌را زیرمجموعه‌های سره‌می گویند، و بنابراین مجموعه‌ای از هفت عنصر متفاوت دارای $۲^۷ - ۱$ زیرمجموعهٔ سره‌است. به‌طور کلی مجموعه‌ای از n عنصر متفاوت دارای ۲^n زیرمجموعه است که $۲^n - ۱$ تای آنها زیرمجموعهٔ سره‌اند. درمیان‌این زیرمجموعه‌ها دقیقاً $C(n, r)$ زیرمجموعهٔ rعنصری وجود دارد.

مجموعه مسائل ۱۲

۱. با استفاده ازیك یا چند سکه ازسکه‌های یك‌سنتی، پنج‌سنتی، ده‌سنتی، بیست‌وپنج سنتی، پنجاه‌سنتی و یك‌دلاری چندمجموع مختلف ازسکه‌ها را می‌توان به‌دست آورد؟

۲. اعضای یك باشگاه باید در بارهٔ هر یك از هشت موضوع، رأی «آری» یا «نه» بدهند. در نوشتن ورقهٔ رأی، هرعضوی این اختیار را داردکه از رأی‌دادن حداکثر به‌هفت موضوع خودداری کند، ولی نمی‌تواند به هرهشت مورد رأی ندهد. به‌چند طریق یك ورقهٔ رأی ممکن است نوشته شود؟

۳. یك آژانس‌مسافرتی ده‌نوع مختلف دفترچهٔ راهنما دارد.مسؤول آژانس به‌شخصی می‌گویدکه می‌توانی هر تعداد دفترچه‌که می‌خواهی برداری، اما نه بیش ازیکی‌از هرنوع. با فرض آنکه شخص حداقل یك دفترچه بردارد، چند انتخاب ممکن است انجام بگیرد؟

۴. زیست‌شناسی دربارهٔ الگوهای اطفال پسر (M) و دختر (F) خانواده‌ها مطالعه می‌کند. هرنوع‌خانواده‌بایك‌کد تعیین‌می‌شود. مثلاً، FMM یك‌خانوادهٔ‌سه‌فرزندی را نشان می‌دهدکه بزرگترین فرزندآنها دختر و دوتای دیگر پسرند. توجه‌کنیدکه FMM، MFM و MMF سه نوع مختلف‌اند. بین خانواده‌هایی که حداقل یك فرزند و حداکثر ۷ فرزند دارندچند نوع خانواده وجود دارد؟

۸.۳ مجموع توانهای اعداد طبیعی

به‌عنوان یك نتیجهٔ فرعی از نظریهٔ ترکیبها می‌توانیم برای مجموع

$$۱+۲+۳+۴+\cdots+n$$

یعنی برای مجموع اعداد صحیح مثبت (اعداد طبیعی) از ۱ تا n، برای مجموع مربعات آنها، یعنی

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots+n^۲,$$

و برای مجموع مکعبهای آنها وغیره فرمولهایی به‌دست آوریم. ایدهٔ مربوط،استفاده از رابطهٔ بازگشتی (۲.۳) برای $C(n, r)$ است‌که‌آن‌را دوباره به‌صورت

$$C(n-۱, r-۱)=C(n, r)-C(n-۱, r), \qquad (۸.۳)$$

می‌نویسیم.

به‌عنوان مثالی برای تشریح این‌روش، فرمول (۸.۳) را به‌ازای $n=۹$، $n=۸$، ...، $n=۳$، ولی با $r=۲$، در همهٔ حالتها می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
C(۸,۱)&=C(۹,۲)-C(۸,۲),\\
C(۷,۱)&=C(۸,۲)-C(۷,۲),\\
C(۶,۱)&=C(۷,۲)-C(۶,۲),\\
C(۵,۱)&=C(۶,۲)-C(۵,۲),\\
C(۴,۱)&=C(۵,۲)-C(۴,۲),\\
C(۳,۱)&=C(۴,۲)-C(۳,۲),\\
C(۲,۱)&=C(۳,۲)-C(۲,۲).
\end{aligned}
\tag{۹.۳}
$$

اگر این برابریها را باهم جمع کنیم، تعداد زیادی از جمله‌های سمت‌راست حذف شده، و نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
C(۲,۱)+C(۳,۱)+C(۴,۱)+C(۵,۱)+C(۶,۱)&\\
+C(۷,۱)+C(۸,۱)&=C(۹,۲)-C(۲,۲),
\end{aligned}
$$

$$۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸=\frac{۱}{۲}۹\times ۸-۱.$$

اگر ۱ را به دوطرف اتحاد بالا اضافه کنیم، می‌بینیم که با روشی غیرمستقیم مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ به‌دست می‌آید و این مجموع برابر ۱/۲(۷۲) یا ۳۶است.

به‌طور کلی برای انجام این عمل، در فرمول (۸.۳) به جای n متوالیاً اعداد $m+۱$، m، $m-۱$، ...، ۴، ۳ را قرار داده و r را مانند قبل همان مقدار ثابت $r=۲$ می‌گیریم. این عمل، زنجیری از برابریها را به‌دست می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
C(m,۱)&=C(m+۱,۲)-C(m,۲),\\
C(m-۱,۱)&=C(m,۲)-C(m-۱,۲),\\
C(m-۲,۱)&=C(m-۱,۲)-C(m-۲,۲),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C(۳,۱)&=C(۴,۲)-C(۳,۲),\\
C(۲,۱)&=C(۳,۲)-C(۲,۲).
\end{aligned}
\tag{۱۰.۳}
$$

دوباره توجه می‌کنیم که از جمع این برابریها تعداد قابل ملاحظه‌ای از جمله‌های سمت‌راست حذف شده و نتیجه برابر است با

$$C(۲,۱)+C(۳,۱)+\dots+C(m-۲,۱)+C(m-۱,۱)+C(m,۱)$$
$$=C(m+۱,۲)-C(۲,۲),$$

یا

$$۲+۳+\dots+(m-۲)+(m-۱)+m=\frac{۱}{۲}(m+۱)m-۱.$$

به‌قسمی که

$$۱+۲+۳+\dots+(m-۲)+(m-۱)+m=\frac{۱}{۲}m(m+۱). \quad (۱۱.۳)$$

باید توجه داشته باشیم که اگر مثلاً $m=۲$ باشد، سمت چپ فقط به‌صورت ۲+۱ درمی‌آید.

به‌منظور به‌دست‌آوردن فرمولی برای مجموع مربعات اعداد طبیعی، مشابه‌های (۱۰.۳) را به‌ازای تمام مقادیر n و r که به‌اندازهٔ ۱ واحد اضافه شده‌اند می‌نویسیم؛ یعنی معادلهٔ (۸.۳) را به‌ازای $r=۳$ نوشته و به‌جای n مقادیر متوالی $m+۲$، $m+۱$، m، ...، ۵، ۴ را قرار می‌دهیم، تا به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}
C(m+۱,۲)&=C(m+۲,۳)-C(m+۱,۳),\\
C(m,۲)&=C(m+۱,۳)-C(m,۳),\\
C(m-۱,۲)&=C(m,۳)-C(m-۱,۳),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (۱۲.۳)\\
C(۴,۲)&=C(۵,۳)-C(۴,۳),\\
C(۳,۲)&=C(۴,۳)-C(۳,۳).
\end{aligned}$$

این برابریها را باهم جمع کرده، سپس به‌جای نمادهای ترکیب مقادیر آنها را قرار می‌دهیم،

$$C(3, 2)+C(4, 2)+\dots+C(m-1,2)+C(m,2)+C(m+1,2) \\ =C(m+2, 3)-C(3, 3),$$

$$\frac{1}{2}3\times 2+\frac{1}{2}4\times 3+\dots+\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(m+1)m$$

$$=\frac{1}{6}(m+2)(m+1)m-1.$$

با اضافه کردن ۱ به دوطرف و سپس ضرب دوطرف در ۲، رابطهٔ بالا را به‌صورت

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\dots+(m-1)m+m(m+1) \\ =\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)$$

درمی‌آوریم. وحاصلضربهای سمت‌چپ این برابری را می‌توان دوباره به‌صورت

$$\begin{aligned} 1\times 2&=1(1+1)=1^2+1, \\ 2\times 3&=2(2+1)=2^2+2, \\ 3\times 4&=3(3+1)=3^2+3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (m-2)(m-1)&=(m-2)[(m-2)+1]=(m-2)^2+(m-2), \\ (m-1)m&=(m-1)[(m-1)+1]=(m-1)^2+(m-1), \\ m(m+1)&=m^2+m, \end{aligned}$$

نوشت. با جانشین‌کردن این مقادیر، به‌دست می‌آوریم

$$1^2+1+2^2+2+3^2+3+\dots+(m-1)^2+(m-1)+m^2+m \\ =\frac{1}{3}m(m+1)(m+2)$$

یا

$$[۱^۲+۲^۲+\dots+(m-۱)^۲+m^۲]+[۱+۲+\dots+(m-۱)+m]$$
$$=\frac{۱}{۳}m(m+۱)(m+۲).$$

دومین عبارت داخل کروشه را به صورت مجموع m عدد طبیعی که مقدار آن‌را در فرمول (۱۱.۳) محاسبه کردیم بازمی‌شناسیم. با استفاده از فرمول (۱۱.۳) می‌بینیم که

$$[۱^۲+۲^۲+\dots+(m-۱)^۲+m^۲]+\frac{۱}{۲}m(m+۱)=\frac{۱}{۳}m(m+۱)(m+۲).$$

این رابطه را می‌توان دوباره به‌صورت

$$[۱^۲+۲^۲+\dots+(m-۱)^۲+m^۲]=\frac{۱}{۳}m(m+۱)(m+۲)$$
$$-\frac{۱}{۲}m(m+۱)$$

نوشت. سمت راست این برابری، همان‌طور که می‌توان با جبر مقدماتی به‌آسانی محاسبه کرد، به‌صورت $۱/۶m(m+۱)(۲m+۱)$ خلاصه می‌شود. بنا بر این فرمول مجموع مربعات اولین m عددطبیعی به دست می‌آید:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+m^۲=\frac{۱}{۶}m(m+۱)(۲m+۱).$$

مجموعه مسائل ۱۳

۱. مجموع اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را پیدا کنید.

۲. مسألهٔ قبل‌را مجدداً با نوشتن مجموع اعداد، یك‌بار از ۱ به‌بالا و یك‌بار از ۱۰۰ به‌پایین، حل کنید.*

---

* می‌گویند که این روش جمع اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ به وسیلهٔ گاوس، ریاضیدان معروف‌قرن نوزدهم، وقتی که شاگرد مدرسه بود، مورد استفاده قرارگرفته‌است. آموزگار (آن‌گونه‌که داستان می‌گوید) مسأله را درکلاس مطرح‌کرد و امیدوار بود که حل‌مسأله احتمالاً شاگردان را برای‌پانزده الی‌بیست دقیقه مشغول‌کند، ولی موقعی که‌گاوس جوان در مدتی‌کوتاهتر جواب را به‌دست‌آورد آموزگار وی جاخورد.

۱	۲	۳	۴	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
۱۰۰	۹۹	۹۸	۹۷	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	۴	۳	۲	۱

توجه کنید که مجموع هر زوج از اعداد این آرایه (یعنی ۱۰۰+۱، ۹۹+۲، ۹۸+۳، ۹۷+۴ و غیره) همواره برابر ۱۰۱ است. بنابراین مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ که دوبار حساب می‌شود، درست برابر آن است که ۱۰۱ را ۱۰۰ بار باهم جمع کنیم. بقیهٔ مطلب به‌عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

۳. روشی را که در مسألهٔ قبل طرحریزی شد برای اعداد صحیح ۱ تا n تعمیم داده و بدین وسیله فرمول (۱۱.۳) را به‌طریق دیگری به‌دست آورید. (توجه کنید که این شیوه را نمی‌توان برای به‌دست آوردن مجموع مربعات از ۱ تا n به‌کاربرد.)

۴. مجموع مربعات اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را تعیین کنید.

۵. برای معادلهٔ $x+y=100$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت x و y چند جواب وجود دارد. (در این مسأله ومسأله‌های بعدی، در شمارش جوابها، جوابهایی مانند $x=10$، $y=90$ و $x=90$، $y=10$ را به‌عنوان جوابهای متفاوت درنظر بگیرید. به‌عبارت دیگر منظور ما از یك جواب، زوج مرتب (x, y) است که در معادله صدق کند.) درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی چند جواب وجود دارد؟

۶. معادلهٔ $x+y=n$، که در آن n یك عدد صحیح مثبت ثابت است، درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت چند جواب دارد؟ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی چند تا؟

۷. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، جواب معادلهٔ $x+y+z=100$ است؟ چند سه‌تایی در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، جواب این معادله‌اند؟

۸. مسألهٔ ۷ را برای $x+y+z=n$ تعمیم دهید.

۹. در بسط $(x+y+z)^3$ چندجمله وجود دارند؟ در بسط $(x+y+z)^4$ چندجمله، در بسط $(x+y+z)^n$ چندجمله؟

۱۰. به منظور به دست آوردن فرمولی برای $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+m^3$، شیوه‌ای راکه در برابریهای (۱۰.۳)، (۱۱.۳)؛ (۱۲.۳) وغیره به‌کار رفت تعمیم دهید.

۹.۳ خلاصه

در n شیء مفروض، اشیاء یکسان دسته‌هایی را تشکیل می‌دهند: aتا یکسان؛ bتای دیگر یکسان؛ cتای دیگر یکسان وغیره. دراین‌صورت تعداد جایگشتهای n شیء که همگی باهم درنظر گرفته می‌شوند برابر است با

$$\frac{n!}{a!b!c!\ldots}.$$

فرمول پاسکال برای $C(n, r)$ عبارت است از

$$C(n, r)=C(n-۱, r)+C(n-۱, r-۱).$$

به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$ عبارت است از

$$(x+y)^n=C(n, ۰)x^n+C(n, ۱)x^{n-۱}y+C(n, ۲)x^{n-۲}y^۲+\cdots$$
$$+C(n, j)x^{n-j}y^j+\cdots+C(n, n)y^n.$$

نمادگذاری دیگری برای این بسط به‌صورت

$$(x+y)^n=x^n+\binom{n}{۱}x^{n-۱}y+\binom{n}{۲}x^{n-۲}y^۲+\binom{n}{۳}x^{n-۳}y^۳$$
$$+\cdots+\binom{n}{j}x^{n-j}y^j+\cdots+y^n$$

است.

بسط چندجمله‌ای $(x+y+z+w+\cdots)^n$ برابر بامجموع تمام جمله‌هایی به‌صورت

$$\frac{n!}{a!b!c!d!\ldots}x^a y^b z^c w^d\cdots,$$

است که درآن a، b، c، d، ... بر روی تمام جوابهای معادلهٔ

$$a+b+c+d+\cdots=n$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تغییر می‌کنند.

در بخش ۶.۳، مثلث پاسکال تا $n=۸$ داده شده‌است. همچنین دو رابطهٔ زیر ثابت شده است:

$$C(n, ۰)+C(n, ۱)+C(n, ۲)+C(n, ۳)+\cdots+C(n, n)=۲^n,$$
$$C(n, ۰)-C(n, ۱)+C(n, ۲)-C(n, ۳)+\cdots+(-۱)^nC(n, n)=۰.$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای از n عنصر مختلف، برابر ۲^n است؛ تعداد

زیرمجموعه‌های سره برابر $۲^n - ۱$ است؛ تعداد زیرمجموعه‌هایی که دارای r عنصر باشند برابر $C(n, r)$ است.

برای به‌دست آوردن مجموع kامین توان اولین n عدد از اعداد طبیعی، روشهایی مطرح شد. بخصوص، مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n (یعنی $k = ۱$) و مجموع مربعات آنها (یعنی $k = ۲$) به‌دست آمد:

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \cdots + n = \frac{۱}{۲} n(n + ۱),$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{۱}{۶} n(n + ۱)(۲n + ۱).$$

۴

برخی توزیعهای خاص

در آنالیز ترکیبیاتی، اغلب یک‌مسأله با فرمولبندی مجدد که بدواً صورت می‌گیرد حل می‌شود. این نکته درصفحهٔ ۳۱، درمسألهٔ مسیر شرح داده شده که آن را به‌مسألهٔ هم‌ارزی که شامل ترکیبها بود تبدیل کردیم. در این فصل به مسائل دیگری توجه می‌کنیم که وقتی ازچشم‌اندازی خاص‌موردنظر قرارمی‌گیرند به‌مسائلی شامل ترکیبها تبدیل می‌شوند.

۱.۴ اعداد فیبوناچی

این سؤال را درنظر بگیرید: به‌چندطریق می‌توان هشت علامت بعلاوه و پنج‌علامت منها را طوری دریک سطر قرار دادکه هیچ دوعلامت منهایی پهلوی‌هم قرارنگیرند؟ مثالی برای چنین آرایشی عبارت است از:

$$++-+-+++-+-+-.$$

حل مسأله، اگربه‌صورت زیر به‌آن نگاه‌کنیم، به‌سادگی انجام می‌شود؛ هشت‌علامت

بعلاوه را بااستفاده‌از تعدادی m که در وسط و اول و آخر قرار می‌گیرند به‌صورت عبارت (۱.۴) می‌نویسیم:

$$m+m+m+m+m+m+m+m+m. \qquad (۱.۴)$$

بنابراین هشت علامت بعلاوه و نه m داریم. اکنون می‌توان از این نه m پنج‌تا را انتخاب کرده و به جای آنها علامت منها قرار داد. بنابراین پاسخ سؤال برابر $C(۹, ۵)$ است.

به طور کلی می‌توانیم بگوییم که تعداد راههای نوشتن k علامت بعلاوه و r علامت منها در یك سطر، به‌طوری‌که هیچ دوعلامت منهایی پهلوی هم قرار نگیرند، برابر $C(k+۱, r)$ است. دلیل آن دقیقاً همان دلیل حالت خاص بالاست که در آن $k=۸$ و $r=۵$ است. اکنون به‌جای (۱.۴) داریم

$$m+m+m+m+\dots+m+m, \qquad (۲.۴)$$

یعنی k علامت بعلاوه و $k+۱$ نماد m . r تا از mهارا به‌علامت منها تبدیل کرده، بقیه را حذف می‌کنیم. بنابراین از میان $k+۱$ نماد m، r تا را انتخاب کرده به علامت منها تبدیل می‌کنیم و پاسخ $C(k+۱, r)$ را به‌دست می‌آوریم.

اگر r از $k+۱$ تجاوز کند، نماد $C(k+۱, r)$ برابر صفر است. این‌همان مقداری است که باید داشته‌باشد، زیرا اگر مثلاً $k=۸$ و $r=۱۲$، هیچ راهی برای نوشتن هشت علامت بعلاوه و دوازده علامت منها در یك سطر وجود ندارد که هیچ دوعلامت منهایی کنارهم قرار نگیرند.

حال به سؤال دیگری برمی‌گردیم. یك سری را درنظر می‌گیریم که شامل ده x دریك سطر است

$$x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x.$$

فرض کنیم که هر x ممکن است علامتی بعلاوه و یا منها باشد، بنابراین جمعاً $۲^{۱۰}$ یا ۱۰۲۴ حالت وجود دارد. سؤال این است: در این ۱۰۲۴ حالت چند حالت وجود دارد که در آن دو علامت منها مجاور هم قرار نمی‌گیرند؟ انواع زیر را متوالیاً درنظر می‌گیریم،

۱۰ علامت بعلاوه،

۹ علامت بعلاوه و ۱ علامت منها،

۸ علامت بعلاوه و ۲ علامت منها،

۷ علامت بعلاوه و ۳ علامت منها، وغیره.

با استفاده از نتیجه‌ای که قبلاً به دست آمد، پاسخ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$C(۱۱, ۰)+C(۱۰, ۱)+C(۹, ۲)+C(۸, ۳)+C(۷, ۴)+C(۶, ۵).$$

جمله‌های دیگری نظیر $C(۵, ۶)$، $C(۴, ۷)$ وغیره وجود دارند، ولی هریك ازاین جمله‌ها صفرند. محاسبه ساده است:

$$۱+۱۰+۳۶+۵۶+۳۵+۶=۱۴۴.$$

به‌طور کلیتر، فرض کنیم به‌جای عدد ۱۰ عدد n را به‌کار بریم. اگر n نماد x دریك سطر باشند واگر هر x، علامتی بعلاوه ویا علامتی منها باشد جمعاً ۲^n حالت وجـود دارند. از این حالتها، تعدادی کـه در آنها دو علامت منها مجاور هم قرار نمی‌گیرند، برابر است با

$$C(n+۱, ۰)+C(n, ۱)+C(n-۱, ۲)+C(n-۲,۳)+\cdots, \qquad (۳.۴)$$

که درآن، مجموع تا وقتی به‌نمادهایی از نوع $C(u, v)$ که درآنها $u<v$ می‌رسد ادامه پیدا می‌کند؛ بنا برتعریف، چنین نمادهایی باصفر نشان داده می‌شوند. بنابراین (۳.۴) معرف تعداد راههای نوشتن n علامت دریك سطر است به‌شرطی که هرکدام یك علامت بعلاوه و یـا علامت منها بوده، و هیچ دو علامت منهایی پهلوی هم قرار نگیرند. این عـدد تابعی از n است وآن را به صورت $F(n)$ می‌نویسیم، و سپس به راه دیگری به مسأله توجه می‌کنیم.

اولاً دنباله‌هایی از ایـن $F(n)$ دنباله راکـه با علامت $+$ شروع می‌شوند در نظر می‌گیریم. تعداد این دنباله‌ها برابر $F(n-۱)$ است، زیرا هریك از آنها از قرار گرفتن یك علامت بعلاوه در جلـوی هر یك از $F(n-۱)$ آرایش $n-۱$ علامت به‌دست آمده است.

ثانیـاً آن دنباله‌هـایـی از $F(n)$ دنباله را در نظـر می‌گیریم کـه با یك علامت منها شروع می‌شوند. در هر چنین دنباله‌ای علامت بعدی باید مثبت باشد، زیرا علامتهای منهای مجاور قابل قبول نیستند. بنابراین دنباله‌هایی از n علامت را که با، $-+$، شروع می‌شوند درنظرمی‌گیریم. تعداد این‌دنباله‌ها برابر $F(n-۲)$ است، زیرا هریك از این دنباله‌ها را می‌توان با قراردادن زوج، $-+$، در جلوی هر یـك از $F(n-۲)$ آرایش $n-۲$ عـلامتی به دست آورد. بنابرایـن نتیجـه می‌گیریم که

$$F(n)=F(n-۱)+F(n-۲). \qquad (۴.۴)$$

این فرمول یك رابطهٔ بازگشتی برای اعداد فیبوناچی است، کــه نام اعداد $F(n)$ است. هر وقت کــه $F(n-۱)$ و $F(n-۲)$ معلوم باشند می‌توان مقدار $F(n)$ را محاسبه کرد. مثلاً به ازای $n=۳$ داریم

$$F(۳)=F(۲)+F(۱).$$

بنابر تعریف (۳.۴) برای $F(n)$، می‌بینیم که $F(۱)=۲$ و $F(۲)=۳$، بنابراین $F(۳)=۵$. به‌همین ترتیب، بااستفاده از (۴.۴) می‌توانیم حساب کنیم که

$$F(۴)=F(۳)+F(۲)=۵+۳=۸,$$

$$F(۵)=F(۴)+F(۳)=۸+۵=۱۳,$$

$$F(۶)=F(۵)+F(۴)=۱۳+۸=۲۱,$$

$$F(۷)=F(۶)+F(۵)=۲۱+۱۳=۳۴,$$

وغیره.

دنبالهٔ فیبوناچی* را معمولاً با جمله‌هایی اضافی در ابتدا می‌نویسند، مثلاً ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...، یا ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...، یا ۰، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ...، ما اولین صورت از این سه صورت را به کار خــواهیم برد. برای این کار تعریف می‌کنیم $F(۰)=۱$، و سپس از نتایج $F(۱)=۲$ و $F(۲)=۳$ و غیــره استفاده می‌کنیم که هرجمله برابر مجموع دوجملهٔ ماقبل خودش است.

اعداد فیبوناچی معمولاً بااستفاده از ویژگی (۴.۴)،

$$F(n)=F(n-۱)+F(n-۲),$$

تعریف می‌شوند، درحالی که ما از طریق مسأله‌ای درمورد آرایشها به‌آنها رسیدیم. این رهیافت نه‌تنهــا فرمول (۴.۴) را به ما می‌دهد، بلکــه این واقعیت را توجیه می‌کند که $F(n)$ به صورت (۳.۴)، که می‌توان آن را به صورت مثلث پاسکال نیز درنظر گرفت، قابل توجیه است.

---

* برای رهیافت دیگری از این دنباله‌ها، مثلاً کسرهــای مسلسل صفحهٔ ۸۰، تألیف C. D. Olds از همین مجموعه را ببینید.

$F(۰)$	۱	۱							
$F(۱)$	۱	۲	۱						
$F(۲)$	۱	۳	۳	۱					
$F(۳)$	۱	۴	۶	۴	۱				
$F(۴)$	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱			
$F(۵)$	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱		
$F(۶)$	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	
$F(۷)$	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱

مجموع عناصر واقع در امتداد قطرها برابر مقادیر $F(n)$ است. مثلاً، $F(۵)$ را درنظر بگیرید. بنا بر (۳.۴) می‌بینیم که

$$F(۵)=C(۶, ۰)+C(۵, ۱)+C(۴, ۲)+C(۳, ۳)$$
$$=۱+۵+۶+۱=۱۳.$$

مجموعه مسائل ۱۴

۱. با استفاده از (۴.۴) مقدار $F(۱۱)$ را به‌دست آورید. با استفاده از (۳.۴) درستی پاسخ را بررسی کنید.

۲. $F(n)$ به ازای چه اعداد صحیح n، عددی زوج و به‌ازای چه اعداد صحیح n، عددی فرد است؟

۳. اگر در فرمول (۴.۴) به جای n، $n+۱$ را قرار دهیم، چه فرمولی به دست می‌آید؟

۴. ثابت کنید که $F(n+۱)=۲F(n-۱)+F(n-۲)$.

۵. به چند طریق می‌توان ده A و شش B را طوری در یک سطر قرار داد که هیچ دو Bای کنارهم قرار نگیرند؟

۶. به‌چند طریق می‌توان ده A و شش B و پنج C را طوری در یك سطر قرار داد که هیچ دو Bای کنارهم قرار نگیرند؟

۷. اگر تمام حروف کلمهٔ *Mississippi* باهم در نظر گرفته شوند، چند جایگشت ازحروف این کلمه وجود دارند به‌شرط آنکه هیچ دو iای پهلوی هم قرار نگیرند؟

۲.۴ معادله‌های خطی با ضریبهای واحد

جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=۱۲$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت x، y، z، w در نظر بگیرید. (خاطرنشان می‌کنیم که اعداد صحیح مثبت عبارت‌اند از $۱, ۲, ۳, ۴, \ldots$) درشمارش جوابها، مثلاً

$$\begin{array}{cccc} x=۱ & x=۱ & x=۱ & x=۹ \\ y=۱ & y=۱ & y=۹ & y=۱ \\ z=۱ & z=۹ & z=۱ & z=۱ \\ w=۹ & w=۱ & w=۱ & w=۱ \end{array}$$

را چهار جواب مختلف خواهیم گفت، زیرا این چهارتاییهای مرتب اعداد صحیح، ازهم متمایزند. به‌طورکلی تنها جوابهایی را یکسان درنظر می‌گیرند که مقادیر xها، مقادیر yها، مقادیر zها و مقادیر wها همزمان برابر باشند. (در وضعیتی که چهارجواب درست مانند یك تك‌جواب رفتار کنند، جوابها تحت‌عنوان «افرازهای عدد ۱۲» می‌آیند و چنین مسائلی در فصل ۶ بررسی خواهند شد.) تعداد جوابهای معادلهٔ مفروض، با درنظرگرفتن مسأله به صورت زیر، به‌آسانی تعیین می‌شود: اگر ۱۲ واحد واقع بریك سطر(که آنها را با ۱۲تا u نشان می‌دهیم) به‌وسیلهٔ ۱۱ فاصله (که آنها را با ۱۱تا s نشان می‌دهیم) ازهم جدا شده باشند، یعنی

$$u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ u, \qquad (۵.۴)$$

و اگر ۳ تای دلخواه از sهارا انتخاب کرده وبقیه را حذف کنیم، مثلاً

$$u\ \ usu\ \ u\ \ u\ \ usu\ \ u\ \ u\ \ u\ \ usu,$$

آن‌گاه s های باقیمانده، u ها را به‌چهار دسته تقسیم می‌کنند. تعداد u ها را دراین دسته‌ها می‌توان به عنوان مقادیر x، y، z، w در نظر گرفت. در مثال بالا، $x=۲$،

$y=4$، $z=5$، $w=1$. بنابراین هر انتخاب دلخواه سه s در (۵.۴)، یك جواب معادلهٔ $x+y+z+w=12$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت به دست می‌دهد وهرجواب، متناظر بایك چنین انتخابی است. نتیجه می‌شودکه تعداد جوابهای این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر است با تعداد راههای انتخاب ۳شیء از ۱۱ شیءکه برابر است با

$$C(11,3)=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165.$$

برای یك نتیجهٔ کلیتر فرض کنیم به‌جای۱۲، نماد m وبه‌جای $x+y+z+w$ مجموعی از k متغیر را قرار دهیم، و بخواهیم تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k=m \qquad (6.4)$$

را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت به‌دست‌آوریم. درحالت‌خاصی‌که هم‌اینك مطالعه شد، $m=12$ و $k=4$ بود، بنابراین با قرار دادن x_1، x_2، x_3، x_4 به جای x، y، z، w، معادله را می‌توانستیم به‌صورت $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ درآوریم که البته از لحاظ تعداد جواب با معادلهٔ قبلی هیچ اختلافی ندارد.

تعداد جوابهای x_1،x_2،...،x_k، معادلهٔ (۶.۴)، درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر است با

$$C(m-1,\, k-1). \qquad (7.4)$$

این‌رابطه را می‌توان از تعمیم استدلالی که درحالت خاص $m=12$، $k=4$ به‌کاررفت نتیجه گرفت. اکنون نماد u را، که m بار تکرار شده است، ونماد s را، که $m-1$ بار تکرار شده و uها را ازهم جدا می‌کنند، داریم:

$$u\ s\ u\ s\ u\ s\ u\ s\ \cdots\ s\ u\ s\ u.$$

برای آنکه uها را به k دسته تقسیم کنیم، $k-1$ نماد s را انتخاب می‌کنیم (و بقیه را حذف می‌نماییم). چنین انتخابی یك جواب یکتا برای (۶.۴) خواهد داد، یعنی تعداد uها در دستهٔ اول برابر x_1، تعداد uها در دستهٔ دوم برابر x_2 و غیره است. ازاین‌رو تعداد جوابهای (۶.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، همان تعداد راههای انتخاب $k-1$ نماد s ازمیان $m-1$ نماد s است، و این تعداد با رابطهٔ (۷.۴) داده می‌شود.

باید توجه‌کرد که اگر k از m بزرگتر باشد، آن‌گاه معادلهٔ (۶.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت جوابی ندارد وفرمول (۷.۴) باز معتبر است، زیرا طبق تعریف (صفحهٔ ۲۳ را ببینید)، مقدار $C(m-1, k-1)$ دراین حالت صفر است.

اکنون به مسألهٔ تعداد جوابهای یك معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برمی‌گردیم، تفاوتی که دراین‌جا وجود دارد این است که اینك متغیرها مجازند مقدار صفر را قبول کنند. برای شروع بایك حالت خاص، تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x+y+z+w=12$$

را درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی جستجو می‌کنیم. فرض‌کنیم ۱۲تا u و۳تا s را دریك سطر قرار دهیم، مثلاً،

$$u\ s\ u\ u\ u\ u\ u\ s\ u\ u\ s\ u\ u\ u\ u \qquad (8.4)$$

اگر sها را جداکننده‌های ۱۲تا u به چهار دسته بگیریم، می‌بینیم که مثال (۸.۴) دسته‌هایی‌شامل۱، ۵، ۲و۴تا uرا می‌دهد که‌باجواب $x=1$، $y=5$، $z=2$، $w=4$، برای معادلهٔ مفروض $x+y+z+w=12$ متناظرند.

ادعا می‌کنیم هرآرایشی که با ۱۲تا u و ۳تا s شروع می‌شود یك جواب می‌دهد. برای تعیین مقدار x، جای اولین s را تعیین‌کرده، تعداد uهایی راکه در سمت چپ آن هستند می‌شماریم. اگر یك آرایش با s شروع شود $x=0$، زیرا هیچ uای سمت‌چپ آن نیست. برای تعیین مقدار y، تعداد uهایی راکه بین اولین و دومین s قرار دارند می‌شماریم. اگر اولین و دومین s مجاور یکدیگر باشند، آن‌گاه $y=0$. به‌همین ترتیب مقدار z برابر با تعداد uهایی است که بین دومین و سومین s قرار دارند و مقدار w برابر تعداد uهایی است که سمت‌راست سومین s قرار دارند.

برعکس اگر با یك جواب دلخواه مانند $x=0$، $y=1$، $z=2$ و $w=9$ شروع‌کنیم، متناظر بااین جواب می‌توان ۱۲تا u و ۳تا s را دریك سطر نوشت:

$$s\ u\ s\ u\ u\ s\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ u.$$

جواب $x=9$، $y=0$، $z=1$، $w=2$ متناظر با آرایش

$$u\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ u\ s\ s\ u\ s\ u\ u$$

است.

بنابراین تعداد جوابهای $x+y+z+w=۱۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برابر همان تعداد راههای نوشتن ۱۲ تا u و ۳ تا s در یك سطر است. طبق مطالب بخش۲.۳ این تعداد برابر با $C(۱۵, ۳)$ است.

این نتیجه را برای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_k=m \qquad (۹.۴)$$

با k متغیر که مجموع آنها باید همواره برابر m باشد، به‌وسیلهٔ آرایش مشابهی که درحالت خاص داده شد، تعمیم می‌دهیم. تعداد جوابهای معادلهٔ (۹.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی همان تعداد راههای آرایش mتا u و ۱ $-k$تا s دریك سطر است و تعداد چنین آرایشهایی برابر است با:

$$C(m+k-۱, k-۱).$$

فرض کنیم m و k دو عدد صحیح مثبت ثابت باشند. تعداد جوابهای معادلهٔ (۹.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برابر است با:

$$C(m+k-۱, m) \text{ یا } C(m+k-۱, k-۱) \qquad (۱۰.۴)$$

قسمت دوم (۱۰.۴) از روی قسمت اول به موجب ویژگی پایه‌ای $C(n, r)=C(n, n-r)$ نتیجه می‌شود.

مجموعه مسائل ۱۵*

۱. معادلهٔ $x+y+z+w=۵۰$ (الف) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت (ب) در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، چند جواب دارد؟

۲. ثابت کنید کـه تعداد جوابهـای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۹$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۹$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است.

۳. بررسی کنید دوعبارتی که در (۱۰.۴) داده شده‌اند مساوی‌اند.

۴. ثابت کنید که تعداد جوابهای معادلهٔ (۶.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر

---

* پاسخهای این مسائل ومسائل بعدی را ممکن است برحسب نماد $C(n, r)$ داد. مثلاً پاسخی نظیر $C(۳۷, ۵)-C(۲۶, ۴)$ به همین صورت، بدون تلاشی برای تغییرشکل یا ساده‌کردن بیشتر آن، قابل‌قبول است.

با تعداد جوابهای معادلهٔ $m-k+1$ متغیری

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{m-k+1}=m$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است.

۵. ثابت کنید که تعداد جوابهای دومعادلهٔ

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=8 \quad \text{و} \quad x_1+x_2+\cdots+x_9=5$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی یکی است.

۶. بین اعـداد ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ چند عدد وجود دارند کــه مجموع رقمهای آنها (الف) مساوی ۶؛ (ب) کمتر از ۶ باشد.

۷. در بسط

الف) $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)^{17}$؛

ب) $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)^t$؛

که در آن k و t دوعدد صحیح مثبت‌اند، چندجمله وجود دارد؟

۳.۴ ترکیبها با تکرارها

نماد $C(n,r)$، تعدادترکیبهای n شیء مختلف را نشان می‌دهد که هر بار rتای آنها را اختیار می‌کنیم. اکنون فرض کنیم که از هریك از این n شیء چندنمونهٔ همانند، مثلاً کپیهای یکسان کتابها در یك کتابفروشی، وجود داشته باشند. بنابراین می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که: برای n رستهٔ متمایز از اشیاء، که هر رسته شامل تعداد نامحدودی شیء است، چند ترکیب مختلف از r شیء وجــود دارند؟ (هر ترکیب ممکن است شامل چند شیء نامتمایز از اشیاء یك رسته باشد.) این سؤال بـه مسألهٔ تعیین تعداد جوابهای

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=r$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برمی‌گردد، زیرا می‌توانیم x_1تا از اولین شیء، x_2تـا از دومین شیء، ...، x_nتا از nامین شیء اختیار کنیم. آن‌گاه با قرار دادن n و r به جای m و k در فرمول (۱۰.۴) نتیجهٔ زیر به دست می‌آید.

تعداد ترکیبهای r به r از n شیء مختلف، که هریك ازاشیاء به‌تعداد نامحدودی در دسترس است، برابر است با

$$C(n+r-۱,\ r). \qquad (۱۱.۴)$$

مثلاً، فرض کنید سؤال کنیم که چند مجموعهٔ مختلف از سه سکه‌می‌توان تشکیل داد، به‌طوری که هر سکه، یك یك‌سنتی، یك پنج‌سنتی، یك ده‌سنتی یا یك بیست‌وپنج سنتی باشد. دراین‌جاداریم $r=۳$، و$n=۴$، و بنابراین طبق (۱۱.۴) پاسخ برابر $C(۶,\ ۳)$ یا ۲۰ است. با برگشت به‌تحلیلی که به فرمول (۱۱.۴) منجر شد، توجه می‌کنیم که سؤال به تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۳$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برمی‌گردد که در آن $x_۱$ را به‌عنوان تعداد یك سنتیها، $x_۲$ رابه‌عنوان تعداد پنج‌سنتیها و$x_۳$ را به‌عنوان تعداد ده‌سنتیها و $x_۴$ را به‌عنوان تعداد بیست‌وپنج‌سنتیهایی که‌در تشکیل یك مجموعهٔ ۳ سکه‌ای به‌کار می‌روند تعبیرمی‌کنیم.

به‌عنوان مثالی دیگر، مسألهٔ ۴.۱ فصل اول را در نظر می گیریم. خلاصهٔ مسأله‌چنین‌است: بیست کتاب‌مختلف را درنظربگیرید که ازهرکدام تعدادنامحدودی در دسترس است. به‌چند طریق می‌توان ده کتاب انتخاب‌کرد به‌شرط آنکه (الف) تکرار مجاز باشد، (ب) تکرار مجاز نباشد، به طوری که الزاماً ده کتاب با هم متفاوت باشند؟ قسمت (ب) درست موضوع انتخاب ده شیء از بیست شیء است، بنا براین پاسخ برابر $C(۲۰,\ ۱۰)$ است. قسمت (الف) تعداد ترکیبهای ده شیء از بیست‌شیء متفاوتی است که ازهریك‌نمونه‌های متعددی دردسترس است. بنا براین طبق فرمول(۱۱.۴) با $r=۱۰$ و $n=۲۰$، پاسخ قسمت (الف) داده می‌شود، یعنی

$$C(۲۹,\ ۱۰)=\frac{۲۹!}{۱۰!۱۹!}.$$

مجموعه مسائل ۱۶

۰۱ درتوضیح فرمول (۱۱.۴) در متن‌کتاب بیان شد که هریك از اشیاء «به‌تعدادی نامحدود در دسترس‌اند». ولی واقعاً لازم نیست‌که تعداد نامحدود باشد. از هر یك از n شیء چند نمونه باید موجود باشد؟

۰۲ اگر هر سکه بتواند یك سنتی، پنج سنتی، ده سنتی، بیست وپنج سنتی، و پنجاه سنتی، و یا صد سنتی باشد چند گردایهٔ مختلف از شش سکه می‌توان تشکیل داد؟

۰۳ مهره‌های یك بازی به سه‌رنگ قرمز، سفید و آبی هستند. از ده مهره چندترکیب مختلف وجود دارد؟

۰۴ یك مغازهٔ اسباب‌بازی‌فروشی پنج‌رنگ مهره دریك اندازه دارد. هردوجین آنها به‌ده سنت قیمت‌گذاری شده است. برای ده سنت چندترکیب رنگی مختلف وجود دارد؟

۰۵ اعداد صحیح هفت رقمی یعنی اعـداد صحیحی از ۱۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹ را درنظر بگیرید. این اعداد را به‌صورت زیر در زیرمجموعه‌هایی جدا ازهم قرار دهید: اعداد را دریك زیرمجموعه قرار دهید اگر و فقط اگر ارقام آنها به عنوان یك گردایه، مثل هـم باشند. مثلا ۸۱۲۲۳۳۳ و ۳۲۱۳۲۸۳ در یك زیرمجموعه جا می‌گیرند. دراین دسته‌بندی چند زیرمجموعه وجود دارد؟

۴.۴ معادله‌های باجوابهای مشروط

در بخش ۲.۴ مسألهٔ تعداد جوابهـای معادله‌ای مانند $x+y+z+w=$ ۱۲ را، ابتدا برای جوابهایی‌که به مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت و سپس برای آنهایی‌که به مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی محدود می‌شدند، بررسی‌کردیم. وقتی می‌گوییم که x یك عدد صحیح مثبت است مثل این است‌که بگوییم x عدد صحیحی است کـه در $x>$ ۰، یا x عدد صحیحی است کـه در $x \geqslant$ ۱ صدق می‌کند. وقتی می‌گوییم x یك عدد صحیح نامنفی است مثل این است که بگوییم x عدد صحیحی است که در $x \geqslant$ ۰ صادق است.

اینك سؤال را به‌این صورت مطرح می‌کنیم: معادلهٔ

$$x+y+z+w=۴۸ \qquad (۱۲.۴)$$

چندجواب صحیح بزرگتر از ۵ دارد؟ مثلاً $x=$ ۶، $y=$ ۱۰، $z=$ ۱۲، $w=$ ۲۰ یك جواب است و می‌خواهیم تعداد چنین جوابهایی را پیدا کنیم. چون هریك از متغیرها باید بزرگتر از ۵ باشد،کم‌کردن ۵ واحد از هر متغیر، مجموعهٔ جدیدی از چهار عدد مثبت

$$r=x-۵,\ s=y-۵,\ t=z-۵,\ u=w-۵ \qquad (۱۳.۴)$$

را به‌دست می‌دهد که مجموع آنها برابر ۲۸ است:

$$r+s+t+u=x-۵+y-۵+z-۵+w-۵$$
$$=x+y+z+w-۲۰=۲۸$$
$$r+s+t+u=۲۸ \qquad (۱۴.۴)$$

بنابراین با جایگذاری، یا تبدیل (۱۳.۴)، معادله‌های (۱۴.۴) و (۱۲.۴) به هم مربوط می‌شوند. مثلاً جواب $x=۶$، $y=۱۰$، $z=۱۲$، $w=۲۰$ برای معادلهٔ (۱۲.۴)، با جواب $r=۱$، $s=۵$، $t=۷$ و $u=۱۵$ برای معادلهٔ (۱۴.۴) متناظر است. مثالهای دیگری عبارت‌اند از:

$x=۱۰$		$r=۵$
$y=۱۱$	متناظر است با	$s=۶$
$z=۱۳$		$t=۸$
$w=۱۴$		$u=۹$

و

$x=۲۵$		$r=۲۰$
$y=۹$	متناظر است با	$s=۴$
$z=۸$		$t=۳$
$w=۶$		$u=۱$

اکنون چون باید هر یك از x و y و z و w از ۵ بزرگتر باشد، هر یك از r، s، t، u باید از ۰ بزرگتر باشد، یعنی باید هر یك از r، s، t، u عدد صحیح مثبتی باشد. بنابراین هرجواب معادلهٔ (۱۲.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتراز ۵، متناظر با یك جواب معادلهٔ (۱۴.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت‌است، و به هرجواب معادلهٔ (۱۴.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، یك جواب از معادلهٔ (۱۲.۴) در مجموعهٔ اعدادصحیح بزرگتراز ۵ متناظر است. مثلاً اگرباجواب

$$r=۱۵,\ s=۱,\ t=۸,\ u=۴$$

از معادلهٔ (۱۴.۴) شروع کنیم، در به دست آوردن جواب

$$x=۲۰,\ y=۶,\ z=۱۳,\ w=۹$$

برای معادلهٔ (۱۲.۴) از تبدیل (۱۳.۴) استفاده می‌کنیم. پس بین جوابهای معادلهٔ (۱۲.۴)در مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتراز ۵ وجوابهای معادلهٔ(۱۴.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت یك تناظر یك به‌یك برقرار است.

بنا براین می‌بینیم که تعداد جوابهای معادلهٔ (۱۲.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتراز ۵، برابر تعداد جوابهای معادلهٔ (۱۴.۴) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. با به‌کاربردن فرمول (۷.۴) صفحهٔ ۶۱ برای معادلهٔ (۱۴.۴)، می‌بینیم که این تعداد برابر است با:

$$C(۲۸-۱,\ ۴-۱) \text{ یا } C(۲۷,\ ۳)$$

اگر متغیرها به‌شرایط متفاوتی مقید باشند، ایده‌ای که دراین‌جا ازآن استفاده شد باز دقیقاً به‌خوبی به‌کارمی‌رود. مثلاً، مسألهٔ زیر را درنظرمی‌گیریم: چندجواب صحیح معادلهٔ $x+y+z+w=۴۸$ درشرایط زیر صدق می‌کنند:

$$x>۵,\quad y>۶,\quad z>۷,\quad w>۸\,? \qquad (۱۵.۴)$$

دراین حالت برای به‌دست‌آوردن یك مجموعهٔ جدید از اعدادی (که‌آنهارا r، s، t، u می‌نامیم) وهرکدام یك عدد مثبت است، ازهرجواب معادله به‌ترتیب ۵تا از x، ۶تا از y، ۷تا از z و ۸تا از w کم می‌کنیم. پس این بار تبدیل به صورت زیر است:

$$r=x-۵,\quad s=y-۶,\quad t=z-۷,\quad u=w-۸,$$

یا

$$x=r+۵,\quad y=s+۶,\quad z=t+۷,\quad w=u+۸.$$

اگر این عبارات را درمعادلهٔ $x+y+z+w=۴۸$ قرار دهیم، معادلهٔ

$$r+۵+s+۶+t+۷+u+۸=۴۸,$$

یا

$$r+s+t+u=۲۲, \qquad (۱۶.۴)$$

به‌دست می‌آید.

هرجواب صحیح معادلهٔ $x+y+z+w=۴۸$ که مقید به‌شرایط (۱۵.۴)

است با یك جواب معادلهٔ (۱۶.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت متناظر است. مثلاً جواب $x=۶$، $y=۱۰$، $z=۱۲$، $w=۲۰$ با جواب $r=۱$، $s=۴$، $t=۵$ و $u=۱۲$ از معادلهٔ (۱۶.۴) متناظر است. بین جوابها یك تناظر یك به‌یك وجود دارد، بنا براین تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x+y+z+w=۴۸$$

که‌مقید به‌شرایط (۱۵.۴) هستند، برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ $r+s+t+u=۲۲$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. طبق فرمول (۷.۴) صفحهٔ ۶۱ ، این تعداد برابر است با

$$C(۲۲-۱, ۴-۱) \text{ یا } C(۲۱, ۳)$$

اکنون برای به‌دست‌آوردن بعضی از فرمولهای کلی، به این ایده‌ها رسمیتی می‌دهیم. فرض کنیم به‌جای عدد ۴۸، حرف m را قرار دهیم، واز آنجا معادلهٔ

$$x+y+z+w=m$$

را در نظر بگیریم. بعلاوه فرض کنیم به جای شرایط (۱۵.۴) روی x، y، z، w، شرایط زیر را داشته‌باشیم

$$x>c_۱,\quad y>c_۲,\quad z>c_۳,\quad w>c_۴, \qquad (۱۷.۴)$$

کـه درآنهـا $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، $c_۴$ اعداد صحیح ثابتی هستند. اکنون تبدیل به صورت زیر است:

$$r=x-c_۱,\quad s=y-c_۲,\quad t=z-c_۳,\quad u=w-c_۴,$$

یا

$$x=r+c_۱,\quad y=s+c_۲,\quad z=t+c_۳,\quad w=u+c_۴.$$

اگر این مقادیر را درمعادلهٔ $x+y+z+w=m$ قرار دهیم، معادلهٔ

$$r+c_۱+s+c_۲+t+c_۳+u+c_۴=m,$$

یا

$$r+s+t+u=m-c_۱-c_۲-c_۳-c_۴ \qquad (۱۸.۴)$$

به‌دست می‌آید.

