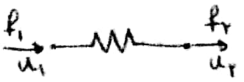
فنرها :

$F = K\delta$



$\delta = u_2 - u_1$

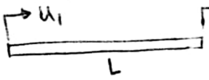
$f = K\delta = K(u_2 - u_1)$

$f_1 + f_2 = 0 \rightarrow f_1 = -f_2 \rightarrow \begin{cases} f_1 = -K(u_2 - u_1) \\ f_2 = K(u_2 - u_1) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [u] = [K]^{-1}[F]$

المان میله :

$K = \frac{EA}{L}$



$u_{(x)} = u_1 N_{1(x)} + u_2 N_{2(x)}$ و $N_{1}(x) = 1 - \frac{x}{L}$ و $N_2(x) = \frac{x}{L}$

$u_{(x)} = [N_{1(x)} \quad N_{2(x)}] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [N][u]$

جابجایی یک گره با نیروی خارجی $\delta = \frac{PL}{AE}$ و $K = \frac{AE}{L}$

کرنش محوری : $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}$

تنش محوری : $\sigma_x = E\varepsilon_x = E\,\frac{u_2 - u_1}{L}$

$P = \sigma_x A = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1)$

$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \\ f_2 &= \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) \end{aligned}\right\} \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

کار :

$W = \frac{1}{2}K\delta^2 = U_e$

$U_e = \frac{1}{2}K\delta^2 = \frac{1}{2}\,\frac{AE}{L}\delta^2$

$\delta = \frac{PL}{AE} \Rightarrow U_e = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left(\frac{PL}{AE}\right)^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon V$

قضیه کاستیلیانو (انرژی) :

$\Delta U_e = F_i \Delta\delta_i \Rightarrow \frac{\Delta U_e}{\Delta \delta_i} = F_i$

$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i$

$U_e = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon V = \frac{1}{2}E\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)^2 AL$

$\frac{\partial U_e}{\partial u_1} = \frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = f_1$

$\frac{\partial U_e}{\partial u_2} = \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) = f_2$

قضیه کاستیلیانو برای المان پیچشی :

$\tau = \frac{Tr}{J}$

$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Tr}{JG}$ و $U_e = \frac{T^2 L}{2GJ}$ و $J = \int_A r^2 dA$

$\theta = \frac{TL}{GJ} \rightarrow T = \frac{JG\theta}{L} \rightarrow U_e = \frac{JG}{2L}\theta^2$

$\Rightarrow \frac{\partial U_e}{\partial \theta} = T = \frac{JG\theta}{L}$

$U_e = \frac{JG}{2L}\theta^2$ و $U_F = -T\theta$

$\Pi = \frac{JG}{2L}(\theta_2^2 - \theta_1^2) - T_1\theta_1 - T_2\theta_2$

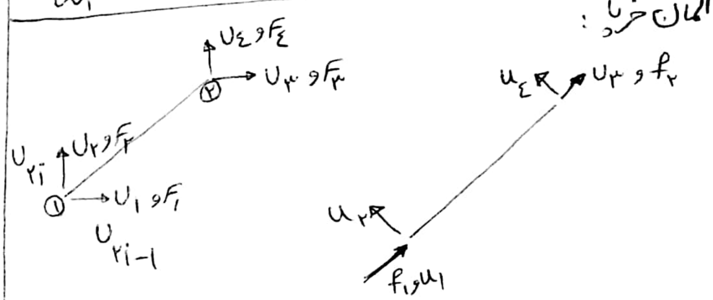
انرژی پتانسیل min کل :

$\left.\begin{aligned} \Pi &= U_e + U_F \\ U_F &= -W \end{aligned}\right\} \Pi = U_e - W$

شرط min شدن انرژی پتانسیل کل کدوی :

$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0$ و $i = 1, 2, \ldots, N$

المان خرپا :



$\begin{cases} u_1 = U_1\cos\theta + U_2\sin\theta \\ u_2 = U_3\cos\theta + U_4\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} f_2 = K(u_2 - u_1) \\ f_1 = -K(u_2 - u_1) \end{cases}$

$KU = F \rightarrow \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow [U] = [K]^{-1}[F]$

انتقال المان :

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & \sin \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$

$Ku = f \rightarrow \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

$\underbrace{[R^T]\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[R]}_{[K_e]}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$

$$[K_e] = K \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin\cos & -\cos^2 & -\sin\cos \\ \sin\cos & \sin^2 & -\sin\cos & -\sin^2 \\ -\cos^2 & -\sin\cos & \cos^2 & \sin\cos \\ -\sin\cos & -\sin^2 & \sin\cos & \sin^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{AE}{L}$$

ماتریس سختی یک المان خرپا

---

محاسبه ی تنش و کرنش: (برحسب u)

$$u_1 = U_1\cos\theta + U_2\sin\theta$$

$$u_2 = U_3\cos\theta + U_4\sin\theta$$

کرنش $\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

تنش $\sigma = E\varepsilon = E\left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)$

---

محاسبه ی تنش و کرنش: (برحسب U)

$$\varepsilon = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}[R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = E\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}[R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix}$$

$\sigma > 0$ کششی

$\sigma < 0$ فشاری

$$R = \begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos & \sin