بنا براین تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x+y+z+w=m$ کـه مقید به شرایط (۱۷.۴) هستند برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ (۱۸.۴) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت r، s، t، u است. طبق فرمول (۷.۴) صفحهٔ ۶۱ ، این تعـداد برابر است با

$$C(m-c_۱-c_۲-c_۳-c_۴-۱,\ ۳). \qquad (۱۹.۴)$$

اگر به جای x، y، z، w به ترتیب $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ را قرار دهیم، می‌توان نتیجه را به‌صورت زیر بیان کرد: تعداد جوابهای صحیح $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=m$$

که مقید به‌شرایط

$$x_۱>c_۱,\quad x_۲>c_۲,\quad x_۳>c_۳,\quad x_۴>c_۴$$

هستند، با فرمول (۱۹.۴) داده می‌شود.

اکنـون k متغیر $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ...، x_k و k ثابت صحیح $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، ...، c_k وجود دارند. بنابراین از توسیع فوری نظریهٔ بالا نتیجه می‌شود که:

تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_k=m \qquad (۲۰.۴)$$

که در شرایط

$$x_۱>c_۱,\quad x_۲>c_۲,\quad x_۳>c_۳,\quad \ldots,\quad x_k>c_k \qquad (۲۱.۴)$$

صدق می‌کنند برابر است با

$$C(m-c_۱-c_۲-c_۳-\cdots-c_k-۱,k-۱). \qquad (۲۲.۴)$$

تذکر: اگرچه در مثالهایی کـه به این نتیجهٔ کلی منجر شد، اعـداد صحیح $c_۱$ و $c_۲$ وغیره راکه اختیارکردیم همگی مثبت بودند، ولی این نتیجه برای اعداد صحیح دلخواه $c_۱$، $c_۲$، ...، c_k مثبت، منفی ویا صفر برقرار است.

مجموعه مسائل ۱۷

۱. بین جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=۲۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر از ۵ و جوابهای $r+s+t+u=۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت به‌تفصیل یك تناظر یك به‌یك بنویسید.

۲. در مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر از ۷، معادلهٔ $x+y+z+w=۱۰۰$ چند جواب دارد؟

۳. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=50$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با شرط (الف) $x_5>12$؛ (ب) $x_5>12$ و $x_4>7$ پیدا کنید.

۴. تعداد جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=1$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح بزرگتر از ۴−، یعنی درمجموعهٔ اعدادصحیح... ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ ,۱− ,۲− ,۳− ، تعیین کنید.

۵. تعداد جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=20$ را درمجموعهٔ اعدادصحیح مثبت با شرط (الف) $x>6$؛ (ب) $x>6$ و $y>6$؛ (ج) $x>6$، $y>6$ و $z>6$ تعیین کنید.

۶. تعداد جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=20$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشرط (الف) $x\geqslant 6$؛ (ب) $x\geqslant 6$ و $y\geqslant 6$ تعیین کنید.

۷. فرمولی برای تعداد جوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=m$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی بیابید که درشرط (الف) $x\geqslant c_1$؛ (ب) $x\geqslant c_1$ و $y\geqslant c_2$ صدق کنند.

۸. چند عدد صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ وجود دارند که مجموع ارقام آنها ۱۳ است؟

۵.۴ خلاصه

اعداد فیبوناچی ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ...، دارای این ویژگی هستند که هر عضو این دنباله (به جز دو جملهٔ اول) برابر با مجموع دو جملهٔ ماقبل است. این ویژگی با فرمول بازگشتی

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

بیان می‌شود. گرچه در بسیاری ازکتابها اعداد فیبوناچی به‌این‌طریق تعریف‌می‌شوند ولی ما از آنها، با تعریف $F(n)$ به صورت تعداد راههایی که می‌توان n علامت بعلاوه یا منها را طوری پهلوی هم نوشت که هیچ دو علامت منهایی در مجاورت یکدیگر قرارنگیرند، گفتگو کردیم؛ بنابراین $F(1)=2$، $F(2)=3$، $F(3)=5$، $F(5)=8$ وغیره. ثابت شدکه باتعریف $F(0)$ برابر ۱، دنبالهٔ تام اعداد فیبوناچی را از فرمول

$$F(n)=C(n+1,\,0)+C(n,\,1)+C(n-1,\,2)+C(n-2,\,3)+\cdots$$

به دست می‌آوریم، کـه در آن مجموع سمت راست وقتی خاتمه پیدا می‌کندکـه جمله‌هایی برابر صفر (جمله‌هایی به‌صورت $C(u, v)$ با $u<v$) ظاهر شوند.

فرض کنیم m و k اعداد صحیح مثبت ثابت باشند. تعداد جوابهای

$$x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_k=m$$

در مجموعهٔ اعـداد صحیح مثبت برابر $C(m-۱, k-۱)$؛ و در مجموعهٔ اعداد صحیح نـامنفی برابر $C(m+k-۱, m)$ است. بعلاوه اگـر $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$، ...، c_k اعداد صحیح ثابت باشندآن گاه تعداد جوابهایی که در مجموعهٔ اعداد صحیح‌اند و در شرایط

$$x_۱>c_۱,\ x_۲>c_۲,\ x_۳>c_۳,\ \ldots,\ x_k>c_k$$

صدق می‌کنند برابر است با

$$C(m-c_۱-c_۲-c_۳-\cdots-c_k-۱,\ k-۱).$$

دوجواب را مساوی می‌گویند اگر وتنها اگرمقادیر $x_۱$ یکی باشند، مقادیر $x_۲$ یکی باشند، مقادیر $x_۳$ یکی باشند و قس‌علی‌هذا. (مسأله‌هـایی دربارهٔ تعداد جوابهـای معادله‌ای مفروض که جوابها درشرایطی حتی بیشترصدق کنند، مثلاً نظیراینکه جوابها درمجموعهٔ اعداد صحیح ۱ تا ۷ صادق باشند، درفصل بعدی مطرح می‌شوند.)

تعداد ترکیبهـای r به r از n شیء مختلف (مانند سکه‌ها، کتابها یا تمبرها) که هرکـدام از آنها به تعداد زیادی در دسترس است برابر $C(n+r-۱, r)$ است. در این جا n و r اعـداد صحیح مثبت را نشان می‌دهند، اما ممکن است n بزرگتراز، برابر با، یاکوچکتراز r باشد.

۵

اصل شمول ـ عدم شمول؛ احتمال

دراین فصل قضیه‌ای خیلی کلی را ثابت می کنیم و سپس آن را برای مسائلی خاص به‌کار می بریم. ایدهٔ احتمال در اواخر فصل معرفی می‌شود.

۱.۵ یك نتیجهٔ کلی

مناسب است که به‌وسیلهٔ دنباله‌ای از سه مسأله، که به ترتیب درجهٔ مشکل بودنشان عنوان می‌شوند، به اصل شمول ـ عدم شمول برسیم. اولین مسأله به هیچ وجه خیلی مشکل نیست.

مسألهٔ ۱.۵ از ۱ تا ۶۳۰۰، چند عدد بر ۵ تقسیمپذیر نیستند؟ چون دقیقاً از هر پنج عدد، یکی بر ۵ تقسیمپذیر است، می‌بینیم که از ۶۳۰۰ عدد موردنظر، دقیقاً ۶۳۰۰/۵ یا ۱۲۶۰ عدد بر ۵ تقسیمپذیرند. بنابراین پاسخ مسأله عبارت است از

$$۶۳۰۰ - ۱۲۶۰ = ۵۰۴۰.$$

مسألهٔ ۲.۵ بین ۱ تا ۶۳۰۰، چندعدد نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند و نه بر۳؟ برای پاسخ دادن بـه این سؤال مـی‌توانیم با استدلالی مشابه آنچه در مسألهٔ ۱.۵ ارائه شد، شروع کنیم و بگوییم که تعداد اعداد موردنظری که بر۵ تقسیم‌پذیرند برابر ۱۲۶۰ و تعداد اعدادی که بر ۳ تقسیم‌پذیرند برابر ۶۳۰۰/۳ یا ۲۱۰۰ است. اما

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰$$

پاسخ مسأله نیست، زیرا اعداد صحیحی را بیش‌از آنچه باید،از ۶۳۰۰کم کرده‌ایم. اعدادی مانند ۱۵، ۳۰، ۴۵، ... که هم بر۳ وهم بر ۵ تقسیم‌پذیرند دوبار از ۶۳۰۰ عدد صحیح موردنظر کم‌شده‌اند. بنابراین می‌بینیم که دوباره باید تعداد اعدادی را که هم بر ۵ و هم بر ۳، یعنی بر ۱۵، تقسیم‌پذیرند* اضافه‌کنیم. ایـن تعداد برابر ۶۳۰۰/۱۵ یا ۴۲۰ است. بنابراین پاسخ مسأله برابر است با:

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰ + ۴۲۰ = ۳۳۶۰.$$

مسألهٔ ۳.۵ از ۱ تـا ۶۳۰۰، چند عـدد صحیح بـر هیچیك از اعـداد ۳، ۵، ۷ تقسیم‌پذیر نیستند؟ برای حل این مسأله می‌توانیم شبیه استدلال قبلی کار را شروع کنیم و ابتدا اعدادصحیحی راکه بر۳ تقسیم‌پذیرند، به‌تعداد ۲۱۰۰عدد،آنهایی را که بر۵ تقسیم‌پذیرند، به تعداد ۱۲۶۰ عدد، و آنهایی را کـه بر ۷ تقسیم‌پذیرند، به‌تعداد ۹۰۰ عدد از ۶۳۰۰کم کنیم. پس

$$۶۳۰۰ - ۲۱۰۰ - ۱۲۶۰ - ۹۰۰$$

مقدمه‌ای برای ارائهٔ پاسخ است. اما، اعدادی‌که هم به ۳ و هم به ۵ تقسیم‌پذیرند، اعدادی کـه هم به ۵ و هم به ۷ تقسیم‌پذیرند، و اعدادی کـه هم به ۳ و هم به ۷ تقسیم‌پذیرند، دوبار کنار گذاشته‌شده‌اند. از این‌رو باید تعداد اعداد صحیحی که هم به ۳ وهم به ۵ تقسیم‌پذیرند، یعنی ۶۳۰۰/۱۵ یا ۴۲۰، تعداد اعدادی‌که هم به ۳ و هم به ۷ تقسیم‌پذیرند، یعنی ۶۳۰۰/۲۱ یا ۳۰۰، وهمچنین تعداد اعدادی‌که هم به۷ و هم به۵ تقسیم‌پذیرند، یعنی۶۳۰۰/۳۵ یا ۱۸۰ را دوباره اضافه‌کنیم. اکنون داریم:

---

* بحثی کاملتر از ویژگیهای چنین تقسیم‌پذیریی درفصل ۱ کتاب
I. Niven's Numbers: Rational and Irrational
که جزء مجموعهٔ ریاضیات پیش دانشگاهی است داده شده‌است.

$$۶۳۰۰-۲۱۰۰-۱۲۶۰-۹۰۰+۴۲۰+۳۰۰+۱۸۰$$

که به پاسخ مسأله نزدیکتر است. اما، به دلیل وجود اعداد صحیحی که هم بر ۳ و هم بر ۵ و هم بر ۷ تقسیمپذیرند، مثل ۱۰۵، ۲۱۰، ۳۱۵ وغیره، یك اصلاح نهایی نیز باید انجام شود. چنین اعداد صحیحی در ۶۳۰۰ عدد اصلی به‌حساب آمده، در ۲۱۰۰و ۱۲۶۰ و ۹۰۰ خارج‌شده وسپس در ۴۲۰، ۳۰۰، و۱۸۰ دوباره به‌حساب آمده‌اند. پس نتیجه اینکه هرچنین عددی یك بار به‌حساب آمده، سه بار خارج شده و سپس سه‌بار به‌حساب آمده‌است. از این‌رو دراصلاح نهایی باید آنها را دوباره خارج کرد، وبنابراین‌ما ۱۰۵/۶۳۰۰ یا ۶۰ را از پاسخ بالاکم می‌کنیم. بنابراین پاسخ مسألهٔ ۳.۵ برابر است با:

$$۶۳۰۰-۲۱۰۰-۱۲۶۰-۹۰۰+۴۲۰ \qquad (۱.۵)$$
$$+۳۰۰+۱۸۰-۶۰=۲۸۸۰.$$

پس‌از ۱ تا ۶۳۰۰، تعداد ۲۸۸۰ عدد صحیح وجود دارند که بر هیچیك از اعداد ۳، ۵، ۷ تقسیمپذیر نیستند.

با توسل به‌یك اصل کلی می‌توان به‌این سه مسألهٔ موردبحث پاسخ داد. فرض کنید N شیء داریم‌که بعضی از این اشیاء دارای ویژگی α بوده و بعضی این ویژگی را ندارند. فرض‌کنید $N(\alpha)$ معرف تعداد اشیایی باشد‌که دارای ویژگی α هستند. به‌همین ترتیب فرض‌کنید بعضی ازاشیاء دارای ویژگی β هستند و بعضی این ویژگی را ندارند. فرض‌کنید $N(\beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای ویژگی β هستند. اگر ویژگیهای دیگری مانند γ، δ، ...، موجود باشند، تعداد اشیایی راکه دارای ویژگی γ، تعداد اشیایی را که دارای ویژگی δ و ...، هستند با $N(\gamma)$، $N(\delta)$ و... نشان می‌دهیم.

در مسائل بالا، اشیاء، اعداد صحیح از ۱ تا ۶۳۰۰ هستند و بنابراین $N=۶۳۰۰$. ویژگیهای α، β، ... ویژگیهای تقسیمپذیری هستند؛ مثلاً یك‌عدد صحیح دارای ویژگی γ است اگر بر ۷ تقسیمپذیر باشد.

تحلیل کلی را ادامه می‌دهیم، فرض‌کنیم $N(\alpha, \beta)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای دو ویژگی α و β هستند و $N(\alpha, \beta, \gamma)$ معرف تعداد اشیایی باشد که دارای سه ویژگی α، β، γ هستند. به همین طریق $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ معرف تعداد اشیایی باشدکه دارای چهار ویژگی α، β، γ، δ هستند.

حال فرض می کنیم این سؤال مطرح باشد: چندتا از N شیء ویژگی α را

ندارند؟ با یك تفریق ساده پاسخ $N-N(\alpha)$ حاصل می‌شود. این سؤال شبیه مسألهٔ ۱.۵ است.

چند شیء هیچ یك از ویژگیهای α و β را ندارند؟ پاسخ برابر

$$N-N(\alpha)-N(\beta)+N(\alpha, \beta)$$

است. این شبیه مسألهٔ ۲.۵ است.

چند شیء هیچ یك از سه ویژگی α و β و γ را ندارند؟ پاسخ برابر است با:

$$N-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma) \tag{۲.۵}$$
$$+N(\alpha, \beta)+N(\alpha, \gamma)+N(\beta, \gamma)-N(\alpha, \beta, \gamma).$$

حال این نتیجه را که شبیه پاسخ مسألهٔ ۳.۵ است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ابتدا شیئی را درنظرمی‌گیریم که هیچیك‌از ویژگیهای α و β و γ را ندارد. چنین شیئی در جملهٔ N به‌حساب می‌آید ولی در هیچ یك از جمله‌های دیگر رابطهٔ (۲.۵) به‌حساب نمی‌آید. ازاین‌رو یك چنین شیئی فقط یك‌بار به‌حساب می‌آید.

سپس شیئی را درنظرمی‌گیریم که دقیقاً دارای یکی‌ازسه‌ویژگی، مثلاً دارای ویژگی β باشد. چنین شیئی در دوتا از جمله‌های رابطهٔ (۲.۵)، یعنی N و $N(\beta)$، به‌حساب می‌آید؛ ولی چون $N(\beta)$ دارای علامت منفی است، چنین‌شیئی در رابطهٔ (۲.۵) به‌حساب نمی‌آید.

سپس‌شیئی را درنظرمی‌گیریم که دقیقاً دارای دو ویژگی، مثلاً β و γ باشد. چنیـن شیئی در (۲.۵) در جمله‌هـای N، $N(\beta)$، $N(\gamma)$ و $N(\beta, \gamma)$ به حساب می‌آید؛ ولی درجمله‌های دیگر به‌حساب نمی‌آید. بنابراین درنتیجه، به‌دلیل آرایش علامتهای مثبت ومنفی در (۲.۵)، چنین شیئی بااین فرمول ابداً به‌حساب نمی‌آید.

سرانجام شیئی را درنظر می‌گیریم کـه سه ویژگی α، β و γ را دارا باشد. این شیء درهر یك از هشت جملهٔ رابطه (۲.۵) به حساب می‌آید، امـا در واقع به دلیل آرایش علامتها این شیء اصلاً به‌حساب نمی‌آید.

از جمعبندی بحث، می‌بینیم کـه فرمول (۲.۵) درواقع آن اشیاء و تنها آن اشیایی راکه هیچیك از ویژگیهای α، β، γ، را ندارند به‌حساب می‌آورد.

فرمول (۲.۵) می‌تواند به هر تعداد دلخواهی از ویژگیها تعمیم داده شود. تعداد اشیایی که هیچیك از ویژگیهای α، β، γ، ... را ندارند برابراست با

$$\begin{aligned}
&N\\
&-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)-\cdots\\
&+N(\alpha,\ \beta)+N(\alpha,\ \gamma)+N(\beta,\ \gamma)+\cdots \qquad (۳.۵)\\
&-N(\alpha,\ \beta,\ \gamma)-\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

این اصل شمول ـ عدم شمول است که عنوان این فصل را تشکیل می‌دهد. برای اثبات آن، نشان خواهیم داد شیئی که دارای یك یاچندتا از ویژگیهای α، β، γ، ... است درواقع با فرمول (۳.۵) به حساب نمی‌آید. این استدلال ثابت خواهد کرد که عبارت (۳.۵) دقیقاً آن اشیایی راکه هیچیك از ویژگیها را ندارند به حساب می‌آورد، زیرا چنین اشیایی فقط در جملهٔ N، و نه درهیچ یك از جمله‌های دیگر (۳.۵)، به‌حساب می‌آیند.

شیئی مانند T را درنظر می‌گیریم که دقیقاً دارای j ویژگی باشد، که درآن j یك‌عدد صحیح مثبت‌است. درفرمول(۳.۵)، T به‌وسیلهٔ جملهٔ N به‌حساب‌می‌آید. درسطر دوم،

$$-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)-\cdots,$$

شیء T، j بار، یاآنچه باآن برابر است، یعنی $C(j,\ ۱)$ بار، به‌حساب می‌آید. در سطر سوم،

$$+N(\alpha,\ \beta)+N(\alpha,\ \gamma)+N(\beta,\ \gamma)+\cdots,$$

شیء T به‌اندازهٔ $C(j,\ ۲)$ بار به‌حساب‌می‌آید، زیرا این همان تعداد جمله‌هایی با دو ویـژگی از j ویـژگی T است. به همین ترتیب در سطر چهـارم، T درست $C(j,۳)$ بار به‌حساب‌می‌آید وقس‌علی‌هذا. به دلیل آرایش علامتهای مثبت و منفی در(۳.۵)، می‌بینیم که T در واقع به‌اندازهٔ

$$۱-C(j,\ ۱)+C(j,\ ۲)-C(j,\ ۳)+C(j,\ ۴)-\cdots$$

بار به‌حساب‌می‌آید. طبق ویژگی (۷.۳) بخش ۶.۳، مقدار این عبارت برابر صفر است. بنابراین قضیهٔ کلی را ثابت کرده‌ایم.

مجموعه مسائل ۱۸

۱. فرمول (۳.۵) را برای حالتی با چهار ویژگی α، β، γ، و δ به صورت کامل بنویسید.

۲. با فرض آنکه r ویژگی α، β، γ، ... وجود داشته باشند، در فرمول (۳.۵) چند جمله وجود دارد؟

۳. از ۱ تا ۳۳۰۰۰، چند عدد صحیح بر هیچیك از اعداد ۳، ۵، ۱۱ تقسیم‌پذیر نیستند.

۴. از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰، چند عدد صحیح وجود دارند که نه توان دوم کامل، نه توان سوم کامل، و نه توان چهارم کامل باشند؟

۵. با استفاده از نمادگذاریی همانند فرمول (۳.۵)، با درنظر گرفتن دقیقاً پنج ویژگی α، β، γ، δ، ε، فرمولی برای تعداد اشیایی بنویسید که دارای سه ویژگی α، β، γ هستند ولی ویژگیهای δ و ε را ندارند.

۶. با فرض یك مجموعه از اشیاء و درنظر گرفتن چهار ویژگی α، β، γ، δ، فرمولی برای تعداد اشیایی بنویسید که دارای ویژگی β بوده ولی هیچیك از ویژگیهای α، γ، و δ را ندارند.

۲.۵ کاربردها برای معادله‌ها و ترکیبهای باتکرار

مسألهٔ ۴.۵ معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=20 \qquad (۴.۵)$$

با شرایط $x_1\leqslant 6$، $x_2\leqslant 7$، $x_3\leqslant 8$ و $x_4\leqslant 9$، چند جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت دارد؟ بر حسب نمادگذاری بخش قبل فرض کنیم «اشیاء»، جوابهای معادلهٔ (۴.۵) درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشند؛ مثلاً، مجموعهٔ

$$x_1=2,\ \ x_2=8,\ \ x_3=9,\ \ x_4=1 \qquad (۵.۵)$$

یك «شیء» است. گوییم که یك جواب دارای ویژگی α است هرگاه $x_1>6$، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2>7$، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3>8$، و دارای ویژگی δ است هرگاه $x_4>9$. می‌خواهیم تعداد جوابهایی را بیابیم که

هیچیك از ویژگیهای α، β، γ، δ را ندارند. بنابراین می‌توانیم از فرمول (۳.۵) بخش قبل استفاده کنیم.

بنابرفصل ۴ (بخش ۵.۴) می‌دانیم که تعداد جوابهای (۴.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر $C(۱۹, ۳)$ است. چون این مقدار تعداد کل N «شیء» تحت بررسی است، قرارمی‌دهیم $N = C(۱۹, ۳)$. حال می‌خواهیم مقدار $N(\alpha)$، تعداد جوابهای معادلهٔ (۴.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت با شرط $x_۱ > ۶$ را پیداکنیم. مجدداً بااستفاده از نتایج حاصل درفصل ۴، می‌بینیم که

$$N(\alpha) = C(۲۰ - ۶ - ۱, ۴ - ۱) = C(۱۳, ۳).$$

بااستدلالی مشابه نتیجه می گیریم که

$$N(\beta) = C(۱۲, ۳), \ N(\gamma) = C(۱۱, ۳), \ N(\delta) = C(۱۰, ۳).$$

سپس، $N(\alpha, \beta)$ تعداد جوابهای معادلهٔ (۴.۵) را درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت نشان می‌دهدکه در دوشرط $x_۱ > ۶$ و $x_۲ > ۷$ صدق می کنند، بنابراین

$$N(\alpha, \beta) = C(۲۰ - ۶ - ۷ - ۱, \ ۴ - ۱) = C(۶, ۳).$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهدکه

$$N(\alpha, \gamma) = C(۵, ۳), \ N(\alpha, \delta) = C(۴, ۳),$$

$$N(\beta, \gamma) = C(۴, ۳), \ N(\beta, \delta) = C(۳, ۳), \ N(\gamma, \delta) = C(۲, ۳) = ۰.$$

تمام جمله‌های بعدی در فرمول (۳.۵) صفرند. مثلاً $N(\alpha, \beta, \gamma)$ را درنظر می گیریم. این، تعداد جوابهای معادلهٔ (۴.۵) را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت نشان می‌دهد که در شرایط $x_۱ > ۶$، $x_۲ > ۷$ و $x_۳ > ۸$ صدق می کنند. چنین جوابهایی وجود ندارند، زیرا $۶ + ۷ + ۸ = ۲۱$. بنابراین جواب مسألهٔ (۴.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & C(۱۹, ۳) - C(۱۳, ۳) - C(۱۲, ۳) - C(۱۱, ۳) - C(۱۰, ۳) \\ & \quad + C(۶, ۳) + C(۵, ۳) + C(۴, ۳) + C(۴, ۳) + C(۳, ۳) \\ & = ۹۶۹ - ۲۸۶ - ۲۲۰ - ۱۶۵ - ۱۲۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۴ + ۴ + ۱ = ۲۱۷. \end{aligned}$$

در بسیاری از کاربردهای اصل شمول-عدم شمول (۳.۵)، دربارهٔ ویژگیهای

α، β، γ، ...، تقارنی وجود دارد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرارند:

$$N(\alpha)=N(\beta)=N(\gamma)=\cdots,$$
$$N(\alpha,\beta)=N(\alpha,\gamma)=N(\beta,\gamma)=\cdots,$$
$$N(\alpha,\beta,\gamma)=\cdots,$$
$$\cdots.$$

به‌صورت کلامی، گوییم اگر تعداد اشیاء با یك ویژگی برابر با تعداد اشیاء باهر تك ویژگی دیگر باشد، اگر تعداد اشیاء با دوتا از ویژگیها یکی باشد بدون توجه به‌اینکه کدام یك از دو ویژگی درنظر گرفته شوند، واگر نظایر این برای سه ویژگی وچهارویژگی وغیره برقرار باشند آن‌گاه گوییم که ویژگیهای α، β، γ، ... متقارن‌انــد. بنابراین ویــژگیها متقارن‌اند اگــر تعداد اشیاء با j ویــژگــی معین (j ثابت است) برابر باتعداد اشیاء باهر گردایه‌ای دیگر از j ویژگی باشد؛ بعلاوه این مطلب باید برای $j=1$، $j=2$، $j=3$، وغیره، تاآنجاکه عبارت معنی دارد، برقرار باشد.

فرض‌کنیم تعداد کل ویژگیهای α، β، γ، ...، برابر r باشد. اگراین‌ویژگیها متقارن باشند، آن‌گاه فرمول (۳.۵) برای تعداد اشیایی کــه دارای هیچ یك ازاین ویژگیها نیستند، عبارت است از

$$N-C(r,1)N(\alpha)+C(r,2)N(\alpha,\beta)-C(r,3)N(\alpha,\beta,\gamma)+\cdots. \quad (۶.۵)$$

دلیل این مطلب آن است که جمله‌های (۳.۵) را می‌توان در دسته‌هایی با اعضایی برابر $C(r,1)$ عضو از نوع $N(\alpha)$، $C(r,2)$ عضو از نوع $N(\alpha,\beta)$، و غیره، گردآوری کرد.

برای تشریح مجموعه‌ای از ویژگیهای متقارن، مسألهٔ زیر را درنظر می‌گیریم.

مسألهٔ ۵.۵ معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=26 \quad (۷.۵)$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۹، چند جواب دارد؟

دوباره از مطلب بخش قبل استفاده می‌کنیم. «اشیاء» موردنظر، تمام جوابهای معادلهٔ (۷.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت‌اند. به‌طوری‌کــه $N=C(25,3)$.

یك جواب معادله دارای ویژگی α است هرگاه $x_1 > ۹$، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2 > ۹$، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3 > ۹$ و دارای ویژگی δ است هرگاه $x_4 > ۹$. این‌چهار ویژگی بدین مفهوم که از فرمول (۳.۵) به‌فرمول (۶.۵) برسیم، کاملاً متقارن‌اند. ازاین‌رو تنها لازم است که مقادیر

$$N(\alpha),\ N(\alpha,\beta),\ N(\alpha,\beta,\gamma),\ N(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

را محاسبه کنیم. پیدا می‌کنیم که

$$N(\alpha) = C(۲۶ - ۹ - ۱,\ ۴ - ۱) = C(۱۶,\ ۳);$$

$$N(\alpha,\ \beta) = C(۲۶ - ۹ - ۹ - ۱,\ ۴ - ۱) = C(۷,\ ۳);$$

$$N(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = C(۲۶ - ۹ - ۹ - ۹ - ۱,\ ۳) = C(-۲,\ ۳) = ۰;$$

$$N(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) = ۰.$$

بنابراین طبق فرمول (۶.۵)، پاسخ برابر است با

$$C(۲۵,\ ۳) - C(۴,\ ۱)C(۱۶,\ ۳) + (۴,\ ۲)C(۷,\ ۳)$$
$$= ۲۳۰۰ - ۲۲۴۰ + ۲۱۰ = ۲۷۰.$$

اکنون مسألهٔ ۵.۵ را به‌سؤال زیر تعمیم می‌دهیم. معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = m \qquad (۸.۵)$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا c، که در آن c یك عدد صحیح مثبت ثابت است، چند جواب دارد؟ مجدداً از نظریهٔ بخش قبل، که در آن «اشیاء» تحت مطالعه، تمام جوابهای (۸.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت‌اند، استفاده می‌کنیم. گوییم که یك جواب دارای ویژگی α است هرگاه $x_1 > c$، دارای ویژگی β است هرگاه $x_2 > c$، دارای ویژگی γ است هرگاه $x_3 > c$، وغیره. این ویژگیها متقارن‌اند و بنابراین می‌توانیم فرمول (۶.۵) را به‌کار بریم. طبق نظریهٔ صفحهٔ ۷۵، می بینیم که

$$N = C(m - ۱,\ k - ۱)$$

$$N(\alpha) = C(m - c - ۱,\ k - ۱)$$

$$N(\alpha,\ \beta) = C(m - ۲c - ۱,\ k - ۱)$$

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = C(m - ۳c - ۱, k - ۱),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

بنا براین فرمول (۶.۵) نتیجهٔ زیر را به‌ما می‌دهد: فرض‌کنیم c یك عدد صحیح مثبت ثابت‌دلخواه باشد. تعداد جوابهای معادلهٔ(۸.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح نابزرگتر از c برابر است با:

$$\begin{aligned} &C(m-۱, k-۱) - C(k, ۱)C(m-c-۱, k-۱) \\ &\quad + C(k, ۲)C(m-۲c-۱, k-۱) \qquad (۹.۵) \\ &\quad - C(k, ۳)C(m-۳c-۱, k-۱) \\ &\quad + C(k, ۴)C(m-۴c-۱, k-۱) - \dots \end{aligned}$$

که در آن، سری تا جایی که جمله‌های صفر ظاهر می‌شوند، ادامه دارد.

حالت خاص $m > kc$ جالب است، زیرا در این حالت معادلهٔ (۸.۵) می‌تواند در مجموعهٔ اعداد صحیح نابزرگتر از c هیچ جوابی نداشته‌باشد. مثلاً اگر $m = ۲۵$، $k = ۴$ و $c = ۶$، آن‌گاه معادلهٔ (۸.۵) به صورت $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۵$ درمی‌آید واین‌معادله درمجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۶ جواب‌ندارد، زیرا تحت‌شرط ما، ماکسیمم مقدار مجموع $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴$ برابر ۲۴ است. دراین حالت، مقدار عبارت (۹.۵) برابر صفر است واتحاد زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &C(۲۴, ۳) - C(۴, ۱)C(۱۸, ۳) + C(۴, ۲)C(۱۲, ۳) \\ &\quad - C(۴, ۳)C(۶, ۳) = ۰. \end{aligned}$$

به عنوان مثالی دیگر برای اصل شمول-عدم شمول، سؤال زیر را در نظر بگیرید که ممکن‌است آن‌را به‌صورت مسأله‌ای دربارهٔ ترکیبهای باتکرارمطرح کرد:

یك کیف پول محتوی هشت سکهٔ یك سنتی، هفت سکهٔ پنج سنتی، چهار سکهٔ ده سنتی وسه سکهٔ بیست‌وپنج سنتی‌است. فرض کنیم که سکه‌های همنام یکسان باشند (مثلاً هشت سکهٔ یك سنتی یکسان‌اند.)، به‌چندطریق می‌توان گردایه‌ای ازشش‌سکه از کیف انتخاب کرد؟

درساختن یك گردایه از سکه‌ها، فرض کنیم تعداد یك سنتیها برابر $x_۱$، تعداد

پنج سنتیها برابر y و تعداد ده سنتیها برابر z و تعـداد بیست‌و‌پنج سنتیها برابر w باشد، دراین صورت، مسأله به‌سؤال دربارهٔ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x+y+z+w=۶$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی که در شرایط

$$x\leqslant ۸,\quad y\leqslant ۷,\quad z\leqslant ۴,\quad w\leqslant ۳$$

صادق‌اند برمی‌گردد. فرض کنیم تعداد تمام جوابها درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی برابر N باشد. مقدار N (صفحهٔ ۶۳ را ببینید) برابر است با

$$N=C(۶+۴-۱,\ ۴-۱)=C(۹,\ ۳).$$

اگر بگوییم که یك جواب دارای ویژگی α است اگر $x\geqslant ۹$، دارای ویژگی β است اگر $y\geqslant ۸$، دارای ویژگی γ است اگر $z\geqslant ۵$، و دارای ویژگی δ است اگر $w\geqslant ۴$، آن‌گاه بیشتر جمله‌هـا درفرمول (۳.۵) از صفحهٔ ۷۷ برابر صفرند. مثلاً $N(\alpha)=۰$، زیرا معادلهٔ $x+y+z+w=۶$ در مجموعهٔ اعـداد صحیح نامنفی با شرط $x\geqslant ۹$ هیچ جوابی ندارد. درواقع تنها جمله‌های مخالف صفر در این فرمول عبارت‌اند از N، $N(\gamma)$ و $N(\delta)$. بعلاوه می‌توانیم حساب کنیم که:

$$N(\gamma)=C(۶+۴-۵-۱,\ ۴-۱)=C(۴,\ ۳);$$

$$N(\delta)=C(۶+۴-۴-۱,\ ۴-۱)=C(۵,\ ۳);$$

$$N-N(\gamma)-N(\delta)=C(۹,\ ۳)-C(۴,\ ۳)-C(۵,۳)=۷۰.$$

مجموعه مسائل ۱۹

۱. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=۱۴$ را درمجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۶ بیابید.

۲. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=۳۴$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت زوج نابیشتر از ۱۰ بیابید.

۳. تعداد جوابهایی از معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=۲۰$ را در مجموعهٔ اعـداد صحیحی بیابید کـه در شرایـط $۱\leqslant x_1\leqslant ۶$، $۱\leqslant x_2\leqslant ۷$، $۳\leqslant x_3\leqslant ۹$،

$11 \geqslant x_4 \geqslant 4$ صدق کنند.

۴. تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح از ۳- تا ۳ پیدا کنید.

۵. یك کیف پول محتوی هشت یك سنتی، هفت پنج سنتی، چهار ده سنتی و سه بیست‌وپنج سنتی است. فرض کنیم که سکه‌های همنام یکسان‌اند. از این کیف به چند طریق می‌توان گردایه‌ای از ده سکه انتخاب کرد؟

۶. درمسألهٔ قبل چندتا ازاین گردایه‌ها شامل سکه‌های ۲۵ سنتی نیستند؟

۷. لحظه‌ای تأمل نشان می‌دهد که معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت نا بیشتراز ۳ دقیقاً یك جواب دارد. برای به‌دست آوردن اتحادی برحسب نمادهای $C(n, r)$ فرمول (۹.۵) به‌کار برید.

۸. تعداد جوابهای معادلهٔ $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۹ بیابید.

۹. جواب عددی مسألهٔ قبل مانند جواب مسألهٔ ۵.۵ است. (تااندازه‌ای مسائل مشابه به‌نظر می‌رسند. اختلاف آنها در ثابتهای معادله‌هاست، دراولی ثابت برابر ۲۶ و در دیگری ثابت برابر ۱۴ است.) نشان دهیدکه معادلهٔ مسألهٔ قبل را می‌توان از آنچه درمسألهٔ ۵.۵ حاصل شد بااستفاده از تعویض متغیر

$$x_1 = 10 - y_1, \quad x_2 = 10 - y_2, \quad x_3 = 10 - y_3, \quad x_4 = 10 - y_4$$

به‌دست آورد.

۱۰. بااستفاده از اصلی که در مسألهٔ قبل مطرح شد، برای c مقدار خاصی به‌غیراز $c = 12$ بیابیدکه تعداد جوابهای دو معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad \text{و} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = c$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۶ یکی باشند. آن‌گاه برای به دست آوردن اتحادی بین دوعبارت برحسب $C(n, r)$، از (۹.۵) استفاده کنید.

۱۱. فرض کنیم k، m، c_1، c_2، c_3 اعداد صحیح مثبت باشند، برای تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_k=m$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت کـه مقید به شرایط $x_1\leqslant c_1$، $x_2\leqslant c_2$، $x_3\leqslant c_3$ باشند فرمولی بنویسید.

۱۲. تعداد اعداد صحیح مثبت هفت رقمی را که مجموع ارقام آنها برابر ۱۹ باشد بیابید.

۳.۵ پریشها

به‌عنوان کاربرد دیگری از قضیهٔ کلی بخش ۱.۵ به مسألهٔ کاملاً متفاوتی می‌پردازیم. جایگشتهای اعـداد ۱، ۲، ۳، ...، n را، کـه همه را باهم اختیار می‌کنیم، درنظر می‌گیریم. درمیان این جایگشتها، آنهایی را پریش می‌گویند که هیچ یك از n عدد صحیح آنها در مقام طبیعی خود ظاهر نشوند، یعنی ۱ در جای طبیعی خود (اولین مکان) نیاید، ۲ در جـای طبیعی خود نیاید، ...، و n در جـای طبیعی خود نیاید. تعداد پریشهای n شیء را با $D(n)$ نشان خواهیم داد.

برای تشریح مطلب می‌نویسیم: $D(1)=0$؛ $D(2)=1$ زیـرا فقط یك پریش ۱، ۲، وجود دارد. $D(3)=2$ زیرا پریشهـا عبارت‌اند از: ۱، ۳، ۲ و ۲، ۱، ۳؛ و $D(4)=9$ زیرا پریشها عبارت‌اند از:

۲، ۱، ۴، ۳	۳، ۱، ۴، ۲	۴، ۱، ۲، ۳
۲، ۳، ۴، ۱	۳، ۴، ۱، ۲	۴، ۳، ۱، ۲
۲، ۴، ۱، ۳	۳، ۴، ۲، ۱	۴، ۳، ۲، ۱.

می‌خواهیم برای $D(n)$ فرمولی به‌دست آوریم کـه به‌ازای هرعدد صحیح n معتبر باشد. با استفاده از اصل‌شمول-عدم شمول و باکمی زحمت می‌توان این‌کار را انجام داد. برای طرح ایده‌ای واقعی ابتدا با محاسبهٔ $D(7)$ شروع می‌کنیم. فرض کنیم تعداد جایگشتهـای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را کـه همه را باهم اختیار می‌کنیم، با N نشان دهیم. بنابراین $N=7!$. گوییم یك جایگشت دارای ویژگی α است اگر ۱ در مکان خاص خود قرار داشته‌باشد، دارای ویژگی β است اگر ۲ درمکان خاص خود باشد، دارای ویژگی γ است اگر ۳ درمکان خاص‌خود باشد، دارای ویژگی δ است اگـر ۴ در مکان خاص خود باشد، دارای ویژگی ε است

اگر ۵ درمکان خاص خود باشد، دارای ویژگی ζ است اگر ۶ درمکان خاص خود باشد، و دارای ویژگی η است اگر ۷ درمکان خاص خود باشد. مثلاً جایگشت

$$۷,\ ۲,\ ۶,\ ۱,\ ۵,\ ۳,\ ۴$$

دارای دو ویژگی β و ε است ولی ویژگیهـای دیگر را دارا نیست. یـك پریش جایگشتی است که هیچ یك از ویژگیهای α، β، γ، δ، ε، ζ، η را ندارد.

$N(\alpha)$، یعنی تعداد آن جایگشتهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ را که ۱ در اولین مکان قرار گیرد (صرفنظر از آنکه بقیه درمواضع طبیعی خود قرار بگیرند یا نه)، بدین طریق محاسبه می‌کنیم کـه ۱ را در اولین مکان قرار داده و بقیهٔ اعـداد را جایگشت می‌دهیم. نتیجه $N(\alpha) = ۶!$ است، به‌همین ترتیب اگـر ۲ را در دومین مکان نگهداشته و بقیهٔ اعـداد را جایگشت دهیم، به دست می‌آوریم $N(\beta) = ۶!$. در واقع بدون توجه به اینکه کدام یك از هفت عدد را در مکان طبیعی خود ثابت نگهـداریم؛ شش عدد باقی مانـده را می‌تـوان به !۶ راه آرایش داد. بنابرایـن $N(\alpha) = N(\beta) = \ldots = N(\eta) = ۶!$.

سپس باقرار دادن ۱ و۲ در اولین و در دومین مکان و جایگشت‌دادن ۵ عدد باقی مانـده، $N(\alpha, \beta)$ را محاسبه می‌کنیم. ایـن کار به !۵ آرایش مختلف منجر می‌شود. مجدداً اگر هردوتا از اعداد را درمکان طبیعی خود نگهداریم، درحالی‌که پنج عددباقی‌مانده را جایگشت می‌دهیم، !۵ جایگشت به‌دست‌می‌آوریم به‌قسمی که

$$N(\alpha, \beta) = N(\alpha, \gamma) = \ldots = N(\beta, \gamma) = \ldots = N(\zeta, \eta) = ۵!.$$

به‌همین‌ترتیب، ثابت نگهداشتن سه عدد درمکان طبیعی خودشان، به نتیجهٔ

$$N(\alpha, \beta, \gamma) = \ldots = N(\varepsilon, \zeta, \eta) = ۴!.$$

منجر می‌شود، ثابت نگهداشتن چهارعدد، به $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \ldots = ۳!$ و ثابت نگهداشتن پنج‌عدد، به $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \ldots = ۲!$ وثابت نگهداشتن شش‌عدد، بـه $N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = ۱!$ و ثـابـت نـگـهـداشتـن هفت عـدد، بـه $N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta) = ۰! = ۱$ منجر می‌شود. بدیهی است که اینها همان شرایط تقارنی هستند که در بخش ۲.۵ شرح داده شد، و بنابراین می‌توانیم برای محاسبه، فرمول (۶.۵) را به‌کار بریم:

$$D(۷) = ۷! - C(۷,\ ۱) \times ۶! + C(۷,\ ۲) \times ۵! - C(۷,\ ۳) \times ۴!$$
$$+ C(۷,\ ۴) \times ۳! - C(۷,\ ۵) \times ۲! + C(۷,\ ۶) \times ۱! - C(۷,\ ۷) \times ۰!.$$

با بیان هر $C(n, r)$ برحسب فاکتوریلها، مثلاً

$$C(۷, ۴)\times ۳! = \frac{۷!}{۴!۳!}\times ۳! = \frac{۷!}{۴!},$$

این عبارت را ساده می‌کنیم. نتیجه را می‌توان به‌صورت

$$D(۷) = ۷! - \frac{۷!}{۱!} + \frac{۷!}{۲!} - \frac{۷!}{۳!} + \frac{۷!}{۴!} - \frac{۷!}{۵!} + \frac{۷!}{۶!} - \frac{۷!}{۷!}$$

$$= ۷!\left[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!} + \frac{۱}{۶!} - \frac{۱}{۷!}\right], \qquad (۱۰\cdot۵)$$

نوشت. این استدلال کامل مستقیماً به فرمولی برای $D(n)$، تعداد پریشهای n چیز، منجرشده و معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$D(n) = n! - C(n, ۱)(n-۱)! + C(n, ۲)(n-۲)! - \dots + (-۱)^n C(n, n)\,۰!$$

$$= n! - \frac{n!}{۱!(n-۱)!}(n-۱)! + \frac{n!}{۲!(n-۲)!}(n-۲)! - \dots + (-۱)^n \frac{n!}{n!\,۰!}\,۰!$$

$$= n! - \frac{n!}{۱!} + \frac{n!}{۲!} - \dots + (-۱)^n \frac{n!}{n!}.$$

پس

$$D(n) = n!\left[۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \dots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}\right]. \quad (۱۱\cdot۵)$$

برای $D(n)$ تعبیر دیگری وجود دارد که اکنون آن را برحسب حالت خاص $D(۷)$ شرح می‌دهیم. یك جایگشت ثابت اعداد صحیح از ۱ تا ۷ مثلاً

$$P_۰: ۷, ۲, ۶, ۱, ۵, ۳, ۴,$$

را درنظرمی گیریم. گوییم که یك جایگشت اعداد صحیح از ۱ تا ۷ با $P_\circ$ ناسازگار است اگر نه ۷ در اولین مکان، نه ۲ در دومین مکان، نه ۶ در سومین مکان، نه ۱ در چهارمین مکان، نه ۵ در پنجمین مکان، نه ۳ در ششمین مکان و نه ۴ در هفتمین مکان قرار گیرد. مثلاً، ۱, ۳, ۵, ۷, ۲, ۴, ۶، با $P_\circ$ ناسازگار است، در صورتی که، ۱, ۳, ۵, ۷, ۲, ۶, ۴، چنین نیست. سؤال این است که: چند جایگشت وجود دارند که با $P_\circ$ ناسازگارند؟

اگر لحظه‌ای دربارهٔ تعریف سازگاری فکر کرده و آن را با تعریف پریش مقایسه کنیم متوجه می‌شویم که یك پریش درست یك جایگشت ناسازگار با یك ترتیب «طبیعی» ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷، است. چون تعداد جایگشتهای ناسازگار با ترتیبی ثابت، به‌وضوح بستگی به‌آن ترتیب ثابت مفروض («طبیعی» یا غیر آن) ندارد، نتیجه می گیریم که تعداد جایگشتهای ناسازگار با $P_\circ$، برابر $D(۷)$، یعنی تعداد پریشهاست.

این مطلب را می‌توانیم مستقیماً با به‌کاربردن استدلالی که درشروع این بخش ارائه شد نیز نشان دهیم؛ می‌توانیم صرفاً تعبیر کنیم که

α، ویژگی جایگشتی است که ۷ دراولین مکان واقع شود،

β، ویژگی جایگشتی است که ۲ در دومین مکان واقع شود،

γ، ویژگی جایگشتی است که ۶ درسومین مکان واقع شود،

. . . .

η، ویژگی جایگشتی است که ۴ درهفتمین مکان واقع شود.

و دوباره فرمول (۱۰.۵) را به‌دست می‌آوریم.

چیز بخصوصی دربارهٔ جایگشت $P_\circ$ مورد بحث وجود ندارد. به طورکلی می‌توانیم بگوییم که اگر هر جایگشت ثابت اعداد صحیح ۱ تا ۷ را درنظر بگیریم، تعداد جایگشتهای ناسازگار باآن برابر $D(۷)$ است. پریشها صرفاً تمام جایگشتهایی هستند که با آرایش طبیعی ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷، ناسازگارند.

به طورکلیتر، می‌توان گزاره‌های زیر را ساخت. گوییم دو جایگشت، $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$، و $b_۱, b_۲, \ldots, b_n$ از اعداد صحیح $۱, ۲, \ldots, n$ ناسازگارند اگر $a_۱ \neq b_۱$، $a_۲ \neq b_۲$، ...، $a_n \neq b_n$. تعداد جایگشتهای اعداد صحیح از ۱ تا n که با یك جایگشت ثابت دلخواه ناسازگارند، برابر $D(n)$، تعداد پریشهاست. بعلاوه، پریشها صرفاً جایگشتهای اعداد صحیح از ۱ تا n هستند که با ترتیب طبیعی $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ ناسازگارند.

مجموعه مسائل ۲۰

۱. $D(۵)$ و $D(۶)$ را محاسبه کنید.

۲. تمام جایگشتهای ۴ , ۳ , ۲ , ۱ را که با جایگشت خاص ۱ , ۲ , ۳ , ۴ ناسازگارند فهرست کنید.

۳. مطلوب است تعیین تعداد پریشهای اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ که در شرط زیر صدق کنند:

الف) پنج مکان اول آنها شامل اعداد ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ باشند؛ ب) پنج مکان اول آنها شامل ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶ باشند.

۴. مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای ۷ , ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ که نه ۱ دراولین مکان، نه ۴ درچهارمین مکان و نه ۷ درهفتمین مکان قرار گیرد.

۵. ازمیان جایگشتهای اعداد صحیح از ۱ تا ۹ چند جایگشت وجود دارند که دقیقاً سه‌عدد درمکان طبیعی خود بوده وشش‌عدد دیگر درمکان طبیعی خود نباشند؟

۶. از جایگشت‌دادن حرفهای کلمهٔ alphabet باقراردادن هرحرفی به‌جای حرفی متفاوت با آن، کد ساده‌ای ساخته می‌شود. به‌این طریق چند کد می‌توان ساخت؟

۷. ثابت کنید که به‌ازای $n \geqslant ۲$، $D(n) - nD(n-۱) = (-۱)^n$.

۴.۵ احتمال ترکیبیاتی

احتمال، شاخهٔ مهمی از ریاضیات با نوشتارهای فراوان است که، دراین‌جا به‌روشی بسیار محدود مورد بحث قرار خواهد گرفت. توجه محدود ما معطوف به‌چند سؤال است که رابطهٔ نزدیکی باموضوع اصلی این کتاب دارند. به خاطر این محدودیت، کافی است تعریف ساده‌ای از احتمال ارائه دهیم که گرچه برای مطالعهٔ پیشرفته‌تر موضوع نارساست ولی تمام مسائل مورد بحث ما را شامل می‌شود.

با این دیدگاه خاص، توجه خودرا به‌وضعیتهایی معطوف می‌داریم که می‌توان آنها را حالتهای همشانس خواند. مثلاً، اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم همشانسی برآمدهای شیر و خط را مسلم خواهیم گرفت. اگر تاسی را بریزیم فرض خواهیم کرد که روآمدن شش برآمد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ همشانس‌اند. یا اگر کارتی به‌تصادف از یك دسته کارت معمولی کشیده شود فرض خواهیم نمود که تمام ۵۲ کارت برای

کشیده‌شدن همشانس هستند، یعنی ظاهرشدن مثلاً کارت سه دل دقیقاً همان‌قدر محتمل است که ظاهرشدن سایر کارتها.

احتمالی که به آمدن کارت سه دل تخصیص داده می‌شود ۱/۵۲ است. به‌طور کلی، احتمال به‌صورت نسبت تعداد حالتهای «مساعد» به‌تعداد حالتهای ممکن همشانس تعریف می‌شود:

$$\frac{\text{تعداد حالتهای مساعد}}{\text{تعداد حالتهای ممکن همشانس}}$$

بنابراین احتمال به‌دست‌آوردن شیر در پرتاب یك سکه ۱/۲، و آمدن ۴ در پرتاب یك تاس ۱/۶، و آمدن عدد زوج در پرتاب یك تاس ۳/۶ یا ۱/۲، و به‌دست‌آوردن کارت یك در کشیدن تصادفی یك کارت از یك دسته کارت، ۴/۵۲ یا ۱/۱۳ است.

شرط مهمی که به این تعریف تحمیل می‌شود این است که حالتهایی که در محاسبه دخالت داده می‌شوند حالتهای همشانس باشند. مثلاً، این سؤال را درنظر بگیرید: وقتی که دو تاس را باهم می‌ریزیم، احتمال به‌دست‌آوردن مجموعی برابر ۱۲ چقدر است؟ می‌توانیم به غلط استدلال کنیم که مجموع دو عددی که با یك جفت تاس ظاهرمی‌شوند ممکن است ۲، ۳، ۴، ... یا ۱۲ بوده، و لذا مجموع حالتها ۱۱، و احتمال داشتن ۱۲ برابر ۱/۱۱ است. این جواب درست نیست، زیرا این ۱۱ حالت، همشانس نیستند. شانس داشتن ۱۲ در یك پرتاب، به بزرگی شانس (مثلاً) داشتن ۸ نیست، زیرا برای داشتن ۱۲ باید هر دو تاس ۶ بیایند درحالی که برای داشتن ۸ ممکن است هردو تاس ۴ بیایند، یا یکی ۳ و دیگری ۵، و یا یکی ۲ و دیگری ۶ بیاید.

وقتی که دو تاس پرتاب می‌شوند تعداد درست برآمدهای همشانس را می‌توان با درنظر گرفتن دو تاس مانند دو شیء متمایز مستقل، مثلاً یك تاس سفید و یك تاس آبی، به‌دست آورد. ۶ امکان برای تاس سفید و ۶ امکان برای تاس آبی وجود دارد، و بنابراین طبق اصل ضرب فصل ۲، کلاً ۳۶ حالت همشانس به‌شرح زیر وجود دارند:

۱, ۱	۱, ۲	۱, ۳	۱, ۴	۱, ۵	۱, ۶
۲, ۱	۲, ۲	۲, ۳	۲, ۴	۲, ۵	۲, ۶
۳, ۱	۳, ۲	۳, ۳	۳, ۴	۳, ۵	۳, ۶
۴, ۱	۴, ۲	۴, ۳	۴, ۴	۴, ۵	۴, ۶
۵, ۱	۵, ۲	۵, ۳	۵, ۴	۵, ۵	۵, ۶
۶, ۱	۶, ۲	۶, ۳	۶, ۴	۶, ۵	۶, ۶.

ازاین ۳۶ حالت، تنها یك ۶ و ۶، وجود داردکه مجموع ۱۲ را می‌دهد. ازاین‌رو احتمال به‌دست آوردن مجموعی برابر ۱۲، مساوی ۱/۳۶ است.

این سؤال را درنظر بگیرید: احتمال آمدن مجموع ۸ در پرتاب دو تاس چیست؟ از روی جدول ۳۶ حالت بالا می‌بینیم که یك مجموع ۸ در ۵ حالت ۶, ۲، ۵, ۳، ۴, ۴، ۳, ۵، ۲, ۶ حاصل می‌شود. بنابراین جواب ۵/۳۶ است.

این سؤال را درنظر بگیرید: احتمال به‌دست آوردن یك شیر و دوخط، وقتی که سه سکه پرتاب می‌شوند، چیست؟ برای به دست آوردن تعدادکل حالتهای ممکن همشانس، سه سکه را متمایز تصور می‌کنیم، آن‌گاه اصل ضرب فصل ۲ را به کار می‌بریم، و درمی‌یابیم که ۲ × ۲ × ۲ یا هشت حالت وجود دارد، یعنی

$$\begin{array}{cccc} HHH & HTH & THH & TTH \\ HHT & HTT & THT & TTT \end{array}$$

که درآنها H نمایش شیر و T نمایش خط است. بنابراین پاسخ سؤال برابر ۳/۸ است، زیرا حالتهای مساعد عبارت‌اند از HTT، THT و TTH.

مسألهٔ ۶.۵ اگر ده سکه به‌زمین بیفتند، احتمال اینکه پنج شیر و پنج خط ظاهر شوند چقدر است؟

حل: ما سکه‌ها را متمایز تصور می‌کنیم، اولین سکه، دومین سکه، و غیره. 2^{10} برآمد وجود دارند، زیرا هرسکه می‌تواند به دو صورت ممکن، شیر یا خط، بنشیند. یك برآمد می‌تواند به‌صورت رشته‌ای از ده حرف معین شود که هرکدام یا یك H (برای شیرها) و یا یك T (برای خطها) است؛ مثلاً

$$T\,T\,H\,H\,T\,H\,H\,H\,T\,T, \qquad (۱۴.۵)$$

بدین معنی است که سکهٔ اول خط، سکهٔ دوم خط، سکهٔ سوم شیر، و غیره باشد. بنابراین تعداد حالتهای مساعد برابر تعداد راههایی است که پنج H و پنج T را می‌توان دریك ردیف نوشت، وطبق آنچه درفصل ۳ آمد این عدد برابر $C(10, 5)$ است. لذا پاسخ سؤال برابر است با:

$$\frac{C(10, 5)}{2^{10}} = \frac{63}{256}.$$

مسألهٔ ۷.۵ احتمال آنکه شش کارتی که به تصادف از یك دسته کارت ۵۲ تایی می‌کشیم قرمز باشند چقدر است؟

حل: تعداد کل حالتهای‌ممکن برابر تعداد راههای انتخاب شش کارت از ۵۲ کارت است که برابر با $C(۵۲, ۶)$ است. چون دریك دسته کارت، ۲۶ کارت قرمز وجود دارند، تعداد حالتهای مساعد برابر $C(۲۶, ۶)$، یعنی تعداد راههای انتخاب شش از ۲۶ است. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\frac{C(۲۶, ۶)}{C(۵۲, ۶)}.$$

مسألهٔ ۸.۵ وقتی که چهار تاس ریخته می‌شوند، احتمال به دست آوردن مجموعی برابر ۱۳ چقدر است؟

حل: چون هر تاس به شش راه می‌تواند ظاهر شود، پس تعداد کل حالتها برابر $۶^۴$ است. فرض کنیم تاسها به طریقی مثلاً بەوسیلهٔ رنگ قبلا از هم متمایز شده باشند، به‌طوری که بتوانیم به تاس اول، به تاس دوم و غیره اشاره کنیم. اگر عددی که برای تاس اول ظاهر می‌شود برابر $x_۱$، برای تاس دوم برابر $x_۲$، برای تاس سوم برابر $x_۳$ و برای تاس چهارم برابر $x_۴$ باشد، آن گاه تعداد حالتهای مساعد برابر تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۱۳$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۶ است. طبق (۹.۵) تعداد جوابها برابر است با

$$C(۱۲, ۳)-C(۴, ۱)C(۶, ۳)=۲۲۰-۸۰=۱۴۰.$$

بنابراین پاسخ برابر با $۱۴۰/۶^۴$ یا $۳۵/۳۲۴$ است.

مسألهٔ ۹.۵ اگر به‌تصادف جایگشتی از اعداد صحیح $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ را اختیار کنیم، احتمال آنکه این جایگشت یك پریش باشد چقدر است؟

حل: تعداد کلی جایگشتها برابر $n!$ و تعداد حالتهای مساعد همان‌طور که در (۱۱.۵) داده شد برابر $D(n)$ است. بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{D(n)}{n!}=۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-\ldots+(-۱)^n\frac{۱}{n!}. \quad (۱۳.۵)$$

این احتمال جنبه‌های جالبی دارد که به بعضی از آنها در اینجا اشاره می‌شود. (سایر جنبه‌ها در مجموعه مسائل بعدی داده خواهند شد.) به ازای، $n=۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸$، مقادیر $D(n)/n!$ با تقریب چهاررقم اعشار برابر است با

$$
۰, ۰٫۵۰۰۰, ۰٫۳۳۳۳, ۰٫۳۷۵۰, ۰٫۳۶۶۷, ۰٫۳۶۸۱, ۰٫۳۶۷۹, ۰٫۳۶۷۹ \qquad (۱۴.۵)
$$

توجه‌کنید که تقریب چهار رقم اعشار برای مقادیر $D(n)/n!$ با تغییر $n=۷$ به $n=۸$ عوض نمی‌شود. جالب است که وقتی n از ۸ بیشتر می‌شود مقدار $D(n)/n!$ تغییر نمی‌کند، به‌طوری‌که ۰٫۳۶۷۹ بادرستی چهار رقم اعشار، برای تمام مقادیر n از ۷ به بعد، $n=۷$، $n=۸$، $n=۹$ وغیره عوض نمی‌شود. به‌عبارت دیگرهرچقدر n بزرگ شود، $D(n)/n!$ بیشتر از ۰٫۰۰۰۰۵ از ۰٫۳۶۷۹ تجاوز نمی‌کند. وقتی n بدون کران زیاد می‌شود، سمت راست (۱۳.۵) جمله‌های بیشتر و بیشتری دارد، و $D(n)/n!$ به‌مقدار حدی $۱/e$، که در آن e یك ثابت پایه‌ای ریاضی است، میل می‌کند.

در محاسبهٔ احتمال رخداد یك پیشامد، بعضی مواقع مناسبتر است که کار را بامحاسبهٔ «احتمال متمم»، یعنی احتمال اینکه پیشامد رخ ندهد، شروع کنیم. احتمال یك پیشامد به‌صورت

$$
p=\frac{\text{تعداد حالتهای مساعد}}{\text{تعداد حالتهای ممکن همشانس}},
$$

تعریف می‌شود، بنابراین احتمال متمم به‌صورت

$$
q=\frac{\text{تعداد حالتهای نامساعد}}{\text{تعداد حالتهای ممکن همشانس}},
$$

تعریف می‌شود. چون مجموع تعداد حالتهای مساعد وتعداد حالتهای نامساعد برابر تعداد کل حالتهای ممکن است، می‌بینیم که

$$
p+q=۱ \quad \text{یا} \quad p=۱-q
$$

مجموعه مسائل ۲۱

۱. محاسباتی که مقادیر (۱۴.۵) را می‌دهند وارسی کنید.

۲. اگر دوسکه پرتاب شوند، احتمال به‌دست‌آوردن دوخط را تعیین کنید.

۳. اگر دوتاس باهم ریخته شوند، احتمال به‌دست‌آوردن مجموعی برابر ۷ چیست؟

۴. دو تاس، یکی قرمز و یکی سفید، باهم ریخته می‌شوند. احتمال آنکه عددی که تاس سفید نشان‌می‌دهد بزرگتر از عددی باشدکه تاس قرمزنشان می‌دهد چقدراست؟

۵. اگر چهار تاس باهم ریخته شوند، احتمال آنکه تاسها چهار عدد مختلف‌را نشان دهند چقدر است؟

۶. اگر هفت تاس باهم ریخته شوند، احتمال آنکه دقیقاً سه‌تا ۶ بیاید چقدر است؟

۷. نشان دهیدکه جمله‌های بسط دوجمله‌ای $\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۶}\right)^{۷}$ به ترتیب برابر احتمال آمدن ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و۷ بار عدد ۶ در ریختن هفت تاس است.

۸. وقتی که پنج تاس ریخته می‌شوند احتمال به دست‌آوردن مجموعی برابر ۱۵ چقدر است؟

۹. وقتی که هشت سکه پرتاب می‌شوند احتمال آمدن (الف) دقیقاً پنج شیر؛ (ب) حداقل پنج شیر، چقدر است؟

۱۰. احتمال آنکه چهارکارتی که به‌تصادف ازیك دسته‌کارت معمولی ۵۲تایی کشیده می‌شود، هرکدام از یك خال مثلاً یك دل، یك پیك، یك خشت، و یك خاج باشد چقدر است؟

۱۱. احتمال آنکه در۱۳ کارتی که ازیك دسته کارت معمولی ۵۲تایی کشیده می‌شود (الف) حداقل دو صورت وجود داشته‌باشد؛ (ب) یك تك وجود داشته باشد (پ) حداقل یك تك وجود داشته‌باشد، چقدر است؟

۱۲. حروف الفبا به ترتیب تصادفی نوشته شده‌اند. احتمال آنکه x و y مجاور هم قرار بگیرند چقدر است؟

۱۳. اگر یك عدد صحیح پنج رقمی به‌تصادف انتخاب شود، احتمال آنکه (الف)

مجموع ارقام‌آن برابر ۲۰ باشد؛ (ب) حاصلضرب ارقام‌آن ۲۰ باشد، چقدر است؟

۱۴. معلمی‌می‌خواهد بااستخراج پنج اسم ازکلاهی‌که محتوی ده اسم است ده نفر را به‌دوتیم پنج نفری برای بازی بسکتبال تقسیم کند. در شروع قرعه‌کشی، پسری به دوستش می گوید «امیدوارم ما دریك تیم باشیم.» دوستش جواب‌می‌دهد «بسیار خوب، ما شانس پنجاه‌ـ‌پنجاه داریم.» آیا جواب‌او، بدین مفهوم که‌احتمال بودن‌دو پسر در یـك تیم ۱/۲ است، درست است؟

۱۵. شخصی هشت شمع اتومبیلش را برای‌تمیزکردن درمی‌آورد. او قصد داردکه هرشمع را از هرسیلندری‌کـه برداشته، درهمان سیلندر قرار دهد، ولی او آنها را قاطی‌کرده است. به فرض‌آنکه شمعها به طور تصادفی گذاشته شوند؛ احتمال آنکه حداقل یك شمع، درهمان سیلندری‌که بوده است، قرار بگیرد چقدر است؟ احتمال آنکه حداقل دوشمع درهمان سیلندرهایی‌که بوده‌اند قرار بگیرند چقدر است؟

۱۶. یك نوع بازی یك‌نفره باکارت به‌شرح زیراست: بازیکن دارای دودست‌کارت برزده است‌که هرکدام دارای ۵۲ کارت معمولی است. از این کارتهاکه پشت‌ورو هستند بازیکن یك جفت‌کارت، ازهردسته یك‌کارت، برمی‌دارد. اگر این‌کارتها جور باشند (مثلاً، اگر هر دو هفت‌پیك باشند) بازیکن بازی را باخته است. اگر کارتها جور نباشند او به‌بازی ادامه می‌دهد ویك جفت کارت دیگر، از هردسته یك کارت، برمی‌دارد. دوباره اگر آنها یك جفت جور باشند، او بازنده است. اگر او بتواند تمام ۵۲ جفت کارت را طوری بردارد کـه هیچ جفتی جـور نباشد، برنده است. احتمال برد چقدر است؟

۱۷. در مسألهٔ قبل فرض‌کنیم بازی با دو دستهٔ کارت ۱۳ تایی، مثلاً باخالهای پیك دودسته کارت، انجام شود. دراین حالت احتمال برد چقدر است؟

۱۸. درمسألهٔ ۱۶ فرض‌کنیم برنده‌بودن به‌صورت دیگری تعریف شود: اگر در۵۲ جفت، فقط یك جفت جـور باشد بازیکن برنـده است. در این حالت احتمال برد چقدر است؟

۵.۵ خلاصه

گردایـه‌ای از N شیء متفاوت را درنظر بگیرید کـه بعضی دارای ویـژگی α، بعضی دارای ویژگی β، بعضی دارای ویژگی γ و غیره باشند. فرض کنیم $N(\alpha)$

تعداد اشیایی‌است که دارای ویژگی α، $N(\beta)$ تعداداشیایی‌است که دارای‌ویژگی β، ...، $N(\alpha, \beta)$ تعداد اشیایی است که دارای دو ویژگی α، β، $N(\alpha, \beta, \gamma)$ تعداد اشیایی است‌که دارای هرسه ویژگی α، β، γ و غیره باشند. دراین صورت تعداد اشیایی‌که هیچ یك ازاین ویژگیها را ندارند برابر است با

$$\begin{aligned}
&N\\
&-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)-\cdots\\
&+N(\alpha, \beta)+N(\alpha, \gamma)+N(\beta, \gamma)+\cdots\\
&-N(\alpha, \beta, \gamma)-\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

فرض کنیم‌که r ویژگی، موردنظر باشند. همچنین فرض کنیم تعداد اشیاء با یك ویژگی برابر باتعداد اشیاء با هرتك ویژگی دیگر بوده، تعداد اشیاء با دوتا از ویژگیها، بدون توجه به‌اینکه‌کدام یك از دو ویژگی درنظرگرفته شوند، باهم یکی باشند، و به‌همین‌ترتیب برای سه ویژگی، چهار ویژگی و غیره. در این صورت می‌توانیم تعداد اشیایی راکه هیچ‌کدام ازاین ویژگیهارا ندارند به‌شکل ساده‌تری تعیین کنیم.

$$N-C(r, ۱)N(\alpha)+C(r, ۲)N(\alpha, \beta)-C(r, ۳)N(\alpha, \beta, \gamma)+\cdots.$$

همان طوری‌که گفته شد، بااستفاده از اصل‌شمول-عدم شمول، بحث معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_k=m \qquad (۱۵.۵)$$

درادامهٔ‌فصل‌قبل‌است. اکنون قادریم تعداد جوابهای معادله‌ای از نوع (۱۵.۵) را تحت شرایطی‌که هریك از متغیرها به مجموعهٔ خاصی ازمقادیر اعداد صحیح متوالی محدود می‌شود، تعیین‌کنیم. ضمن اینکه فرمولهای تفصیلی به‌طورکلی داده نشده‌اند از حالت زیر بحث شده است: فرض کنیم c یك عدد صحیح مثبت ثابت باشد؛ تعداد جوابهای معادلهٔ (۱۵.۵) در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت از ۱ تا c برابر است با

$$\begin{aligned}
&C(m-۱, k-۱)-C(k, ۱)C(m-c-۱, k-۱)\\
&\qquad +C(k, ۲)C(m-۲c-۱, k-۱)
\end{aligned}$$

$$-C(k,\ ۳)C(m-۳c-۱,\ k-۱)$$
$$+C(k,\ ۴)C(m-۴c-۱,\ k-۱)-\dots,$$

که درآن، سری تاحصول جمله‌هایی برابر صفر ادامه دارد.

بحث ترکیبها باتکرارها از فصل قبل، دوباره با استفاده از اصل شمول-عدم شمول به‌انواع وسیعتری از حالتها، ادامه یافته‌است.

$D(n)$ را برابرتعداد پریشهای n ,... ,۳ ,۲ ,۱، یعنی برابرتعداد جایگشتهایی که ۱ دراولین مکان، ۲ در دومین مکان و... و n در nامین مکان قرار نگیرد تعریف می‌کنیم. ثابت شدکه

$$D(n)=n!\left[۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-\frac{۱}{۵!}+\dots+(-۱)^{n}\frac{۱}{n!}\right].$$

گوییم که دو جایگشت از n شیء ناسازگارند اگر در دو آرایش، تمام زوجهای اشیایی که در موقعیتهای متناظرند عبارت از اشیایی متمایز باشند. اگر P یك‌جایگشت ثابت از اعداد صحیح ۱ تا n باشد، تعداد جایگشتهای ناسازگار با P برابر $D(n)$ است. پریشها عبارت‌اند از جایگشتهای ناسازگار با ترتیب طبیعی n ,... ,۳ ,۲ ,۱.

در وضعیتهای ترکیبیاتی‌ساده، احتمال به‌صورت نسبت تعداد حالتهای مساعد به‌تعداد حالتهای ممکن همشانس تعریف‌شد. معنی «حالتهای همشانس» در وضعیتهای پایه‌ای معین به‌طور شهودی واضح فرض شد، وسپس به‌حالتهای پیچیده‌تر، بااستفاده از اصل ضرب فصل ۳، تعمیم داده شد.

٦

افرازهای یك عدد صحیح

در این فصل از افرازهای یك عدد صحیح ، یا از آنچه که با گردایه‌ای از اشیاء یکسان هم ارز است بحث می‌کنیم. در حالتی که اشیاء یکسان نباشند، مسأله تحت عنوان «افرازهای یك مجموعه» در می‌آید کـه در بخش ۲.۸ مـورد بحث واقع می‌شود.

افرازهای یك عدد صحیح مثبت، راههای نوشتن آن عدد به‌صورت مجموع اعداد صحیح مثبت است. مثلاً افرازهای ۵ عبارت‌اند از:

۵	۱+۴	۱+۱+۳	۱+۱+۱+۲
	۲+۳	۱+۲+۲	۱+۱+۱+۱+۱

چون تعداد افـرازهای ۵ برابر ۷ است، می‌نویسیم $p(۵)=۷$؛ به‌طور کلی فرض کنیم $p(n)$ تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت n را نشان دهد. در افـرازی مانند ۲+۳ ی بالا هریك از اعداد ۳ و ۲ را یك جمعوند می‌گویند. بنا برایـن عدد ۵

دارای یك افراز با یك جمعوند، دو افراز با دو جمعوند، دو افراز با سه جمعوند، یك افراز با چهار جمعوند، و یك افراز با پنج جمعوند است.

درحالی که ۵ دارای دو افراز باسه جمعوند است، معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۵$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت دارای شش جواب است که عبارت‌اند از

$$(۳,۱,۱),\quad (۱,۳,۱),\quad (۱,۱,۳),\quad (۲,۲,۱),\quad (۲,۱,۲),\quad (۱,۲,۲).$$

در شمردن تعداد جوابهای یك معادله، ترتیب در نظر گرفته می‌شود؛ ولی درشمردن تعداد افرازها، ترتیب جمعوندها مفهومی ندارد.

۱.۶ نمودارهای افرازها

به افرازهای ۶ توجه می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} ۵+۱ & ۴+۱+۱ & ۱+۱+۱+۱+۱+۱ \\ ۴+۲ & ۳+۲+۱ & ۲+۱+۱+۱+۱ \\ ۳+۳ & ۲+۲+۲ & ۳+۱+۱+۱ \\ ۶ & & ۲+۲+۱+۱ \end{array} \qquad (۱.۶)$$

یازده افراز وجود دارد، بنابراین می‌نویسیم $p(۶)=۱۱$. همچنین می بینیم که تعداد افرازهای ۶

به ۶ جمعوند، برابر ۱؛

به ۵ جمعوند، برابر ۱؛

به ۴ جمعوند، برابر ۲؛ (۲.۶)

به ۳ جمعوند، برابر ۳؛

به ۲ جمعوند، برابر ۳؛

به ۱ جمعوند، برابر ۱؛

است.

تعداد افرازهای n را که تعداد جمعوندهای آنها کوچکتر یا مساوی k است با نماد

$q_k(n)$ نشان خواهیم داد. به‌ازای $n=۶$، فهرست (۲.۶)ی بالا نشان می‌دهد که :

$$q_۱(۶)=۱ \qquad q_۳(۶)=۷ \qquad q_۵(۶)=۱۰$$
$$q_۲(۶)=۴ \qquad q_۴(۶)=۹ \qquad q_۶(۶)=۱۱. \tag{۳.۶}$$

چون عدد ۶ نمی‌تواند به بیشتراز شش جمعوند افراز شود، انتظار داریم که $q_۶(۶)$ همان $p(۶)$ باشد. به همین ترتیب $q_n(n)$ ، به معنای تعداد افرازهای n است که دارای n جمعوند یا کمتر از n جمعوند است و بنابراین

$$q_n(n)=p(n). \tag{۴.۶}$$

همچنین می‌توان افرازها را برحسب اندازهٔ جمعوندها رده‌بندی کرد. فهرست (۱.۶) نشان می‌دهد که تعداد افرازهای ۶،

با ۶ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است،

با ۵ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است،

با ۴ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۲ است،

با ۳ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۳ است،

با ۲ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۳ است،

با ۱ به عنوان بزرگترین جمعوند، برابر ۱ است.

به شباهت‌این فهرست با فهرست (۲.۶) توجه کنید. همان طوری که خواهیم دید این امر تصادفی نیست . بعلاوه اگر $p_k(n)$ را تعداد افرازهایی از n تعریف کنیم که هیچیك از جمعوندهای آن از k بزرگتر نباشد، نتیجه می گیریم که:

$$p_۱(۶)=۱ \qquad p_۳(۶)=۷ \qquad p_۵(۶)=۱۰$$
$$p_۲(۶)=۴ \qquad p_۴(۶)=۹ \qquad p_۶(۶)=۱۱. \tag{۶.۶}$$

این‌فهرست مشابه به فهرست (۳.۶) است. به‌طور کلی درست است که $p_k(n)=q_k(n)$. اکنون توجه خود را به‌بعضی ازحالتهای خاص معطوف می‌داریم که ببینیم چرا این رابطه برقرار است.

افرازهای ۶ با سه جمعوند عبارت‌اند از:

$$۴+۱+۱,\qquad ۳+۲+۱,\qquad ۲+۲+۲. \qquad (۷.۶)$$

افرازهای ۶ که بزرگترین جمعوند آنها ۳ است عبارت‌اند از:

$$۳+۱+۱+۱,\qquad ۳+۲+۱,\qquad ۳+۳. \qquad (۸.۶)$$

برای اینکه ببینیم تساوی تعداد افرازهای فهرستهای (۷.۶) و (۸.۶) (یعنی سه) تصادفی نیست، از آنچه نمودار افرازها نامیده شده‌است استفاده می‌کنیم. نمودار افراز ۱+۱+۴ عبارت است از:

```
· · · ·
·
·
```

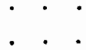
به همین ترتیب نمودارهای ۱+۲+۳ و ۲+۲+۲ به صورت زیرند:

```
· · ·        · ·
· ·          · ·
·            · ·
```

بنابراین نمودار یك افراز n با k جمعوند، صرفاً شامل k سطر از نقطه‌ها، هر سطر برای یك جمعوند است؛ سطری که بزرگترین جمعوند را نشان می‌دهد در بالا ظاهر می‌شود، نمایش بزرگترین جمعوند بعدی در زیر آن ظاهر می‌شود وقس علی هذا. تعداد سطرها برابر تعداد جمعوندهاست، و تعداد نقطه‌ها در هر سطر برابر با اندازهٔ هر جمعوند است. تعداد کل نقطه‌ها در نمودار یك افراز، مساوی n است.

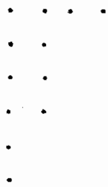
باعوض کردن سطرهای افقی و عمودی عکس نمودار به دست می‌آید. مثلاً

عکس نمودار	نمودار
· · · · · ·	· · · · · ·
۳+۱+۱+۱	۴+۱+۱
· · · · · ·	· · · · · ·
۳+۲+۱	۳+۲+۱

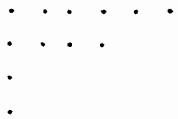


۳+۳

۲+۲+۲

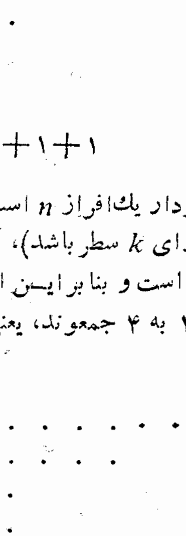


۴+۲+۲+۲+۱+۱



۶+۴+۱+۱

عکس نمودار یک‌افراز n، مجدداً نمودار یک‌افراز n است. اگر نمودار اولیه افرازی با k جمعوند را نشان‌دهد (یعنی‌دارای k سطر باشد)، آن‌گاه عکس نمودار در اولین (بزرگترین) سطر دارای k نقطه است و بنابراین افرازی با ماکسیمم جمعوند k را نشان‌می‌دهد. مثلاً، افراز ۱۲ به ۴ جمعوند، یعنی ۶+۴+۱+۱، نمودار زیر را دارد



و نمودار عکس آن، یعنی

افراز ۴+۲+۲+۲+۱+۱ عدد ۱۲ را نشان می‌دهد که بزرگترین جمعوند آن ۴ است. بنابراین می‌توان تناظر یک به‌یکی را که بین نمودارها و نمودارهای

عکس وجود دارد به‌عنوان یك تناظر یك به‌یك بین افرازهایی از n با k جمعوند و افرازهایی‌از n با بزرگترین جمعوند k تعبیر کرد. درنتیجه تعداد افرازهای n به k جمعوند باتعداد افرازهایی‌از n که‌ماکسیمم‌جمعوندآنهامساوی k است، برابراست.

بعلاوه چون‌تعداد افرازهایی از n به ۱، یا ۲، یا ۳، ...، یا k جمعوندمساوی با تعداد افرازهایی از n است که ماکسیمم جمعوندهای آن برابر ۱، یا ۲، یا ۳، ...، یا k است، می‌توان گفت:

تعداد افرازهایی از n به k یا کمتر از k جمعوند، برابر با تعداد افرازهایی از n است که بزرگترین جمعوند آنها از k بزرگتر نیست؛ به‌صورت نمادی،

$$q_k(n) = p_k(n). \qquad (۹.۶)$$

این نتیجه برای حالت خاص $n=۶$ در فهرستهایی از معادله‌های (۳.۶) و (۶.۶) تشریح شده‌است.

مجموعه مسائل ۲۲

۱. مقدار $p(۱)$ و $p(۲)$ و $p(۳)$ و $p(۴)$ و $p(۵)$ را محاسبه کنید.

۲. مقدار $p_۱(n)$ $q_۱(n)$ را محاسبه کنید.

۳. مقدار $q_۲(۸)$، $q_۲(۹)$ و به‌طور کلی مقدار $q_۲(n)$ را محاسبه کنید.

۴. مقدار $p_{۹۸}(۹۹) - p_{۹۹}(۹۹)$ را بیابید.

۵. مقدار $p_{۶۵}(۶۷) - p_{۶۷}(۶۷)$ را محاسبه کنید.

۶. ثابت کنید که $p_{n+۱}(n) = p_n(n)$، و به طور کلی ثابت کنید که اگر $k>n$، $p_k(n) = p_n(n)$.

۷. ثابت کنید که $p_n(n) = p_{n-۱}(n) + ۱$.

۲.۶ تعداد افرازها

تعداد افرازهای n را با $p(n)$، و تعداد افرازهایی‌از n را که‌دارای k یا کمتراز k جمعوند هستند با $q_k(n)$، و تعداد افرازهایی از n را کـه جمعوندی بزرگتر از k ندارند با $p_k(n)$ نشان دادیم. روابطی که تا حال به‌دست آمده‌اند عبارت‌اند از

$$p(n)=q_n(n)=p_n(n) \text{ و } p_k(n)=q_k(n). \qquad (۱۰.۶)$$

برای محاسبهٔ مقادیر عددی این افرازها، نتیجهٔ دیگری را ثابت می‌کنیم:

$$p_k(n)=p_{k-۱}(n)+p_k(n-k). \qquad (۱۱.۶)$$

برای اثبات این‌رابطه به‌ازای اعداد صحیح n و k که در $۱<k<n$ صدق‌می‌کنند، $p_k(n)$، یعنی افرازهایی از n را کــه جمعوندی بزرگتر از k ندارند به دو نوع تقسیم‌می‌کنیم:

(الف) آنهایی که دارای جمعوند k هستند؛

(ب) آنهایی که جمعوند k را ندارند.

ابتدا می‌بینیم که افرازهای نوع (ب) دقیقاً $p_{k-۱}(n)$ افراز از n هستند که جمعوندی بزرگتر از $k-۱$ ندارند. سپس توجه می‌کنیم که چون جمعوند k حداقل یك بار در هر افراز از نوع (الف) ظاهرمی‌شود، می‌توان ازهریك ازافرازها یك جمعوند k را برداشت. اگراین‌عمل را انجام دهیم، افرازهای حاصل دقیقاً افرازهای$n-k$ به جمعوندهایی هستند که بزرگتر از k نیستند، و تعدادآنها برابر$p_k(n-k)$است. بنابراین (۱۱.۶) به‌ازای‌اعداد صحیح n وk، باشرط $۱<k<n$ ثابت شده‌است.

برای روشن شدن این استدلال، حالت $n=۶$ و $k=۴$ را درنظر می‌گیریم، به‌قسمی که فرمول (۱۱.۶) به‌صورت $p_۴(۶)=p_۳(۶)+p_۴(۲)$ درمی‌آید. تمام افرازهای عدد ۶ در (۱.۶) بخش قبل فهرست شده‌اند. عدد۶ دارای نه افرازاست که جمعوندی بزرگتر از ۴ ندارند، بنابراین $p_۴(۶)=۹$. این نه افراز به دونوع (الف)، آنهایی که دارای جمعوند ۴ هستند، و نوع (ب)، آنهایی‌که دارای جمعوند ۴ نیستند، تقسیم می‌شوند:

نوع (ب)	نوع (الف)
۱+۱+۱+۱+۱+۱	۴+۱+۱
۲+۱+۱+۱+۱	۴+۲
۳+۱+۱+۱	
۲+۲+۱+۱	
۳+۲+۱	
۲+۲+۲	
۳+۳	

افرازهـای نـوع (ب) تمام افرازهایی از ۶ هستندکـه جمعونـدی بـزرگتر از ۳ ندارند، تعداد اینها بـرابـر $p_{۳}(۶)$ است. وقتی کـه جمعوند ۴ را از هـر افراز نوع (الف) برداریـم، افرازهـای ۱ + ۱ و ۲ بـه‌دست می‌آیند. تعداد اینها برابر $p_{۴}(۲)$ است، زیرا

$$p_{۴}(۲) = p_{۲}(۲) = p(۲) = ۲\,.$$

فرمول (۱۱.۶) برای اعـداد صحیح مثبت k و n که در رابطهٔ $۱ < k < n$ صدق می‌کنند معتبر است. برای تشکیل جدولی ازمقادیر $p_k(n)$، به‌مشاهداتی‌اضافی احتیاج داریم. ابتدا به‌ازای $k = ۱$ توجه می‌کنیم که:

$$p_{۱}(n) = ۱ \quad \text{،} n \geqslant ۱ \text{ به‌ازای تمام مقادیر} \tag{۱۲.۶}$$

زیرا تنها یك افراز n وجود داردکه جمعوندی بزرگتر از ۱ ندارد. بعلاوه، افرازی برای n وجود نداردکه جمعوندی بزرگتر از n داشته باشد، بنابراین

$$p_k(n) = p_n(n) \quad \text{،} k \geqslant n \quad \text{اگر} \tag{۱۳.۶}$$

درحالت $n = ۱$، رابطهٔ بالا نتیجه می‌دهدکه

$$۱ = p_{۱}(۱) = p_{۲}(۱) = p_{۳}(۱) = \cdots$$

همچنین تنها یك افراز برای n وجود دارد که دارای جمعوند n است و بنابراین

$$p_n(n) = ۱ + p_{n-۱}(n). \tag{۱۴.۶}$$

با استفاده از این نتایج، تشکیل جـدول مقادیر $p_k(n)$ مطلب ساده‌ای است. برای شروع، به دلیل فرمولهای (۱۲.۶) و (۱۳.۶) می‌توان ۱ها را در اولین سطر افقی و اولین ستون عمودی قرار داد. آن‌گاه شاید برای ادامهٔ عمل، بهترین راه‌این باشدکه بااستفاده ازفرمولهای (۱۱.۶)، (۱۳.۶) و(۱۴.۶)، مقادیر $p_{۲}(n)$ به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$، سپس $p_{۳}(n)$ به ازای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$، و سپس $p_{۴}(n)$ به ازای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$ ، وغیره را در جدول قرار دهیم.

جدول مقادیر $p_k(n)$

	$k=۱$	$k=۲$	$k=۳$	$k=۴$	$k=۵$	$k=۶$	$k=۷$
$n=۱$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$n=۲$	۱	۲	۲	۲	۲	۲	۲
$n=۳$	۱	۲	۳	۳	۳	۳	۳
$n=۴$	۱	۳	۴	۵	۵	۵	۵
$n=۵$	۱	۳	۵	۶	۷	۷	۷
$n=۶$	۱	۴	۷	۹	۱۰	۱۱	۱۱
$n=۷$	۱	۴	۸	۱۱	۱۳	۱۴	۱۵

مجموعه مسائل ۲۳

۱. جدول مقادیر $p_k(n)$ را تا $n = ۱۲$ و $k = ۱۲$ گسترش دهید.

۲. مقادیر $q_۷(۵)$، $q_۷(۷)$ و $q_۷(۹)$ را محاسبه کنید.

۳. مقادیر $p(۷)$، $p(۸)$، $p(۹)$ و $p(۱۰)$ را محاسبه کنید.

۳.۶ خلاصه

تعداد افرازهای عدد صحیح مثبت n، کــه با $p(n)$ نشان داده شد، تعداد راههایی است کــه می‌توان n را به صورت مجموع اعداد صحیح مثبت نوشت. در افرازی نظیر $۱+۲+۴=۷$ سه جمعوند ۴ و ۲ و ۱ وجود دارنــد. ترتیب جمعوندهــا اهمیتی ندارد، بنابراین $۴+۱+۲=۷$ همان افراز قبلی است. $q_k(n)$، به معنای تعداد افرازهایی از n است که تعداد جمعوندهای آن، k یا کمتر از k است، $p_k(n)$، به‌معنای تعداد افرازهایی از n است که جمعوندی بزرگتر از k ندارند. نتایج زیر اثبات شد:

$$p_k(n)=q_k(n),$$

$$p(n)=p_n(n)=p_{n+1}(n)=p_{n+2}(n)=p_{n+3}(n)=\cdots,$$

$$p_k(n)=p_{k-1}(n)+p_k(n-k)$$ به ازای $1<k<n$،

با استفاده از این نتایج و ملاحظات سادهٔ

$$p_n(n)=1+p_{n-1}(n) \text{ و } p_1(n)=1$$

جدول مختصر افرازها گسترش داده شد.

۷

چندجمله‌ایهای مولد

دراین فصل برای «تولیدکردن» جوابهای یک‌رده از مسائل، ازچندجمله‌ایها استفاده خواهیم کرد. مثلاً، مسألهٔ ۵.۱ فصل ۱ را حل خواهیم کرد، مسأله بدین قرار بود: به‌چند طریق اسکناسی یک‌دلاری را می‌توان خردکرد؟ روشی‌که دراین فصل معرفی می‌شود، در سطحی پیشرفته، درست یک‌قدم بالاتر از شمارش حالتهاست.

برای تعیین تعداد راههای خرد کردن یك اسکناس یـك‌دلاری، ابتدا تکنیك معروف ضرب چندجمله‌ایها را بررسی می‌کنیم. خصوصاً به‌ضرب چندجمله‌ایهایی‌که ضرایب آنها ۱ است توجه‌می‌کنیم. مثلاً،

$$
\begin{aligned}
(۱+x+x^{۲}+x^{۴}+x^{۸})(۱+x^{۳}+x^{۶}+x^{۹})
&=۱+x+x^{۲}+x^{۳}+۲x^{۴}+x^{۵}+x^{۶}+۲x^{۷}\\
&\quad+۲x^{۸}+x^{۹}+۲x^{۱۰}+۲x^{۱۱}+x^{۱۳}+x^{۱۴}+x^{۱۷}.
\end{aligned}
$$

اکنون فرض‌کنیم‌درجمله‌های حاصلضرب، تنها به‌جمله‌هایی تا$x^{۹}$توجه‌کنیم. بنابراین جمله‌هایی با توانهای بالاتر x را درنظر نمی‌گیریم و می‌نویسیم:

$$(1+x+x^2+x^4+x^8)(1+x^3+x^6+x^9)$$
$$=1+x+x^2+x^3+2x^4+x^5+x^6+2x^7+2x^8+x^9+\cdots.$$

درفرایند ضرب به‌محاسبهٔ توانهای‌بالاتر از x^9 نیازی نیست. برای روشن‌کردن این نکته، بسط حاصلضرب

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7),$$

را تا جملهٔ x^7 پیدا می‌کنیم. می‌توانیم فرایند ضرب را از انتهای سمت راست به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned}(1+x)&(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)\\ &=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6+x^7+\cdots)\\ &=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5+x^6+x^7+\cdots)\\ &=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4+x^5+x^6+x^7+\cdots) \qquad (1.7)\\ &=(1+x)(1+x^2)(1+x^3+x^4+x^5+x^6+2x^7+\cdots)\\ &=(1+x)(1+x^2+x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+\cdots)\\ &=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+\cdots.\end{aligned}$$

بدین‌طریق به مقدار قابل ملاحظه‌ای در کار صرفه‌جویی می‌شود، زیرا بسط کامل، جمله‌هایی تا x^{28} را شامل است. البته‌اگر جمله‌هایی باتوانهای بالاتر از ۷ موردنظر نباشند، این‌صرفه‌جویی درکار را می‌توان انجام داد. همان‌طوری‌که خواهیم دید در مسائل این فصل چنین محدودیتی قابل قبول خواهدبود.

مجموعه مسائل ۲۴

۰۱ حاصلضرب $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$ را تاجملهٔ x^{16} بسط دهید.

۰۲ حاصلضرب

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)(1+x^8)$$

را تا جملهٔ x^8 بسط دهید.

۴. حاصلضرب

$$(\text{۱}+x+x^{\text{۲}}+x^{\text{۳}}+x^{\text{۴}}+x^{\text{۵}}+x^{\text{۶}}+x^{\text{۷}})(\text{۱}+x^{\text{۲}}+x^{\text{۴}}+x^{\text{۶}})(\text{۱}+x^{\text{۳}}+x^{\text{۶}})$$
$$\times(\text{۱}+x^{\text{۴}})(\text{۱}+x^{\text{۵}})(\text{۱}+x^{\text{۶}})(\text{۱}+x^{\text{۷}})$$

را تا جملهٔ $x^{\text{۷}}$، به‌دست آورید.

۱.۷ افرازها و حاصلضربهای چندجمله‌ایها

در بسط حاصلضرب (۱.۷) دوجمله‌ایهایی به‌صورت $(\text{۱}+x^n)$، $n=\text{۱}, \text{۲}, \ldots, \text{۷}$، به جملهٔ $\text{۵}x^{\text{۷}}$ توجه می‌کنیم. ضریب ۵ به ما می‌گوید که در واقع، $x^{\text{۷}}$ پنج بار در فرایند ضرب ظاهرمی‌شود. از ردیابی این پنج حالت می‌بینیم که $x^{\text{۷}}$ ازحاصلضربهای

$$x^{\text{۷}},\ x^{\text{۶}}x,\ x^{\text{۵}}\,x^{\text{۲}},\ x^{\text{۴}}x^{\text{۳}},\ x^{\text{۴}}x^{\text{۲}}x,$$

به‌وجود می‌آید، که‌درآنها برای‌سادگی عاملهای ۱ حذف شده‌اند. دراین‌پنج حالت، توانها با برابریهای

$$\text{۷}=\text{۷},\ \text{۷}=\text{۶}+\text{۱},\ \text{۷}=\text{۵}+\text{۲},\ \text{۷}=\text{۴}+\text{۳},\ \text{۷}=\text{۴}+\text{۲}+\text{۱},$$

متناظرند. می بینیم که‌این پنج برابری‌دقیقاً افرازهایی‌ازعدد۷ باجمعوندهای‌متمایزند.

به عنوان دومین مثال، تمام افرازهای ۶ را که دارای جمعوندهای متمایزند درنظرمی گیریم

$$\text{۶}=\text{۶},\ \text{۶}=\text{۵}+\text{۱},\ \text{۶}=\text{۴}+\text{۲},\ \text{۶}=\text{۳}+\text{۲}+\text{۱}.$$

دراین‌جا چهار برابری و یاچهار افراز وجود دارندکه باضریب۴ درجملهٔ $\text{۴}x^{\text{۶}}$ از بسط (۱.۷) متناظرند.

اگر می‌خواستیم برای تعیین تعداد افرازهای ۸ با جمعوندهای متمایز، از حاصلضربهای چند جمله‌ای استفاده کنیم، بسط (۱.۷) نامناسب بود، زیرا این بسط پس‌از $(\text{۱}+x^{\text{۷}})$ متوقف می‌شود. به‌ضریب $x^{\text{۸}}$ دربسط

$$(\text{۱}+x)(\text{۱}+x^{\text{۲}})(\text{۱}+x^{\text{۳}})(\text{۱}+x^{\text{۴}})(\text{۱}+x^{\text{۵}})(\text{۱}+x^{\text{۶}})(\text{۱}+x^{\text{۷}})(\text{۱}+x^{\text{۸}}),\quad (\text{۲.۷})$$

توجه می‌کنیم. (مسألهٔ ۲ از مجموعه مسائل ۲۴ را ببینید.)

نکتهٔ دیگری رامی‌توان عنوان کرد. ضرایب x، $x^{\text{۲}}$، $x^{\text{۳}}$، $x^{\text{۴}}$، $x^{\text{۵}}$ $x^{\text{۶}}$، $x^{\text{۷}}$ در بسط(۱.۷)به‌ترتیب تعداد افرازهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ باجمعوندهای‌متمایزند.

به‌همین‌ترتیب ضرایب x، $x^۲$، $x^۳$، $x^۴$، $x^۵$، $x^۶$، $x^۷$، $x^۸$ در بسط حاصلضرب (۲.۷) به‌ترتیب تعداد افرازهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ با جمعوندهای متمایزند. نتیجه می‌شود که بسطهای (۱.۷) و (۲.۷) تا جمله‌ای که شامل $x^۷$ است یعنی تا $۵x^۷$ یکی هستند.

آیا برای به‌دست‌آوردن افرازهای معمولی یك عدد بدون وجود شرط «جمعوندهای متمایز» می‌توان از ضرب چندجمله‌ایها استفاده کرد؟ به‌شرط آنکه، چندجمله‌ایهای صحیحی برای ضرب انتخاب کنیم، می‌توانیم این‌عمل‌را انجام دهیم. حاصلضرب زیر را درنظر بگیرید

$$\begin{aligned}&(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴+x^۵+x^۶+x^۷)\\&\quad\times(۱+x^۲+x^۴+x^۶)(۱+x^۳+x^۶)\\&\quad\quad\times(۱+x^۴)(۱+x^۵)(۱+x^۶)(۱+x^۷).\end{aligned}\tag{۳.۷}$$

عاملهای سوم، دوم و اول را به‌صورتهای

$$\begin{aligned}&۱+x^۳+x^۶=۱+x^۳+x^{۳+۳},\\&۱+x^۲+x^۴+x^۶=۱+x^۲+x^{۲+۲}+x^{۲+۲+۲},\\&۱+x+x^۲+x^۳+x^۴+x^۵+x^۶+x^۷=۱+x^۱+x^{۱+۱}+x^{۱+۱+۱}\\&\quad+x^{۱+۱+۱+۱}+x^{۱+۱+۱+۱+۱}+x^{۱+۱+۱+۱+۱+۱}+x^{۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱}\end{aligned}$$

درمی‌آوریم. با درنظر گرفتن این عاملها به‌صورت بالا (بدون تغییر عاملهای $۱+x^۴$، $۱+x^۵$، $۱+x^۶$، $۱+x^۷$)، می‌بینیم که می‌توان ضریب $x^۷$ در بسط کامل حاصلضرب را مساوی تعداد راههای نوشتن ۷ به‌صورت مجموع اعدادی گرفت که ازیك یا چندتا از دسته‌های زیر انتخاب می‌شوند، و درآنها حداکثر یك‌عضو ممکن است از یك دسته اختیار شود.

دستهٔ اول: $۱,\ ۱+۱,\ ۱+۱+۱,\ ۱+۱+۱+۱,\ ۱+۱+۱+۱+۱,$
$۱+۱+۱+۱+۱+۱,\ ۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱,$

دستهٔ دوم: $۲,\ ۲+۲,\ ۲+۲+۲;$

دستهٔ سوم: $۳,\ ۳+۳;$

دستهٔ چهارم: $۴;$

دستهٔ پنجم: $۵;$

دسته ششم: $\;\;\;\;$ ۶;

دسته هفتم: $\;\;\;\;$ ۷;

اما این فقط توضیحی طولانی و پرزحمت از تعداد افرازهای ۷ است.

بنابراین می‌بینیم که‌ضرایب x، $x^{۲}$، $x^{۳}$، $x^{۴}$، $x^{۵}$، $x^{۶}$، $x^{۷}$ در بسط حاصلضرب (۳.۷) به ترتیب فقط تعداد افرازهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ است. با نمادگذاری فصل قبل، این‌ضرایب‌مقدارهای عددی $p(۱)$، $p(۲)$، $p(۳)$، $p(۴)$، $p(۵)$، $p(۶)$، $p(۷)$ هستند.

به‌عنوان مثالی دیگر، حاصلضرب

$$\begin{aligned}&(۱+x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴}+x^{۵}+x^{۶}+x^{۷}+x^{۸}+x^{۹})\\&\quad\times(۱+x^{۳}+x^{۶}+x^{۹})(۱+x^{۵})(۱+x^{۷})(۱+x^{۹}),\end{aligned}\qquad(۴.۷)$$

را درنظر می‌گیریم. استدلالی شبیه‌آنچه که درحاصلضرب (۳.۷) به‌کار رفت،نشان می‌دهد که ضریبهای x، $x^{۲}$، $x^{۳}$، $x^{۴}$، $x^{۵}$، $x^{۶}$، $x^{۷}$، $x^{۸}$، $x^{۹}$ تعداد افرازهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، تنها با جمعوندهای فردند.

ایــن مثالها اصل‌کلی زیر را القا می‌کنند. فرض کنیم a، b، c، d و e اعداد صحیح مثبت نابرابری باشند. بنابراین ضریب x^n در بسط

$$\begin{aligned}&(۱+x^{a}+x^{۲a}+x^{۳a}+\cdots)(۱+x^{b}+x^{۲b}+x^{۳b}+\cdots)\\&\quad\times(۱+x^{c}+x^{۲c}+x^{۳c}+\cdots)(۱+x^{d}+x^{۲d}+x^{۳d}+\cdots)\\&\quad\times(۱+x^{e}+x^{۲e}+x^{۳e}+\cdots)\end{aligned}\qquad(۵.۷)$$

برابر با تعداد افرازهــای n باجمعوندهــایی محدود بــه a، b، c، d و e است. در (۵.۷) هرعامل باید تمام توانهایی را که از n تجاوز نمی‌کنند شامل شود.

برای‌روشن شدن‌آخرین نکته، حالت $n=۳۴$ و $a=۶$ را درنظر می‌گیریم؛ در (۵.۷) اولین عامل برابر خواهد بود با

$$۱+x^{۶}+x^{۱۲}+x^{۱۸}+x^{۲۴}+x^{۳۰}.$$

حضور توانهای بالاتری مانند $x^{۳۶}$ و$x^{۴۲}$ ونظایرآنها هیچ گونه ضرری ندارد،ولی در حالت $n=۳۴$ ضرورتی هم ندارد.

البته دلیلی هم موجود نیست که جمعوندها را به‌پنج شیء a،b،c،dوe محدود کنیم. بسط‌فرمول (۵.۷) به‌جمعوندهای بیشتر، صرفاً شامل عاملهای اضافی مربوط است، و ادغام به‌جمعوندهای کمتر صرفاً شامل حذف عاملهای مربوط است.

سؤال: برای ارائهٔ تعداد افرازهای ۲۰ با جمعوندهای ۳، ۴، ۵، و۶، ازچه حاصلضربی می‌توان استفاده کرد؟ پاسخ: تعداد چنین افرازهایی برابر ضریب x^{20} دربسط حاصلضرب

$$\begin{aligned}&(1+x^{3}+x^{6}+x^{9}+x^{12}+x^{15}+x^{18})\\ &\quad\times(1+x^{4}+x^{8}+x^{12}+x^{16}+x^{20})\\ &\quad\times(1+x^{5}+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{6}+x^{12}+x^{18}),\end{aligned} \tag{6.7}$$

است.

سرانجام، توجه می‌کنیم که در این بسط، تعبیر دیگری از ضریب x^{20} وجود دارد. این تعبیر، تعداد جوابهای معادلهٔ

$$3y+4z+5u+6v=20,$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است، زیرا هر یك از چنین جوابهایی با یك افراز ۲۰ با جمعوندهای ۳،۴، ۵ و۶ متناظراست. مثلاً جواب $y=1$ ، $z=3$ ، $u=1$، $v=0$ با افراز $5+4+4+4+3=20$ متناظر است.

مجموعه مسائل ۲۵

۱. برای هریك از قسمتهای زیر تعبیری برحسب افرازها ارائه دهید.

الف) ضریب x^{12} دربسط

$$(1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8}+x^{10}+x^{12})(1+x^{4}+x^{8}+x^{12})(1+x^{6}+x^{12})\times(1+x^{8})(1+x^{10})(1+x^{12});$$

ب) ضریب x^{9} دربسط

$$(1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}+x^{6}+x^{7}+x^{8}+x^{9})\times(1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+x^{8})(1+x^{3}+x^{6}+x^{9});$$

پ) ضریب x^{6} دربسط

$$(1+x)(1+x^{2})(1+x^{3})(1+x^{4})(1+x^{5})(1+x^{6}).$$

۲. ضرایبی را که در مسألهٔ قبل به‌آنها اشاره شد محاسبه‌کنید.

۳. یك حاصلضرب چندجمله‌ای بنویسید که بتوان از بسط آن برای تعیین
الف) تعداد افرازهای ۳۸ با جمعوندهای محدود به ۶، ۷، ۱۲، ۲۰؛
ب) تعداد افرازهای ۱۵ با جمعوندهای بزرگتر از ۲؛
پ) تعداد افرازهای ۹ با جمعوندهای متمایز (یعنی نابرابر)؛
استفاده‌کرد. در هرحالت تعداد افرازها را محاسبه کنید.

۴. معادلهٔ

$$۲y+۳z+۵w+۷t=۱۸،$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

۵. معادلهٔ

$$۳u+۵v+۷w+۹t=۴۰,$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت چند جواب دارد؟

۲.۷ خردکردن اسکناس یك‌دلاری

اینك در پرتو اصل کلی فرمولبندی شدهٔ بخش قبل، تعیین تعداد راههای ممکن برای خردکردن یك اسکناس یك دلاری مشکل نیست. چون سکه‌ها به ۱، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰ سنتی نامگذاری شده‌اند، کار ما تعیین تعداد افرازهـای ۱۰۰ با جمعوندهایی محدود به ۱، ۵، ۱۰، ۲۵، ۵۰ است. پس می‌توانیم با:

$$a=۱,\quad b=۵,\quad c=۱۰,\quad d=۲۵,\quad e=۵۰$$

فرمولبندی (۵.۷) را به‌کاربریم. پاسخ سؤال برابرضریب $x^{۱۰۰}$ دربسط حاصلضرب $P_۱P_۲P_۳P_۴P_۵$ است که درآن Pها چندجمله‌ایهای

$$P_۱=۱+x^۱+x^۲+x^۳+x^۴+\dots+x^{۹۹}+x^{۱۰۰},$$
$$P_۲=۱+x^۵+x^{۱۰}+x^{۱۵}+x^{۲۰}+\dots+x^{۹۵}+x^{۱۰۰},$$
$$P_۳=۱+x^{۱۰}+x^{۲۰}+x^{۳۰}+x^{۴۰}+\dots+x^{۹۰}+x^{۱۰۰},$$
$$P_۴=۱+x^{۲۵}+x^{۵۰}+x^{۷۵}+x^{۱۰۰},$$
$$P_۵=۱+x^{۵۰}+x^{۱۰۰},$$

هستند.

تمام محاسبات، تا x^{100} انجام خواهند شد. حساب می‌کنیم که

$$P_4P_5 = 1 + x^{25} + 2x^{50} + 2x^{75} + 3x^{100} + \cdots,$$

$$P_3P_4P_5 = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{25} + x^{30} + x^{35} + x^{40} + x^{45} + 3x^{50} + x^{55} + 3x^{60} + x^{65} + 3x^{70} + 3x^{75} + 3x^{80} + 3x^{85} + 3x^{90} + 3x^{95} + 6x^{100} + \cdots,$$

$$P_2P_3P_4P_5 = 1 + x^5 + 2x^{10} + 2x^{15} + 3x^{20} + 4x^{25} + 5x^{30} + 6x^{35} + 7x^{40} + 8x^{45} + 11x^{50} + 12x^{55} + 15x^{60} + 16x^{65} + 19x^{70} + 22x^{75} + 25x^{80} + 28x^{85} + 31x^{90} + 34x^{95} + 40x^{100} + \cdots.$$

چون فقط ضریب x^{100} مورد نظر ماست، لازم نیست کـه ضرب آخری به تفصیل انجام شود. توجه می‌کنیم کـه هر جمله از حاصلضرب چند جمله‌ای $P_2P_3P_4P_5$ برای شرکت در تشکیل ضریب x^{100} دقیقاً فقط یك بار درضرب P_1 و $P_2P_3P_4P_5$ دخالت دارد. نتیجه می‌شود که این ضریب را به‌سادگی می‌توان با جمع کردن تمام ضریبها در $P_2P_3P_4P_5$ (که شامل جملهٔ ثابت نیز هست) محاسبه کرد:

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 11 + 12 + 15 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31 + 34 + 40.$$

این مجموع برابر ۲۹۲ است، و بنابراین به ۲۹۲ راه می‌توان یك اسکناس یـك دلاری را خرد کرد.

مجموعه مسائل ۲۶

۰۱ تعداد راههای خرد کـردن یك اسکناس صد دلاری به اسکناسهای کوچکتر یعنی ۱، ۵، ۱۰، ۲۰، ۵۰ دلاری را بیابید.

۰۲ به‌چندراه می‌توان مبلغ ۵۳ سنت را باسکه‌های ۱، ۵، ۱۰، ۲۵ سنتی تأمین کرد؟

۰۳ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$5y + 10z + 25w + 50t = 95,$$

را درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تعیین کنید.

۴. تعداد جوابهای معادلهٔ

$$۵y+۱۰z+۲۵w+۵۰t=۱۵۵,$$

را درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تعیین کنید.

۳.۷ خلاصه

ضرب ناتمام‌چندجمله‌ایها باضرایب واحد ــ ناتمام به‌معنای نتیجه‌ای که‌تنها تا توان معینی از متغیر x به دست می‌آید ــ برای تعیین تعداد افرازهایی معین و جوابهای معادلات به کار رفته‌است.

برای پنج جمعوند، شیوهٔ کار به وسیلهٔ اصل کلی زیر نشان داده شده است. فرض کنیم a، b، c، d، e اعداد صحیح مثبت نابرابر باشند. در این‌صورت ضریب x^n در بسط

$$(۱+x^a+x^{۲a}+x^{۳a}+\dots)(۱+x^b+x^{۲b}+x^{۳b}+\dots)$$
$$\times(۱+x^c+x^{۲c}+x^{۳c}+\dots)(۱+x^d+x^{۲d}+x^{۳d}+\dots)$$
$$\times(۱+x^e+x^{۲e}+x^{۳e}+\dots)$$

برابر باتعداد افرازهای n باجمعوندهایی محدود به a، b، c، d، e است. (هر یك از پنج عاملی که به صورت پرانتز درحاصلضرب آمده‌اند باید شامل تمام توانهایی باشندکه از n تجاوز نمی‌کنند.) همچنین این ضریب تعداد جوابهای معادلهٔ

$$ay+bz+cw+du+ev=n$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی y، z، w، u، v است.

این نظریه برای تعیین مثلاً تعداد راههــای خردکردن اسکناس یــك دلاری به‌کار رفته است.

۸

توزیع اشیایی که همگی همانند نیستند

بسیاری ازمسائل آنالیز ترکیبیاتی را می‌توان برحسب تعداد راههای توزیع اشیاء در جعبه‌ها بیان کرد. بعضی ازاین مسائل توزیع در فصلهای قبل مورد بررسی قرار گرفتند. اکنون مختصراً انواع مختلف مسائل را رده‌بندی می‌کنیم.

ابتدا ممکن است که اشیاء را همانند و جعبه‌ها را نامتمایز از یکدیگر درنظر گرفت. اینها مسائل افرازند. مثلاً، تعداد راههای توزیع نه شیء درچهار جعبه درست برابر تعداد افرازهای ۹ به‌حداکثر چهار جمعوند است. مسائلی ازاین نوع در فصلهای ۶ و ۷ مورد بحث واقع شدند.

سپس ممکن است اشیاء را همانند، ولی جعبه‌هارا متفاوت درنظرگرفت. تحت این شرایط، تعداد راههای توزیع نه شیء در چهار جعبه، برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۹$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است. اگر هیچ جعبه‌ای تهی نباشد، جوابها در

مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت درنظر گرفته می‌شوند. به همین ترتیب محدودیتهای دیگر روی تعداد عناصر جعبه‌ها، متناظر با محدودیتها روی جوابهای معادله‌هاست. معادله‌هایی ازاین نوع نیز درفصلهای ۴ و ۵ مطالعه شدند.

در این فصل توزیع اشیایی را که همگی همانند نیستند مطالعه می کنیم. اصطلاح «همگی همانند نیستند» به دوصورت تعبیر می‌شود. (۱) تمام اشیاء بدین مفهوم متفاوت‌اندکه هیچ دوشیئی مانند هم نیستند؛ (۲) گردایه‌ای آمیخته از اشیاء هستند، مثل سکه‌ها، که بعضی همانند وبعضی متفاوت‌اند. در بخش اول از حالتی‌که اشیاء همگی متفاوت و جعبه‌ها نیز همگی متفاوت‌اند؛ دربخش دوم ازحالتی‌که اشیاء همگی متفاوت و جعبه‌ها یکسان‌اند؛ و در بخش سوم از حالتی که بعضی از اشیاء همانند وبعضی متفاوت ولی جعبه‌ها متفاوت‌اند بحث می کنیم.

۱.۸ اشیاء متفاوت، جعبه‌ها متفاوت

اگر m شیء که هیچ‌دوتایی‌ازآنها همانند نیستند، در k جعبه‌ای‌که هیچ دوتای‌آنها همانند نیستند توزیع شوند، تعداد راههایی‌که می‌توان این عمل را انجام داد برابر k^m است، زیرا k راه برای اختیار اولین شیء، k راه برای اختیار دومین شیء و غیره وجود دارد.

اما اکنون فرض می کنیم این شرط اضافی‌که هیچ جعبه‌ای تهی نباشد به‌مسأله تحمیل شود، یعنی تنها آن توزیعهایی را می‌شماریم‌که درآنها هر جعبه حداقل یك شیء دریافت می کند. البته اکنون باید حداقل تعداد اشیاء با تعداد جعبه‌ها برابر باشد، $m>k$؛ در غیراین صورت هیچ یك از چنین توزیعهایی نمی‌توانند انجام شود. فرض‌کنیم $f(m, k)$ تعداد راههای قراردادن m شیء متفاوت در k جعبهٔ متفاوت، بدون وجود هیچ جعبهٔ تهی، را نشان دهد. مثلاً $f(۳, ۲)=۶$. برای راحتی تعریف می کنیم، اگر $m<k$، $f(m, k)=۰$.

بااستفاده از اصل شمول-عدم شمول فصل۵، برای $f(m, k)$ فرمولی به‌دست می‌آوریم. با محاسبهٔ $f(m, ۷)$ این روش را تشریح می‌کنیم. ۷^m، یعنی تعداد کل آرایشهای mشیء متفاوت درهفت‌جعبهٔ متفاوت، را درنظر می گیریم. گوییم که هریك از چنین‌آرایشهایی درحالتی که جعبهٔ اول تهی باشد دارای ویژگی α است، و در حالتی‌که جعبهٔ دوم تهی باشد دارای ویژگی β است، و به ترتیب پنج جعبهٔ دیگر متشابهاً دارای ویژگی γ، δ، ε، ζ، η هستند. برای تعیین تعداد توزیعهایی با هیچ جعبهٔ تهی، تنها توزیعهایی را که صرفاً هیچ یك از ویژگیهای α، β، γ و غیره را

ندارند می‌شماریم. به دلیل تقارن هفت ویــژگی، می‌توان فرمول (۶.۵) صفحهٔ ۸۰ را به‌کاربرد. دراینجا تعدادکل توزیعها برابر $N=\text{۷}^m$ است. منظور ما از $N(\alpha)$، تعداد توزیعهایی است کــه در آنها جعبهٔ اول تهی است، و بنابراین $N(\alpha)=\text{۶}^m$. به همین ترتیب تعداد توزیعهایی کــه در آنها جعبه‌هــای اول و دوم تهی‌اند برابر $N(\alpha,\beta)$ است. اما این برابرتعداد توزیعها در پنج جعبه است، ولذا $N(\alpha,\beta)=\text{۵}^m$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$N=\text{۷}^m,\quad N(\alpha)=\text{۶}^m,\quad N(\alpha,\beta)=\text{۵}^m,\quad N(\alpha,\beta,\gamma)=\text{۴}^m,$$
$$N(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\text{۳}^m,\quad N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=\text{۲}^m,$$
$$N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)=\text{۱}^m,\quad N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta)=\text{۰}.$$

با به‌کاربردن فرمول (۶.۵) صفحهٔ ۸۰، به‌ازای $r=\text{۷}$، به‌دست می‌آوریم

$$f(m,\text{۷})=\text{۷}^m-C(\text{۷},\text{۱})\text{۶}^m+C(\text{۷},\text{۲})\text{۵}^m-C(\text{۷},\text{۳})\text{۴}^m$$
$$+C(\text{۷},\text{۴})\text{۳}^m-C(\text{۷},\text{۵})\text{۲}^m+C(\text{۷},\text{۶})\text{۱}^m.$$

با قراردادن k به‌جای ۷ به‌وسیلهٔ تعمیمی مستقیم از رابطهٔ بالا، می‌بینیم که

$$f(m,k)=k^m-C(k,\text{۱})(k-\text{۱})^m+C(k,\text{۲})(k-\text{۲})^m \qquad (\text{۱.۸})$$
$$-C(k,\text{۳})(k-\text{۳})^m+\dots+(-\text{۱})^{k-\text{۱}}C(k,k-\text{۱})\text{۱}^m.$$

اگر $m<k$، آن‌گاه $f(m,k)=\text{۰}$. درچنین‌حالتهایی می‌توان برای رسیدن به اتحادهایی درخصوص $C(n,r)$، از فرمول (۱.۸) استفاده‌کرد. مثلاً اگر $m=\text{۶}$ و $k=\text{۷}$، آن‌گاه فرمول (۱.۸) می‌گوید که

$$\text{۷}^\text{۶}-C(\text{۷},\text{۱})\text{۶}^\text{۶}+C(\text{۷},\text{۲})\text{۵}^\text{۶}-C(\text{۷},\text{۳})\text{۴}^\text{۶}+C(\text{۷},\text{۴})\text{۳}^\text{۶}$$
$$-C(\text{۷},\text{۵})\text{۲}^\text{۶}+C(\text{۷},\text{۶})\text{۱}^\text{۶}=\text{۰}.$$

مجموعهٔ مسائل ۲۷

۱. مطلوب است تعیین تعداد توزیعهای پنج شیء متفاوت درسه‌جعبهٔ متفاوت، به‌طوری که هیچ جعبه‌ای تهی نماند.

۲. مقدار $f(5, 2)$ را تعیین کنید.

۳. درمتن آمده است که $f(3, 2) = 6$. هم با شمارش دقیق حالتها و هم با استفاده از فرمول (۱.۸)، درستی این تساوی را تحقیق کنید.

۴. به‌چند طریق مختلف ممکن است که k شیء متمایز را طوری در k جعبهٔ متمایز توزیع کرد که هیچ جعبه‌ای تهی نماند؟ پاسخ این سؤال را به دو راه، یعنی با بررسی مستقیم و بااستفاده از فرمول (۱.۸) به‌دست آورید و اتحادی را نتیجه بگیرید.

۵. ثابت کنید که اگر m، یك عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۸ باشد،

$$8^m - C(8, 1)7^m + C(8, 2)6^m - C(8, 3)5^m + C(8, 4)4^m - C(8, 5)3^m + C(8, 6)2^m - C(8, 7) = 0$$

۲.۸ اشیاء متفاوت، جعبه‌ها همانند (افرازهای یك مجموعه)

اگرمجموعه‌ای شامل m عنصر باشد، همواره به‌عنوان قسمتی ازمفهوم واژهٔ «مجموعه» ازپیش فرض می‌شود که عناصر ازیکدیگر متمایزند. پس، تعداد راههایی که می‌توان m شیء متفاوت را در k جعبهٔ همانند قرار داد، برابر تعداد افرازهای یك مجموعهٔ mعنصری به k زیرمجموعه است. توجه کنید که دربارهٔ تعداد عناصردر k زیرمجموعه چیزی نمی‌توان گفت. اما در بعضی مسائل تصریح خواهد شد که زیرمجموعه‌ها تهی نیستند.

فرض می‌کنیم $G(m, k)$، تعداد توزیعهای m شیء متفاوت در k جعبهٔ همانند را نشان دهد که جعبه‌ها مرتب نشده وبه‌هیچ طریقی متمایز ازهم نباشند. به‌بیان دیگر $G(m, k)$، تعداد تفکیکهای m شیء متفاوت به k یاکمتراز k دسته است، واژهٔ «یا کمتر» را بدین دلیل آورده‌ایم که ممکن است یك یا چند دسته تهی باشند. مثلاً $G(3, 2)$ را در نظر می‌گیریم. سه شیء را با A، B، C نشان می‌دهیم، می‌بینیم که چهارحالت وجود دارد:

A، B، و C همگی دریك جعبه، جعبهٔ دیگر خالی؛

(۲.۸) A دریك جعبه، B و C در جعبهٔ دیگر؛

B دریك جعبه، A و C درجعبهٔ دیگر؛

C دریك جعبه، A و B درجعبهٔ دیگر.

بنابراین $G(۳, ۲)=۴$.

حال فرض کنیم $g(m, k)$، تعداد توزیعهای m شیء متفاوت در k جعبهٔ همانند را نشان دهد، بدون آنکه جعبه‌ای تهی باشد. بنابراین $g(m, k)$ برابر تعداد راههای جدا کردن m شیء متفاوت به k دستهٔ ناتهی، یا تعداد راههای جدا کردن یك مجموعهٔ m عنصری به k زیرمجموعهٔ ناتهی است. با نگاهی به حالتهایی که در (۲.۸) فهرست شده‌اند، می‌بینیم که

$$g(۳, ۲)=۳ \text{ و } g(۳, ۱)=۱$$

به‌طور کلی، می‌توان $G(m, k)$ توزیع را به، آنهایی که دارای جعبهٔ تهی نیستند، آنهایی که درست یك جعبهٔ تهی دارند، آنهایی که دارای دوجعبهٔ تهی هستند وغیره تفکیك کرد، تا به‌دست آوریم

$$G(m, k)=g(m, k)+g(m, k-۱)+g(m, k-۲) +g(m, k-۳)+\cdots+g(m, ۱). \quad (۳.۸)$$

سپس برای $g(m, k)$ فرمولی به دست می‌آوریم. رابطهٔ ساده‌ای بین $g(m, k)$ و $f(m, k)$ وجود دارد. این رابطه نظیر بستگی موجود بین ترکیبها و جایگشتها در نظریهٔ مقدماتی است. برای درك این مطلب، توزیع دلخواهی را که به‌وسیلهٔ $g(m, k)$ محاسبه می‌شود در نظر می‌گیریم؛ چون به‌منظور تعویض جعبه‌ها از وضع همانند بودن به‌متمایز بودن $k!$ راه برای شماره گذاری جعبه‌ها وجود دارد، هرتوزیع، $k!$ توزیع از نوع $f(m, k)$ را تولید خواهد کرد، نتیجه می‌شود که

$$g(m, k)=\frac{f(m, k)}{k!} \text{ یا } f(m, k)=g(m, k)\times k!$$

با توجه به معادلهٔ (۱.۸) بخش قبل، این آخرین معادله را دوباره می‌توان به‌صورت

$$g(m, k)=\frac{۱}{k!}[k^m-C(k, ۱)(k-۱)^m+C(k, ۲)(k-۲)^m -\cdots+(-۱)^{k-۱}C(k, k-۱)۱^m], \quad (۴.۸)$$

نوشت.

تعیین مقدار $g(m, k)$ از روی (۴.۸) و سپس محاسبهٔ $G(m, k)$ از روی

(۳.۸) مطلب ساده‌ای است. همچنین، چون فرمول (۴.۸) تعداد افرازهای یك مجموعهٔ m عنصری را به k زیرمجموعهٔ ناتهی می‌دهد، تعداد کل افرازهای یك مجموعهٔ m عنصری را می‌توان با اضافه‌کردن مقادیر $g(m, k)$ به‌ازای تمام مقادیر مربوطهٔ k، یعنی $k=۱$، $k=۲$، ...، $k=m$ به‌دست آورد. پس تعداد کل افرازهای یك مجموعهٔ m عنصری برابر است با

$$g(m, ۱)+g(m, ۲)+g(m, ۳)+\cdots+g(m, m),$$

که هرجملهٔ این مجموع را می‌توان بااستفاده از (۴.۸) محاسبه کرد.

مجموعه مسائل ۲۸

۱. به‌چندطریق ممکن‌است نه‌حرف a، b، c، d، e، f، g، h، i را به سه‌دستهٔ ناتهی تفکیك کرد؟

۲. اگر چهارشیء متمایز را به چهار دستهٔ ناتهی تفکیك کنیم، واضح است‌که این عمل فقط به‌یك صورت انجام می‌شود. تحقیق کنید که فرمول (۴.۸) این نتیجه را می‌دهد.

۳. به‌چندطریق می‌توان m شیء متمایز را به دو دستهٔ ناتهی تفکیك کرد؟

۴. به‌چند طریق ممکن است عدد ۳۰۰۳۰ را به سه عامل صحیح مثبت تجزیه کرد؟ (الف) اگر مجاز باشیم ۱ را به‌عنوان یك عامل درنظر بگیریم. (ب) اگر هرعامل از ۱ بزرگتر باشد. (ترتیب درنظر گرفته نمی‌شود: یعنی $۱۳\times ۷۷\times ۳۰$ و $۷۷\times ۳۰\times ۱۳$، یك تجزیه به‌حساب می‌آیند.)

۵. تعدادکل راههای افرازکردن مجموعه‌ای از پنج عنصر (متمایز) را تعیین کنید.

۶. بدون استفاده از فرمولهای متن کتاب، با استفاده از مفهوم نمادگذاری، ثابت کنید که $g(m, m)=۱$. ازآنجا، اتحاد

$$m!=m^m-C(m, ۱)(m-۱)^m+C(m, ۲)(m-۲)^m$$
$$-C(m, ۳)(m-۳)^m+\cdots+(-۱)^{m-۱}C(m, m-۱)(۱)^m$$

را ثابت کنید.

۷. بدون استفاده از فرمول متن کتاب، ثابت کنید که

$$g(m, m-۱)=C(m, ۲).$$

آن گاه، نوع مشابهی از تحلیل را برای محاسبهٔ $g(m, m-۲)$ به‌کار برید.

۳.۸ اشیاء آمیخته، جعبه‌ها متفاوت

چندین شیء مختلف را درنظر می‌گیریم کــه ممکن است از هرکدام بیشتر از یك نمونه موجود باشد؛ مثلاً گردایه‌ای از تمبرها یاکتابها. فرض‌کنیم از شیء اول a نمونه، ازشیء دوم b نمونه، از شیء سوم c نمونه و غیره وجود داشته، و تعدادکل اشیاء برابر n باشد. بنا براین

$$a+b+c+\cdots=n. \qquad (۵.۸)$$

این اشیاء به‌طریق زیر درچند جعبهٔ ناهمانند توزیع می‌شوند: در جعبهٔ اول α شیء، در جعبهٔ دوم β شیء، در جعبهٔ سوم γ شیء و غیره. در هر توزیع در جعبه‌ها، تمام اشیاء مورد استفاده قرار خواهندگرفت، بنابراین مجموع α، β، γ، و غیره برابر n است:

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n. \qquad (۶.۸)$$

برای نشان دادن تعداد توزیعهای اشیاء در جعبه‌ها به‌گونه‌ای کــه توصیف شد، از نمادگذاری* زیر استفاده خواهیم‌کرد.

$$[a, b, c, \cdots, \square\ \alpha, \beta, \gamma, \cdots] \qquad (۷.۸)$$

بــه عنوان یــك مثــال، نمادگــذاری $[۳, ۲ \ \square\ ۲, ۲, ۱]$ را، کــه درآن $n=۵$ در نظر می گیریــم. یك راه بــرای در نظرگرفتن ایــن پنج شیء، تصور پنج توپ رنگی مثلاً یکی قرمز، دوتا آبی و دوتا سفید است. دوتوپ آبی همانندند؛ دوتوپ سفید نیز همانندند. مسأله، تعیین تعداد راههای قراردادن دو توپ در داخل اولین

---

* باکسب اجازه، از اثر

H. Rademacher and O. Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton, 1957

اقتباس شده‌است.

جعبه، و سه توپ در داخل دومین جعبه است. تحقیق در این باره که پنج راه برای انجام این کار وجود دارد مشکل نیست، یعنی

$$[۱, ۲, ۲ \,\square\, ۲, ۳] = ۵.$$

برای تعداد توزیعهایی که با (۷.۸) نشان داده شده‌اند فرمولی کلی به دست نخواهیم آورد. مسألهٔ تعیین این تعداد توزیع مشکلتر است و بنابراین تنها به‌تحلیل بعضی از حالتهای خاص می‌پردازیم. ابتدا دو ویژگی پایه‌ای عدد توزیعی (۷.۸) را بررسی می‌کنیم. ویژگی اول آن است که ترتیب جمله‌ها در دو طرف نماد جداکننده بی‌اهمیت است. مثلاً

$$[۱, ۲, ۲ \,\square\, ۲, ۳] = [۲, ۱, ۲ \,\square\, ۲, ۳] = [۲\ ۲, ۱ \,\square\, ۳, ۲].$$

ویژگی دوم، که کمتر واضح است، آن است که دوطرف را همان‌طور که درمثالهای زیر نشان داده شده‌است، می‌توان جابه‌جا کرد،

$$[۱, ۲, ۲ \,\square\, ۲, ۳] = [۲, ۳ \,\square\, ۱, ۲, ۲]$$

$$[۴, ۵, ۶ \,\square\, ۲, ۲, ۳, ۸] = [۲, ۲, ۳, ۸ \,\square\, ۴, ۵, ۶]. \qquad (۸.۸)$$

اکنون درستی گزارهٔ دوم یعنی معادلهٔ (۸.۸) را ثابت می‌کنیم. نماد $[۴, ۵, ۶ \,\square\, ۲, ۲, ۳, ۸]$، به‌معنای تعداد راههای قراردادن ۴ توپ قرمز، ۵ توپ، آبی و ۶ توپ سفید درچهارجعبه است، که درجعبهٔ اول ۲ توپ، درجعبهٔ دوم ۲ توپ در جعبهٔ سوم ۳ توپ و در جعبهٔ چهارم هشت توپ قرار گیرد. توپها تنها به‌وسیلهٔ رنگ از هم متمایزند. در هر توزیع، تعداد توپهای قرمز موجود در جعبهٔ اول را به $x_۱$، همچنین تعداد توپهای قرمز موجود در جعبه‌های دوم و سوم و چهارم را به ترتیب با $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ نشان می‌دهیم. به‌همین طریق فرض می‌کنیم تعداد توپهای آبی موجود درجعبه‌ها را به‌ترتیب با $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، $y_۴$ وتعداد توپهای سفید موجود درجعبه‌های اول، دوم، سوم وچهارم‌را با $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ نشان دهیم. بنابراین نماد $[۴, ۵, ۶ \,\square\, ۲, ۲, ۳, ۸]$ را می‌توان به‌عنوان تعداد جوابهای دستگاه معادله‌های

$$\begin{aligned}
x_۱+x_۲+x_۳+x_۴&=۴ \qquad & x_۱+y_۱+z_۱&=۲\\
y_۱+y_۲+y_۳+y_۴&=۵ \qquad & x_۲+y_۲+z_۲&=۲\\
z_۱+z_۲+z_۳+z_۴&=۶ \qquad & x_۳+y_۳+z_۳&=۳ \qquad (۹.۸)\\
& & x_۴+y_۴+z_۴&=۸
\end{aligned}$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تعبیر کرد.

اکنون سمت راست معادلهٔ (۸.۸) را در نظر می‌گیریم. نمادگذاری [۲, ۲, ۳, ۸ [] ۴, ۵, ۶]، معرف تعداد راههای قراردادن ۲ توپ سبز، ۲ توپ نارنجی، ۳ توپ زرد و ۸ توپ سیاه در ۳ جعبه است که درجعبهٔ اول ۴ توپ، در جعبهٔ دوم ۵ توپ و در جعبهٔ سوم ۶ توپ است. فرض کنیم در هر توزیع، تعداد توپهای سبز موجود درجعبهٔ اول، دوم وسوم به ترتیب برابر t_1، t_2، t_3 باشد. همچنین فرض کنیم در جعبه‌های اول و دوم و سوم تعداد توپهای نارنجی به‌ترتیب برابر u_1، u_2، u_3، تعداد توپهای زرد به‌ترتیب برابر v_1، v_2، v_3، و تعداد توپهای سیاه به‌ترتیب برابر w_1، w_2، w_3، باشد. پس نماد [۴, ۵, ۶ [] ۸, ۳, ۲, ۲] را می‌توان به‌معنای تعداد جوابهای دستگاه معادله‌های

$$\begin{aligned} t_1+t_2+t_3&=2 & t_1+u_1+v_1+w_1&=4 \\ u_1+u_2+u_3&=2 & t_2+u_2+v_2+w_2&=5 \\ v_1+v_2+v_3&=3 & t_3+u_3+v_3+w_3&=6 \\ w_1+w_2+w_3&=8 \end{aligned} \qquad (۱۰.۸)$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تعبیر کرد.

برای آنکه ببینیم دستگاه معادله‌های (۱۰.۸) همان دستگاه معادله‌های (۹.۸) است، فرض کنیم

$$\begin{aligned} t_1&=x_1, & u_1&=x_2, & v_1&=x_3, & w_1&=x_4, \\ t_2&=y_1, & u_2&=y_2, & v_2&=y_3, & w_2&=y_4, \\ t_3&=z_1, & u_3&=z_2, & u_3&=z_3, & w_3&=z_4. \end{aligned}$$

این روابط نشان می‌دهند که (۸.۸) برقرار است. برای اثبات برابری

$$[a, b, c, \cdots [] \alpha, \beta, \gamma, \cdots]=[\alpha, \beta, \gamma, \cdots [] a, b, c, \cdots] \qquad (۱۱.۸)$$

به‌ازای هرعدد صحیح که در

$$a+b+c+\cdots=\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$$

صدق می‌کند، می‌توان از استدلالی مشابه و از دستگاه معادله‌هایی که مفصلترند

استفاده کرد. در ریاضیات نتیجه‌ای ازاین نوع را اصل دوگانی می‌نامند.

به عنوان حالت خاصی از (۱۱.۸)، وضعیتی راکه درآن $\alpha=1$، $\beta=1$ و $\gamma=1$ و غیره است درنظر می‌گیریم:

$$[a, b, c, \dots \,[]\, ۱, ۱, ۱, \dots, ۱]=[۱, ۱, ۱, \dots, ۱ \,[]\, a, b, c, \dots]; \quad (۱۲.۸)$$

دراین‌جا هربلوك از ۱ها دارای n عضو است، و $a+b+c+\dots=n$. نماد سمت چپ (۱۲.۸) را می‌توان به معنای تعداد جایگشتهای nشیء تعبیرکرد که همگی را یك‌جا درنظرگرفته و درآن a شیء همانند، b شیء دیگر همانند و c شیء دیگر همانند، ... هستند. تعداد چنین جایگشتهایی، همان‌طوری که درخلاصهٔ فصل ۳ آمده است، برابر است با

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\,\dots}. \qquad (۱۳.۸)$$

اکنون می‌توانیم ادعا کنیم که عضو سمت راست (۱۲.۸) هم دارای همان مقدار (۱۳.۸) است. بدین معنا که (۱۳.۸) تعداد راههای توزیع n شیء متمایز در جعبه‌هاست که دراولین‌جعبه a شیء، در دومین جعبه b شیء، درسومین جعبه c شیء، وغیره قرار گیرند.

مجموعه مسائل ۲۹

۱. مقادیر عددی زیر را به‌دست‌آورید.

الف) $[۱, ۱, ۱, ۱ \,[]\, ۱, ۱, ۱, ۱]$

ب) $[۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ \,[]\, ۴, ۵]$

پ) $[۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ \,[]\, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۴]$

ت) $[۳۰, ۱۰ \,[]\, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰]$

ث) $[۲, ۱, ۱ \,[]\, ۲, ۱, ۱]$

ج) $[۲, ۲, ۲ \,[]\, ۲, ۲, ۲]$

چ) $[۴, ۴, ۴ \,[]\, ۶, ۶]$

۲. هریك از عبارتهای زیر را برحسب نمادگذاری فصلهای قبل بیان کنید:

الف) $[1, 1, 1, \ldots, 1 \,\square\, 1, 1, 1, \ldots, 1]$، که در هر طرف علامت جداکننده n تا یك وجود دارند؛

ب) $[1, 1, 1, \ldots, 1 \,\square\, 1, 1, 1, \ldots, 1, n-r]$،که درسمت چپ علامت جداکننده n تا یك، و درسمت راست r تا یك وجود دارند؛

پ) $[1, 1, 1, \ldots, 1 \,\square\, r, n-r]$،که در سمت چپ علامت جداکننده n تا یك وجود دارند؛

ت) $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k \,\square\, r, n-r]$، که در آن $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=n$ و هیچکدام از aها کوچکتر از r نیست.

۳. مقدار $[2, 1, 1, 1, \ldots, 1 \,\square\, 2, 1, 1, 1, \ldots, 1]$ را،که درآن درهرطرف علامت جداکننده، k تا یك وجود دارد، محاسبه کنید.

۴.۸ خلاصه

تعداد توزیعهای mشیء متفاوت در k جعبهٔ متفاوت برابر k^m است. اگرهیچ جعبه‌ای تهی نباشد، تعداد توزیعها را با نماد $f(m, k)$ نشان می‌دهند، و در حالتی که $m<k$، $f(m, k)=0$، نشان داده شد که

$$f(m, k)=k^m-C(k, 1)(k-1)^m+C(k, 2)(k-2)^m$$
$$-C(k, 3)(k-3)^m+\cdots+(-1)^{k-1}C(k, k-1)1^m.$$

اگر m شیء متفاوت و k جعبه‌ای که از یکدیگر متمایز نیستند داشته‌باشیم، برای نشان دادن تعدادکل توزیعهای اشیاء در جعبه‌ها نماد $G(m, k)$، و برای تعداد توزیعهایی که در آنها هیچ جعبه‌ای تهی نیست، نماد $g(m, k)$ به‌کار می‌رود. ثابت شدکه:

$$g(m, k)=\frac{f(m, k)}{k!}$$

و

$$G(m, k)=g(m, k)+g(m, k-1)+g(m, k-2)+\cdots+g(m, 1).$$

تعبیر دیگر $G(m, k)$، تعداد افرازهای مجموعه‌ای از m عنصر(متمایز) به k

زیرمجموعهٔ (نامرتب) است؛ توجه‌کنیدکــه روی تعداد عناصر زیرمجموعه‌هـا هیچ محدودیتی وجود ندارد. اما اگر لازم باشد کــه زیرمجموعه‌ها ناتهی باشند، تعداد افرازهای مجموعه برابر $g(m, k)$ است. تعدادکل راههای افراز یك مجموعه از m عنصر (متمایز) برابر $G(m, m)$ است. برای محاسبهٔ این تعداد به‌ازای هرمقدار بخصوص m، نتیجهٔ

$$G(m, m)=g(m, m)+g(m, m-۱)+g(m, m-۲)+\cdots+g(m, ۱),$$

و رابطهٔ $g(m, k)=\frac{f(m, k)}{k!}$ و فرمول بالا برای $f(m, k)$ را به‌کار می‌بریم.

فرض کنیم a، b، c، ... و α، β، γ، ... دو مجموعه از اعــداد صحیح مثبت باشندکه مجموع عناصر هرمجموعه برابر n است:

$$a+b+c+\cdots=n, \qquad \alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$$

فرض کنیم n شیء وجود دارندکه درآنها aتا همانند، bتای دیگرهمانند، cتای‌دیگر همانند باشند وقس‌علی‌هذا. تعداد توزیعهای این اشیاء درجعبه‌ها را به‌طوری‌که در جعبهٔ اول α شیء، در جعبهٔ دوم β شیء، در جعبهٔ ســوم γ شیء و غیــره باشد بـا $[a, b, c, \cdots \,[]\, \alpha, \beta, \gamma, \cdots]$ نشان می‌دهیم. نشان داده شدکه:

$$[a, b, c, \cdots \,[]\, \alpha, \beta, \gamma, \cdots]=[\alpha, \beta, \gamma, \cdots \,[]\, a, b, c, \cdots].$$

۹

مسائل پیکربندی

مسائلی که‌در این فصل‌مورد‌بحث واقع‌می‌شوند به‌الگوهای‌هندسی یا به‌یك یا‌چند‌نوع از پیکربندیها ارتباط دارند. با اصل لانهٔ کبوتر، مفهومی کـه در ریاضیات کاربرد وسیعی دارد، کار را شروع می کنیم.

۱.۹ اصل لانهٔ کبوتر

اگر هشت‌کبوتر به طرف‌هفت لانهٔ کبوتر پرواز کنند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یاچند‌کبوتر خواهد بود. به‌طور‌کلیتر اگر $n+1$ کبوتر در داخل n لانه‌باشند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو یاچند‌کبوتر است.

این صورت سادهٔ اصل لانهٔ کبوتر را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد: اگر $2n+1$ کبوتر در داخل n لانه باشند، حـداقل یکی از لانه‌ها شامل سه یا تعداد بیشتری کبوتر خواهد بود. دراینجا حتی عبارتی قویتر وجود داردکه تمام حکمهای قبلی را به‌عنوان حالتهای خاص شامل می‌شود: اگر $kn+1$ کبوتر درn لانه باشند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل $k+1$ یا تعداد بیشتری کبوتر خواهدبود.

اثبات این مطلب مشکل نیست؛ زیرا اگر حکم درست نباشد، آن‌گاه هر لانه شامل k یا تعدادکمتری کبوتر است. بنابراین n لانه وجود دارد و در هر لانه k یا تعدادکمتری کبوترموجود است و لذا درکل حداکثر nk کبوترمی‌توانند در لانه‌ها جابگیرند. اما این یك تناقض است، زیرا جمعاً $kn+1$ کبوتر وجود دارند، بنابراین با برهانی غیرمستقیم قضیه را ثابت کرده‌ایم.

مجموعه مسائل ۳۰

۰۱ اطلاعاتی در دست است که هیچ شخصی درسرش بیش‌از ۳۰۰۰۰۰ مو ندارد، و طبق یك سرشماری جدید، جمعیت شهر نیویورك ۷۷۸۱۹۸۴ نفر است، ملاحظه می‌شود که در شهر نیویورك حداقل دو نفر وجود دارندکه تعداد موهای سرشان برابر است. بزرگترین عدد صحیحی که می‌توان در ادعای زیر به‌جای n قرار داد چقدر است؟ در شهر نیویورك n شخص وجود دارند که تعداد موهای سرشان برابر است.

۰۲ فرض کنیم اطلاع داریم که حداقل یکی از a_1 و b_1 دارای ویژگی P وحداقل یکی از a_2 و b_2 دارای ویژگی P، و حداقل یکی از a_3 و b_3 دارای ویژگی P هستند. ثابت کنید حداقل دوتا از a_1، a_2، a_3 ویاحداقل دوتا از b_1، b_2، b_3 دارای ویژگی P هستند.

۰۳ همان اطلاعات مسألهٔ قبل را درنظرمی‌گیریم و همچنین فرض می‌کنیم که حداقل یکی از a_4 و b_4 دارای ویژگی P و حداقل یکی از a_5 و b_5 دارای ویژگی P باشند. ثابت کنید که حداقل سه‌تا از a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و یا حداقل سه‌تا از b_1، b_2، b_3، b_4، b_5 دارای ویژگی P هستند.

۰۴ فرض کنیم حداقل یکی از a_1، b_1، c_1 دارای ویژگی Q و نیز حداقل یکی از a_2، b_2، c_2، یکی‌ازa_3، b_3، c_3، و ...، و یکی از a_{10}، b_{10}، c_{10} دارای خاصیتQ باشند. برای آنکه ادعای زیرصحیح باشد بزرگترین عدد صحیحی که می‌توان به‌جای k به‌کار برد چقدر است؟ حداقل k تا از a_1، a_2، a_3، ...، a_{10} ویا حداقل kتا از b_1، b_2، b_3، ...، b_{10} و یا حداقل kتا از c_1، c_2، c_3، ...، c_{10} دارای ویژگی Q هستند.

۰۵ فرض کنیم حداقل دوتا از a_1، b_1، c_1 دارای ویژگی T و نیز حداقل دوتا از

a_2، b_2، c_2 و ... و حداقل دوتا از a_5، b_5، c_5 دارای ویژگی T باشند. مطلوب است تعیین بزرگترین عدد صحیحی که می‌توان به جای r گذاشت تا ادعای زیر صحیح باشد؟ حداقل rتا از a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 ویا حداقل rتا از b_1، b_2، b_3، b_4، b_5 ویا حداقل rتا از c_1، c_2، c_3، c_4، c_5 دارای ویژگی T هستند.

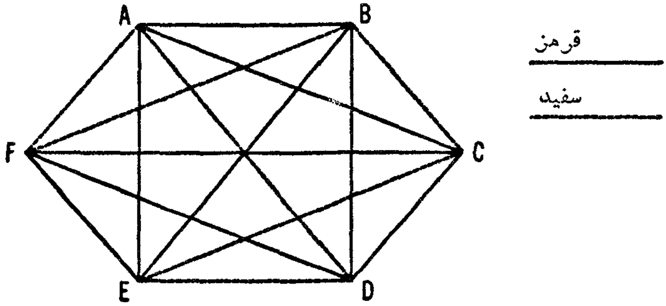
۲.۹ مثلثهای رنگی

شش نقطه واقع دریك صفحه را درنظر می گیریم که هیچ سه نقطه‌ای از آنها همخط (یعنی بریك خط مستقیم) نباشند. $C(6,2)$ یا پانزده پاره خط وجود دارند که این نقطه‌ها را به‌هم وصل می کنند. فرض‌می کنیم این پانزده پاره‌خط به طریق دلخواهی بااستفاده از دو رنگ، مثلاً قرمز وسفید، رنگ شوند؛ ممکن است تمام پاره‌خطها قرمز، یا تمام پاره‌خطها سفید ویا بعضی قرمز و بقیه سفید باشند. هر مثلثی را که از وصل سه نقطه حاصل می‌شود رنگی گویند اگر سه ضلع آن دارای یك رنگ باشند.

ثابت خواهیم کرد که‌طرز رنگ کردن این‌پانزده‌پاره‌خط هرچه‌باشد، همواره می‌توان یك مثلث رنگی پیدا کرد. این یك ویژگی عدد ۶ است که ۶ کوچکترین تعداد نقاطی درصفحه‌است که (باشرط همخط‌نبودن هیچ سه‌نقطه‌ای) وقتی‌هرپاره‌خط واصل بین زوجهای نقاط را به دلخواه به یکی از دو رنگ، رنگ‌کنیم، همواره می‌توانیم یك مثلث رنگی به‌دست آوریم.

برهان اینکه همواره می‌توان یك مثلث رنگی به‌دست آورد: یکی‌ازشش‌نقطه مثلاً Aرا انتخاب می کنیم، وپنج پاره‌خط AB، AC، AD، AE و AF راکه از A خارج می‌شوند درنظرمی‌گیریم. (شکل ۱.۹ را ببینید.) طبق اصل لانهٔ‌کبوترحداقل سه‌تا از این پنج پاره‌خط باید دارای یك رنگ باشند. بدون آنکه به کلیت مسأله لطمه وارد شود فرض می کنیم سه پاره خطی که دارای یك رنگ‌اند عبارت از AB، AC، و AD باشند. (در شکل ۱.۹ که در آن یك رنگ با خطچین و رنگ دیگر باخط ممتد مشخص شده‌است، درواقع AB، AC، و AE دارای یك‌رنگ‌اند. اما چون می‌توان جای حرفهای نقاط B، C، D، E، و F را عوض کرد ــ درحالت مورد بحث برچسبهای نقاط D و E را عوض خواهیم کردــهمواره می‌توانیم چنین عملی را انجام دهیم تا قطعه خطهای AB، AC، و AD دارای یك رنگ باشند.)

سپس، بدون‌آنکه به‌کلیت امر لطمه‌ای وارد شود، ازقبل فرض می کنیم که سه



شکل ۱۰۹

پاره‌خط AB، AC، AD قرمزند. زیرا اگرسفید باشند، فقط رنگ هریك ازپانزده پاره‌خط را عوض می‌کنیم بدون اینکه هیچ اثری بروجود مثلث رنگی داشته باشد: هرمثلث قرمزرنگ به یك مثلث سفید تبدیل می‌شود و برعکس، بعلاوه در فرایند، هیچ مثلث رنگی جدیدی به‌وجود نخواهد آمد.

اکنون سه پاره‌خط AB، AC، و AD را که از A خارج می‌شوند، و مثلث BCD را که به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ انتهایی آنها به وجود می‌آید در نظر می‌گیریم. دو امکان وجود دارد: یا سه ضلع مثلث BCD سفیدند و یا حداقل یك ضلع آن قرمز است. اگر سه ضلع BCD سفید باشند آن‌گاه BCD مثلثی رنگی است. از طرف دیگر اگر حداقل یك ضلع BCD قرمز باشد آن‌گاه این ضلع قرمز با دوتا ازسه پاره‌خط قرمزمناسب AB، AC، وAD یك مثلث رنگی می‌سازد. به تفصیل اگر BC قرمز باشد، آن‌گاه مثلث ABC مثلثی رنگی است؛ اگر BD قرمز باشد، آن‌گاه ABD مثلثی رنگی است؛ اگر CD قرمز باشد، آن‌گاه ACD مثلثی رنگی است و این مطلب برهان را کامل می‌کند.

به دو راه دیگر بیان همان اصل دقت می‌کنیم. درمیان هر شش نفر ممکن است سه نفر را یافت که دو به‌دو باهم آشنا هستند، یا ممکن است سه نفررا یافت که هیچ دوتایی ازآنها باهم آشنا نباشند. درمیان هرشش‌نفر ممکن است سه‌نفررا یافت که هرکدام ازآنها با دونفر دیگر دست داده باشد ویا ممکن است سه نفر را یافت که هیچ دوتایی ازآنها باهم دست نداده باشند.

مجموعه مسائل ۳۱

۰۱ ثابت‌کنیدکه ۶، کمترین تعداد نقاط صفحه است‌که دارای ویژگی مثلث رنگی است؛ یعنی: ۵ نقطه را در صفحه مشخص کنیدکه هیچ سه‌تای آنها همخط نباشند،

وهریك از ۱۰ پاره‌خطی راکه هر زوج از نقاط را به‌هم وصل می‌کند بایکی از دو رنگ قرمز یا سفید رنگ کنید. با چنین پیکربندیی، هیچ مثلث رنگی به وجود نخواهد آمد. (توجه کنید که اگر تعداد چنین نقاطی ۵تا باشد نتیجه می‌شود که ۶، کمترین تعداد است.)

۱۷.۲ نقطه را کــه هیچ سه‌تای آنها همخط نباشند درنظر بگیرید کــه هر یك از پاره‌خطهایی که این نقاط را به‌هم وصل می‌کند قرمز، سفید یا آبی باشند. ثابت کنید که الگوی رنگی موجود هرچه باشد، یك مثلث رنگی وجود دارد. (خواننده ممکن بود بخواهــد مسألهٔ مشابهی را برای یك عدد صحیح بزرگتر از ۱۷ حل کند، عدد ۱۷ کوچکترین عددی است که می‌توان دراین مسأله به‌کار برد، بدین معنا کــه این حکم برای ۱۶ نقطه یا کمتر از آن درست نیست. اما برهان اینکه ۱۷ کوچکترین عدد است در سال ۱۹۵۵ توسط گرین‌وود[1] و گلیسن[2] داده شده‌است، که از سطح این کتاب بالاتر است.)

مسائل اضافی مربوط به مثلثهای رنگی در مسائل گوناگــون که در دنبالهٔ فصل ۱۱ آمده‌اند گنجانده شده‌اند.

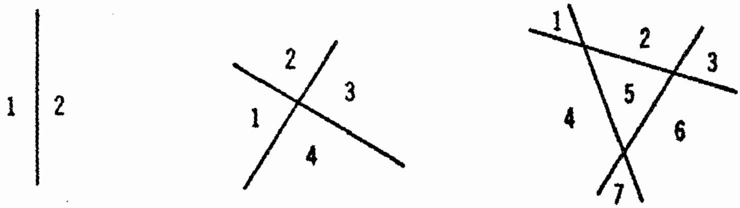
۳.۹ تفکیك صفحه

درصفحه‌ای n خط مستقیم را طوری درنظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق کنند: (۱) هر خــط در هر دو جهت نامتناهی باشد. (۲) هیچ دو خطی مــوازی نباشند. (۳) هیچ سه خطی متقارب نباشند، یعنی از یك نقطه نگذرند. صفحه به‌وسیلهٔ این n خط به‌چند ناحیه تفکیك می‌شود؟ فرض کنیم $f(n)$ تعداد ناحیه‌هایی باشدکه به‌وسیلهٔ این n خط در صفحه ایجاد می‌شوند؛ بایك بررسی ساده درمی‌یابیم که $f(1)=2$، $f(2)=4$، $f(3)=7$ (شکل ۲.۹ را ببینید). در حالت کلی، مسأله عبارت از محاسبهٔ $f(n)$ است.

برای حل این مسأله از تکنیکی کــه قبلاً دربخش ۸.۳ به‌کار رفت استفاده می‌کنیم. ایــن روش عبارت از تعیین تفاضلهــای $f(k)-f(k-1)$ به ازای $k=2,3,\dots,n$ وتعیین مجموع آنهاست. این‌مجموع درست برابر $f(n)-f(1)$ است، زیرا هرجملهٔ میانی ابتدا کم و سپس اضافه می‌شود. چنین‌مجموعی‌را مجموع «تلسکوپی» گویند. دراین‌حالت برای تعیین عبارات مربــوطه، $n-1$ خط مستقیمی

---

1. R. E. Greenwood 2. A. M. Gleason

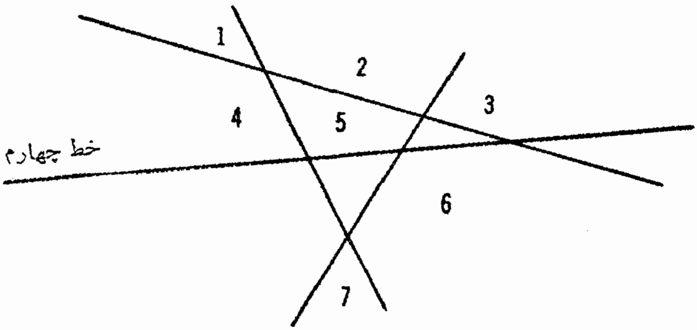


شکل ۲.۹

را که صفحه را به $f(n-۱)$ ناحیه تقسیم می‌کند در نظر می‌گیریم. اکنون n امین خط را دخالت می‌دهیم. این nامین خط در دوردست ـ دورتر از هر نقطهٔ تقاطع ـ هر ناحیه را به‌دوقسمت تقسیم می‌کند. آن‌گاه اگر درطول خط حرکت‌کنیم می‌بینیم هروقت که این n امین خط، یکی از خطهای دیگر را قطع می‌نماید ناحیهٔ دیگری را به‌دوقسمت تقسیم می‌کند، مثلاً فرض‌کنیم $n=۴$؛ اگر در امتداد خط چهارم در شکل ۳.۹ ازچپ به راست حرکت‌کنیم می‌بینیم این خط به‌ترتیب که سه‌خط دیگر را قطع می‌کند ناحیهٔ «۴» و سپس ناحیه‌های «۵» و «۶» و «۳» را تقسیم می‌کند. بنابراین خط چهارم ۴ ناحیهٔ جدید به وجود می‌آورد. با همین استدلال نتیجه می‌گیریم که خط nام n ناحیهٔ جدید ایجاد می‌کند، و این واقعیت را با معادلهٔ $f(n)=n+f(n-۱)$، یا

$$f(n)-f(n-۱)=n, \qquad (۱.۹)$$

بیان می‌کنیم.



شکل ۳.۹

اکنون روش مجموع «تلسکوپی» را به‌کار می‌بریم؛ یعنی معادلهٔ (۱.۹)، و به دنبال آن همتاهایی را که از قراردادن متوالی $n-۱$، $n-۲$، ...، ۳، ۲ به جای n در (۱.۹) حاصل می‌شوند، می‌نویسیم

$$f(n)-f(n-۱)=n,$$
$$f(n-۱)-f(n-۲)=n-۱,$$
$$f(n-۲)-f(n-۳)=n-۲,$$
$$\cdots\cdots\cdot$$
$$f(۳)-f(۲)=۳,$$
$$f(۲)-f(۱)=۲.$$

وقتی که این معادله‌ها باهم جمع می‌شوند، مجموع تمام اعضای سمت‌چپ فقط برابر $f(n)-f(۱)$ است. پس داریم:

$$f(n)-f(۱)=۲+۳+\cdots+(n-۲)+(n-۱)+n.$$

سمت راست ایـن معادله مجموع اعـداد طبیعی متوالی از ۲ تا n است. حال طبق بخش ۸.۳، مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $n(n+۱)/۲$ است، و بنابراین:

$$f(n)-f(۱)=\frac{n(n+۱)}{۲}-۱.$$

سپس به جای $f(۱)$ مقدار آن یعنی ۲ را قرار داده، و برای به‌دست‌آوردن جواب نهایی به‌دوطرف برابری عدد ۲ را اضافه می‌کنیم،

$$f(n)=\frac{n(n+۱)}{۲}+۱=\frac{n^۲+n+۲}{۲}. \qquad (۲.۹)$$

به عنوان تشریح دیگری از روش «مجموع تلسکوپی»، مسألهٔ زیر را درنظر می‌گیریم.

مسأله فرض‌کنیم $n+k$ خـط مستقیم در صفـحه وجود دارنـد که در این شرایط صدق می‌کنند: (۱) k تا ازاین خطوط با یکدیگر موازی‌اند. (۲) حالتهای دیگری

از خطوط موازی وجـود ندارند. (۳) هیچ سه خطی از این $n+k$ خط، متقارب نیستند. به‌وسیلهٔ این $n+k$ خط، صفحه به‌چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

حل: فرض کنیم $G(n, k)$ تعداد ناحیه‌هـای جدا ازهم را نشان دهد. مثلاً $G(۱, ۲)=۶$، $G(۲, ۲)=۱۰$. در این حالت می‌توان در استدلالی که به معادلهٔ (۱.۹) منجر شد تغییری صورت داد تا نوعی معادلهٔ مشابه به دست آیـد، یعنی اثر دخالت دادن kامین خط موازی را بررسی کرده، سپس تعداد ناحیه‌های جدا از هم را از $G(n, k-۱)$ به $G(n, k)$ تغییر می‌دهیم. kامین خط موازی، n خط را قطع می‌کند و بنابراین $n+۱$ ناحیهٔ جدید به‌وجود می‌آورد. بنابراین:

$$G(n, k)=n+۱+G(n, k-۱),$$

یا

$$G(n, k)-G(n, k-۱)=n+۱. \qquad (۳.۹)$$

دوباره ایـن معادله و همتاهـای آن را کـه از قراردادن مقادیـر $k-۱$، $k-۲$، ...، ۲، ۱ به‌جای k به‌دست می‌آیند به‌دنبال یکدیگر می‌نویسیم:

$$G(n, k)-G(n, k-۱)=n+۱,$$
$$G(n, k-۱)-G(n, k-۲)=n+۱,$$
$$G(n, k-۲)-G(n, k-۳)=n+۱,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$G(n, ۳)-G(n, ۲)=n+۱,$$
$$G(n, ۲)-G(n, ۱)=n+۱,$$
$$G(n, ۱)-G(n, ۰)=n+۱.$$

دراین جا k معادله داریم که مقدار سمت راست هرکدام برابر $n+۱$ است. وقتی این معادله‌ها را باهم جمع می‌کنیم، مجموع اعضای سمت راست برابر $k(n+۱)$، و مجموع اعضای سمت چپ برابر $G(n, k)-G(n, ۰)$ است. بنابراین

$$G(n, k)-G(n, ۰)=k(n+۱).$$

نماد $G(n, ۰)$ تعداد ناحیه‌هایی را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ n خطی کـه هیچکدام

باهم موازی نبوده وهیچ سه‌تای آنها متقارب نیستند ایجاد شده‌اند؛ این تعداد برابر $f(n)$ در مسألهٔ قبل است، و بنابراین می‌توانیم بااستفاده از معادلهٔ (۲.۹) به دست آوریم

$$G(n,\ k)-\frac{n^{۲}+n+۲}{۲}=k(n+۱),$$

یا

$$G(n,\ k)=\frac{n^{۲}+۲nk+n+۲k+۲}{۲}.$$

مجموعه مسائل ۳۲

۱. n خط مستقیم در صفحه درنظر بگیرید که هیچ دوتای آنها باهم موازی نباشند. اما سه‌تا و فقط سه‌تا از این خطها متقارب باشند. صفحه به وسیلهٔ این خطها به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۲. مجموعه‌ای از k خط موازی در یك صفحه به وسیلهٔ مجموعهٔ دیگری از m خط موازی قطع می‌شود. صفحه به‌چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۳. در مسألهٔ قبل خط دیگری را دخالت می‌دهیم که نه با هیچیك از خطهای قبلی موازی است ونه از هیچیك از mk نقطهٔ تلاقی قبلی می گذرد. صفحه به‌چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۴. فرض کنیم در صفحه‌ای $q+t$ خط مستقیم وجود دارند که در شرایط زیر صدق می کنند: هیچ دوخطی موازی باهم نیستند؛ qتا ازاین‌خطها ازنقطهٔ معین A می گذرند؛ tتا ازاین خطها از نقطهٔ دیگر B می گذرند؛ هیچ خطی از دونقطهٔ A و B نمی گذرد. صفحه به‌چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۵. فرض کنیم در صفحه $k+q$ خط مستقیم وجود دارند که در شرایط زیر صدق می کنند: kتا از این خطها باهم موازی‌اند؛ هیچ موارد دیگری از خطهای موازی وجود ندارند؛ q خط که باهیچیك از k خط موازی نیستند ازنقطهٔ معین A می گذرند. صفحه به‌چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۶. علاوه بر $k+q$ خط مسألهٔ قبلی، nخط مستقیم دیگر را درصفحه فرض می کنیم

به‌طوری که حالتهای دیگری از توازی غیراز آن k خط موازی، وحالتهای دیگری از تقارب غیراز آن q خط که ازنقطهٔ A می گذرد وجود ندارند. صفحه به‌چندناحیه تقسیم می‌شود؟

۴.۹ خلاصه

درساده‌ترین صورت، اصل لانهٔ کبوتر بیان می کندکه اگر $n+1$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، آن گاه حداقل یکی‌از لانه‌ها شامل دو یا چندکبوتراست. به‌طورکلیتر اگر $kn+1$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، آن‌گاه حداقل یکی از لانه‌ها شامل $k+1$ یا تعداد بیشتری کبوتر است.

بااستفاده ازاصل لانهٔ کبوترثابت‌می شودکه وقتی شش نقطه درصفحه‌ای مفروض بوده و هیچ سه‌تایی از آنها همخط نباشند، اگر هر یك از ۱۵ پاره خطی را که زوجهای نقاط را به هم وصل می‌کنند با یکی از دو رنگ رسم کنیم، آن‌گاه برای هرالگوی رنگی ممکن، یك مثلث رنگی موجود است. منظور از«مثلث رنگی» مثلثی است که سه ضلع آن دارای یك رنگ‌اند.

بااستفاده از روش «مجموع تلسکوپی» ثابت می‌شودکه هرصفحه به وسیلهٔ n خط مستقیمی که در شرایط زیر صدق کنند، به $(1/2)(n^2+n+2)$ ناحیه تقسیم می‌شود:

(الف) هیچ دوخطی موازی نباشند، و (ب) هیچ سه خطی متقارب نباشند. حالت نسبتاً کلیتری به وسیلهٔ همین روش مطرح شده‌است، و تعمیمهای دیگری در مسائل ارائه شده‌اند.

۱۰

استقرای ریاضی

مجموع اعداد صحیح فرد را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&۱=۱,\\
&۱+۳=۴,\\
&۱+۳+۵=۹,\\
&۱+۳+۵+۷=۱۶,\\
&۱+۳+۵+۷+۹=۲۵,\\
&۱+۳+۵+۷+۹+۱۱=۳۶.
\end{aligned}\tag{۱.۱۰}$$

الگوی روشنی در مجموعهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ ظاهر می‌شود: این اعداد مربعهای اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هستند. این برابریها حکمی کلی را القا می‌کنند که مجموع n عدد فرد صحیح مثبت برابر $n^۲$ است، یا، به‌زبان نمادها:

$$۱+۳+۵+۷+\cdots+(۲n-۱)=n^{۲} \qquad (۲.۱۰)$$

البته تحقق چند حالت اول برابریهای (۱.۱۰)، صحیح بودن فرمول کلی (۲.۱۰) را برای هر عدد صحیح مثبت به هیچ‌وجه تضمین نمی‌کند. شاید ساده‌ترین راه برای اثبات فرمول (۲.۱۰)، که به ازای هرعدد صحیح مثبت n معتبر است، استفاده از استقرای ریاضی باشد.

۱.۱۰ اصل استقرای ریاضی

برای نشان دادن برابری (۲.۱۰) از نماد P_n استفاده می‌کنیم. به هر عدد صحیح مثبت n، برابری به‌صورت (۲.۱۰) متناظر می‌شود؛ مثلاً برابریهایی که‌در (۱.۱۰) فهرست شده‌اند، برابریهایی ازاین نوع‌اند، و ما آنها را با $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$ و $P_۶$ نشان می‌دهیم. بعلاوه بامحاسبهٔ واقعی می‌توان گفت که‌تمام شش گزارهٔ برابری راست هستند. حکم «به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، P_n راست است» واقعاً تمام بینهایت حکم «$P_۱$ راست است، $P_۲$ راست است، $P_۳$ راست است، ...» را شامل است. تاکنون تنها ثابت کرده‌ایم که $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ...، $P_۶$ راست‌اند، ومی‌خواهیم ثابت‌کنیم که تمام این (بینهایت) گزاره راست هستند. اصل استقرای ریاضی بیان می‌کند که می‌توانیم راست بودن هرچنین دنبالهٔ نامتناهی از گزاره‌ها را ثابت‌کنیم اگر بتوانیم اثبات نماییم که

(i) $P_۱$ راست است؛

(ii) به ازای هرعدد صحیح مثبت k، $P_{k+۱}$ از P_k نتیجه می‌شود.

راه دیگری برای بیان (ii) عبارت‌است از «P_k، $P_{k+۱}$ را نتیجه‌می‌دهد» ویا «$P_{k+۱}$ از P_k نتیجه می‌شود».

منظور آن است که اگر بتوانیم (ii) را، یعنی، $P_{k+۱}$ از P_k نتیجه می‌شود، را ثابت‌کنیم آن‌گاه می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$P_۱$، $P_۲$ را نتیجه می‌دهد،

$P_۲$، $P_۳$ را نتیجه می‌دهد،

$P_۳$، $P_۴$ را نتیجه می‌دهد،

$P_۴$، $P_۵$ را نتیجه می‌دهد،

و غیره. بنابراین اگر (i) را ثابت‌کنیم اولین حلقهٔ این زنجیر را به دست خواهیم

آورد، و راست بودن $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$ و غیره به وسیلهٔ (ii) از راست بودن $P_۱$ نتیجه می‌شوند.

حال به‌حالت خاصی که در آن حکم P_n، برابری (۲.۱۰) است برمی گردیم. دراین‌جا برای (i) مشکلی وجود ندارد، زیرا $P_۱$ صرفاً ۱ = ۱ است. برای اثبات (ii) باید نشان دهیم که رابطهٔ

$$P_k:\ ۱+۳+۵+۷+\dots+(۲k-۱)=k^۲$$

نتیجه می‌دهد:

$$P_{k+۱}:\ ۱+۳+۵+۷+\dots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲؛$$

یعنی باید P_k را فرض گرفته و $P_{k+۱}$ را از آن نتیجه بگیریم. بافرض حکم P_k، به دوطرف برابری، ۱ + $۲k$ را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}۱+۳+۵+۷+\dots+(۲k-۱)+(۲k+۱)&=k^۲+(۲k+۱)\\&=k^۲+۲k+۱\\&=(k+۱)^۲.\end{aligned}$$

بنابراین $P_{k+۱}$ از P_k نتیجه می‌شود، وما به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت n، معتبر بودن برابری (۲.۱۰) را ثابت کرده‌ایم،

به‌عنوان مثال دوم، مجموع مکعبهای اعداد طبیعی را درنظر می گیریم:

$$\begin{aligned}&۱^۳=۱,\\&۱^۳+۲^۳=۹,\\&۱^۳+۲^۳+۳^۳=۳۶,\\&۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=۱۰۰,\\&۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳=۲۲۵,\\&۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳+۶^۳=۴۴۱.\end{aligned}\qquad(۳.۱۰)$$

اعداد ۱، ۹، ۳۶، ۱۰۰، ۲۲۵، ۴۴۱، در طرف راست برابریهـای بالا، همگی مربع اند، یعنی‌مربع اعداد ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱ هستند. اگر به‌مثلث پاسکال در

صفحهٔ ۴۴ نظری بیفکنیم، توجه می‌کنیم کــه این اعداد در سومین ستون قائم قرار دارند، و بنابراین می‌توانیم آنها را برحسب نمادهای ترکیب بنویسیم:

$$C(۲, ۲),\quad C(۳, ۲),\quad C(۴, ۲),\quad C(۵, ۲),\quad C(۶, ۲),\quad C(۷, ۲).$$

آیا $C(n+۱, ۲)$ عدد بخصوصی است که مربع آن برابر مجموع مکعبهای اعداد طبیعی از ۱ تا n است؟ چون

$$C(n+۱, ۲)=\frac{۱}{۲}n(n+۱),$$

این حدس می‌تواند به‌وسیلهٔ

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+\dots+n^۳=[C(n+۱, ۲)]^۲ \qquad (۴.۱۰)$$
$$=\frac{۱}{۴}n^۲(n+۱)^۲,$$

بیان شود.

اکنون (۴.۱۰) را به عنوان گزارهٔ P_n، یا به عنوان یك گردایهٔ نامتناهی از گزاره‌ها، اولی برای $n=۱$، دومی برای $n=۲$، سومی برای $n=۳$ وغیره، درنظر می‌گیریم. دراین صورت برابریهای (۳.۱۰)، گزاره‌های $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، $P_۴$، $P_۵$ و $P_۶$ هستند. برای اثبات P_n، بااستفاده از استقرای ریاضی، باید (i)، یعنی $P_۱$ راست است را و (ii)، یعنی به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k از P_k، $P_{k+۱}$ نتیجه می‌شود را ثابت کنیم. اکنون $P_۱$، اولین برابری (۳.۱۰) صرفاً بیان می‌کند که $۱=۱^۳$ و این، به‌وضوح راست است.

قبل از اثبات (ii)، با قراردادن k به جای n، و سپس $k+۱$ به جای n در (۴.۱۰)، P_k و $P_{k+۱}$ را به تفصیل می‌نویسیم،

$$P_k:\ ۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+\dots+k^۳=\frac{۱}{۴}k^۲(k+۱)^۲;$$

$$P_{k+۱}:\ ۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+\dots+k^۳+(k+۱)^۳=\frac{۱}{۴}(k+۱)^۲(k+۲)^۲.$$

P_k را می‌پذیریم و $P_{k+۱}$ را ثابت می‌کنیم. به دو طــرف برابری P_k، مقــدار

$(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم،

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3.$$

سؤال این است که آیا این رابطه همان P_{k+1} است یا نه؟ بااستفاده از جبر پایه‌ای خواهیم دید که این رابطه همان P_{k+1} است.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3&=(k+1)^2\left[\frac{1}{4}k^2+(k+1)\right]\\&=(k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]\\&=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2.\end{aligned}$$

و بنابراین برهان (۴.۱۰) کامل می‌شود.

مجموعه مسائل ۳۳

۱. با استقرای ریاضی ثابت کنید که $1+2+3+4+\cdots+n=(1/2)n(n+1)$.

۲. با استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

۳. فرض کنیم $K(n)$ معرف تعداد زوجهای نامرتب اعداد صحیح منتخب از ۱، ۲، ۳، ...، n، با این محدودیت که هیچ زوجی دو عدد متوالی نیستند، باشد. مثلاً $K(5)$ تعداد زوجهای

$$1,3 \qquad 1,4 \qquad 1,5 \qquad 2,4 \qquad 2,5 \qquad 3,5$$

است و بنابراین $K(5)=6$. باچنین شمارشی می‌توان تعیین کرد که:

$$K(3)=1 \qquad K(4)=3 \qquad K(5)=6$$
$$K(6)=10 \qquad K(7)=15 \qquad K(8)=21.$$

از روی این اطلاعات، برای $K(n)$ مقداری را حدس بزنید و اگـر امکان دارد حدس خودرا بااستفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید.

۴. بعضی از برابریهای زیر به‌ازای تمام اعداد صحیح مثبت n برقرارند. سعی کنید بااستقرای ریاضی آنها را ثابت نمایید.

الف) $$۱+۴+۷+۱۰+\dots+(۳n-۲)=n^۲+n-۱;$$

ب) $$۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\dots+n(n+۱)=\frac{n^۳+۳n^۲+۲n}{۳};$$

پ) $$۱^۲+۳^۲+۵^۲+\dots+(۲n-۱)^۲=\frac{۴n^۳-n}{۳};$$

ت) $$۱\times۳+۳\times۵+۵\times۷+\dots+(۲n-۱)(۲n+۱)=\frac{۵n^۳+۱۰n-۶}{۳};$$

ث) $$۱\times۲+۳\times۳+۵\times۴+۷\times۵+\dots+(۲n-۱)(n+۱)=\frac{n^۳+۵n^۲-۴n+۲}{۲};$$

ج) $$۱\times۱\times۲+۲\times۲\times۳+۳\times۳\times۴+\dots+n\times n\times(n+۱)=\frac{n(۳n^۳+۱۰n^۲+۹n+۲)}{۱۲}.$$

۲.۱۰ نمادگذاری برای مجموعها و حاصلضربها

برای نوشتن معادله‌ای مانند

$$۱+۲+۳+\dots+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

بـرحسب نماد، مشکلی وجـود دارد. در حـالی کـه به‌ازای $n=۱۰$، در معنای $۱+۲+۳+\dots+n$ هیچ شك و تردیدی موجـود نیست، در حالت $n=۲$ باید

را تنها به صورت ۲ + ۱ تفسیر کنیم. برای اجتناب از این $1+2+3+\dots+n$ ابهام و درعین‌حال به‌دلیل جمع‌وجور بودن زیاد، نمادی به صورت

$$\sum_{j=1}^{n} j \quad \text{به‌جای} \quad 1+2+3+\dots+n$$

وجود دارد. این نماد به صورت «سیگما j، j مساوی ۱ تا n» خوانده می‌شود. و به معنای «مجموع تمام مقادیر j از $j=1$ تا $j=n$» است. چندمثال دیگر ارائه می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 \quad \text{به معنای} \quad 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2;$$

$$\sum_{j=1}^{100} j(j+3) \quad \text{به‌معنای} \quad 1\times 4+2\times 5+3\times 6+4\times 7+\dots+100\times 103;$$

$$\sum_{j=1}^{n} (j^3+1) \quad \text{به‌معنای} \quad (1^3+1)+(2^3+1)+(3^3+1)+\dots+(n^3+1);$$

$$\sum_{j=4}^{n-1} (j^3+1) \quad \text{به‌معنای} \quad (4^3+1)+(5^3+1)+(6^3+1)+\dots+((n-1)^3+1);$$

هستند. توجه می‌کنیم که عاملهای ثابت را می‌توان به سمت چپ سیگما انتقال داد:

$$\sum_{j=1}^{n} 4j^2 = 4\sum_{j=1}^{n} j^2, \quad \sum_{j=1}^{n} 5(j^3+1) = 5\sum_{j=1}^{n}(j^3+1); \quad (6.10)$$

دلیل، این است که عامل ثابت در هر یك از جمله‌های مجموع ضرب می‌شود و بنابراین می‌تواند به‌صورت یك عامل درجلوی مجموع کل قرار گیرد. همچنین توجه می‌کنیم عبارتهایی راکه شامل چندین جمله‌اند می‌توان به‌صورت مجموعهای جمله‌ها نوشت. مثلاً*:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n}(j^2+3j) = \sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} 3j, \\ &\sum_{j=1}^{n}(j^3+3j^2-j) = \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} 3j^2 - \sum_{j=1}^{n} j. \end{aligned} \quad (7.10)$$

و این فقط پیامد دسته‌بندی مجدد جمله‌هاست.

* مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n و مجموع مربعهای آنها درفصل۳، صفحهٔ ۵۱

محاسبه شد. مجموع (۴.۱۰) کــه مجموع مکعبهای اعداد طبیعی از ۱ تا n بود در بخش قبل با استفاده از استقرای ریاضی به‌دست آمد. با استفاده از نماد سیگما، این مجموعها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad (8.10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

توجه کنید که نماد j یك نماد «ظاهری» است و به‌جای دو فرمول اول در (۸.۱۰) می‌توان فرمولهای

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

را نوشت. اکنون می‌خواهیم برای محاسبهٔ مجموع

$$1\times 1\times 2+2\times 2\times 3+3\times 3\times 4+\dots+n\times n\times (n+1),$$

نماد سیگما را به‌کار بریم. مجموع فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) \quad \text{یا} \quad \sum_{j=1}^{n} j^2(j+1).$$

با استفاده از ویژگیی که در (۷.۱۰) شرح داده شده‌است و با استفاده از فرمولهای (۸.۱۰)، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) = \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= n(n+1)(n+2)(3n+1)/12,$$

که درآن محاسبات جبری ساده‌ای را که برای رسیدن به فرمول آخر لازم است حذف کرده‌ایم.

به عنوان مثالی دیگر، مجموع

$$۱+۴+۷+۱۰+\cdots+(۳n-۲)$$

را درنظر می‌گیریم که بااستفاده از نماد سیگما، می‌توان آن را به‌صورت

$$\sum_{j=۱}^{n}(۳j-۲)$$

نوشت. مجدداً بااستفاده از (۸.۱۰) وبا استفاده از ویژگیهای پایه‌ای مشروح بالا، داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n}(۳j-۲)=\sum_{j=۱}^{n}۳j-\sum_{j=۱}^{n}۲=۳\sum_{j=۱}^{n}j-\sum_{j=۱}^{n}۲$$
$$=\frac{۳n(n+۱)}{۲}-۲n=\frac{n(۳n-۱)}{۲}.$$

مجموعهایی که جمله‌های آنها متناوباً علامت بعلاوه و منها دارند با کمک $(-۱)^j$ به‌صورت نماد سیگما نوشته‌می‌شوند؛ مثلاً

$$\sum_{j=۱}^{۸}(-۱)^j j^۲=-۱^۲+۲^۲-۳^۲+۴^۲-۵^۲+۶^۲-۷^۲+۸^۲,$$

$$\sum_{j=۰}^{۷}(-۱)^j C(۷,\ j)=C(۷,\ ۰)-C(۷,\ ۱)+C(۷,\ ۲)-C(۷,\ ۳)$$
$$+C(۷,\ ۴)-C(۷,\ ۵)+C(۷,\ ۶)-C(۷,\ ۷).$$

به‌عنوان مثالی دیگر، فرمولی راکه درفصل ۸، برای تعداد توزیعهای m شیء متمایز در داخل k جعبهٔ متمایزبدون وجود هیچ جعبهٔ تهی، داده‌شد درنظرمی‌گیریم:

$$f(m,\ k)=k^m-C(k,\ ۱)(k-۱)^m+C(k,\ ۲)(k-۲)^m$$
$$-C(k,\ ۳)(k-۳)^m+\cdots+(-۱)^{k-۱}C(k,\ k-۱)(۱)^m.$$

این فرمول را می‌توان به‌صورت فشردهٔ

$$f(m,k)=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C(k,j)(k-j)^m$$

نوشت.

همچنین درفصل ۸ تعداد افرازهای یک‌مجموعه از m عنصر (متمایز) را، به k زیرمجموعه (نامتمایز) که هیچیك از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند، با $g(m,k)$ نشان دادیم، و رابطهٔ

$$g(m,k)=\frac{f(m,k)}{k!}$$

را به‌دست‌آوردیم. لذا شکل فشردهٔ $g(m,k)$ به‌صورت

$$g(m,k)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j C(k,j)(k-j)^m}{k!}$$

خواهد بود. اگر دراین فرمول به جای $C(k,j)$ از صورت فاکتوریل‌آن استفاده کنیم، $k!$ حذف‌شده و نتیجه به‌صورت

$$g(m,k)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j(k-j)^m}{j!(k-j)!},$$

در می‌آید.

برای حاصلضربها نیز نماد اختصاری‌مناسب‌وجود دارد؛ به‌جای‌حرف‌بزرگ سیگما، در اینجا حرف بزرگ یونانی $\prod$ به کار می‌رود. مثلاً، $n!$ را می‌توان به‌صورت

$$n!=\prod_{j=1}^{n} j$$

نوشت.

مثالهای دیگری ازاین قرارند:

$$\prod_{j=1}^{n}(j^2+1) \text{ به معنای } (1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\cdots(n^2+1)؛$$

$$\prod_{j=1}^{n}(3j-1) \text{ به معنای } 2\times5\times8\times11\times\cdots\times(3n-1)؛$$

$\prod_{j=1}^{7}(1+x^j)$ به معنای

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)$$

هستند.

مجموعه مسائل ۳۴

۱. بدون استفاده از نماد سیگما مجموعهای زیر را بیان کنید:

الف) $\sum_{j=1}^{5} j^2$؛ ب) $\sum_{j=1}^{4}(2j^2-1)$؛ پ) $\sum_{k=3}^{6}(k^2+2)$.

۲. با استفاده از نماد سیگما و فرمولهای (۸.۱۰) مجموعهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $3+6+9+12+\dots+3n;$

ب) $2+5+8+11+\dots+(3n-1);$

پ) $1\times3+3\times5+5\times7+7\times9+\dots+(2n-1)(2n+1);$

ت) $1\times2+3\times3+5\times4+7\times5+\dots+(2n-1)(n+1);$

ث) $5+9+13+17+21+\dots+(4n+1).$

۳. برای مجموعهای زیر فرمولهایی مشابه فرمولهای (۸.۱۰) بنویسید

الف) $1+2+3+\dots+(n-1);$

ب) $1+2+3+\dots+(n+1);$

پ) $1^2+2^2+3^2+\dots+(n+1)^2.$

۴. مقدار عددی

$$\sum_{j=1}^{100}(-1)^j.j$$

را تعیین کنید.

۰۵ معادلهٔ

$$C(n, ۰)+C(n, ۱)+C(n, ۲)+C(n, ۳)+\cdots+C(n, n)=۲^n$$

را برحسب نماد سیگما بنویسید.

۰۶ مجموع

$$\sum_{j=۰}^{n}(-۱)^j C(n, j)$$

را به صورت یکی ازمجموعهایی که قبلاً دراین کتاب مورد بحث قرار گرفته است مشخص کنید، و سپس مقدار آن را به‌دست آورید.

۰۷ با استقرای ریاضی ثابت کنید که:

$$\sum_{j=۰}^{n}۲^j=۲^{n+۱}-۱$$

سپس ثابت کنید که در مثلث پاسکال (صفحهٔ ۴۴)، مجموع عناصر هرسطر مساوی با مجموع عناصر سطر قبلی بعلاوهٔ یك است.

۰۸ حاصلضرب $\prod_{j=۲}^{۶}(j+۱)$ را محاسبه کنید.

۰۹ حاصلضرب $\prod_{j=۱}^{n}(۲j)$ را برحسب نماد فاکتوریل بیان کنید.

۰۱۰ درستی برابری

$$\prod_{j=۱}^{n}(۲j-۱)=\frac{(۲n)!}{۲^n\cdot n!}$$

را تحقیق کنید.

۰۱۱ فرض کنیم $f(n)$ با

$$f(n)=\sum_{j=۱}^{n}j\cdot j!$$

تعریف شده باشد. تحقیق کنید که $f(۱)=۱$، $f(۲)=۵$، $f(۳)=۲۳$، و مقادیر

عددی $f(۴)$، $f(۵)$ و $f(۶)$ را تعیین کنید. آن‌گاه این مقادیر را با مقادیر عددی !۲، !۳، !۴، !۵، !۶، و !۷ مقایسه کرده، فرمولی برای $f(n)$ حدس بزنید و سعی کنید با استقرای ریاضی آن را ثابت کنید.

۳.۱۰ خلاصه

روش اثباتی راکه به‌نام استقرای ریاضی‌معروف است می‌توان برای اثبات دنباله‌ای نامتناهی از گزاره‌های $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ...، به‌کار برد، به‌شرط آنکه بتوانیم ثابت کنیم که

(i) $P_۱$ راست است،

(ii) $P_{k+۱}$ به ازای هرعدد صحیح مثبت k از P_k نتیجه می‌شود.

نماد سیگما برای مجموعها، و نماد پی برای حاصلضربها توضیح داده شده‌اند.

۱۱

تعبیرهای حاصلضرب شرکت‌ناپذیر

عبارت ریاضی

$$۲^{۳^{۴}}$$

را درنظر بگیرید. به نظر می‌رسد که دو راه تعبیر برای این عبارت وجود دارد ــ یکی، شروع با $۲^۳$ سپس تعبیر عبارت به‌صورت $۸^۴$؛ و دیگری، شروع با $۳^۴$ وسپس تعبیر عبارت به‌صورت $۲^{۸۱}$. این دو راه به‌دونتیجهٔ متفاوت می‌رسند، زیرا $۸^۴$ برابر ۴۰۹۶ است درصورتی‌که $۲^{۸۱}$ عددی بسیار بزرگتر است. این دوتعبیررا می‌توان بااستفاده از پرانتز مشخص کرد؛ بنابراین

$$(۲^۳)^۴ = ۸^۴\text{،} \qquad ۲^{(۳^۴)} = ۲^{۸۱}\text{، و } ۲^{(۳^۴)} \neq (۲^۳)^۴. \qquad (۱.۱۱)$$

حال واقعیت آن است کــه قرارداد یا توافقی در ریاضی وجود داردکه به چه صورتی دقیقاً باید $۲^{۳^{۴}}$ را تعبیر کرد، وآن، صورت دوم در (۱.۱۱) است،

$$۲^{۳^۴} = ۲^{(۳^۴)} = ۲^{۸۱}.$$

برای هدفهای این فصل این قرارداد را نادیده می‌گیریم. رابطه‌های (۱.۱۱) را به‌عنوان اثباتی برای شرکت‌پذیرنبودن عمل به‌توان رساندن، درمقابله با مثلاً جمع و ضرب، موردتوجه قرار می‌دهیم؛

$$(۲+۳)+۴=۲+(۳+۴), \quad (۲\times۳)\times۴=۲\times(۳\times۴).$$

با نادیده گرفتن مفهومی قراردادی برای عبارتهایی مانند

$$a^{b^{c^d}} \quad \text{یا} \quad ۲^{۳^{۴^۵}} \qquad (۲.۱۱)$$

ازخود می‌پرسیم وقتی ۴ عدد بدین‌طریق به‌صورت نمایی دربالای‌هم قرارمی گیرند، چند تعبیر برای آنها وجود دارد؟ به‌طورکلیتر، وقتی n عدد به‌صورت نمایی بالای هم قرار می‌گیرند چند تعبیر برای آنها وجود دارد؟

۱.۱۱ رابطهٔ بازگشتی

برای ساده کردن نحوهٔ نوشتن، دومین عبارت (۲.۱۱) را آن‌چنان می‌نویسیم که گویی «حاصلضرب» $abcd$ است. از قبل فرض می‌کنیم که چنین «حاصلضربهایی» شرکت‌پذیر نباشند، بنابراین حاصلضرب سه‌تایی $a(bc)$ و $(ab)c$ متفاوت‌اند. تمام تعبیرهای ممکن یك حاصلضرب چهارتایی را می‌توان به‌آسانی شمارش کرد:

$$a((bc)d),\ a(b(cd)),\ (ab)(cd),\ (a(bc))d,\ ((ab)c)d. \qquad (۳.۱۱)$$

فرض کنیم $F(n)$ تعداد تعبیرهای یك حاصلضرب nتایی شرکت‌ناپذیر باشد؛ دراین صورت شمارش (۳.۱۱) نشان می‌دهد که $F(۴)=۵$. همچنین به دلیل دوحالت $a(bc)$ و $(ab)c$، می‌دانیم که $F(۳)=۲$. برای حاصلضرب دوتایی ab تنها یك تعبیروجود دارد و همچنین برای حاصلضرب یك‌تایی a، تنها یك تعبیروجود دارد، وبنابراین می‌توانیم بنویسیم $F(۲)=۱$ و $F(۱)=۱$.

مسألهٔ کلی این فصل محاسبهٔ $F(n)$، تعداد تعبیرهای حاصلضرب nتایی

$$x_۱x_۲x_۳\cdots x_n \qquad (۴.۱۱)$$

است، که ویژگی شرکت‌پذیری را ندارد. می‌توان تصورکردکه $F(n)$ برابر تعداد

راههای قراردادن پرانتزها در (۴.۱۱) است به‌طوری‌که عبارت مبهم نباشد.

برای تشریح آنچه دراین باره انجام می‌دهیم، حالت خاص $n=۶$ را درنظر می‌گیریم. برای پرانتزگذاری در یك حاصلضرب شش‌تایی، اولین قدم ممکن تفکیك حاصلضرب به دو بخش است. این عمل می‌تواند به هر یك از پنج راه زیر انجام شود:

$$
\begin{aligned}
&x_۱(x_۲x_۳x_۴x_۵x_۶), && \text{(الف)}\\
&(x_۱x_۲)(x_۳x_۴x_۵x_۶), && \text{(ب)}\\
&(x_۱x_۲x_۳)(x_۴x_۵x_۶), && \text{(پ)} \qquad (۵.۱۱)\\
&(x_۱x_۲x_۳x_۴)(x_۵x_۶), && \text{(ت)}\\
&(x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵)x_۶. && \text{(ث)}
\end{aligned}
$$

به‌چند طریق می‌توان پرانتزهای دیگر را قرار داد؟ درعبارت (الف)، $F(۵)$ تعبیر از $x_۲x_۳x_۴x_۵x_۶$ وجود دارند. درعبارت (ب)، $F(۴)$ تعبیراز $x_۳x_۴x_۵x_۶$ موجود است. در عبارت (پ)، برای هر یك از $x_۱x_۲x_۳$ و $x_۴x_۵x_۶$، $F(۳)$ تعبیر وجود دارد و بنابراین درکل برای این حالت $F(۳)\times F(۳)$ تعبیر موجود است. عبارتهای (ت) و (ث) به‌ترتیب باعبارتهای (ب) و (الف) مشابه‌اند. از جمع کردن کل این اطلاعات می‌بینیم که

$$F(۶)=F(۵)+F(۴)+F(۳)\times F(۳)+F(۴)+F(۵).$$

چون $F(۱)=۱$ و $F(۲)=۱$، این رابطه را می‌توان به‌شکل متقارنتر زیرنوشت:

$$
\begin{aligned}
F(۶)=F(۱)F(۵)+F(۲)F(۴)+F(۳)F(۳)\\
+F(۴)F(۲)+F(۵)F(۱).
\end{aligned}
$$

بااستدلالی مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$
\begin{aligned}
F(۷)=F(۱)F(۶)+F(۲)F(۵)+F(۳)F(۴)+F(۴)F(۳)\\
+F(۵)F(۲)+F(۶)F(۱),
\end{aligned}
$$

وبه‌طورکلی نتیجه بگیریم که

$$F(n)=F(\text{۱})F(n-\text{۱})+F(\text{۲})F(n-\text{۲}) \qquad (\text{۶.۱۱})$$
$$+F(\text{۳})F(n-\text{۳})+\cdots+F(n-\text{۱})F(\text{۱}).$$

با استفاده از نماد سیگما برای مجموعهها، رابطهٔ بازگشتی (۶.۱۱) را می‌توان به صورت

$$F(n)=\sum_{j=\text{۱}}^{n-\text{۱}}F(j)F(n-j)$$

نوشت، و آن را برای محاسبهٔ مقادیر متوالی $F(n)$ وقتی n مقادیر صعودی اعداد طبیعی را می‌گیرد به‌کار برد. مثلاً اگر $F(\text{۱})=\text{۱}$ و $F(\text{۲})=\text{۱}$ را به‌عنوان مقادیر آغاز کار درنظر بگیریم، می‌توانیم به‌دست آوریم که:

$$F(\text{۳})=F(\text{۱})F(\text{۲})+F(\text{۲})F(\text{۱})=\text{۱}+\text{۱}=\text{۲},$$
$$F(\text{۴})=F(\text{۱})F(\text{۳})+F(\text{۲})F(\text{۲})+F(\text{۳})F(\text{۱})=\text{۲}+\text{۱}+\text{۲}=\text{۵},$$
$$F(\text{۵})=F(\text{۱})F(\text{۴})+F(\text{۲})F(\text{۳})+F(\text{۳})F(\text{۲})+F(\text{۴})F(\text{۱})$$
$$=\text{۵}+\text{۲}+\text{۲}+\text{۵}=\text{۱۴},$$

وقس‌علی‌هذا.

مجموعه مسائل ۳۵

۱. تعداد تعبیرهای (i) یک حاصلضرب ۶تایی، (ii) یك حاصلضرب ۷تایی، (iii) یك حاصلضرب ۸تایی را در یك دستگاه شرکت‌ناپذیر بیابید.

۲. معنی قراردادی نامبهم $\text{۵}^{\text{۴}^{\text{۳}^{\text{۲}}}}$ چیست؟

۳. چهارده تعبیر یك حاصلضرب ۵تایی را که با فرمولبندی (۳.۱۱) متن کتاب مشابه‌اند شمارش کنید.

۲.۱۱ گسترش یك فرمول صریح

حاصلضرب شرکت‌ناپذیری مانند

$$(((x_{\text{۱}}x_{\text{۲}})(x_{\text{۳}}x_{\text{۴}}))x_{\text{۵}})(((x_{\text{۶}}x_{\text{۷}})x_{\text{۸}})x_{\text{۹}}) \qquad (\text{۷.۱۱})$$

را در نظر بگیرید. پرانتزها، که برای نشان دادن آرایش شرکت عناصر به کار می‌روند به‌صورت زوج، با پرانتزی درچپ و پرانتزی در راست درهرزوج، ظاهر می‌شوند. به‌هرحاصلضرب مانند (۷.۱۱) دو عددکه با n و k نشان داده می‌شوند همراه می‌کنیم؛ n تعداد عناصر در حاصلضرب را نشان می‌دهد. [در مثال (۷.۱۱)، $n=۹$] و k معرف تعداد عناصر قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز است. (درمثال (۷.۱۱) سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز بلافاصله قبل‌از $x_۶$ قرار دارد و بنابراین $k=۵$.) به‌عنوان مثالی دیگر

$$x_۱(x_۲(((x_۳(x_۴x_۵))x_۶)x_۷)) \qquad (۸.۱۱)$$

را درنظر بگیرید،که درآن $n=۷$ و $k=۳$. در چنین حاصلضربی*، بعد از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز، دو عنصر و پرانتز متناظرش می‌آیند؛ این الگو در (۷.۱۱)، $(x_۶x_۷)$ و در (۸.۱۱) $(x_۴x_۵)$ است.

سپس تبدیلی را تعریف می‌کنیم‌که هرحاصلضربی را اختیار می‌کند و آن را به حاصلضربی با یك عنصرکمتر تبدیل‌می‌نماید. این تبدیل، سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز و عنصر بعد ازآن و پرانتز سمت راست متناظر آن را حذف می‌کند، بنابراین (۷.۱۱) به

$$(((x_۱x_۲)(x_۳x_۴))x_۵)((x_۷x_۸)x_۹) \qquad (۹.۱۱)$$

و (۸.۱۱) به

$$x_۱(x_۲(((x_۳x_۵)x_۶)x_۷)) \qquad (۱۰.۱۱)$$

تبدیل می‌شود. در (۹.۱۱) می‌بینیم که $n=۸$ و $k=۵$ و در (۱۰.۱۱) $n=۶$ و $k=۲$ است.

به‌طورکلی، یك حاصلضرب nتایی که تعداد عناصر قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز آن برابر k است به‌یك حاصلضرب $(n-۱)$تایی تبدیل می‌شود، زیرا یك عنصر آن حذف می‌گردد. عبارتی که تبدیل شده است، یا قبل از سمت راست‌ترین پرانتزچپ ـ باز دارای k عنصر است (این حالتی است که‌آن پرانتز با پرانتز چپ ـ باز دیگری مجاور است)، و یا حاصلضربی‌که تبدیل شده است قبل‌از

---

* منظور ما از«چنین حاصلضرب»، حاصلضربی است‌که با درج به‌اندازهٔ‌کافی از پرانتزها، نامبهم باشد.

آن دارای کمتر از k عنصر است.

فرض کنیم تعداد حاصلضربهای n تایی شرکت‌ناپذیری را که قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ - باز دقیقاً دارای k عنصرند به $F(n, k)$ نشان دهیم. نتیجه می‌شود که رابطهٔ زیر برقرار است:

$$F(n, k)=F(n-1, k)+F(n-1, k-1)+F(n-1, k-2)+\cdots+F(n-1, 0) \qquad (11.11)$$

این مطلب را در حالت $n=5$ و $k=3$ تشریح می‌کنیم. پنج حاصلضرب، متناظر با این مقادیر خاص n و k وجود دارند؛ یعنی می‌توان گفت $F(5, 3)=5$. این پنج حاصلضرب را درستون سمت چپ وحاصلضربهای تبدیل شدهٔ متناظر آنها را در ستون‌سمت‌راست فهرست می‌کنیم:

k	n	حاصلضرب تبدیل شده	حاصلضرب
۲	۴	$(x_1x_2)(x_3x_5)$	$(x_1x_2)(x_3(x_4x_5))$
۲	۴	$x_1(x_2(x_3x_5))$	$x_1(x_2(x_3(x_4x_5)))$
۱	۴	$x_1((x_2x_3)x_5)$	$x_1((x_2x_3)(x_4x_5))$
۱	۴	$(x_1(x_2x_3))x_5$	$(x_1(x_2x_3))(x_4x_5)$
۰	۴	$((x_1x_2)x_3)x_5$	$((x_1x_2)x_3)(x_4x_5)$

دو حاصلضرب تبدیل شدهٔ اولی ازنوع $F(4, 2)$، و دو حاصلضرب بعدی از نوع $F(4, 1)$ و حاصلضرب آخری از نوع $F(4, 0)$ است. در واقع این گردایه‌های انواع، کامل‌هستند، بنا براین $F(4, 2)=2$، $F(4, 1)=2$، $F(4, 0)=1$. بعلاوه هیچ حاصلضربی از نوع $F(4, 3)$ وجود ندارد و بنابراین $F(4, 3)=0$. پس، با شمارش واقعی، برابری زیر را که حالت خاص (۱۱.۱۱) است مورد تحقیق قرار داده‌ایم

$$F(5, 3)=F(4, 3)+F(4, 2)+F(4, 1)+F(4, 0).$$

با این مثال برهانی برای (۱۱.۱۱) القا می‌شود. اولاً، اگر هر حاصلضربی

از نوع $F(n,\ k)$ بنا برشیوه‌ای که دربالا توصیف شد، تبدیل شود، حاصلضربی از نوعی که در سمت راست (۱۱۰۱۱) فهرست شده است نتیجه می‌شود. ثانیاً، تبدیل به‌صورت زیر برگشت‌پذیر است: حاصلضربی ازنوعی که درسمت راست(۱۱۰۱۱) فهرست شده‌است اختیار کنید؛ به جای $(k+۱)$امین عنصر آن، مثل y، دو عنصر را در پرانتز، مثل (yz) قرار دهید؛ این شیوه، حاصلضربی از نوع $F(n,\ k)$ به‌دست می‌دهد. بنا براین بین‌انواع حاصلضربهایی که در دوطرف معادلهٔ (۱۱۰۱۱) فهرست شده‌اند تناظری یك به‌یك وجود دارد، و به‌وسیلهٔ آن نتیجه ثابت می‌شود.

حال اگر درفرمول (۱۱۰۱۱)، $k-۱$ را به‌جای k قرار دهیم نتیجه عبارت است از:

$$F(n,\ k-۱)=F(n-۱,\ k-۱)+F(n-۱,\ k-۲)$$
$$+F(n-۱,\ k-۳)+\dots+F(n-۱,\ ۰).$$

با کم‌کردن این برابری از فرمول (۱۱۰۱۱)، به‌دست می‌آوریم

$$F(n,\ k)-F(n,\ k-۱)=F(n-۱,\ k)$$

یا

$$F(n,\ k)=F(n,\ k-۱)+F(n-۱,\ k). \qquad (۱۲۰۱۱)$$

این فرمول تااندازه‌ای به نتیجهٔ

$$C(n,\ r)=C(n-۱,\ r)+C(n-۱,\ r-۱)$$

شباهت دارد. بین توابع $F(n,\ k)$ و$C(n,\ r)$، ارتباطی وجود داردکــه ما اکنون به‌وسیلهٔ مقایسه با جدولهای عددی خلاصه، این ارتباط را ظاهر می‌کنیم.

برای تهیهٔ جدولی از مقادیر $F(n,\ k)$، (۱۲۰۱۱) را همراه با برخی نتایج پایه‌ای به‌کار می‌بریم. چون درحالتهای سادهٔ $n=۱$ و $n=۲$ به پرانتزها احتیاجی نیست، توجه خودرا به‌مقادیر $n\geqslant ۳$ معطوف می‌داریم. به‌ازای هرمقدار n، مقادیر متناظـر k عبارت از ۰، ۱، ۲، ...، $n-۱$ هستند. (نتیجه می‌شود کــه مناسب است درفرمولها از حالت $k=n$ صرفنظر کنیم، زیــرا برای آن هیچ حاصلضربی وجود نــدارد.) مقادیـر $F(n,\ ۰)$ و $F(n,\ n-۱)$ را به‌آسانــی مـی‌تــوان از روی تعریف تعیین کــرد. اولاً، $F(n,\ ۰)$ بــه‌مــعــنای تعداد حــاصــلضربهــای nتایی است کــه قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز، هیچ عنصری ندارند.

برای حالت $n=۸$، یك چنین حاصلضربی با

$$((((((x_۱x_۲)x_۳)x_۴)x_۵)x_۶)x_۷)x_۸,$$

نشان داده می‌شود، و بنابراین $F(n,\ ۰)=۱$. حال بعد از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز حداقل دو عنصر وجود دارد. (زیرا یك عنصر تنها را در داخل پرانتز قرار نمی‌دهیم)، و بنابراین از نوع $F(n,\ n-۱)$ هیچ حاصلضربی وجود ندارد. پس داریم:

$$F(n,\ ۰)=۱ \quad F(n,\ n-۱)=۰ \quad \text{به‌ازای } n\geqslant ۳، \qquad (۱۳.۱۱)$$

با این اطلاعات و نتیجهٔ $F(۳,\ ۱)=۱$ که به‌سادگی ثابت می‌شود، اکنون می‌توان برای تهیهٔ جدول مقادیر، از (۱۲.۱۱) استفاده کرد.

این جدول با جدول مقادیر $C(n,\ r)$ یعنی با مثلث پاسکال مقایسه می‌شود. در هرسطر مثلث پاسکال تفاضلهای مقادیر زوجهای مجاور را فهرست می‌کنیم، بدین‌طریق که مقدار سمت چپ را از مقدار سمت راست کم می‌کنیم و تفاضل را درپرانتزی بین این زوج می‌نویسیم؛ ولی تفاضلهای منفی را نمی‌نویسیم. (جدول صفحهٔ ۱۶۱ را ببینید.)

مقایسهٔ این جدولها نشان می‌دهد که درایه‌ها در جدول $F(n,\ k)$ به عنوان تفاضلها در جدول $C(n,\ r)$ ظاهرشده‌اند، مثلاً،

$$F(۷,\ ۳)=C(۸,\ ۳)-C(۸,\ ۲),$$

$$F(۸,\ ۴)=C(۱۰,\ ۴)-C(۱۰,\ ۳),$$

$$F(۹,\ ۶)=C(۱۳,\ ۶)-C(۱۳,\ ۵),$$

$$F(۱۲,\ ۳)=C(۱۳,\ ۳)-C(۱۳,۲).$$

پس این نتایج گزارهٔ کلی زیر را القاء می‌کند.

$$F(n,\ k)=C(n+k-۲,\ k)-C(n+k-۲,\ k-۱) \qquad (۱۴.۱۱)$$

این حدس صحیح است ولی البته نمی‌توان با امتحان چندحالت خاص در جدولها، آن را ثابت کرد.

جدول مقادیر $F(n, k)$

n \ k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۱	۱	۰							
۴	۱	۲	۲	۰						
۵	۱	۳	۵	۵	۰					
۶	۱	۴	۹	۱۴	۱۴	۰				
۷	۱	۵	۱۴	۲۸	۴۲	۴۲	۰			
۸	۱	۶	۲۰	۴۸	۹۰	۱۳۲	۱۳۲	۰		
۹	۱	۷	۲۷	۷۵	۱۶۵	۲۹۷	۴۲۹	۴۲۹	۰	
۱۰	۱	۸	۳۵	۱۱۰	۲۷۵	۵۷۲	۱۰۰۱	۱۴۳۰	۱۴۳۰	۰
۱۱	۱	۹	۴۴	۱۵۴	۴۲۹	غیره				
۱۲	۱	۱۰	۵۴	۲۰۸	۶۳۷					
۱۳	۱	۱۱	۶۵	۲۷۳	۹۱۰					
۱۴	۱	۱۲	۷۷	۳۵۰	۱۲۶۰					

جدول مقادیر $C(n, r)$، تفاضلها در پرانتزها

n \ r	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۱(۰)	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۱(۱)	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰
۳	۱(۲)	۳(۰)	۳	۱	۰	۰	۰	۰
۴	۱(۳)	۴(۲)	۶	۴	۱	۰	۰	۰
۵	۱(۴)	۵(۵)	۱۰(۰)	۱۰	۵	۱	۰	۰
۶	۱(۵)	۶(۹)	۱۵(۵)	۲۰	۱۵	۶	۱	۰
۷	۱(۶)	۷(۱۴)	۲۱(۱۴)	۳۵(۰)	۳۵	۲۱	۷	۱
۸	۱(۷)	۸(۲۰)	۲۸(۲۸)	۵۶(۱۴)	۷۰	۵۶	۲۸	۸
۹	۱(۸)	۹(۲۷)	۳۶(۴۸)	۸۴(۴۲)	۱۲۶(۰)	۱۲۶	۸۴	۳۶
۱۰	۱(۹)	۱۰(۳۵)	۴۵(۷۵)	۱۲۰(۹۰)	۲۱۰(۴۲)	۲۵۲	۲۱۰	۱۲۰
۱۱	۱(۱۰)	۱۱(۴۴)	۵۵(۱۱۰)	۱۶۵(۱۶۵)	۳۳۰(۱۳۲)	۴۶۲(۰)	۴۶۲	۳۳۰
۱۲	۱(۱۱)	۱۲(۵۴)	۶۶(۱۵۴)	۲۲۰(۲۷۵)	۴۹۵(۲۹۷)	۷۹۲(۱۳۲)	۹۲۴	۷۹۲
۱۳	۱(۱۲)	۱۳(۶۵)	۷۸(۲۰۸)	۲۸۶(۴۲۹)	۷۱۵(۵۷۲)	۱۲۸۷(۴۲۹)	۱۷۱۶(۰)	۱۷۱۶

۳.۱۱ برهان حدس

قبل از اثبات حدس (۱۴.۱۱)، با انجام محاسبه‌ای جبری آن را به صورت دیگری می‌نویسیم:

$$C(n+k-۲,\ k)-C(n+k-۲,\ k-۱)$$

$$=\frac{(n+k-۲)!}{k!(n-۲)!}-\frac{(n+k-۲)!}{(k-۱)!(n-۱)!}$$

$$=\frac{(n+k-۲)!}{k!(n-۱)!}[(n-۱)-k].$$

بنابراین (۱۴.۱۱) را می‌توان به صورت

$$F(n,\ k)=\frac{(n+k-۲)!}{k!(n-۱)!}(n-k-۱) \qquad (۱۵.۱۱)$$

نوشت. توجه می‌کنیم که این رابطه به‌ازای $k=۰$ نیز درست است، زیرا

$$F(n,\ ۰)=\frac{(n-۲)!}{۰!(n-۱)!}(n-۱)=۱,$$

بامقدار محاسبه شدهٔ قبلی مطابقت دارد. همچنین توجه می‌کنیم که رابطهٔ (۱۵.۱۱) نتایج صحیح $F(۳,\ ۱)=۱$ و $F(۳,\ ۲)=۰$ را به‌دست می‌دهد.

اکنون‌در وضعیتی هستیم که می‌توانیم بااستقرای ریاضی رابطهٔ(۱۵.۱۱) را ثابت کنیم. چون اینك دومتغیر n و k وجود دارند، لازم است که کمی پیچیده‌تر از برهانهایی که در فصل قبل به‌طریق استقرا انجام گرفتند استدلال کنیم. اما می‌توانیم با طرح زیر، این مسأله را به مسأله‌ای بایك متغیر برگردانیم. فرض کنیم P_m تمام حالتهای (۱۵.۱۱) را، با $n+k=m$، $n\geqslant ۳$، نشان دهد. چون با $m=۳$ شروع می‌کنیم:

$P_۳$ معادلهٔ (۱۵.۱۱) است درحالت $n=۳$، $k=۰$؛

$P_۴$ معادلهٔ (۱۵.۱۱) است درحالتهای $n=۴$، $k=۰$ و $n=۳$، $k=۱$؛

$P_۵$ معادلهٔ (۱۵.۱۱) است درحالتهای $n=۵$، $k=۰$؛ $n=۴$، $k=۱$؛ و $n=۳$، $k=۲$.

به‌طور مشابه $P_۶$ شامل ۴ حالت، $P_۷$ شامل ۵ حالت است و غیره. اثبات استقرایی (۱۵.۱۱) عبـارت است از اثبات (i) یعنی $P_۳$ راست است، و اثبات (ii) یعنی $P_{m+۱}$ از P_m نتیجه می‌شود.

قبلاً بررسی کردیم که $P_۳$ برقرار است، بنابراین به‌اثبات (ii) می‌پردازیم. فرض کنیم که P_m برقرار باشد، می‌خواهیم $P_{m+۱}$؛ یعنی معادلهٔ (۱۵.۱۱) را به‌ازای هرزوج از اعداد صحیح n و k که مجموع آنها برابر $m+۱$ است، ثابت کنیم. لذا در آنچه‌کـه در زیر می‌آید n و k را دو عدد صحیحی در نظر می‌گیریم کـه $n+k=m+۱$. البته، برای اثبات آنکـه از P_m، $P_{m+۱}$ نتیجه می‌شود، از P_m استفاده می‌کنیم و بنابراین‌رابطهٔ (۱۵.۱۱) را برای $F(n,\ k-۱)$ و $F(n-۱\ ,\ k)$ به‌کار می‌بریم، زیرا از $n+k=m+۱$ نتیجه می‌شود کـه $n+(k-۱)=m$ و $(n-۱)+k=m$. بنابراین P_m شامل دوحکم

$$F(n,\ k-۱)=\frac{(n+k-۳)!}{(k-۱)!(n-)!}(n-k),$$

و

$$F(n-۱\ ,\ k)=\frac{(n+k-۳)!}{k!(n-۲)!}(n-k-۲)$$

است. بااستفاده از (۱۲.۱۱) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
F(n,\ k)&=F(n,\ k-۱)+F(n-۱\ ,\ k)\\
&=\frac{(n+k-۳)!}{(k-۱)!(n-۱)!}(n-k)+\frac{(n+k-۳)!}{k!(n-۲)!}(n-k-۲)\\
&=\frac{(n+k-۳)!}{k!(n-۱)!}[k(n-k)+(n-۱)(n-k-۲)]\\
&=\frac{(n+k-۳)!}{k!(n-۱)!}(n+k-۲)(n-k-۱)\\
&=\frac{(n+k-۲)!}{k!(n-۱)!}(n-k-۱),
\end{aligned}$$

ولذا، (۱۵.۱۱) ثابت می‌شود.

۴.۱۱ فرمولی برای $F(n)$

اکنون هدف ما پاسخ دادن به سؤالی است که درمقدمهٔ این فصل مطرح شد: دریك دستگاه شرکت‌ناپذیر، عدد $F(n)$، تعداد حاصلضربهای nتایی چقدر است؟ اینك با استفاده از نتایج بخشهای قبل، فرمول ساده‌ای برای $F(n)$ به‌دست می‌آوریم.

اولاً مشاهده‌می‌کنیم که تعدادکل‌حاصلضربهای nتایی عبارت ازآنهایی‌است که‌هیچ عنصری قبل‌از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز ندارند، بعلاوهٔ‌آنهایی‌که یك عنصر قبل ازآن دارند، بعلاوهٔ آنهایی‌که دو عنصر قبل از آن دارند، ...، بعلاوهٔ آنهایی‌که تمام عناصرشان به‌غیراز یکی قبل از آن هستند، بعلاوهٔ آنهایی کـه تمام عناصرشان قبل‌ازآن هستند. به صورت نمادی

$$F(n)=F(n,\ ۰)+F(n,\ ۱)+F(n,\ ۲)+\dots+F(n,\ n-۲)$$
$$+F(n,\ n-۱)+F(n,\ n) \qquad (۱۶.۱۱)$$

نظربه فرمول (۱۳.۱۱) و این واقعیت کـه $F(n,\ ۰)=۰$، فرمول (۱۶.۱۱) را می‌توانیم به‌صورت

$$F(n)=\sum_{j=۰}^{n-۲}F(n,\ j) \qquad (۱۶'.۱۱)$$

بنویسیم.

سپس، فرمول (۱۱.۱۱) را که‌در بخش ۲.۱۱ بـه دست آمد و در آن $n+۱$ را به‌جای n و $n-۱$ را به‌جای k قرار داده‌ایم می‌نویسیم. نتیجه می‌شود

$$F(n+۱,\ n-۱)=F(n,\ n-۱)+F(n,\ n-۲)$$
$$+\dots+F(n,\ ۰). \qquad (۱۷.۱۱)$$

اما $F(n,\ n-۱)$ صفر است، بنابراین (۱۷.۱۱) را می‌توانیم به‌صورت

$$F(n+۱,\ n-۱)=\sum_{j=۰}^{n-۲}F(n,\ j)$$

بنویسیم، و از مقایسهٔ آن با (۱۶'.۱۱) می‌بینیم که

$$F(n)=F(n+۱,\ n-۱). \qquad (۱۸.۱۱)$$

سرانجام فرمول (۱۵.۱۱) راکه دربخش ۳.۱۱ به‌دست آمد در مـورد عضو سمت

راست رابطهٔ (۱۸.۱۱) به کار می‌بریم؛ به عبارت دیگر، در (۱۵.۱۱)، $n+1$ را به‌جای n و $n-1$ را به‌جای k قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$F(n+1,n-1)=\frac{[(n+1)+(n-1)-2]!}{(n-1)!n!}[(n+1)-(n-1)-1]$$

$$=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

با قراردادن این رابطه در (۱۸.۱۱)، نتیجهٔ مطلوب

$$F(n)=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

برای تعداد راههای درج با معنای پرانتزها در عبارتی به صورت $x_1x_2x_3\dots x_n$ به‌دست می‌آید.

۵.۱۱ خلاصه

یك «حاصلضرب» ریاضی، شرکت‌ناپذیر است اگر $a(bc)=(ab)c$ درهمهٔ موارد برقرار نباشد. کلمهٔ «حاصلضرب» به‌این دلیل در داخل علامت نقل‌قول آمده است که برای هدفهای این فصل، ab می‌تواند نتیجهٔ هرعمل دوتایی روی عناصر a و b از یك دستگاه شرکت‌ناپذیر را نشان دهد. مثالی برای این مطلب از تعبیر ab به عنوان صورت نمایی a^b حاصل می‌شود.

در یك دستگاه شرکت‌ناپذیر، برای حاصلضرب سه‌تایی abc، دو تعبیر، یعنی $a(bc)$ و $(ab)c$ وجود دارد. موضوع این فصل تعداد تعبیرهای یك حاصلضرب nتایی شرکت‌ناپذیر $x_1x_2x_3\dots x_n$ است، که با $F(n)$ نشان داده شده‌است. اولاً رابطهٔ بازگشتی

$$F(n)=\sum_{j=1}^{n-1}F(j)F(n-j)$$

ثابت شده‌است، و آن گاه فرمول صریح

$$F(n)=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

به‌دست آمده است. با جداسازی $F(n)$ به‌چند بخش، و با نمایش $F(n, k)$ به عنوان تعداد حاصلضربهای nتایی که قبل از سمت راست‌ترین پرانتز چپ ـ باز دارای k عنصر ند این نتیجه را ثابت کردیم. ویژگیهای $F(n, k)$ در فرمولهای (۱۱.۱۱) و (۱۲.۱۱) کــه بــه‌جدول مقادیر این تابع منتج شد، ارائه شده‌اند. از مقایسهٔ این مقادیر با تفاضلهــا در مثلث پاسکال، حدس رابطهٔ بین $F(n, k)$ و $C(m, j)$ آسان بود. این حــدس، یعنی حدس (۱۴.۱۱)، با استقرای ریاضی ثابت، و سپس مقدار $F(n)$ محاسبه شده‌است.

مسائل گوناگون

۱. به کلاسی یك آزمون دوجوابی شامل ۱۲ سؤال داده می‌شود. یکی از دانشجویانی که برای آزمون آماده نیست دربارهٔ پاسخها باخطمشی زیر تصمیم می‌گیرد. او به ۳ سؤالی که دربارهٔ درستی پاسخ آنها احساس اطمینان مطلق دارد پاسخ می‌دهد و سپس دربارهٔ ۹ سؤال دیگر باپرتاب یك سکه درهر مورد تصمیم می‌گیرد. بافرض آنکه دانشجو به آن ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، ثابت کنید احتمال اینکه حداقل به نصف سؤالها جواب صحیح بدهد بزرگتراز ۹/۱۰ است.

۲. چند جمله از دنبالهٔ اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ...، را باید باهم جمع کرد تا مجموع آنها از یك میلیون تجاوز کنند؟

۳. دنبالهٔ ۲، ۲۲، ۸۴، ۲۱۲، ...، را درنظر بگیرید که جمله‌های آن با قراردادن $j=1$، $j=2$، $j=3$، ...، در عبارت $4j^3-3j^2+j$ به دست می‌آیند. برای تعیین مجموع n جملهٔ اول آن فرمولی به‌دست‌آورید.

۴. اگر ۱۲ پسر به تصادف به ۳ دستهٔ چهارتایی تقسیم شوند، احتمال آنکه ۲ پسر به‌خصوص در دو دستهٔ متفاوت قرار بگیرند چقدر است؟

۵. در سؤال قبلی، احتمال آنکه ۳ پسر به‌خصوص هریك در ۳ دستهٔ متفاوت قرار بگیرند چقدر است؟

۶. یك مجموعهٔ N عنصری داده شده‌است که $N(\alpha)$ عنصر آن دارای ویژگی معین

α و $N(\alpha, \beta)$ عنصر آن دارای دو ویژگی α و β وغیره هستند. ثابت کنید که

$$۳N+N(\alpha, \beta)+N(\alpha, \gamma)+N(\beta, \gamma)\geqslant ۲N(\alpha)+۲N(\beta)+۲N(\gamma).$$

۷. یك حاصلضرب چند جمله‌ای بنویسید به قسمی که در آن ضریب $x^{۱۰۰}$ معرف تعداد افرازهای ۱۰۰ به اعداد صحیح فرد مثبت نامساوی باشد.

۸. در یك کشور خیالی تمبرهای پست به‌طریق زیر نامگذاری می‌شوند: ۳ نوع تمبر یك سنتی (یك نوع تمبر معمولی و دو نوع تمبر یادبود)، ۳ نوع تمبر دو سنتی، ۲ نوع تمبر سه سنتی ویك نوع تمبر چهارسنتی، پنج سنتی، ده سنتی و بیست سنتی. یك حاصلضرب چند جمله‌ای بنویسید که در آن ضریب $x^{۲۰}$، برابر تعداد راههای به‌دست آوردن تمبرهایی به‌ارزش بیست سنت باشد.

۹. ثابت کنید که اعداد فیبوناچی $F(۰)=۱$، $F(۱)=۲$، $F(۲)=۳$، $F(۳)=۵$، $F(۵)=۸$ وغیره دارای ویژگی

$$F(n)=۲+\sum_{j=۰}^{n-۲}F(j) \qquad n>۲ \text{ اگر }$$

هستند.

۱۰. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت مفروض n، ثابت کنید

$$\sum_{j+k=n+۱} C(j, k)=۱+\sum_{j+k<n} C(j, k),$$

که در آن مجموع سمت چپ، شامل تمام جمله‌های $C(j, k)$ است که در آنها اعداد صحیح نامنفی j و k در رابطهٔ $j+k=n+۱$ صدق می‌کنند، و مجموع سمت راست، شامل جمله‌هایی است که در آنها $j+k<n$. (پیشنهاد: از نتیجهٔ مسألهٔ قبل استفاده کنید.)

۱۱. از !۳۰ جایگشت اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، ۳۰، چند جایگشت دارای این ویژگی‌اند که مضربهای ۳ در مجاورت هم قرار نمی‌گیرند، یعنی، هیچ دوعددی از اعداد صحیح ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، ۲۴، ۲۷، ۳۰ در مجاورت یکدیگر نیستند.

۱۲. مطلوب است تعدادجایگشتهای ۸حرف a، b، c، d، e، f، g، h که باهم اختیار می‌شوند، به‌شرط آنکه در آنها b بلافاصله بعد از a، c بلافاصله بعد از b، ...، و h

بلافاصله بعداز g قرار نگیرد.

۱۳. گردایه‌ای از ۱۰۰ سکه، که ۲۰ تای آنها یك‌سنتی، ۲۰ تای آنها پنج‌سنتی، ۲۰ تای آنها ده‌سنتی، ۲۰ تای آنها بیست‌و پنج سنتی و ۲۰ تای آنها پنجاه سنتی اند، در ۵ جعبهٔ متمایز گذاشته می‌شوند. اگر هیچ یك از جعبه‌ها تهی نباشد، به‌چندطریق می‌توان این عمل را انجام داد؟ (فرض کنیدکه هر ۲۰ سکه‌ای که از یك نوع‌اند غیرقابل تمیزند.)

۱۴. مطلوب است تعداد جایگشتهای ۸ حرف $AABBCCDD$، که باهم اختیار شوند، و درجایگشتها هیچ دوحرف مجاوری یکسان نباشند.

۱۵. چند جایگشت از ۹ حرف D، D، D، E، E، E، F، F، F، که همهٔ آنها باهم اختیار می‌شوند، وجود دارد به شرط آنکه در آنها هیچ دو حرف D پهلوی هم قرار نگیرند.

۱۶. اگر درمسألهٔ قبل این شرط اضافی را تحمیل کنیم که هیچ دوحرف E پهلوی‌هم قرار نگیرند، جواب مسأله چه خواهد بود؟

۱۷. اگر علاوه برشرایط قبلی، این شرط دیگر را تحمیل کنیم که هیچ دوحرف Fی پهلوی هم قرار نگیرند، جواب مسأله چه خواهد بود؟

۱۸. مطلوب است تعداد ۵ تاییهای (x, y, z, u, v) از اعداد صحیح مثبت که در هردو معادلهٔ

$$x+y+z+v=۲۷ \quad \text{و} \quad x+y+z+u=۳۰$$

صدق می‌کنند.

۱۹. درمجموعهٔ اعداد صحیح‌مثبت‌چندتا ازجوابهای معادلهٔ $x+y+z+w=۲۶$ دارای ویژگی $x>y$ هستند؟

۲۰. مطلوب است مقدار $[n, n, n, n \,\square\, ۲n, ۲n]$، یعنی، تعداد راههایی که می‌توان $۴n$ شیء راکه در دسته‌های nتایی مشابه هستند بین دو نفر به طور مساوی تقسیم کرد.

۲۱. به‌چند طریق ممکن است nj شیء متفاوت را به n دسته تقسیم کرد به‌طوری که در هر دسته j شیء وجود داشته‌باشد؟

۲۲. آیا انتظار دارید که تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۳ عدد صحیح مثبت زوج

بیشتر باشد یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۳ عدد صحیح مثبت فرد؟ برهانی برای حدس خود ارائه دهید.

۲۳. آیا انتظار دارید که تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۴ عدد صحیح مثبت زوج بیشتر باشد، یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به ۴ عدد صحیح مثبت فرد؟ برای حدس خود برهانی ارائه دهید.

۲۴. آیا انتظار دارید که تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به اعداد صحیح مثبت زوج بیشتر باشد، یا تعداد افرازهای ۱۰۰۰ به اعداد صحیح مثبت فرد؟ برای حدس خود برهانی ارائه کنید. (این سؤال، از لحاظ اینکه برای تعداد جمعوندها محدودیتی وجود ندارد، با دو سؤال قبلی متفاوت است.)

۲۵. بین ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ چند عدد صحیح با این ویژگی وجود دارند که حداقل دو رقم متوالی آنها مساوی باشند؟ (مثلاً ۱۰۰۷ دارای این ویژگی است، ولی ۱۰۱۷ این ویژگی را ندارد.)

۲۶. مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای حرفهای الفبای لاتین، که همهٔ آنها باهم اختیار می‌شوند، به طوری که (i) هیچ حرفی در جای طبیعی خود قرار نگیرد و (ii) حرفهای A و B مجاور یکدیگر باشند.

۲۷. مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای ۶ حرف a، b، c، d، e، f که همه باهم اختیار می‌شوند، به‌شرط آنکه حروفی که در الفبا متوالی‌اند، مجاورهم قرارنگیرند. (مثلاً، a مجاور b، b مجاور c وغیره نباشد.)

۲۸. ثابت کنید تعداد افرادی که درطول تاریخ (با افراد دیگر)، به تعداد فردی از دفعات، دست داده‌اند عددی زوج است.

۲۹. درهر گروه از افراد، ثابت کنید که دو نفر وجود دارند که تعداد آشنایانشان در بین افراد گروه یکی است. (البته، فرض براین است که اگر A با B آشنا باشد، آن گاه B نیز با A آشناست.)

۳۰. n نقطه درصفحه‌ای مفروض‌اند، هیچ سه‌تایی ازاین نقاط همخط نیستند وفرض می‌کنیم پاره‌خطهایی که زوجهای نقاط را به هم وصل می‌کنند با یکی از دو رنگ مثلاً قرمز و سفید رسم شده‌باشند. دراین صورت ازهرنقطه، $n-1$ پاره‌خط خارج می‌شود که بعضی سفید و بعضی قرمزند. ثابت کنید پیکربندی رنگهای استفاده شده

هرچه باشد، دو نقطه وجود دارند که تعداد پاره‌خطهای قرمزی که از آنها خارج شده‌اند یکی است، و لذا تعداد پاره‌خطهای سفیدی هم که از آنها خارج شده‌اند یکی است.

۳۱. فرض می‌کنیم $m+1$ خط مستقیم همفاصلهٔ موازی به وسیلهٔ $k+1$ خط همفاصلهٔ موازی به زاویهٔ قائمه قطع می‌شوند. با فرض $m \leqslant k$، تعداد کل مربعهایی که در این شبکه به‌وجود می‌آیند چقدر است؟

۳۲. برج معمای هانوی. ۸ قرص مدور روی یکی از سه گل میخ عمودی قرار دارند. شعاعهای این ۸ قرص نابرابرند، وبزرگترین قرص در ته گل میخ، و قرصهای کوچکتر به ترتیب روی آن قرار می‌گیرند، به قسمی که کوچکترین قرص در بالا واقع می‌شود. مسأله، انتقال این قرصها از گل میخی که بدواً روی آن قرار دارند به یکی از دو گل‌میخ دیگر است. قاعده این است که قرصها ممکن است آزادانه، هربار یك قرص از یك گل میخ به‌گل میخ دیگر، حرکت کنند بجز آنکه هیچ‌قرصی نمی‌تواند روی یك قرص کوچکتر قرار بگیرد. سؤال این است که آیا تحت این قاعدهٔ حرکت ممکن است برج قرصها را از یك گل میخ به گل میخ دیگر انتقال داد واگر ممکن است چند حرکت لازم است تا این انتقال انجام شود.

۳۳. ۶ نقطه در صفحه‌ای مفروض‌اند به‌طوری‌که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند، فرض می‌کنیم، هرپاره‌خطی که یك زوج ازاین نقاط را به‌هم وصل می‌کند بایکی‌از دو رنگ، مثلاً قرمزیا سفید رسم شود. ثابت کنید ازهرپیکربندی رنگها که استفاده شود، همیشه حداقل دو مثلث رنگی، یعنی دو مثلثی که هر سه ضلع آن دارای یك رنگ‌اند وجود دارند. (لازم نیست که هر دو مثلث همرنگ باشند؛ ممکن است یك مثلث رنگی، قرمز و دیگری سفید باشد.)

۳۴. در مسألهٔ قبل ثابت کنید لازم نیست که ۳ مثلث رنگی موجود باشند. یعنی از پاره‌خطهای رنگی، پیکربندیی ارائه دهید که تنها ۲ مثلث رنگی داشته‌باشد.

۳۵. ۷ نقطه که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند، درصفحه‌ای مفروض‌اند. فرض می‌کنیم هرکدام از پاره‌خطهایی که این نقاط را به‌هم وصل می‌کند بایکی از دورنگ سفید یا قرمز رسم شده‌باشند. ثابت کنید از هرپیکربندی رنگها که استفاده شود، همواره حداقل سه مثلث رنگی وجود دارند.

۳۶. ۶۶ نقطه را که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند روی صفحه‌ای درنظر بگیرید.

هر پاره‌خطی را که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند با یکی از ۴ رنگ رسم می‌کنیم. ثابت کنید آرایش رنگها هرچه باشد همواره یك مثلث رنگی، یعنی مثلثی که رنگ هر سه ضلع آن یکی است، وجود دارد. (این اطلاع که با ۱۷ نقطه و ۳ رنگ، یك مثلث رنگی وجود دارد ممکن است مفید باشد.)

۳۷. ۱۷ نقطه را که هیچ سه‌تای آن همخط نیستند روی صفحه‌ای در نظر می گیریم. هر پاره‌خطی را که دو نقطه را به‌هم وصل می کند با یکی از سه رنگ قرمز، سفید یا آبی رسم می کنیم. ثابت کنید که در پیکر بندی حداقل دو مثلث رنگی وجود دارند.

۳۸. ۲۴ نقطه را که هیچ سه‌تای آنها همخط نیستند روی صفحه‌ای در نظر می گیریم و هر یك از پاره‌خطهایی را که این نقاط را به هم وصل می کند با یکی از دو رنگ مثلاً قرمز یا سفید رسم می کنیم. ثابت کنید توزیع رنگها هرچه باشد، همواره می‌توان ۴ نقطه پیدا کرد که ۶ پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می کند دارای یك رنگ باشند. (خواننده باید مسأله‌را برای عدد صحیح بزرگتری که به‌جای ۲۴ قرار می گیرد حل کند. کوچکترین عددی که می‌تواند به‌جای ۲۴ قرار گیرد عدد ۱۸ است. بدین‌معنا که این گزاره به ازای ۱۷ و اعداد کوچکتر از آن برقرار نیست. درهر حال، برهان اینکه ۱۸، کوچکترین عدد است در سال ۱۹۵۵ به وسیلهٔ گرین‌وود و گلیسن داده شده‌است که سطح آن از سطح این کتاب بالاتر است.)

۳۹. n نقطه بر روی محیط دایره‌ای قرار دارند، $C(n,\ ۲)$ یا $n(n-۱)/۲$ پاره‌خط وجود دارند که زوجهای نقاط را به هم وصل می کنند. فرض کنیم که این n نقطه طوری قرار گرفته‌اند که هیچ سه پاره‌خطی در داخل دایره با هم نقطهٔ تلاقی مشترك ندارند. $I(n)$، تعداد کل نقاط تلاقی در داخل دایره (و به روی محیط آن) چقدر است؟ مثلاً $I(۴)=۱$، $I(۵)=۵$، $I(۶)=۱۵$.

۴۰. در مسألهٔ قبل، پاره خطهایی که n نقطه را به هم وصل می کنند، داخل دایره را به چند ناحیه تقسیم می کنند؟ فرض کنیم تعداد این نواحی $R(n)$ باشد؛ مثلاً $R(۲)=۲$، $R(۳)=۴$، $R(۴)=۸$، $R(۵)=۱۶$.

۴۱. n نقطهٔ همفاصله روی محیط دایره‌ای (رأسهای یك n ضلعی منتظم) داده‌شده‌اند؛

$$C(n,\ ۳)=\frac{۱}{۶}n(n-۱)(n-۲)$$

مثلثهایی را که از وصل این نقاط به‌وسیلهٔ پاره خطهای مستقیم تشکیل می شوند در نظر

می‌گیریم. چندتا از این مثلثها متساوی‌الساقین‌اند؟

۰۴۲ اگر n تاس یکسان ریخته شوند، چند برآمد ممکن وجود دارند؟ (دو برآمد را یکی گویند اگر دارای یك تعداد یك، یك تعداد دو،...، و یك تعداد شش باشند.)

۰۴۳ n صفحه در فضای سه بعدی را در نظر می‌گیریم که در شرایط زیر صدق کنند. هیچ دوتایی از آنها موازی نباشند؛ هیچ دو فصل مشترکی موازی نباشند؛ هیچ چهار صفحه‌ای ازیك نقطه نگذرند. این صفحه‌ها فضا را به‌چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

۰۴۴ احتمال آنکه در یك جایگشت ۱، ۲، ۳، ...، n که به تصادف انتخاب شده است، «۲» بین «۱» و «۳» قرار بگیرد چقدر است؟

۰۴۵ تعداد جایگشتهای $۲n$ شیء، که از هرشیء یك زوج یکسان وجود دارد (مثلاً $AABBCCDDEE\ldots$) وهمگی باهم اختیار می‌شوند، چقدراست، به‌شرطی که درجایگشتها هیچ دو شیئی که مجاورند یکسان نباشند؟

۰۴۶ جایگشتی از ۱، ۲، ۳، ...، n، را که همگی باهم اختیار می‌شوند، به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آنکه درست j عدد درجای طبیعی خود نباشند چقدر است؟

۰۴۷ $n+k$ حرف

$$AAA\cdots ABBB\cdots B,$$

که در آنها n حرف A و k حرف B وجود دارد، دارای چند جایگشت هستند، به شرطی که سه حرف A مجاور هم نباشند؟

۰۴۸ مطلوب است تعیین تعداد جایگشتهای ۱، ۲، ۳، ...، n، که همگی باهم اختیار می‌شوند، به‌شرط آنکه هیچ عدد فردی درجای طبیعی خود قرار نگیرد.

۰۴۹ فرض کنیم درتجزیهٔ عدد صحیح n به اعداد اول، دقیقاً m عامل متمایز وجود داشته باشند. چند تجزیهٔ n به k عامل، که در آن k عددی است صحیح و نابزرگتر از m، وجود دارد (i) اگر هر عامل الزاماً از ۱ بزرگتر باشد، (ii) اگر مجاز باشیم ۱ را به‌عنوان یك عامل درنظر بگیریم؟ (تجزیه‌هایی که تنها در ترتیب عاملها اختلاف دارند متمایز ازهم به‌حساب نمی‌آیند.)

۰۵۰ اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ...، n را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $K(n, j)$ معرف تعداد زیرمجموعه‌های این n عددصحیح باشند که درشرایط زیرصدق می‌کنند.

(i) هر زیرمجموعه شامل j عدد صحیح است، (ii) هیچ زیرمجموعه‌ای شامل یك زوج از اعدادصحیح متوالی نیست. مثلاً $K(۵, ۳) = ۱$، زیرا تنها زیرمجموعه‌ای از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ که درشرایط فوق‌صدق می‌کند ۱، ۳، ۵ است. اگر زیرمجموعه‌هایی راکه با $K(n, j)$ شمرده می‌شوند به‌دونوع تقسیم کنیم، آنهایی که شامل n هستند و آنهایی که نیستند، برای $K(n, j)$ یك فرمول بازگشتی به‌دست می‌آید. دراین‌صورت بااستفاده ازاین‌فرمول، جدول خلاصه‌ای برای مقادیر $K(n, j)$، مثلاً تا $n = ۱۰۰$ و $j = ۱۰$ بنا می‌شود. وقتی که این جدول را با مثلث پاسکال مقایسه کنیم می‌توان برای مقدار $K(n, j)$ حدسی زد. حدس مناسب را بیابید و آن‌گاه با استقرای ریاضی آن را ثابت کنید.

۵۱. سه نفر که باهم ناآشنا هستند وارد اطاقی می‌شوند که در آن ۳ نفر که دو به دو آشنا هستند وجود دارند. ثابت کنید در بین این ۶ نفر حداقل ۳ سه‌تایی دیگر موجودندکه عبارت‌اند از ۳ نفر ناآشنا، یا سه نفر دو به‌دو آشنا. بیان واضحتری برای مسأله چنین است: گوییم که مجموعه‌ای از ۳ نفر دارای ویژگی α است درحالتی که افراد دو به‌دو ناآشنا باشند، دارای ویژگی β است درحالتی که دو به‌دو آشنا باشند. ۶ نفر A، B، C، D، E، F را در نظر بگیریدکه A، B، C، دارای ویژگی α و D، E، F دارای ویژگی β باشند. ثابت کنید مجموع تعداد سه‌تاییهایی که دارای ویژگی α و تعداد سه‌تاییهایی که دارای ویژگی β هستند حداقل ۵ است.

۵۲. پلکانی ۱۴ پله دارد. پسری می‌تواند پله‌ها را یکی یکی، دوتا دوتا، یا با هر ترکیبی از یك و دو، بالا برود. این پسر به‌چندطریق می‌تواند از پله‌ها بالا برود؟

۵۳. بین ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ چند عدد دارای این ویژگی‌اند که هیچ کدام از رقمهای آنها از رقم سمت چپش کوچکتر نیست؟ (مثلاً عدد ۱۴۶۸ این ویژگی را دارد، ولی ۱۶۴۸ دارای این ویژگی نیست.)

پاسخها و راه حلها

تقریباً پاسخ تمام مسائل و راه حل بسیاری از آنها ارائه شده‌است، هـرچند اساساً «راه حل» فقط به صورت یك طرح آمده است، ولی در بسیاری از موارد چیزی بیشتر از یك یا دو پیشنهاد نیست. اگـر پاسخ خواننده به یك مسأله همان پاسخی نباشد که در این جا داده شده‌است، باید این امکان را در نظر بگیرد کـه اختلاف فقط درظاهر است. او باید به خاطر داشته باشد که برای اکثر مسائل بیشتر از یك راه حل وجود دارد و دوپاسخ بدون آنکه ظاهراً مساوی به‌نظرآیند می‌توانند، باهم مساوی باشند.

مسألهٔ ۱۰۱ صفحهٔ ۳. ۱، ۲ یا ۳

دراین جـا برای سالهایی که دارای ۳۶۵ روزند تحلیلی می‌آوریم؛ برای سالهای ۳۶۶ روزه نیز تحلیلی مشابه وجود دارد. ابتدا فرض کنیم یکشنبه را روزی ازنوع ۰، دوشنبه را روزی ازنوع ۱، سه‌شنبه را روزی ازنوع ۲، ...، وشنبه را روزی از نوع ۶ بنامیم. اگر ۱۳ ژانویه از نوع ۰ باشد، آن گاه ۱۳ فوریه ازنوع ۳ است زیرا این روز ۳۱ یا ۲۸+۳ روز بعـد است، ۱۳ مارس از نوع ۳، ۱۳ آوریل ازنوع ۶؛ ۱۳ مه از نوع ۱، ...، ۱۳ دسامبر از نوع ۵ است. فهرست کامل نوعها از ۱۳ ژانویه تا ۱۳ دسامبر عبارت است از

$$۰, ۳, ۳, ۶, ۱, ۴, ۶, ۲, ۵, ۰, ۳, ۵.$$

دو جمعه سیـزدهم وجود دارد زیرا جمعه ازنوع ۵ است. تحلیل ما تاکنون براین

فرض بوده است که ۱۳ ژانویه روز یکشنبه است. آسانترین راه برای ادامهٔ کار آن است که معنی نوع صفر را تغییر دهیم. مثلاً، اگر دوباره دوشنبه را از نوع صفر تعریف کنیم، آن گاه جمعه از نوع ۴ می‌شود و فهرست بالا نشان می‌دهد که در چنین سالی تنها یك جمعه سیزدهم وجود دارد. بنابراین با در نظر گرفتن تمام هفت تعبیر دربارهٔ معنی نوع صفر، فهرست حاصل، پاسخ مسأله را مشخص می کند. برای سالی ۳۶۶ روزه، فهرست متناظر عبارت است از ۰، ۳، ۴، ۰، ۲، ۵، ۰، ۳، ۶، ۱، ۴، ۶.

مسألهٔ ۲۰۱ صفحهٔ ۳، ۱۰

۱ نوع بلوك با شش وجه آبی؛ ۱ نوع بلوك با پنج وجه آبی؛ ۲ نوع بلوك با چهار وجه آبی وجود دارند، زیرا دو وجه قرمز ممکن است دو وجه مقابل یا دو وجه مجاور باشند؛ ۲ نوع بلوك با سه وجه آبی موجودند، زیرا ممکن است دو وجه آبی مقابل یکدیگر باشند و ممکن است مقابل یکدیگر نباشند. تعداد انواع مختلف بلوکها با دو وجه آبی برابر تعداد بلوکها با چهار وجه آبی است؛ تعداد بلوکها با یك وجه آبی برابر تعداد بلوکها با پنج وجه آبی است؛ تعداد بلوکهایی که وجه آبی ندارند با تعداد بلوکهایی که هر شش وجه آنها آبی است مساوی است.

مسألهٔ ۳۰۱، صفحهٔ ۴، در صفحهٔ ۳۰ حل شده است.
مسألهٔ ۴۰۱، صفحهٔ ۵، در صفحهٔ ۶۵ حل شده است.
مسألهٔ ۵۰۱، صفحهٔ ۵، در صفحهٔ ۱۱۴ حل شده است.

مجموعه مسائل ۱ صفحهٔ ۶

۱۰۱ ۵۵   ۱۰۲ ۱۳۸   ۱۰۳ ۱۸۵   ۱۰۴ $n+r-1$ ۱۰۵ $k-r+1$ ۱۰۶ $h+1$

۱۰۷ ۸۰ عدد صحیح از $x=145$ تا $x=224$.

۱۰۸ (الف) ۴۹ (ب) ۴۴ (پ) ۳۵.

استدلال قسمت (پ). از هریك از اعداد، عدد ۱۱ را کم کنید تا به‌دست آید: ۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ...، ۲۱۰. هریك از اینها را بر ۶ تقسیم کنید تا به دست آید: ۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۳۵. این عملها تعداد عنصرها را تغییر نمی دهند.

۱۰۹ الف) ۱۸۱: اعداد صحیح ۱۱، ۲۲، ۳۳، ...، ۱۹۹۱؛

ب) ۱۲۱: از اعداد صحیح قسمت (الف) اعداد ۳۳، ۶۶، ۹۹، ...، ۱۹۸۰، را که تعدادشان برابر ۶۰ است، حذف کنید؛ بنابراین ۶۰-۱۸۱؛

پ) ۱۶۷: از اعداد صحیح ۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ...، ۱۹۹۸، اعداد صحیح ۱۲، ۲۴، ۳۶، ...، ۱۹۹۲ را حذف کنید؛ بنابراین ۱۶۶–۳۳۳.

۱۰. ۹: چهار ۱ سنتی، دو ۵ سنتی، یك ۱۰ سنتی، یك ۲۵ سنتی، یك ۵۰ سنتی. (متناوباً به‌جای دو ۵ سنتی و یك ۱۰ سنتی، یك ۵ سنتی و دو ۱۰ سنتی قرار دهید.)

۱۱. ۳۹.

فرض کنید a، b، c، معرف a تا یك‌سنتی، b تا پنج سنتی، cتا ده سنتی باشند. دراین‌صورت بدون استفاده از سکهٔ ۲۵ سنتی، جوابها به‌صورت سه‌تاییهای a,b,c عبارت‌اند از:

۴۷, ۰, ۰	۴۲, ۱, ۰	۳۷, ۲, ۰	۳۷, ۰, ۱	۳۲, ۳, ۰
۳۲, ۱, ۱	۲۷, ۴, ۰	۲۷, ۲, ۱	۲۷, ۰, ۲	۲۲, ۵, ۰
۲۲, ۳, ۱	۲۲, ۱, ۲	۱۷, ۶, ۰	۱۷, ۴, ۱	۱۷, ۲, ۲
۱۷, ۰, ۳	۱۲, ۷, ۰	۱۲, ۵, ۱	۱۲, ۳, ۲	۱۲, ۱, ۳
۷, ۸, ۰	۷, ۶, ۱	۷, ۴, ۲	۷, ۲, ۳	۷, ۰, ۴
۲, ۹, ۰	۲, ۷, ۱	۲, ۵, ۲	۲, ۳, ۳	۲, ۱, ۴

با استفاده از یك سکهٔ ۲۵ سنتی جوابها عبارت‌اند از

۲۲, ۰, ۰	۱۷, ۱, ۰	۱۲, ۲, ۰	۱۲, ۰, ۱	۷, ۳, ۰
۷, ۱, ۱	۲, ۴, ۰	۲, ۲, ۱	۲, ۰, ۲	

۱۲. ۷

۱۳. ۳

۱۴. ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۴، ۳۰، ۳۶، ۴۰، ۴۵، ۶۰، ۷۲، ۹۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۳۶۰

زاویهٔ خارجی یك n ضلعی منتظم برابر $۳۶۰/n$ درجه است، و بنابراین یك زاویهٔ داخلی آن برابر $(۳۶۰/n)-۳۶۰$ درجه است. لذا تمام اعداد صحیح مثبت n بجز $n=۱$ و $n=۲$ را انتخاب می‌کنیم به قسمی که $۳۶۰/n$ یك عدد صحیح باشد.

۳۶ .۱۵

فرض کنیم رنگهای قرمز، سبز، آبی وسفید را مثلاً به‌ترتیب با R، G، B و W نشان دهیم. اگر هرجسم را تماماً با یك رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم چهار حالت به‌وجود می‌آید. تمام وجوه به‌رنگ R، تمام وجوه به‌رنگ G، تمام وجوه به‌رنگ B وتمام وجوه به‌رنگ W. اگر اجسام با دو رنگ رنگ‌آمیزی شوند ۱۸ حالت به‌وجود می‌آید: اگر رنگها R و G باشند ۳ حالت وجود دارد، زیرا ممکن است تعداد وجوهی‌که با R رنگ شده‌اند برابر ۱، ۲ ویا ۳ باشد؛ به‌همین ترتیب برای هرکدام از ترکیبهای رنگی دیگر RB، RW، GB، GW و BW ۳ حالت وجود دارد. بااستفاده از سه رنگ، ۱۲ نوع مختلف از اجسام رنگ شده وجود دارند: اگر رنگها R، G، B باشند سه حالت وجود دارد، مثلاً، یکی ازحالتها وقتی است که دووجه به‌رنگ R، یك وجه به‌رنگ G و یك وجه به‌رنگ B باشد. ۲ نوع جسم وجود دارندکه با چهاررنگ رنگ‌آمیزی شده‌اند: چهار وجهی را در جهتی قرار دهید که کف آن به رنگ R بوده، وجهی‌که با G رنگ شده‌است به طرف خودتان باشد؛ بنابراین دووجه دیگر می‌توانند به‌صورت BW یا WB باشند.

۶ .۱۶

۳۶ .۱۷

مجموعه مسائل ۲، صفحهٔ ۱۲

۱. ۶۷۶ (یا ۲۶ × ۲۶)

۲. ۶۰۰ (یا ۲۴ × ۲۵)

۳. ۳۳۸۰ (یا ۵ × ۲۶ × ۲۶)

۴. ۳۰۰۰ (یا ۲۴ × ۲۵ × ۵)

۵. ۳۰ (یا ۵ × ۶)

۶. ۶۴ (یا ۲ × ۲ × ۲ × ۸)

۷. ۴۹۶۸ (یا ۶ × ۳ × ۱۲ × ۲۳)

۸. ۲۴۳ (یا ۳ × ۳ × ۳ × ۳ × ۳)؛ ۷۶۸ (یا ۴ × ۴ × ۴ × ۴ × ۳)

مجموعه مسائل ۳، صفحهٔ ۱۳

۱. ۶؛ ۱۲۰؛ ۴۰۳۲۰

۲. ۱۳۲؛ ۲؛ ۳۰؛ ۵۰۴۰

۳. ۱۲۰

۴. ۲۵

۵. ۶

۶. ۲

۷. ۷۲۰

۸. ۱۱۸۸۰؛ ۱۵۱۲۰۰

۹. ۲۱۰

۱۰. (ب) و (پ) غلط‌اند.

مجموعه مسائل ۴، صفحهٔ ۱۹

۱. ۲۱۰، ۱۶۸۰ و ۳۸۰

۳. $P(n,\ ۱)=n$؛ $P(m,\ ۱)=m$؛ $P(n+m,\ ۱)=n+m$

۴. $P(n,\ n)=n!$ و $P(n,\ n-۱)=n(n-۱)(n-۲)\ldots ۲=n!$

۵. ۱۲۱۴۴ (یا ۲۲ × ۲۳ × ۲۴)

۶. ۱۳۸۲۴ (یا ۲۴ × ۲۴ × ۲۴)؛ ۱۴۴۰۰ (با افزودن ۲۴ × ۲۴ به ۱۳۸۲۴)

۷. ۴۵۳۶ (یا ۷ × ۸ × ۹ × ۹)؛ ۲۲۴۰، زیرا برای رقم یکان (رقمی که در انتهای سمت راست قـرار دارد) ۵ انتخـاب، برای رقم هزارگان ۸ انتخاب، برای رقم صدگان ۸ انتخاب و برای رقم دهگان ۷ انتخاب وجود دارد.

۸. ۱۲۰ (یا ۲ × ۳ × ۴ × ۵)؛ ۷۲ (۳ × ۲ × ۳ × ۴)

۹. ۷۲۰ (یا ۴ × ۵ × ۶ × ۶)؛ ۴۲۰

۱۰. ۱۰۳۹۲۰

$P(۸,\ ۸)=۴۰۳۲۰$ عددصحیح ۸رقمی موجودنـد؛ $P(۸,\ ۷)=۴۰۳۲۰$ عـدد صحیح ۷ رقمـی موجودنـد؛ $P(۸,\ ۶)=۲۰۱۶۰$ عـدد صحیح ۶ رقمـی موجودند. اعداد صحیح ۵ رقمـی برحسب رقم سمت چپ آنها به دو دسته تقسیم می‌شوند؛ اگـر رقم سمت چپ آنها ۵ باشد $۶۰۰=۴ × ۵ × ۶ × ۵ × ۱$ امکان وجود دارد، بدین دلیل که اگر رقمها را ازسمت چپ به‌راست درنظربگیریم یك امکان برای اولین رقـم، ۵ امکان برای دومین رقم (یعنی رقمهای ۳، ۴، ۶، ۷، ۸، زیرا اگر رقمهای ۰، ۱، ۲ دراین محل قرارگیرند این عدد از ۵۳۰۰۰ کوچکتر می‌شود.)وجوددارد؛اگراولین‌رقم ۶،۷ ویا۸ باشد،$۲۵۲۰=۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۳$ امکان وجود دارد. از جمع نتایج مختلف، پاسخ به‌دست می‌آید.

۱۱. ۹۰۳۶۰

راه حل مسألهٔ قبـل را می‌توان به‌عنوان یك مدل به کار برد، اما باید اینك به‌دلیل حضور رقم صفر درآن تغییری صورت داد. این رقم نمی‌تواند در یك عدد

صحیح به‌عنوان رقم اول یا آخرین رقم سمت چپ به‌کار رود. با تفکر دربارهٔ تعداد امکانات موضع هر رقم از چپ به‌راست، می‌توان تعداد امکانات را به‌دست آورد. بنابراین:

اعداد ۸ رقمی: $۷ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۳۵۲۸۰$؛

اعداد ۷ رقمی: $۷ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۳۵۲۸۰$؛

اعداد ۶ رقمی: $۷ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۱۷۶۴۰$؛

اعداد ۵ رقمی که با ۵ شروع می‌شوند: $۱ \times ۴ \times ۶ \times ۴ \times ۵ = ۴۸۰$؛

اعداد ۵ رقمی که با ۶ یا ۷ شروع می‌شوند: $۲ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۶۸۰$.

مجموعه مسائل ۵، صفحهٔ ۲۴

۱. ۱۵، ۳۵ و ۸۴

۳. (الف) $C(۱۰, ۲) = C(۱۰, ۸) = ۴۵$؛ (ب) ۴۵

۴. $C(۷۲۰, ۱۰)$ یا $\frac{۷۲۰!}{۱۰!۷۱۰!}$

۶. $C(۲۰, ۲)$ یا ۱۹۰؛ $C(۲۰, ۳)$ یا ۱۱۴۰

۷. $۱۰! - ۲ \times ۹! = ۸ \times ۹!$

تعداد آرایشهای نامشروط برابر $۱۰!$ است. تعداد آرایشهایی که در آنها دونفر مشخص در کنارهم قراربگیرند برابر $۲ \times ۹!$ است، زیرا می‌توان آن دونفر را به دوطریق به‌عنوان یك فرد درنظر گرفت.

۸. فرض کنیم در دنبالهٔ پنج‌عدد صحیح، بزرگترین عدد برابر n باشد، بنابراین باید ثابت کنیم که $n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$ بر $۵!$ تقسیمپذیر است. اکنون باتوجه به‌اینکه $C(n, ۵)$ عدد صحیحی است که‌با فرمول

$$C(n, ۵) = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۵!}$$

داده می‌شود، مسأله را حل می‌کنیم. به‌طورکلیتر فرمول مربوط به عدد صحیح $C(n, r)$ نشان می‌دهد که حاصلضرب r عدد صحیح متوالی بر $r!$ تقسیمپذیر است.

۹. (الف) ۳۶۲۸۸۰ یا $۹!$؛ (ب) ۵۷۶۰ یا $۲(۵! \times ۴!)$؛ (پ) ۱۷۲۸۰ یا $۶! \times ۴!$؛

(ت) ۲۸۸۰ یا !۴!۵.

در قسمت (پ) می‌توان کتابهای قرمز را به‌عنوان یك واحد در نظر گرفت، بنابراین باید ۶ کتاب جایگشت داده شوند. درنتیجه عدد !۶ به‌دست می‌آید. اما درهر کدام ازاین آرایشهامی‌توان به! ۴ طریق کتابهای قرمزراجایگشت داد. درقسمت (ت) کتابهای سبز را می‌توان دروضعهای تخصیص یافته به !۵ راه وکتابهای قرمز را می‌توان به!۴ راه جایگشت داد.

۱۰. (الف) $۲C(۳۰,\ ۳)C(۳۰,\ ۵)+C(۳۰,\ ۴)C(۳۰,\ ۴)$

نتایج سه‌حالت، یعنی ۳ استاد، ۴ استاد یا ۵ استاد را با هم‌جمع‌کنید. مثلاً، حالت وجود ۳ استاد، وجود ۵نفر راکه درکارتجارت‌اند ایجاب می‌کند، وبنابراین $C(۳۰,\ ۳)C(۳۰,\ ۵)$ امکان وجود دارد.

(ب) $C(۶۰,\ ۸)-C(۳۰,\ ۸)$

اگرهیچیك ازهشت نفردرکارتجارت نباشند، تعدادامکانات برابر $C(۳۰,\ ۸)$ خواهدبود. لذا این مقدار از تعدادکل امکانات نامشروط کم می‌شود.

۱۱. ۷۹ (یا $۴\times۵\times۴-۱$)

۱۲. ۴

تعداد صفرها برابر تعداد رخدادهای ۱۰ به‌عنوان یك عامل است. اکنون ۵ به‌عنوان یك عامل، چهاربار، یعنی در ۵،۱۰،۱۵،۲۰ ظاهر می‌شود و ۲ به‌عنوان یك عامل در دفعات بیشتری ظاهر می‌شود.

۱۳. ۱۲

استدلال شبیه استدلال مسألهٔ قبل است با این تفاوت که: در حاصلضرب، جمله‌های ۲۵ و ۵۰ دارای دوعامل ۵ هستند.

۱۴. $۷^۵$، زیرا برای هرپرچم ۷ انتخاب وجود دارد.

۱۵. (الف) ۷×۶^۴؛ (ب) $P(۷,\ ۵)=۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$

۱۶. ۲۰۲۴

تعدادکل زیرمجموعه‌های نامشروط برابر $C(۲۶,\ ۳)=۲۶۰۰$ است. ازاین تعداد، حالتهایی راکه درآنها سه‌حرف متوالی مانند J، K و L وجود دارند کم می‌کنیم. این تعداد برابر ۲۴ است. آن‌گاه، تعداد حالتهایی راکه درآنها دوحرف متوالی، نه سه‌حرف متوالی، وجود دارندکم می‌کنیم؛ اگر، حروف A و B باشند،

۲۳ حالت؛ اگر B و C باشند، ۲۲ حالت؛ ...؛ X و Y باشند، ۲۲ حالت؛ Y و Z باشند، ۲۳ حالت موجود است؛ بنابراین کلاً ۵۵۲ حالت وجود دارد. پس جواب برابر با ۲۶۰۰ — ۲۴ — ۵۵۲ است.

۱۷. $k!/(k-n)!$

ابتدا n جعبه از k جعبه را انتخاب می‌کنیم که درداخل هرکدام یك‌شیء قرار بگیرد؛ این‌کار را می‌توان به $C(k, n)$ راه انجام داد. در هر یك از این انتخابها می‌توان بــه $n!$ راه، اشیــاء را در داخل جعبه‌ها قرارداد. بنــابراین جواب برابر $C(k, n)n!$ است.

مجموعه مسائل ۶، صفحهٔ ۲۸

۱. ۵۰۴۰ یا !۷

۲. ۳۶۰۰

باجواب مسألهٔ قبل‌شروع کنید وتعدادحالتهایی‌راکه درآنها دونفرمانند A و B روی صندلیهای مجاور قرار بگیرند از آن‌کم کنید. اگر A و B به عنوان یك واحد اختیار شوند می‌بینیم وقتی‌که A سمت چپ B است، !۶ حالت و در حالت دیگر نیز !۶ حالت وجود دارند. بنابراین جواب !۶ — !۶ — !۷ است.

۳. ۱۴۴

زنها به !۳ راه می‌توانـنــد روی صندلیهای متناوب بنشینند. پاسخ مسأله از ضرب این مقدار در !۴، یعنی تعداد راههایی که مردان، با هرآرایش ثابت زنها، می‌توانند روی صندلیها بنشینند، به‌دست می‌آید.

۴. ۱۲

به‌ازای هر !۳آرایش نشستن زنها، مردها می‌توانند دقیقاً به‌دوطریق بنشینند.

۵. ۱۲۰

تعداد ترتیبهای جرقه‌زدن، صرفــاً برابر تعداد راههای‌آرایش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ روی یك دایره است.

۶. ۳۰

فرض کنیم یکی‌از رنگها سفید باشد. دراین‌صورت چون باید یك وجه سفید باشد، فرض کنیدکه وجه پایینی سفیداست. وجه بالا را می‌توان با یکی از ۵رنگ

باقیمانده رنگ کرد. بعداز انجام این‌کار، وجوه قائم با ۴ رنگ باقیمانده رنگ می‌شوند. حال به‌مسألهٔ جایگشتهای دوری می‌رسیم، زیرا اکنون می‌توان بلوك مکعبی را بدون تغییر رنگهای وجوه بالا و پایین، حول محوری قائم که از مرکز بلوك می‌گذرد دوران داد. بنابراین برای رنگ کردن وجوه قائم !۳ راه وجود دارد، و برای به‌دست‌آوردن پاسخ باید این عدد را در ۵ ضرب کرد.

۲۰۷

با یك جعبهٔ خالی شروع کنید، به دو وجه مقابل شماره‌های ۱ و ۶ را بدهید و جعبه را طوری قرار دهید که شمارهٔ ۶ در بالا واقع شود. چهار وجه قائم با شماره‌های ۲، ۳، ۴ و ۵ شماره‌گذاری می‌شوند. وجه جلویی را با ۲ و وجه عقبی را با ۵ شماره‌گذاری کنید. برای شماره‌های ۳ و ۴ فقط دوانتخاب وجود دارد.

مجموعه مسائل ۷، صفحهٔ ۳۳

۰۱ (الف) ۱۶۸ یا $۸!/(۵!۲!)$ (ب) $۲۱!/(۲!۲!۲!۲!۳!۹!)$

۰۲ از بین n شیء ابتدا a شیء، سپس از بین $n-a$ شیء، b شیء و آن‌گاه از بین $n-a-b$ شیء، c شیء انتخاب کنید. تعداد انتخابها، $C(n, a)C(n-a, b)C(n-a-b, c)$ است، که می‌توان آن‌را به‌صورت پاسخی فاکتوریلی محاسبه کرد.

۰۳ ۵۰۳۵

از تعداد کل ۶۴۳۵ مسیر نامشروط، تعداد مسیرهایی راکه شامل خیابان E هستند و از خیابان پنجم به‌خیابان ششم می‌روند کم می‌کنیم. از تقاطع خیابان اول و A تا تقاطع خیابان پنجم و E، $C(۸, ۴)$ مسیر و از تقاطع خیابان ششم و E تا تقاطع خیابان نهم و H، $C(۶, ۳)$ مسیر وجود دارد. پس از ۶۴۳۵، مقدار $C(۸, ۴)\times C(۶, ۳)$ راکم می‌کنیم.

۰۴ $۱۵!/(۴!۵!۶!)$

اگر حرکت در امتداد یك واحد به‌سمت راست، عقب، و بالا را به R، B، و U نشان دهیم، می‌بینیم که مسأله همان مسألهٔ تعیین تعداد جایگشتهای پانزده حرف

$$RRRRBBBBBUUUUUU$$

است که همه یك‌جا درنظر گرفته می‌شوند.

۰۵ $\text{۱۷}!/(\text{۴}!\text{۵}!\text{۶}!\text{۲}!)$

مجموعه مسائل ۸، صفحهٔ ۳۶

۰۱ ۱۵، ۱۰، ۵   ۰۲ $C(\text{۱۰}, \text{۴})$ ۰۳ $C(\text{۴۹}, \text{۱۰})$

۰۴ (الف) $C(n-\text{۱}, r)=C(n-\text{۲}, r)+C(n-\text{۲}, r-\text{۱})$

(ب) $C(n-\text{۱}, r-\text{۱})=C(n-\text{۲}, r-\text{۱})+C(n-\text{۲}, r-\text{۲})$

۰۵ (الف) $C(n-\text{۱}, r)=\dfrac{(n-\text{۱})!}{r!(n-r-\text{۱})!}$

(ب) $C(n-\text{۱}, r-\text{۱})=\dfrac{(n-\text{۱})!}{(r-\text{۱})!(n-r)!}$

۰۶ از جمع نتایج مسألهٔ قبل، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C(n-\text{۱}, r)+C(n-\text{۱}, r-\text{۱}) &= \frac{(n-\text{۱})!}{r!(n-r-\text{۱})!}+\frac{(n-\text{۱})!}{(r-\text{۱})!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-\text{۱})!(n-r)+(n-\text{۱})!r}{r!(n-r)!}=\frac{(n-\text{۱})!n}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!}=C(n, r). \end{aligned}$$

۰۷ $C(n, r)=C(n-\text{۲}, r-\text{۲})+\text{۲}C(n-\text{۲}, r-\text{۱})+C(n-\text{۲}, r)$

۰۸ $n=r=\text{۰}$

مجموعه مسائل ۹، صفحهٔ ۴۰

۰۱ ۶؛ $n+\text{۱}$

۰۲
$$\begin{aligned}(x+y)^{\text{۶}} &= C(\text{۶}, \text{۰})x^{\text{۶}}+C(\text{۶}, \text{۱})x^{\text{۵}}y+C(\text{۶}, \text{۲})x^{\text{۴}}y^{\text{۲}} \\ &+C(\text{۶}, \text{۳})x^{\text{۳}}y^{\text{۳}}+C(\text{۶}, \text{۴})x^{\text{۲}}y^{\text{۴}}+C(\text{۶}, \text{۵})xy^{\text{۵}}+C(\text{۶}, \text{۶})y^{\text{۶}};\end{aligned}$$

به‌ازای $x=y=\text{۱}$، این مجموع برابر $\text{۲}^{\text{۶}}$ یا ۶۴ است.

۳. $(۱-۱)^۶=۰$

۴. $C(۱۰,۷)=۱۲۰$

۵. $u^۷+۷u^۶v+۲۱u^۵v^۲+۳۵u^۴v^۳+۳۵u^۳v^۴+۲۱u^۲v^۵+۷uv^۶+v^۷$

۸. ۱۸۰ جمله؛ $bdsw$ و $bfpu$ جمله‌های واقعی هستند.

مجموعه مسائل ۱۰، صفحهٔ ۴۳

۱. $x^۴+y^۴+z^۴+۴x^۳y+۴xy^۳+۴x^۳z+۴xz^۳+۴y^۳z+۴yz^۳$
$+۶x^۲y^۲+۶x^۲z^۲+۶y^۲z^۲+۱۲x^۲yz+۱۲xy^۲z+۱۲xyz^۲$

۲. $۱۰!/(۲!۲!۲!۲!۲!)$ ۳. $۶!$ ۴. $۳^۸$؛ $۴^{۱۲}$

۵. $۳^{۱۲}$، زیرا اعداد دقیقاً ضرایب بسط $(x+y+z)^{۱۲}$ هستند.

مجموعه مسائل ۱۱، صفحهٔ ۴۵

۱.
۱, ۹, ۳۶, ۸۴, ۱۲۶, ۱۲۶, ۷۴, ۳۶, ۹, ۱

۱, ۱۰, ۴۵, ۱۲۰, ۲۱۰, ۲۵۲, ۲۱۰, ۱۲۰, ۴۵, ۱۰, ۱

۱, ۱۱, ۵۵, ۱۶۵, ۳۳۰, ۴۶۲, ۴۶۲, ۳۳۰, ۱۶۵, ۵۵, ۱۱, ۱

۱, ۱۲, ۶۶, ۲۲۰, ۴۹۵, ۷۹۲, ۹۲۴, ۷۹۲, ۴۹۵, ۲۲۰, ۶۶, ۱۲, ۱

۱, ۱۳, ۷۸, ۲۸۶, ۷۱۵, ۱۲۸۷, ۱۷۱۶, ۱۷۱۶, ۱۲۸۷, ۷۱۵, ۲۸۶, ۷۸, ۱۳,

۲. بنا بر فرمول (۶.۳)، مجموع عنصرهای سطر نهم برابر $۲^۸$ است. به‌همین‌ترتیب مجموعهای عنصرهای سطرهای قبلی برابر $۲^۷$، $۲^۶$ وغیره هستند. بنابراین باید تحقیق کرد که

$$۲^۸=۲^۷+۲^۶+۲^۵+۲^۴+۲^۳+۲^۲+۲^۱+۲^۰+۱.$$

بنابر اتحاد

$$a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+a^{n-۲}+\dots+a+a^۰),$$

داریم $(۲^۰+۲^۶+\cdots+۲^۰)$، $۲^۸-۱=(۲-۱)(۲^۷+۲^۶+\cdots+۲^۰)$ یا

$$۲^۸-۱=۲^۷+۲^۶+\cdots+۲^۰$$

که با برابریی که می‌خواستیم درستی آن را تحقیق کنیم هم‌ارز است.

۳. این مطلب را می‌توان از معادلهٔ (۷.۳)، با بردن جمله‌های باعلامت منفی به‌طرف دیگر، نتیجه گرفت.

مجموعه مسائل ۱۲، صفحهٔ ۴۷

۱. ۶۳ یا $۲^۶-۱$

۲. ۶۵۶۰ یا $۳^۸-۱$، زیرا یک عضو در رأی دادن به هر موضوع، سه انتخاب دارد: بله، نه، یا ممتنع.

۳. ۱۰۲۳ یا $۲^{۱۰}-۱$

۴. ۲۵۴، زیرا $۲^۷$ نوع از خانواده‌هایی که دارای ۷ فرزندند، $۲^۶$ نوع از خانواده‌هایی که دارای ۶ فرزندند و غیره وجود دارند.

مجموعه مسائل ۱۳، صفحهٔ ۵۱

۱. ۵۰۵۰ یا $\frac{۱}{۲}(۱۰۰)(۱۰۱)$

۲. اگر مجموع را با s نشان دهیم، داریم: $۲s=۱۰۱+۱۰۱+\cdots+۱۰۱$، که در آن ۱۰۰ جمعوند وجود دارد. بنابراین $۲s=۱۰۱۰۰$ و $s=۵۰۵۰$

۳. اگر مجموع را با s نشان دهیم، داریم:

$$S=۱+۲+۳+\cdots+(n-۲)+(n-۱)+n$$

$$S=n+(n-۱)+(n-۲)+\cdots+۳+۲+۱$$

$$۲S=(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)=n(n+۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

۴. ۳۳۸۳۵۰ یا $\frac{۱}{۶}(۱۰۰)(۱۰۱)(۲۰۱)$

۵. (الف) ۹۹ (ب) ۱۰۱

۶. (الف) $n-۱$ (ب) $n+۱$

۷. ۴۸۵۱؛ ۵۱۵۱

به ازای $x=۱$، معادله به صورت $y+z=۹۹$ درمی‌آید کـه در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت دارای ۹۸ جواب است؛ به‌ازای $x=۲$ داریم $y+z=۹۸$ که درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت دارای ۹۷ جواب است؛ ...؛ وبه‌ازای $x=۹۸$ داریم $y+z=۲$ کـه دارای ۱ جواب است. پس تعداد کل جوابها در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برابر است با:

$$۹۸+۹۷+\cdots+۲+۱=\frac{۱}{۲}(۹۸)(۹۹).$$

۸. $\frac{۱}{۲}(n-۲)(n-۱)$؛ $\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۲)$

۹. ۱۰؛ ۱۵؛ $\frac{۱}{۲}(n+۱)(n+۲)$

در بسط $(x+y+z)^۴$ تعداد جمله‌هـا برابر با تعـداد جوابهـای معادلهٔ $a+b+c=۴$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

۱۰. به‌ازای $r=۴$ معادلهٔ (۸.۳) را بنویسید ودر آن $m+۳$، $m+۲$، $m+۱$، ...، ۶، ۵ را به‌جای n قرار دهید تا به‌دست آید

$$\begin{aligned}
C(m+۲, ۳)&=C(m+۳, ۴)-C(m+۲, ۴)\\
C(m+۱, ۳)&=C(m+۲, ۴)-C(m+۱, ۴)\\
C(m, ۳)&=C(m+۱, ۴)-C(m, ۴)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C(۵, ۳)&=C(۶, ۴)-C(۵, ۴)\\
C(۴, ۳)&=C(۵, ۴)-C(۴, ۴)
\end{aligned}$$

ازجمع این روابط به دست می‌آوریم

$$C(۴, ۳)+C(۵, ۳)+\cdots+C(m, ۳)+C(m+۱, ۳)+C(m+۲, ۳)$$
$$=C(m+۳, ۴)-C(۴, ۴)$$

$$\frac{۱}{۶}(۴)(۳)(۲)+\frac{۱}{۶}(۵)(۴)(۳)+\cdots+\frac{۱}{۶}(m+۲)(m+۱)(m)$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(m+۳)(m+۲)(m+۱)(m)-۱.$$

جملهٔ ۱ — را به‌طرف اول برده، همه را در۶ ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید

$$(۳)(۲)(۱)+(۴)(۳)(۲)+(۵)(۴)(۳)+\cdots+(m+۲)(m+۱)(m)$$

$$=\frac{۱}{۴}(m+۳)(m+۲)(m+۱)(m).$$

جملهٔ $(m+۲)(m+۱)(m)$ را می‌توان به صورت $m^۳+۳m^۲+۲m$ نوشت، بنابراین تمام جمله‌های سمت چپ را می‌توان به‌سه مجموع تفکیک کرد

$$(۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+m^۳)+۳(۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+m^۲)$$
$$+۲(۱+۲+۳+\cdots+m).$$

اگر مجموع مکعبهای از $۱^۳$ تا $m^۳$ را به S نشان دهیم و به جای مجموعهای دیگر فرمولهای آنها را بگذاریم، به‌دست می‌آوریم

$$S+\frac{۱}{۲}m(m+۱)(۲m+۱)+m(m+۱)$$

$$=\frac{۱}{۴}(m+۳)(m+۲)(m+۱)m.$$

این برابری به $S=۱/۴m^۲(m+۱)^۲$ خلاصه می‌شود، و بنابرایـن پاسخ برابر است با:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots+m^۳=\frac{۱}{۴}m^۲(m+۱)^۲.$$

مجموعه مسائل ۱۴، صفحهٔ ۵۹

۱. $F(11)=233$

۲. اگر ...، $n=1, 4, 7, 10, 13, 16$، $F(n)$ زوج است. به طور کلی $F(n)$ زوج است اگر n به صورت $3k+1$ باشد، و در بقیهٔ حالتها $F(n)$ فرد است. این پیامدی فوری از فرمول (۴.۴) و از این واقعیت است که مجموع دو عدد صحیح، تنها وقتی فرد است که یکی فرد و دیگری زوج باشد.

۳. $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$

۴. نتیجهٔ مسألهٔ قبل را با فرمول (۴.۴) جمع کنید.

۵. $C(11, 6)$

۶. $C(15, 5)C(16, 6)$

با چشم‌پوشی موقت از Bها، مشاهده می‌کنیم که Aها و Cها می‌توانند به‌یکی از $C(15, 5)$ راه مرتب‌شوند. دراین‌صورت بین Aها و Cها ودرانتهای آنها ۱۶ مکان وجود داردکه Bها را می‌توان درآنها درج کرد. بنا براین به‌ازای هرآرایش Aها و Cها، $C(16, 6)$ راه برای درج Bها وجود دارد.

۷. ۷۳۵۰

با چشم‌پوشی موقت از iها، متوجه می‌شویم که حروف دیگر را می‌توان به $105=7!/(4!2!)$ راه مرتب کرد. در این صورت، بین این حروف و در انتهای آنها ۸ مکان وجود دارد که می‌توان iها را در آنها درج کرد. بنا براین $C(8, 4)$ یا ۷۰ راه برای درج iها موجود است. پاسخ برابر 105×70 است.

مجموعه مسائل ۱۵، صفحهٔ ۶۳

۱. $C(49, 3)$؛ $C(53, 3)$

۲. توجه می‌کنیم که $C(8, 5)=C(8, 3)$

۴. کافی است ثابت کنیم که $C(m-1, m-k)=C(m-1, k-1)$، و این از فرمول (۴.۲) نتیجه می‌شود.

۵. فرمول (۱۰.۴) را به‌کار برید.

۶. (الف) $C(11, 6)$

صرفنظر از عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰ که مجموع ارقام آن برابر ۶ نیست،

با احتساب صفر به‌عنوان یك رقم، هر عدد صحیح بین ۱ تا ۹۹۹۹۹۹ را به‌صورت عددی که شش رقم دارد تعبیر می‌کنیم. مثلاً عدد صحیح ۸۳۶۵ را می‌توان به‌صورت ۰۰۸۳۶۵ نوشت. اگر شش رقم را به‌صورت x_1، x_2، ...، x_6 بنویسیم، می‌توانیم مسأله را به صورت مسألهٔ تعیین تعداد جوابهـای معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6$$

در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی تعبیر کنیم.

(ب) $C(10,5)+C(9,4)+C(8,3)+C(7,2)+C(6,1)+1$

۷. (الف) $C(21,17)$

هرجملهٔ بسط به صورت $\alpha_1^{x_1}\alpha_2^{x_2}\alpha_3^{x_3}\alpha_4^{x_4}\alpha_5^{x_5}$ (با یك ضریب مناسب) است، که درآن مجموع توانها برابر ۱۷ است؛ لذا $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=17$. بنابراین، پاسخ برابر با تعداد جوابهای این معادله‌درمجموعهٔ‌اعداد‌صحیح نامنفی‌است.

(ب) $C(t+k-1,t)$

مجموعه مسائل ۱۶، صفحهٔ ۶۵

۱. r ۲. $C(11,6)$ ۳. $C(12,10)$ ۴. $C(16,12)$

۵. $C(16,7)-1$

مسأله به سؤال دربارهٔ تعداد ترکیبهای ۱۰ رقم ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۹، که هر بار هفت‌تای آنهادرنظر گرفته می‌شوند وممکن است‌هر کدام در ترکیب تکرارشود، برمی‌گردد. «۱ —» در پاسخ، به‌این علت به‌حساب آمده است که وقتی هرهفت رقم صفر باشند، این ترکیب باهیچ عدد صحیحی متناظر نیست.

مجموعه مسائل ۱۷، صفحهٔ ۷۰

۱. یکی از بیست قسمت پاسخ عبارت است از: ۶، ۸، ۷، ۶ کـه با ۱، ۳، ۲، ۱ متناظر است.

۲. $C(71,3)$

۳. (الف) $C(37,4)$ (ب) $C(30,4)$

۴. $C(16,3)$

۵. (الف) $C(13,3)$ (ب) $C(7,3)$ (پ) هیچکدام

۶. (الف) $C(17, 3)$ (ب) $C(11, 3)$

۷. (الف) $C(m-c_1+3, 3)$ (ب) $C(m-c_1-c_2+3, 3)$

۸. $C(18, 5)-6C(8, 5)$

عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰ راکه مجموع ارقام آن ۱۳ نیست کنار می‌گذاریم. با احتساب صفر به‌عنوان‌رقم، اعدادصحیح از ۱ تا ۹۹۹۹۹۹ را به‌صورت شش‌رقمی تعبیر می‌کنیم. اگر شش رقم را به صورت x_1، ...، x_6 بنویسیم می‌توان مسأله را به‌عنوان تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=13$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی نابیشتراز نه تعبیر کرد. اگر ازشرط «نابیشتر بودن از نه» موقتاً چشم‌پوشی کنیم، متوجه می‌شویم که معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، $C(18, 5)$ جواب دارد. سپس دیده می‌شود که تعداد جوابها در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی با شرط $x_1>9$ برابر $C(8, 5)$ است. این مقدار و مقادیر مشابهی برای حالتهای $x_2>9$ و $x_3>9$ وغیره از $C(18, 5)$ کم می‌شوند.

مجموعه مسائل ۱۸، صفحهٔ ۷۸

۱.
$$N-N(\alpha)-N(\beta)-N(\gamma)-N(\delta)+N(\alpha, \beta)+N(\alpha, \gamma)$$
$$+N(\alpha, \delta)+N(\beta, \gamma)+N(\beta, \delta)+N(\gamma, \delta)-N(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$-N(\alpha, \beta, \delta)-N(\alpha, \gamma, \delta)-N(\beta, \gamma, \delta)+N(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

۲. 2^r، تعدادکل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای از r شیء.

۳. ۱۶۰۰۰

فرض‌کنیدکه تقسیمپذیری بر ۳، ۵، ۱۱ را به‌ترتیب با α، β، γ نشان دهیم. دراین صورت فرمول (۳.۵) نتیجه می‌دهد که

$$33000-11000-6600-3000+2200+1000+600-200.$$

۴. ۹۹۸۹۱۰

توانهای چهارم درمیان مربعها گنجانده می‌شوند، بنابراین می‌توان آنها را در نظر نگرفت. گوییم یك عدد صحیح دارای ویژگی α است اگر آن عدد مربع کامل باشد، دارای ویژگی β است اگر مکعب کامل باشد، دارای هر دو ویژگی α

و β است اگر توان شش کامل باشد. بنابراین محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم

$$N-N(\alpha)-N(\beta)+N(\alpha,\beta)=1000000-1000-100+10.$$

۵. $N(\alpha,\beta,\gamma)-N(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-N(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$
$+N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$

۶. $N(\beta)-N(\beta,\alpha)-N(\beta,\gamma)-N(\beta,\delta)+N(\beta,\alpha,\gamma)$
$+N(\beta,\alpha,\delta)+N(\beta,\gamma,\delta)-N(\beta,\alpha,\gamma,\delta)$

مجموعه مسائل ۱۹، صفحهٔ ۸۳

۱. $C(13,3)-4C(7,3)$

۲. $C(16,5)-6C(11,5)+15C(6,5)$

مسأله به‌سؤال‌در بارهٔ تعدادجوابهای معادلهٔ $y_1+y_2+y_3+\dots+y_6=17$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت نابیشتر از ۵ برمی‌گردد، زیرا هرعدد صحیح زوج x_1 را می‌توان به‌صورت $2y_1$ نوشت، که در آن y_1 نیز یك عدد صحیح است.

۳. $C(14,3)-C(8,3)-2C(7,3)-C(6,3)$

تعدادجوابهای معادله‌ای‌را که درشرایط $x_1>0$، $x_2>0$، $x_3>2$ و $x_4>3$ صدق می‌کند با N نشان می‌دهیم. لذا، بنابر فرمول (۲۲.۴)، $N=C(14,3)$. اگر یکی از جوابها دارای ویژگی $x_1>6$ باشد گوییم این جواب ویژگی α را دارد. همین‌طور فرض کنیم $x_2>7$، $x_3>9$ و $x_4>11$ باویژگی β، γ و δ متناظر باشند. بنابراین می‌خواهیم تعیین کنیم که چندتا از $C(14,3)$ جواب دارای هیچیك از ویژگیهای α و β و γ و δ نیستند. با استفاده از فرمول (۲۲.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$N(\alpha)=C(8,3),\ N(\beta)=C(7,3),\ N(\gamma)=C(7,3),\ N(\delta)=C(6,3)$$

تمام جمله‌های بعدی فرمول (۳.۵) صفرند.

۴. $C(16,3)-4C(9,3)$

۵. $C(13,3)-C(4,3)-C(5,3)-C(8,3)-C(9,3)+C(4,3)$

جواب به تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی که مقید به‌شرایط $x_1\leqslant 8$، $x_2\leqslant 7$، $x_3\leqslant 4$، $x_4\leqslant 3$ هستند برمی گردد.

۶. $$C(12, 2)-C(3, 2)-C(4, 2)-C(7, 2)$$

جواب به تعیین جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ درمجموعهٔ اعداد صحیح که درشرایط $0\leqslant x_1\leqslant 8$، $0\leqslant x_2\leqslant 7$، $0\leqslant x_3\leqslant 4$ صدق می کنند برمی گردد.

۷. $C(11, 3)-4C(8, 3)+6C(5, 3)=10$

۸. $C(13, 3)-4C(4, 3)$

۱۰. $c=23$؛

$$C(11, 4)-5C(5, 4)=C(22, 4)-5C(16, 4)$$
$$+10C(10, 4)-10C(4, 4)$$

جایگذاری یا تبدیل $x_j=7-y_j$ به‌ازای $j=1, 2, 3, 4, 5$ مسأله را حل خواهد کرد.

۱۱.

$$C(m-1, k-1)-C(m-1-c_1, k-1)-C(m-1-c_2, k-1)$$
$$-C(m-1-c_3, k-1)+C(m-1-c_1-c_2, k-1)$$
$$+C(m-1-c_1-c_3, k-1)+C(m-1-c_2-c_3, k-1)$$
$$-C(m-1-c_1-c_2-c_3, k-1).$$

۱۲. $$C(24, 6)-C(15, 6)-6C(14, 6)$$

رقمها را از چپ به راست با x_1، x_2، x_3، …، x_7 نشان می‌دهیم. در این صورت، پاسخ برابر با تعـداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+\dots+x_7=19$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی نابیشتر از ۹، وبا شرط اضافی مثبت‌بودن x_1 است.

مجموعه مسائل ۲۰، صفحهٔ ۸۹

۱. $D(5)=44$؛ $D(6)=265$

۲. ۱۲۳۴ ۲۱۳۴ ۳۱۴۲ ۱۲۴۳ ۲۱۴۳ ۳۲۱۴ ۱۴۳۲ ۲۴۱۳ ۳۴۱۲

۳. (الف) ۱۹۳۶

اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را می‌توان به $D(۵)$ راه در پنج مکان اول قرار داد، زیرا برای پنج شیء، $D(۵)$ پریش وجود دارد؛ اعداد صحیح باقیماندهٔ از ۶ تا ۱۰ را می‌توان به $D(۵)$ راه در پنج مکان آخر قرار داد. بنابراین جواب برابر $D(۵)\times D(۵)$ است.

(ب) $(۵!)^{۲}=۱۴۴۰۰$

هر آرایش ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ در پنج مکان اول، یك پریش است، بنابراین !۵ امکان وجود دارد، همین مطلب برای اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ که در پنج مکان آخر قرار گیرند صادق است.

۴. ۳۲۱۶

اصل شمول ـ عدم‌شمول را با این سه‌ویژگی جایگشتها که: ۱ در اولین مکان؛ ۴ در چهارمین مکان؛ ۷ در هفتمین‌مکان قرار گیرند به‌کار می‌بریم. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$۷!-۶!-۶!-۶!+۵!+۵!+۵!-۴!.$$

۵. ۲۲۲۶۰

برای انتخاب سه عددی که در مکان طبیعی خود قرار گیرند $C(۹,۳)=۸۴$ راه وجود دارد، به‌ازای هرچنین انتخابی، $D(۶)=۲۶۵$ پریش از شش عدد دیگر موجود است. حاصلضرب ۸۴ و ۲۶۵ پاسخ مسأله است.

۶. $D(۲۶)$ یا $۲۶!\left[۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\cdots+\frac{۱}{۲۶!}\right]$

۷.
$$D(n)-nD(n-۱)=n!\left[۱-\frac{۱}{۱!}+\cdots+\frac{(-۱)^{n}}{n!}\right]$$
$$-n!\left[۱-\frac{۱}{۱!}+\cdots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!}\right]$$

بعداز انجام عمل تفریق، تنها جمله‌ای که باقی می‌ماند جملهٔ $n!\left[\frac{(-۱)^{n}}{n!}\right]$ است.

مجموعه مسائل ۲۱، صفحهٔ ۹۴

۲. $\frac{۱}{۴}$ ۳. $\frac{۱}{۶}$

۴. $\frac{۵}{۱۲}$

۳۶ حالت همشانس وجود دارند. در ۱۵ حالت از این حالتها، شمارهٔ روی تاس سفید بزرگتر است.

۵. $\frac{۵}{۱۸}$

$۶^۴$ حالت همشانس وجـود دارند. برای سهولت فرض می‌کنیم کـه تاسها دارای رنگهای مختلف، مثلاً سفید، قرمز، آبی و سبز باشند. وقتی کـه تاسها را می‌ریزیم، می‌توانیم استدلال کنیم که هربرآمد تاس سفید رضایت‌بخش‌خواهد بود، بنابراین ۶ امکان وجود دارد؛ اما برآمد تاس سفید هرچه باشد، برآمد متفاوتی را برای تاس قرمز می‌خواهیم، بنابراین ۵ امکان وجود دارد؛ به‌همین ترتیب برای تاس آبی ۴ امکان و برای تاس سبز ۳ امکان موجود است. لـذا تعداد حالتهای مساعد برابر $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$ است. (راه دیگر محاسبهٔ تعداد حالتهـای مساعد، شمارش تعداد اعداد صحیح ۴ رقمیی است‌کـه رقمهای آنها تماماً از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تشکیل شده و همهٔ رقمهای آنهـا از هم متمایز باشند. هر چنین عدد صحیحی، مثل ۳۵۱۶، را می‌توان به این صورت تعبیر کرد کـه تاس سفید «۳»، تاس قرمز «۵»، تاس آبی «۱»، و تاس سبز «۶» بیاید.)

۶. $۷ \times \frac{۵^۵}{۶^۷}$

تعداد حالتهای همشانس برابر $۶^۷$ است. برای محاسبهٔ تعداد حالتهای مساعد، تعداد اعداد هفت رقمیی (برای هرتاس یك رقم) راکه تماماً از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ساخته‌می‌شوند و دقیقاً دارای سه‌عدد شش‌هستند می‌شماریم. دیده‌می‌شود که این تعداد برابر $C(۷, ۳) \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۱ \times ۱ \times ۱$ است.

۸. $\frac{۶۵۱}{۶^۵}$ یا $\frac{C(۱۴, ۴) - ۵C(۸, ۴)}{۶^۵}$

تعداد حالتهای همشانس برابر $۶^۵$ است. تعداد حالتهای مساعد برابر تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۵$ درمجموعهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۶ است.

۹. (الف) $\frac{۷}{۳۲}$

تعداد حالتهای همشانس برابر $۲^۸$ است. ازاین تعداد، تعداد حالتهای مساعد برابر $C(۸, ۵)$ است، زیرا مسأله به تعداد راههای انتخاب پنج سکه ازهشت سکه برمی گردد.

(ب) $\frac{۹۳}{۲۵۶}$ یا $\frac{C(۸, ۵)+C(۸, ۶)+C(۸, ۷)+C(۸, ۸)}{۲^۸}$

۱۰. $\frac{۱۳^۴}{C(۵۲, ۴)}$

تعداد انتخابهای چهار کارت ازیك دسته‌کارت برابر $C(۵۲, ۴)$ است. تعداد انتخابهای چهارکارت، هرکدام ازیك خال، برابر $[C(۱۳, ۱)]^۴$ یا $۱۳^۴$ است.

۱۱. (الف) $۱-\frac{C(۴۰, ۱۳)+۱۲C(۴۰, ۱۲)}{C(۵۲, ۱۳)}$

احتمال متمم را محاسبه کنید. تعدادکل حالتهای همشانس برابر $C(۵۲, ۱۳)$ است. تعداد انتخابهای ۱۳ کارت بدون صورت ازیك دسته‌کارت برابر $C(۴۰,۱۳)$؛ وبا یك صورت برابر $C(۱۲, ۱)\times C(۴۰, ۱۲)$ است.

(ب) $\frac{C(۴, ۱)C(۴۸, ۱۲)}{C(۵۲, ۱۳)}$

(پ) $۱-\frac{C(۴۸, ۱۳)}{C(۵۲, ۱۳)}$

این پاسخ با محاسبهٔ احتمال متمم به‌دست می‌آید. (به نظر می‌رسد که بادوش مستقیم جواب متفاوتی حاصل می‌شود.) تعداد انتخابهای ۱۳ کارت ازیك دسته‌کارت بدون تك برابر $C(۴۸, ۱۳)$ است.

۱۲. $\frac{۱}{۱۳}$

جمعاً !۲۶ ترتیب وجود دارند. در !۲۵ × ۲ حالت از اینها، x و y مجاورند.

۱۳. (الف) $[C(۲۳, ۴)-C(۱۴, ۴)-۴C(۱۳, ۴)+۴C(۴, ۴)]/۹۰۰۰۰$

۹۰۰۰۰ عدد صحیح پنج رقمی وجود دارند. تعداد حالتهای مساعد برابر تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۲۰$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی نابیشتر از ۹ است، به شرط آنکه قید اضافی $x_۱>۰$ را اضافه کنیم. بنابراین اصل شمول ـ عدم شمول را همراه با فرمول (۲۲.۴) می‌توان به‌کار برد.

(ب) $\frac{۱}{۱۸۰۰}$

۵۰ عدد صحیح پنج رقمی وجود دارند که در شرایط مسأله صدق می‌کنند. بیست تای این اعداد دارای رقمهای ۵، ۴، ۱، ۱، ۱ و سی‌تا از آنها دارای رقمهای ۵، ۲، ۲، ۱، ۱ هستند.

۱۴. نه، احتمال برابر ۹/۴ است.

تعداد $C(۱۰, ۵)/۲$ حالت همشانس وجود دارند، زیرا این تعداد برابر تعداد راههـای تقسیم ۱۰ نفر به دو تیم ۵ تایی است. برای محاسبهٔ تعداد حالتهای مساعد، دونفر رفیق را کنارگذاشته و ازمیان هشت‌نفر سه‌نفر را برای اینکه‌باهم در «تیم دلخواهشان» باشند انتخاب می‌کنیم؛ پس تعداد حالتهای مساعد برابر $C(۸, ۳)$ است.

۱۵. $۱-\frac{D(۸)}{۸!}$ ؛ $۱-\frac{D(۸)+۸D(۷)}{۸!}$

در هرقسمت، پاسخهایی کـه داده شده‌اند، از احتمال متمم به‌دست آمده‌اند. تعداد حالتهای همشانس برابر !۸ است. تعداد راههایی که در آن هیچ یك ازشمعهای اتومبیل نمی‌تواند در سیلندر اصلی خود قرار بگیرد برابر $D(۸)$، تعداد پریشهای ۸ شیء است. بعلاوه تعداد آرایشهایی که در آنها درست یك شمع در سیلندر اصلی خود قرار بگیرد برابر $۸D(۷)$ است.

۱۶. احتمال یك برد برابر احتمال آن است که آرایش کارتهای یك دسته کارت با آرایش کارتهـای دستهٔ دیگر سازگار باشد. چون !۵۲ آرایش ممکن، و $D(۵۲)$

پریش وجود دارند، نسبت تعداد حالتهای مساعد به‌تعداد کل حالتهای همشانس برابر است با

$$\frac{D(۵۲)}{۵۲!}=۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\dots+\frac{۱}{۵۲!}$$ (تقریباً ۰٫۳۶۷۹)

۱۷. $$۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\dots-\frac{۱}{۱۳!}$$

(این پاسخ تا چهار رقم دهدهی همان پاسخ مسألهٔ ۱۶ است.)

۱۸. احتمال یك برد برابر احتمال آن است که یك دسته کارت برخورده، بجز برای یك کارت، پریشی کلی تولید کند. برای آنکه یك کارت ثابت نگه داشته شود ۵۲ راه وجود دارد و برای ۵۱ کارت باقیمانده $D(۵۱)$ پریش موجود است. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$۵۲\frac{D(۵۱)}{۵۲!}=\frac{D(۵۱)}{۵۱!}=۱-\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\dots-\frac{۱}{۵۱!}.$$

(این پاسخ به اندازهٔ $۱/۵۲!$، که عدد بسیار کوچکی است، با پاسخ مسألهٔ ۱۶ اختلاف دارد.)

مجموعه مسائل ۲۲، صفحهٔ ۱۰۳

۱. ۱، ۲، ۳، ۵، ۷

۲. $p_۱(n)=۱$، $q_۱(n)=۱$

۳. $q_۲(۸)=۵$، $q_۲(۹)=۵$، اگر n زوج باشد $q_۲(n)=۱+\frac{۱}{۲}n$، اگر n فرد باشد، $q_۲(n)=\frac{۱}{۲}(n+۱)$

۴. ۱ ۵. ۲

۶. درمیان تمام افرازهای n، بزرگترین جمعوندی که رخ می‌دهد خود n است، و بنابراین هیچ افرازی وجود ندارد که اگر قبلاً به‌وسیلهٔ $p_n(n)$ به‌حساب نیامده باشد، اکنون به‌وسیلهٔ $p_{n+۱}(n)$ به‌حساب بیاید، به‌همین ترتیب برای $p_k(n)$ به‌ازای $k>n$.

۷. تنها یك افراز، یعنی خود n، وجود دارد که به وسیلهٔ $p_n(n)$ به حساب می‌آید ولی در $p_{n-۱}(n)$ به‌حساب نمی‌آید.

مجموعه مسائل ۲۳، صفحهٔ ۱۰۶

۱. جواب جزیی:

n \ k	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۸	۱	۵	۱۰	۱۵	۱۸	۲۰	۲۱	۲۲	۲۲	۲۲	۲۲	۲۲
۹	۱	۵	۱۲	۱۸	۲۳	۲۶	۲۸	۲۹	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۱۰	۱	۶	۱۴	۲۳	۳۰	۳۵	۳۸	۴۰	۴۱	۴۲	۴۲	۴۲
۱۱	۱	۶	۱۶	۲۷	۳۷	۴۴	۴۹	۵۲	۵۴	۵۵	۵۶	۵۶
۱۲	۱	۷	۱۹	۳۴	۴۷	۵۸	۶۵	۷۰	۷۳	۷۵	۷۶	۷۷

۲. ۷، ۱۵، ۲۸

۳. ۱۵، ۲۲، ۳۰، ۴۲

مجموعه مسائل ۲۴، صفحهٔ ۱۰۹

۱. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}$
$+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+\cdots$

۲. $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+\cdots$

۳. $1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+\cdots$

مجموعه مسائل ۲۵، صفحهٔ ۱۱۳

۱. (الف) تعداد افرازهای ۱۲ با جمعوندهای زوج؛
(ب) تعداد افرازهای ۹ با جمعوندهای نابیشتر از ۳؛
(پ) تعداد افرازهای ۶ با جمعوندهای متمایز.

۲. (الف) ۱۱ (ب) ۱۲ (پ) ۴

۳. (الف)
$$(1+x^6+x^{12}+x^{18}+x^{24}+x^{30}+x^{36})$$
$$\times(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35})(1+x^{12}+x^{24}+x^{36})(1+x^{20});$$
(ب)
$$(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^4+x^8+x^{12})$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^6+x^{12})(1+x^7+x^{14})(1+x^8)$$
$$\times(1+x^9)\cdots(1+x^{15});$$
(پ)
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)(1+x^7)$$
$$\times(1+x^8)(1+x^9);$$
به ترتیب ۵، ۱۷ و ۸ افراز.

۴. ۱۴

ضریب x^{18} را در بسط
$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{18})(1+x^3+x^6+\cdots+x^{18})$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^7+x^{14})$$
محاسبه کنید.

۵. ۳

به طوری کــه با استفاده از تبدیل $u=1+U$، $v=1+V$، $w=1+W$، $t=1+T$ می‌توان دید، پاسخ برابر با تعداد جوابهای معادلهٔ
$$3U+5V+7W+9T=16$$
درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است. این تعداد برابر ضریب x^{16} در بسط
$$(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15})(1+x^5+x^{10}+x^{15})$$
$$\times(1+x^7+x^{14})(1+x^9)$$
است.

مجموعه مسائل ۲۶، صفحهٔ ۱۱۵

(در این راه‌حلها P_1، P_2، P_3، P_4، P_5 چند جمله‌ایهایی هستند که در صفحهٔ ۱۱۵ کتاب داده شده‌اند.)

۳۴۳ ۰۱

ضریب x^{100} را در بسط $P_1P_2P_3QP_5$ که در آن

$$Q = 1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + x^{100}$$

محاسبه کنید.

۴۹ ۰۲

ضریب x^{53} را در بسط $P_1P_2P_3P_4$ محاسبه کنید. هرچند جمله‌ای‌را می‌توان با حذف توانهای بیشتر از x^{53} مختصر کرد.

۳۴ ۰۳

این عدد ضریب x^{95} در بسط $P_2P_3P_4P_5$ است.

۱۶ ۰۴

برای به دست آوردن معادلهٔ $5Y + 10Z + 25W + 50T = 65$، تبدیل $y = 1 + Y$، $z = 1 + Z$، $w = 1 + W$، $t = 1 + T$ را به‌کار برید، وسپس تعداد جوابهای این معادله را در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی پیدا کنید. این عدد برابر ضریب x^{65} در بسط $P_2P_3P_4P_5$ است.

مجموعه مسائل ۲۷، صفحهٔ ۱۱۹

۰۱ ۱۵۰ یا $3^5 - 3 \times 2^5 + 3$

۰۲ $f(5, 2) = 2^5 - 2 = 30$

۰۴

$$k! = k^k - C(k, 1)(k-1)^k + C(k, 2)(k-2)^k - C(k, 3)(k-3)^k + \cdots + (-1)^{k-1}C(k, k-1)$$

۰۵ برابریی کــه در این مسأله آمده است از فرمول (۱۰۸) به ازای $k = 8$ نتیجه می‌شود؛ زیرا به‌هیچ راهی نمی‌توان تعدادکمتراز ۸شیء را در داخل ۸جعبه طوری توزیع کرد که هیچ جعبه‌ای تهی نماند، به‌ازای $m < 8$، $f(m, 8) = 0$.

مجموعه مسائل ۲۸، صفحهٔ ۱۲۲

۰۱ ۳۰۲۵ یا $\dfrac{3^9 - 3 \times 2^9 + 3}{3!}$

۲. $\dfrac{۴^۴-۴\times ۳^۴+۶\times ۲^۴-۴}{۴!}=۱$

۳. $۲^{m-۱}-۱$

۴. (الف) ۱۲۲ (ب) ۹۰

عدد ۳۰۰۳۰ شش عامل اول متمایز دارد، و می‌خواهیم این عاملها را به سه مجموعــه تفکیک کنیم. نماد برای قسمت (الف)، $G(۶,\ ۳)$ و برای قسمت (ب)، $g(۶,\ ۳)$ است.

۵. ۵۲

۷. $g(m,\ m-۲)=C(m,\ ۳)+۳C(m,\ ۴)$

مجموعه مسائل ۲۹، صفحهٔ ۱۲۶

۱. (الف) ۲۴ (ب) ۱۲۶ یا $C(۹,\ ۴)$ (پ) ۱۵۱۲۰۰ یا $P(۱۰,\ ۶)$
(ت) ۲۸۶ (ث) ۷ (ج) ۲۱ (چ) ۱۹

راه‌حل (ت). پاسخ، برابر $C(۱۳,۳)$، تعداد جوابهای $x+y+z+w=۱۰$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

راه حل (چ). پاسخ، بــرابــر $C(۸,\ ۲)-۳C(۳,\ ۲)$، تعداد جوابهــای $x+y+z=۶$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی نا بیشتر از ۴ است.

۲. (الف) $n!$ (ب) $P(n,\ r)$ (پ) $C(n,\ r)$ (ت) $C(r+k-۱,\ r)$

راه حل (ت). این پاسخ، برابر جوابهای معادلهٔ

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_k=r$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی است.

۳. $\dfrac{۱}{۴}(k^۲+۳k+۴)\times k!$

دوشیء یکسان را به A، A نشان می‌دهیم. جعبهٔ اول شامل دوشیء است. تعداد توزیعهایی با حــداقل یك A در جعبه اول برابر $(k+۱)!$ است. تعداد تــوزیعها با Aهایــی در جعبه‌ای به‌غیراز جعبهٔ اول برابر $C(k,۲)C(k,\ ۲)(k-۲)!$است، زیرا در انتخاب دوشیء برای قراردادن در جعبهٔاول، $C(k,\ ۲)$راه، و در انتخاب

۲ جعبه برای Aها $C(k, ۲)$ راه و برای توزیـع $(k-۲)$ شیء دیگر $(k-۲)!$ راه وجود دارد.

مجموعه مسائل ۳۰، صفحهٔ ۱۳۰

۴. $k=۴$

فرض کنید که حداکثر سه‌تا از $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{۱۰}$ و حداکثر سه‌تا از $b_۱$، $b_۲$، ...، $b_{۱۰}$ وحداکثرسه‌تا از $c_۱$، $c_۲$، ...، $c_{۱۰}$ دارای ویژگی Q باشند. دراین‌صورت بایك جمع ساده حـداکثر نه‌تا از تمام سی جمله دارای ویژگی Q هستند. این با اطلاعاتی که داده شده‌است متناقض است.

۵. $r=۴$

مجموعه مسائل ۳۱، صفحهٔ ۱۳۲

۱. راهی برای بحث در ایــن مسأله آن است که AB، BC، CD، DE و EA را بارنگ‌آبی و بقیهٔ پاره‌خطها را با رنگ قرمز رسم کنید.

۲. یکی ازهفده نقطه را با A و بقیه را با $B_۱$، $B_۲$، ...، $B_{۱۶}$ نشان می‌دهیم. شانزده پاره‌خطی که از A خارج می‌شوند، یعنی $AB_۱$، $AB_۲$، ...، $AB_{۱۶}$ را درنظرمی گیریم. طبق اصل لانهٔ کبوتر حداقل شش‌تا از این پاره‌خطها دارای یك رنگ، مثلاً آبی، هستند. می‌توان این‌شش پاره‌خط آبی را $AB_۱$، $AB_۲$، ...، $AB_۶$ اختیارکرد. اکنون اگر در بین پانزده پاره‌خطی که $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، $B_۴$، $B_۵$، $B_۶$ را به هم وصل می کنند حداقل یك پاره خط آبی وجـود داشته باشد، آن‌گاه یك مثلث رنگی آبی داریم. (مثلاً، اگر پاره‌خط $B_۳B_۵$ آبی باشد آن‌گاه مثلث $AB_۳B_۵$ یك مثلث آبی است.) ازطرف‌دیگراگر در بین این‌دستهٔ پانزده‌تایی‌هیچ پاره‌خطی آبی نباشد،این بدان‌معناست که تمام پاره خطهایی کــه نقطه‌هــای $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، $B_۴$، $B_۵$ و $B_۶$ را به هم وصل می کنند قرمز ویا سفیدند. دراین حالت از نتیجهٔ اصلیی که دربخش ۲.۹ ثابت شده است استفاده می کنیم.

مجموعه مسائل ۳۲، صفحهٔ ۱۳۷

۱. $\frac{۱}{۲}(n^۲+n)$

ازجواب $(۱/۲)(n^۲+n+۲)$ که درمتن کتاب برای تعدادناحیه‌های حاصل

از n خطی داده شد که هیچ دوتای آنها موازی، و هیچ سه‌تای آنها متقارب نیستند، این نتیجه را می‌توان به دست آورد. زیرا اگر دراین حالت یکی از خطها را در امتداد صفحه طوری بلغزانیم که از نقطهٔ تقاطع دوخط دیگر بگذرد آن گاه یك ناحیه از بین می‌رود.

۲. $(m+۱)(k+۱)$

۳. $(m+۱)(k+۱)+m+k+۱$

خط جدید، $m+k+۱$ ناحیهٔ جدید به‌وجود می‌آورد.

۴. $qt+۲q+۲t-۱$

تعداد ناحیه‌ها را با $F(q, t)$ نشان می‌دهیم. اگر یکی از q خط را برداریم می‌بینیم که $t+۲$ ناحیه از بین می‌روند، و بنابراین $F(q, t)$ به‌اندازهٔ $t+۲$ از $F(q-۱, t)$ بیشتر است. بنابراین داریم

$$F(q, t)-F(q-۱, t)=۲+t,$$

$$F(q-۱, t)-F(q-۲, t)=۲+t,$$

$$F(q-۲, t)-F(q-۳, t)=۲+t,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(۲, t)-F(۱, t)=۲+t,$$

$$F(۱, t)-F(۰, t)=۱+t.$$

(به‌اختلاف جزیی درآخرین معادله توجه کنید.) از جمع این معادله‌ها و استفاده از $F(۰, t)=۲t$ پاسخ را به‌دست می‌آوریم.

۵. $kq+۲q+k$

تعداد ناحیه‌ها را با $H(q, k)$ نشان دهید. اگر یکی از k خط موازی را برداریم، تعداد این ناحیه‌ها به اندازهٔ $q+۱$ کم می‌شود. بنابراین می‌بینیم که $H(q, k)-H(q, k-۱)=q+۱$. با تشکیل یك مجموع تلسکوپی مانند مسألهٔ قبل وبا استفاده از $H(q, ۰)=۲q$، پاسخ را به دست می‌آوریم.

۶. $kq+۲q+k+nk+nq+n(n+۱)/۲$

تعداد ناحیه‌ها را با $H(q, k, n)$ نشان می‌دهیم، به قسمی که $H(q, k, ۰)$

همان $H(q, k)$ مسألهٔ قبل است. اگر یکی از n خط برداشته شود، تعداد ناحیه‌ها به اندازهٔ $n+k+q$ کم می‌شود. بنابراین،

$$H(q, k, n)-H(q, k, n-۱)=k+q+n,$$

و با استفاده ازاین رابطه می‌توانیم مانند دو مسألهٔ قبل عمل کنیم.

مجموعه مسائل ۳۳، صفحهٔ ۱۴۳

۰۳ از مقایسه با مثلث پاسکال، حدس

$$K(n)=C(n-۱, ۲)=\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)$$

القا می‌شود. ثابت می‌شود که این حدس صحیح است، زیرا برابری $K(n+۱)=K(n)+n-۱$ با توجه به مطلب، زیر برقرار است: $K(n+۱)$ نه‌تنها زوجهایی را که به وسیلهٔ $K(n)$ محاسبه می‌شوند به‌حساب می‌آورد، بلکه زوجهای

$$۱, n+۱ \quad ۲, n+۱ \quad ۳, n+۱ \quad \dots \quad n-۱, n+۱$$

را نیز به‌حساب می‌آورد.

۰۴ (الف) دروغ (ب) راست (پ) راست (ت) دروغ (ث) دروغ (ج) راست

مجموعه مسائل ۳۴، صفحهٔ ۱۴۹

۰۲ (الف) $\sum_{j=۱}^{n} ۳j=\frac{۳n(n+۱)}{۲}$

(ب)
$$\sum_{j=۱}^{n}(۲j-۱)(۲j+۱)=\sum_{j=۱}^{n}(۴j^{۲}-۱)=۴\sum_{j=۱}^{n} j^{۲}-n$$
$$=\frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}-n$$
$$=\frac{n(۴n^{۲}+۶n-۱)}{۳}$$

۰۳ (الف) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ (پ) $\frac{(n+۱)(n+۲)(۲n+۳)}{۶}$

۰۴ ۵۰ ۰۶ ۰ ۰۸ ۲۵۲۰ ۰۹ $۲^n n!$ ۰۱۱ $f(n)=(n+۱)!-۱$

مجموعه مسائل ۳۵، صفحهٔ ۱۵۵

۰۱ (i) ۴۲ (ii) ۱۳۲ (iii) ۴۲۹

۰۲ $۵^{۲۶۲۱۴۴}$

راه‌حلهای مسائل گوناگون

۰۱ احتمال متمم، یعنی شانس به دست آوردن کمتر از نصف پاسخهای صحیح را در نظر می‌گیریم. تعداد امکانات همشانس، $۲^۹$ است. دانشجو در $C(۹, ۰)+C(۹, ۱)+C(۹, ۲)$ حالت در به دست آوردن حداقل سه پاسخ درست از نه‌تا موفق نمی‌شود. جمله‌های این مجموع، متناظر با هیچ، یک یا دو پاسخ درست است. توجه کنید که این مجموع، برابر $۴۶=۳۶+۹+۱$، است، می‌بینیم که احتمال متمم ۴۶/۵۱۲ است که از ۱/۱۰ کمتر است.

۰۲ ۱۴۱۴

پاسخ مسأله، کوچکترین عدد صحیح مثبت n است که به ازای آن $(۱/۲)(n^۲+n)>۱۰۰۰۰۰۰$. معادلهٔ متناظر،

$$\frac{۱}{۲}(n^۲+n)=۱۰۰۰۰۰۰$$

است که دارای یك ریشهٔ مثبت بین ۱۴۱۳ و ۱۴۱۴ است.

۰۳ $n^۳(n+۱)$

مسأله، محاسبهٔ

$$\sum_{j=۱}^{n}(۴j^۳-۳j^۲+j) \quad \text{یا} \quad ۴\sum_{j=۱}^{n} j^۳-۳\sum_{j=۱}^{n} j^۲+\sum_{j=۱}^{n} j$$

است. فرمول این مجموعها را می‌توان در خلاصهٔ فصل ۳ و پاسخ مسألهٔ ۱۰ از

مجموعه مسائل ۱۳ یافت. بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$n^{۲}(n+۱)^{۲}-\frac{۱}{۲}n(n+۱)(۲n+۱)+\frac{۱}{۲}n(n+۱),$$

که به صورت پاسخی که داده شده‌است خلاصه می‌شود.

۴. $۸/۱۱$

اینکه دسته‌ها را «نامگذاری» کنیم، یعنی برچسبهای مشخصی نظیر دستهٔ قرمز، دستهٔ آبی و دستهٔ سبز به آنها بدهیم، یا نامگذاری نکنیم تفاوتی ندارد. در اینجا راه حلی را با استفاده از دسته‌های نامگذاری شده ارائه می‌دهیم. با انتخاب ابتدا چهار پسر برای دستهٔ قرمز و سپس چهار پسر برای دستهٔ آبی، تعدادکل راههای تشکیل دسته‌ها برابر $C(۱۲, ۴)C(۸, ۴)$ است. دو پسر به خصوص را A و B می‌نامیم؛ تعداد راههای تشکیل دسته‌ها، با A برای دستهٔ قرمز و B برای دستهٔ آبی، برابر $C(۱۰, ۳)C(۷, ۳)$ است. درنتیجه، پاسخ عبارت است از

$$۶C(۱۰, ۳)C(۷, ۳)/[C(۱۲, ۴)C(۸, ۴)]$$

۵. $۱۶/۵۵$

بااستفاده از زمینهٔ راه حل مسألهٔ قبل، با نامگذاری پسرها با A، B و C، توجه می‌کنیم که برای تشکیل دسته‌ها با A در دستهٔ قرمز، B در دستهٔ آبی و C در دستهٔ سبز، $C(۹, ۳)C(۶, ۳)$ راه وجود دارد. بنابراین پاسخ، برابر $۶C(۹, ۳)C(۶, ۳)/[C(۱۲, ۴)C(۸, ۴)]$ است.

۶. تعداد اشیایی که دارای هیچیك از ویژگیهای α و β نیستند برابر $N-N(\alpha)-N(\beta)+N(\alpha, \beta)$ است. این عدد منفی نیست و بنابراین

$$N-N(\alpha)-N(\beta)+N(\alpha, \beta)\geqslant ۰$$

یا

$$N+N(\alpha, \beta)\geqslant N(\alpha)+N(\beta).$$

به‌همین ترتیب داریم

$$N+N(\alpha, \gamma)\geqslant N(\alpha)+N(\gamma) \quad \text{و} \quad N+N(\beta, \gamma)\geqslant N(\beta)+N(\gamma)$$

از جمع این نابرابریها، پاسخ نتیجه می‌شود.

۰۷ $(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots(1+x^{99})$ یا $\prod_{j=1}^{50}(1+x^{2j-1})$

۰۸
$$\left\{\sum_{j=0}^{20} x^j\right\}^3\left\{\sum_{j=0}^{10} x^{2j}\right\}^3\left\{\sum_{j=0}^{6} x^{3j}\right\}^2\times\sum_{j=0}^{5} x^{4j}\times\sum_{j=0}^{4} x^{5j}$$
$$\times\sum_{j=0}^{2} x^{10j}\times\sum_{j=0}^{1} x^{20j}$$

۰۹ معادله‌های

$$F(n)-F(n-1)=F(n-2),$$
$$F(n-1)-F(n-2)=F(n-3),$$
$$F(n-2)-F(n-3)=F(n-4),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F(2)-F(1)=F(0),$$

را باهم جمع کنید.

۱۰۰ رابطهٔ $F(n)=C(n+1,0)+C(n,1)+C(n-1,2)+\ldots$ از خلاصهٔ فصل ۴ را می‌توان به صورت

$$F(n)=\sum_{j+k=n+1} C(j,k)$$

نوشت. به‌همین ترتیب می بینیم که

$$F(n-2)=\sum_{j+k=n-1} C(j,k),\qquad F(n-3)=\sum_{j+k=n-2} C(j,k),$$
$$\ldots,\quad F(0)=\sum_{j+k=1} C(j,k).$$

اگرمجموع این رابطه‌ها را به‌برابری $C(0,0)=1$ اضافه‌کنیم، به‌دست می آوریم

$$F(n-2)+F(n-1)+\cdots+F(0)+1=\sum_{j+k<n} C(j,k).$$

بنابراین، نتیجه با استفاده از مسألهٔ قبل حاصل می‌شود.

۱۱. $(20!)(21!)/11!$

مضربهای ۳ را موقتاً کنار بگذارید؛ بیست عدد صحیح باقی‌ماندهٔ دیگر را می‌توان به $20!$ راه جایگشت داد. به‌ازای هریك از این جایگشتها، دربین اعداد صحیح و درانتهای آنها ۲۱ مکان وجود دارد. برای درج مضربهای ۳، ۱۰تا ازاین مکانها را انتخاب کنید؛ بنابراین $C(21, 10)$ انتخاب وجود دارند. اما می‌توان این مضربهای ۳ را به $10!$ راه درج کرد. لذا پاسخ برابر است با

$$(20!)\times C(21, 10)\times(10!)$$

۱۲. ۱۶۶۸۷

گوییم جایگشتی دارای ویژگی α_1 است درحالتی‌که بعد از a، بلافاصله b قرارگیرد، دارای ویژگی α_2 است درحالتی‌که بعداز b، بلافاصله c قرار گیرد، ...، دارای ویژگی α_7 است درحالتی که بعد از g، بلافاصله h قرار گیرد. مسأله، تعیین تعداد جایگشتهایی است که دارای هیچیك از این ویژگیها نباشند، و این مسأله‌را می‌توان با استفاده از اصل‌شمول‌ـعدم‌شمول حل کرد. می‌توان دید که

$$N(\alpha_1)=N(\alpha_2)=\dots=N(\alpha_7)=7!\text{،}\quad N(\alpha_1, \alpha_2)=6!\text{،}$$
$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=5!$$

وغیره. بنابراین پاسخ، برابر است با

$$8!-C(7, 1)\times 7!+C(7, 2)\times 6!-C(7, 3)\times 5!+C(7, 4)\times 4!$$
$$-C(7, 5)\times 3!+C(7, 6)\times 2!-C(7, 7)\times 1!$$

۱۳.
$$\{C(24,4)\}^5-5\{C(23,3)\}^5+10\{C(22,2)\}^5$$
$$-10\{C(21,1)\}^5+5\{C(20,0)\}^5$$

شرط تهی نبودن جعبه‌ها را موقتاً درنظر نمی‌گیریم. جعبه‌ها را با A، B، C، D و E برچسب می‌زنیم. بنابراین تعداد توزیعهای سنتها برابر $C(24, 4)$، یعنی تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20$ درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی‌است، که در آن x_1 را می‌توان به‌عنوان تعداد سنتهای موجود درجعبهٔ A تعبیر کرد و قس‌علی‌هذا. بنابراین تعداد توزیعهای تمام سکه‌ها برابر $\{C(24, 4)\}^5$ است. اکنون شرط تهی نبودن جعبه‌ها را درنظرگرفته و از اصل‌شمول ـ عدم شمول استفاده می‌کنیم. گوییم یك توزیع دارای ویژگی α است درحالتی‌که A تهی باشد،

دارای ویژگی β است درحالتی‌که B تهی باشد و غیره. بنابراین می‌بینیم که

$$N=\{C(۲۴,۴)\}^{۵},\ \ N(\alpha)=\{C(۲۳,۳)\}^{۵},\ \ N(\alpha,\beta)=\{C(۲۲,۲)\}^{۵}$$

وغیره، که پاسخ مطلوب را می‌دهد.

۱۴. ۸۶۴

ابتدا این شرط را نادیده می‌گیریم که دوشیء مشابه درمجاورت همدیگر قرار نگیرند. بنابراین تعداد کل جایگشتها برابر است با

$$N=\frac{۸!}{۲!۲!۲!۲!}=۲۵۲۰$$

اکنون اصل شمول ـ عدم شمول را به کار می‌بریم که در آن یك جایگشت دارای ویژگی α است درحالتی‌که Aها مجاورهم باشند، دارای ویژگی β است درحالتی که Bها مجاورهم باشند وغیره. می‌توان محاسبه‌کرد که

$$N(\alpha)=\frac{۷!}{۲!۲!۲!}=۶۳۰,\quad N(\alpha,\beta)=\frac{۶!}{۲!۲!}=۱۸۰,$$

$$N(\alpha,\beta,\gamma)=۶۰,\quad N(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=۲۴.$$

بنابراین پاسخ برابر است با

$$N-۴N(\alpha)+۶N(\alpha,\beta)-۴N(\alpha,\beta,\gamma)+N(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=۸۶۴.$$

۱۵. ۷۰۰

ابتدا برای به‌دست‌آوردن $۶!/(۳!۳!)$ یا ۲۰ جایگشت، Eهـا و Fهـا را جایگشت دهید. آن‌گاه درهریك ازاین ۲۰ جایگشت درهر ۳ مکان از ۷ مکان واقع بین‌حرفها ویا درانتهای حرفها، Dهادا درج کنید. بنابراین پاسخ برابر $۲۰C(۷,۳)$ است.

۱۶. ۳۶۰

درحل مسألهٔ قبل ۲۰ جایگشت Eها و Fها را به سه دسته تقسیم‌کنید: در ۴ جایگشت، Eها مجاور هم قرار ندارند؛ در ۱۲ جایگشت، دقیقاً دو E مجاور هم هستند؛ در۴ جایگشت هرسه E مجاورهم‌اند. درهریك ازاین سه‌نوع، Dها به‌ترتیب

به $C(۷, ۳)$، $C(۶, ۲)$، $C(۵, ۱)$ راه مـی‌توانند درج شوند. بنابـراین، پاسخ برابر است با $۴C(۷, ۳)+۱۲C(۶, ۲)+۴C(۵, ۱)$.

۱۷. ۱۷۴

ابتدا تمام آرایشهایی را در نظر می‌گیریم کـه DE در انتهای چپ و هفت حرف دیگر دنبال آن هستند. با حذف Fها تعداد این آرایشها شش‌تاست، یعنی

(۱) $DEDDEE$ (۲) $DEDEDE$ (۳) $DEDEED$

(۴) $DEEEDD$ (۵) $DEEDED$ (۶) $DEEDDE$

دراین شش آرایش، Fها را می‌توان به تعداد: $C(۳, ۱)$، $C(۵, ۳)$، $C(۴, ۲)$، $C(۳, ۳)$، $C(۴, ۲)$، $C(۳, ۱)$ راه درج کرد. مجموع این راهها برابر ۲۹ است، و پاسخ از ضرب این عـدد در ۶ به دست می‌آید تا علاوه بر DE زوجهای دیگر حروف نیز درانتهای چپ منظور شوند.

۱۸. ۲۶۰۰

به ازای هرجواب $x+y+z+v=۲۷$ در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، برای معادلهٔ دیگر جواب یکتای متناظری وجود دارد، زیرا

$$u=۳۰-x-y-z.$$

از این‌رو مسأله به سؤال دربارهٔ تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x+y+z+v=۲۷$$

درمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برمی‌گردد. پاسخ، برابر $C(۲۶, ۳)$ است.

۱۹. ۱۰۷۸

بنابر تقارن، تعداد جوابها با شرط $x>y$ با تعداد جوابها با شرط $x<y$ مساوی است. تعدادکل جوابها برابر $C(۲۵, ۳)$ یا ۲۳۰۰ است. تعداد جوابها با شرط $x=y$، برابر است با

$$\sum_{x=۱}^{۱۲} C(۲۵-۲x, ۱)=\sum_{x=۱}^{۱۲}(۲۵-۲x)=۱۴۴,$$

زیرا به‌ازای هرمقدارثابت x، معادلهٔ $۲x+z+w=۲۶$ یا $z+w=۲۶-۲x$

در مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، $C(۲۵-۲x, ۱)$ جواب دارد. بنابراین پاسخ، برابر $(۲۳۰۰-۱۴۴)/۲$ است.

۲۰. $(n+۱)(۲n^۲+۴n+۳)/۳$

مسأله به سؤال دربارهٔ تعداد انتخابهای $۲n$ شیء از $۴n$ شیء، که $۴n$ شیء به صورت مجموعه‌های nتایی مشابه‌اند (که بنابراین ۴ نوع مختلف از اشیاء وجود دارند) برمی‌گردد. این همان سؤال دربارهٔ تعداد جوابهای معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۲n$ در مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی نابیشتر از n است. طبق محاسبهٔ فصل ۵ این تعداد برابر $C(۲n+۳, ۳)-۴C(n+۲, ۳)$ است.

۲۱. $(nj)!/\{(j!)^n n!\}$

اولین دستهٔ jتایی از اشیاء را می‌توان به $C(nj, j)$ راه انتخاب کرد، دومین دستهٔ jتایی را می‌توان به $C(nj-j, j)$ راه انتخاب کرد و غیره. چون ترتیب دسته‌ها اهمیتی ندارد، پاسخ برابر است با

$$C(nj, j)C(nj-j, j)C(nj-۲j, j)\dots C(۳j, j)C(۲j, j)/n!.$$

۲۲. افرازهایی به اعداد صحیح مثبت زوج.
هیچ افرازی از ۱۰۰۰، به سه عدد صحیح مثبت فرد، وجود ندارد.

۲۳. افرازهای به چهار عدد صحیح مثبت فرد.

فرض کنیم $a+b+c+d$ با شرط $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$، افرازی از ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت زوج باشد. دراین صورت

$$(a-۱)+(b-۱)+(c-۱)+(d+۳)$$

افرازی از ۱۰۰۰ به‌چهارعدد صحیح مثبت فرد است. به‌علاوه این‌افراز، بین تمام افرازهای ۱۰۰۰ به چهار عدد صحیح مثبت زوج و بعضی از افرازهای ۱۰۰۰ به چهارعددصحیح‌مثبت فرد یك تناظر یك‌به‌یك به‌دست می‌دهد. این‌تناظر تنها «بعضی» از افرازهای ۱۰۰۰ به‌چهارعدد صحیح فرد را می‌دهد زیرا $d+۳$ حداقل ۴تا از $c-۱$ بیشتر است، و لذا در این تناظر افرازی نظیر $۲۵۱+۲۵۱+۲۴۹+۲۴۹$ وجود ندارد.

۲۴. افرازهای به اعداد صحیح مثبت فرد.

هرافرازی با جمعوندهای زوج را می‌توان با تقسیم هر جمعوند زوج $۲j$

به دو قسمت ۱ و $۱-j۲$، به افـرازی با جمعوندهـای فـرد تبدیل کـرد. مثلاً $۲۰۰+۳۰۰+۵۰۰$ به افـراز $۴۹۹+۲۹۹+۱۹۹+۱+۱+۱$ تبـدیل می‌شود. بنابراین هرافراز با جمعوندهای زوج تنها به‌یك افراز با جمعوندهای فرد تبدیـل می‌شود، اما این شیوه نمی‌تواند تمام افرازهـای با جمعوندهـای فرد را به دست دهد.

۳۵. ۴۰۲۱۳۰

اعداد صحیحی که ویژگی مذکور را ندارند بشمارید. مثلاً $۹^۶$ عدد صحیح با ۶ رقم وجود دارند به‌طوری که هیچ دو رقم متوالی آنها مساوی نیستند. بنابراین پاسخ، برابر است با

$$۱۰۰۰۰۰۰-(۹^۶+۹^۵+۹^۴+۹^۳+۹^۲+۹).$$

۳۶.
$$-۲۴+\sum_{j=۰}^{۲۲}(-۱)^j\{C(۲۴,j)+C(۲۳,j)$$
$$+۴۶(C۲۲,j)\}(۲۴-j)!$$

ابتدا آن جایگشتهایی را درنظر می‌گیریم که B دراولین مکان و A در دومین مکان قرار می‌گیرند. تعداد این جایگشتها برابر

$$\sum_{j=۰}^{۲۴}(-۱)^jC(۲۴,j)(۲۴-j)! \quad \text{یا} \quad D(۲۴)$$

است، زیرا این جایگشتها همان پریشها هستند. سپس جایگشتهایی‌را درنظرمی‌گیریم که A در دومین مکان و B در سومین مکان قرار می‌گیرند. بنابراستدلالی با استفاده از اصل شمول ـ عدم شمول، نظیر استدلالی که در نظریهٔ پریشها به‌کار رفت، تعداد این جایگشتها برابر است با،

$$\sum_{j=۰}^{۲۳}(-۱)^jC(۲۳,j)(۲۴-j)!$$

سرانجام، تعداد امکانها برای اینکه A و B در هر دو مکان مجاور بخصوص دیگری قرار گیرند، برابر است با

$$\sum_{j=۰}^{۲۲}(-۱)^jC(۲۲,j)(۲۴-j)!.$$

۰۲۷ 90

با اختیار α به‌عنوان این ویژگی که a و b مجاورند، β به‌عنوان این ویژگی که b و c مجاورند و قس‌علی‌هذا، اصل شمول ـ عدم شمول را برای $6!$ جایگشت نامشروط به‌کار برید.

۰۲۸ هروقت دو نفر باهم دست می‌دهند، تعداد افرادی که به دفعات فرد باهم دست داده‌اند به‌اندازهٔ ۲، ۰ یا ۲− تغییر می‌کند.

۰۲۹ تعدادآشنایان‌هرفرد دریك گروه n نفره‌یکی‌از nعدد صحیح ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ است. اگر هیچ دونفری دارای یك تعدادآشنا نباشند، آن‌گاه تمام n عــدد صحیح برای نمایش تعدادآشنایان به‌کار برده می‌شوند. اما دوعدد ۰ و $n-1$ نمی‌توانند همزمان اتفاق بیفتند، زیرا این بدان معنی است که یك فرد باتمام افراد آشناست، و دیگری باهیچکس آشنا نیست.

۰۳۰ این صرفاً صورتی دیگر از مسألهٔ قبل است.

۰۳۱ $m(3mk-m^2+3k+1)/6$

تعداد مربعهای ردیف اول را به $s_1(k, m)$، سپس تعداد مربعهای ردیف دوم را با $s_2(k, m)$ وغیره نشان می‌دهیم. پس تعدادکل مربعهای شبکه برابر است با

$$S(k, m)=\sum_{i=1}^{m} s_i(k,m).$$

حال $s_1(k, 1)=k$، $s_1(k, m)=ms_1(k, 1)=mk$؛ به‌همین ترتیب،

$$s_2(k, m)=(m-1)s_2(k, 2)=(m-1)(k-1)$$

وغیره. محاسبه می‌کنیم که

$$S(k, m)=mk+(m-1)(k-1)+(m-2)(k-2)$$
$$+\dots+1(k-m+1).$$

اگر دراین حاصلجمع ترتیب جمله‌ها را تغییر دهیم، داریم

$$S(k, m)=k-m+1+2(k-m+2)+3(k-m+3)$$
$$+\dots+m(k-m+m)$$

$$=(k-m)(1+2+3+\cdots+m)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2)$$

$$=(k-m)\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

واین همان عددی است که در بالا داده شده‌است.

۰۳۲ با ۲۵۵ حرکت می‌توان این انتقال را انجام داد.
مسأله را می‌توان برای n قرص بیان کرد، که مثلاً مستلزم $f(n)$ حرکت است. یک تحلیل ساده نشان می‌دهد که $f(n)=2f(n-1)+1$.

۰۳۳ فرض کنیم نقاط را با A، B، C، D، E و F نشان دهیم. طبق روش بخش ۲.۹ می‌توان فرض کرد که (مثلاً) ABC یک مثلث رنگی قرمز است. اگر DEF مثلث رنگی نباشد، آن‌گاه یک ضلع آن مثلاً DE سفید است. اگر ADE رنگی نباشد، آن‌گاه حداقل یکی از اضلاع AD و AE قرمز است. همین‌طور اگر BDE و CDE رنگی نباشند، حداقل یکی از BD و BE و حداقل یکی از CD و CE قرمز است. بنا براین حداقل دوتا از AD، BD و CD قرمز و یا حداقل دوتا از AE، BE و CE قرمزند. درحالت اول مثلثهای ABD، ACD و BCD، ودرحالت دوم مثلثهای ABE، ACE و BCE را درنظر بگیرید.

۰۳۴ الگویی برای حل مسأله بدین شرح است. فرض کنید اضلاع ABC قرمز و اضلاع DEF نیز قرمز باشند و فرض کنید بقیهٔ پاره‌خطها همگی سفیدند.

۰۳۵ طبق راه حل مسألهٔ ۳۳، می‌توان شش نقطهٔ دلخواه را اختیار کرد و دو مثلث رنگی به‌دست آورد. فرض کنید A رأسی ازیکی ازاین مثلثها باشد. آن‌گاه‌راه‌حل مسألهٔ ۳۳ را برای شش نقطه غیراز A به‌کار برید.

۰۳۶ از هریک ازنقاط، مثلاً A، ۶۵ پاره خط خارج می‌شود. ازاینها، حداقل ۱۷ تا دارای یک رنگ‌اند. مثلاً AB_1، AB_2، ...، AB_{17} قرمزند. اگر هر پاره خطی که دوتا از نقاط B_1، B_2، ...، B_{17} را به هم وصل می‌کند قرمز باشد، یک مثلث رنگی وجود دارد. درغیر این صورت می‌توان نتیجهٔ مسألهٔ ۲ از مجموعه مسائل ۳۱ را درمورد ۱۷ نقطه و ۳ رنگ به‌کار برد.

۰۳۷ این مسأله را می‌توان با دقیقتر کردن استدلالی که در حل مسألهٔ ۲ از مجموعهٔ

۳۱ داده شد حل کرد. A را نه به‌عنوان یکی از نقطه‌ها، بلکه به عنوان نقطه‌ای که رأس یك مثلث رنگی نیست در نظر بگیرید و نتیجهٔ مسألهٔ ۳۳ همین مجموعه را به‌کار برید.

۳۸. از هرکدام از نقاط، ۲۳ پاره‌خط که حداقل ۱۲ تای آنها دارای یك رنگ‌اند خارج می‌شوند. مثلاً پاره‌خطهای AB_1، AB_2، ...، AB_{12} قرمزند. اگر بین ۱۲ نقطهٔ از B_1 تا B_{12} یك مثلث رنگی قرمز موجود باشد آن‌گاه چنین مثلثی با نقطهٔ A جواب مطلوب است. درغیراین‌صورت، ۱۱ پاره خط B_1B_2، B_1B_3، ...، B_1B_{12} را در نظر می‌گیریم؛ حداقل ۶ تا از اینها، مثلاً B_1B_2، B_1B_3، ...، B_1B_7 دارای یك رنگ‌اند. اگر این رنگ، قرمز باشد، نقاط B_2، B_3، B_4 و B_5، جواب مسأله است. اگراین‌رنگ، سفید باشد آن‌گاه شش‌نقطهٔ B_2،B_3،...،B_7 را درنظرمی‌گیریم. در بین این ۶ نقطه یك مثلث رنگی، که الزاماً سفید است، وجود دارد. این مثلث با نقطهٔ B_1 جواب مسأله است.

۳۹. $n(n-1)(n-2)(n-3)/24$

هرچهار نقطه روی یك دایره، یك نقطهٔ تقاطع یکتا را تعیین می‌کند. بنابراین $C(n, 4)$ پاسخ مسأله است.

۴۰. $C(n, 4)+1+\frac{1}{2}n(n-1)$

هربار یك نقطه را اضافه می‌کنیم، وقتی از $j-1$ نقطه به j نقطه می‌رسیم نمو تعداد ناحیه‌ها، $R(j)-R(j-1)$، را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم j امین نقطه P و یکی از $j-1$ نقطه، Q باشد. اگر خط PQ دارای k نقطهٔ تقاطع در داخل دایره باشد، آن‌گاه خط PQ، $k+1$ ناحیهٔ جدید به‌وجود می‌آورد. اما تمام خطهای PQ (که P ثابت و Q هریك از $j-1$ نقطه است) طبق نتیجهٔ مسألهٔ قبل $C(j, 4)-C(j-1, 4)$ نقطهٔ تقاطع به وجود می‌آورند. بنابراین داریم

$$R(j)-R(j-1)=j-1+C(j, 4)-C(j-1, 4),$$

و با جمع این مقادیر به ازای $j=2$ تا $j=n$ می‌توان مسأله را حل کرد.

۴۱. $(n^2-n)/2$، اگر n فرد بوده و مضربی از ۳ نباشد؛ $(n^2-2n)/2$ اگر n زوج بوده ومضرب ۳ نباشد؛ وقتی n مضرب ۳ باشد درهرحالت $2n/3$ راکم کنید.

۴۲. $C(n+5, 5)$

این، تعداد جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_6=n$ در مجموعه اعداد صحیح نامنفی است که در آن x_1 تعداد تاسهایی است که عدد یك را نشان می‌دهند، x_2 تعداد تاسهایی است که عدد دو را نشان می‌دهند وغیره.

۴۳. $(n^3+5n+6)/6$

از تعداد ناحیه‌های تقسیم یك صفحه به‌وسیلهٔ n خطی که هیچ دوتای آنها موازی نیستند و هیچ سه‌تای آنها متقارب نمی‌باشند استفاده می‌کنیم. این تعداد را در بخش ۲.۹ به $f(n)$ نشان دادیم و ثابت شدکه

$$f(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2).$$

اکنون در مسألهٔ حاضر، اگر هردفعه یك صفحه را دخالت دهیم و اگر jامین صفحه در تعداد نواحی فضا نمو $g(j)-g(j-1)$ را سبب شود، آن‌گاه، می‌توان استدلال کرد که

$$g(j)-g(j-1)=f(j-1).$$

با جمع این معادله به‌ازای $j=2$ تا $j=n$ پاسخ به‌دست می‌آید.

۴۴. $1/3$

هرآرایشی از n عدد صحیح را درنظر می‌گیریم: ۱، ۲، ۳ به‌ترتیب درمکانی مثلاً در iامین، jامین و kامین مکان رخ می‌دهند. اکنون بقیهٔ اعداد صحیح را در جای خود ثابت نگه می‌داریم، ولی ۱، ۲ و ۳ را جایگشت می‌دهیم. برای قرار-دادن ۱، ۲، ۳ در i امین، j امین و k امین مکان ۶ راه وجود دارد؛ دو راه ازاینها مساعدند، بدین معنا که در دو راه ۲ بین ۱ و ۳ رخ می‌دهد. چون در هر انتخاب مکانهای i، j، k ممکن است همین دلیل را به‌کار برد، می‌بینیم که احتمال برابر $2/6$ یا $1/3$ است.

۴۵. $$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j C(n, j)(2n-j)!}{2^{n-j}}$$

با اختیار ویژگی α_1 با این معنا که Aها مجاور یکدیگرند، ویژگی α_2 با این معنا که Bها مجاور هم‌اند وغیره، اصل شمول ـ عدم شمول را برای جایگشتهای نامشروط

به‌کار برید.

۴۶. $C(n,\ j)D(j)/n!$

$n-j$ عدد صحیح را انتخاب کنید که در جای طبیعی خود قرار گیرند، و آن‌گاه بقیه می‌توانند به $D(j)$ راه، که در آن $D(j)$ پریشها را نشان می‌دهد، مرتب شوند.

۴۷. $\sum_{j=0}^{n} C(k+۱,\ j)C(k+۱-j,\ n-۲j)$

ابتدا Bها را، با $k+۱$ فضای بین و انتهای آنها در یك سطر بچینید. آن‌گاه تعداد جایگشتهایی را در نظر بگیرید که دارای j جفت A در j فضا و $n-۲j$ تك A در $n-۲j$ فضای دیگر هستند.

۴۸. $\sum_{j=0}^{n} (-۱)^{j}C(n,\ j)(۲n-j)!$

از اصل شمول-عدم‌شمول که برای تعداد کل $(۲n)!$ جایگشت به‌کار رفت استفاده کنید. یعنی یك جایگشت دارای ویژگی $\alpha_۱$ است درحالتی که ۱ در مکان طبیعی خود باشد، دارای ویژگی $\alpha_۲$ است درحالتی که ۳ درمکان طبیعی خود باشد وغیره.

۴۹. (i) $g(n,\ k)$ ی فصل ۸؛
(ii) $G(n,\ k)$ ی فصل ۸.

۵۰. رابطهٔ بازگشتی عبارت است از

$$K(n,\ j)=K(n-۲,\ j-۱)+K(n-۱,\ j).$$

حدس مناسب عبارت است از $K(n,\ j)=C(n-j+۱,\ j)$.

۵۱. جدول

	ستون اول	ستون دوم	ستون سوم
سطر اول:	AD	BD	CD
سطر دوم:	AE	BE	CE
سطر سوم:	AF	BF	CF

را در نظر بگیرید. اگر سطری شامل دوجفت ناآشنا باشد، سه‌تایی دیگری را با ویژگی α به دست می‌آوریم. اگر سطری شامل سه جفت ناآشنا باشد، سه سه‌تایی با ویژگی α به‌دست می آوریم. دو مشاهدهٔ مشابه می‌توانند درمورد ستونی که شامل دو یا سه جفت از آشناهاست انجام شود. سپس اگر جدول شامل هفت جفت یا جفتهای بیشتری از ناآشناها باشد، باید سطری با سه‌جفت ناآشنا وجود داشته‌باشد و مسأله حل می‌شود. اگر جدول شامل هفت جفت یا جفتهای بیشتری از افراد آشنا باشد، استدلال مشابهی به کار می‌رود. اگر جدول شامل شش جفت ناآشنا و سه جفت آشنا باشد، آن‌گاه یا سطری دارای سه جفت ناآشناست ویا هرسطر دارای دوجفت ناآشناست. درهرحالت مسأله حل می‌شود. بقیهٔ استدلال رابه‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

۵۲. ۶۱۰

فرض کنیم پسر می‌تواند n پله را به $f(n)$ طریق بالا رود، بنابراین باید $f(۱۴)$ را تعیین کنیم. حال $f(n)=f(n-۱)+f(n-۲)$، زیرا پسرمی‌تواند برای رسیدن به nامین پله مستقیماً از یکی از دو پلهٔ قبلی حرکت کند. این رابطهٔ بازگشتی، همان رابطهٔ $F(n)$ اعدادفیبوناچی بخش۱.۴ است، اما مقادیر آغازکننده، در اینجا عبارت‌اند از $f(۱)=۱$ و $f(۲)=۲$؛ بنابراین $f(n)=F(n-۱)$ و درنتیجه $f(۱۴)=F(۱۳)$.

۵۳. ۴۹۹۵ یا $\sum_{j=۱}^{۹}(۱۰-j)C(j+۴,۴)$

اگر از عدد صحیح ۱۰۰۰۰۰۰ صرفنظر کنیم، توجه می کنیم که تمام اعداد دیگر را می‌توان به صورت شش عدد صحیح با رقمهای $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_۶$ از چپ به‌راست تصور کرد که در آنها ۰ می‌تواند به‌عنوان یك‌رقم‌منظورشود و $d_۱$،$d_۲$،...،$d_۵$ را به‌عنوان تفاضل ارقام مجاور، به صورت $d_۱=x_۲-x_۱$، $d_۲=x_۳-x_۲$، ...، $d_۵=x_۶-x_۵$ تعریف می کنیم؛ برای اعداد صحیح با ویژگی مطلوب، تفاضلهای $d_۱$ تا $d_۵$ دارای مقادیر نامنفی‌اند. بعلاوه، رقمهای آنها به صورت یکتا از روی هر مجموعه‌ای از مقادیر $x_۱$، $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$، $d_۴$، $d_۵$ تعیین می‌شوند و هر چنین مجموعه‌ای درمعادلهٔ $d_۱+d_۲+d_۳+d_۴+d_۵=x_۶-x_۱$ صدق می کند. تعداد جوابهای این معادله درمجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی، برابر $C(x_۶-x_۱+۴,۴)$ است. با نوشتن j به جای $x_۶-x_۱$، می‌توانیم جواب حاصل را جمع‌وجور کنیم، به‌خاطر داشته‌باشید که $۰\leqslant x_۱\leqslant x_۶\leqslant ۹$.

فهرست راهنما

نمادها

مراجع

[1] H. Hadwiger, H. Debrunner and V. Klee, *Combinatotorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[2] John Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley, New York, 1958.

[3] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Carus Monograph No.14, John Wiley, New York, 1963.

[4] W. A. Whitworth, *Choice and Chance*, Hafner, New York, 1959.

مسائل ترکیبیاتی کلی درمراجع [۲]، [۳] و [۴] مورد بحث واقع شده‌اند، درصورتی‌که مرجع [۱] در رابطه بامطالب بخش ۹ این‌کتاب است. مراجع [۱]، [۲] و [۳] کتابهای پیشرفته‌ای هستند. مرجع [۴]، چاپ تازه‌ای از کتاب قدیمی است، مطالعهٔ آن آسان است، ولی خیلی روزآمد نیست.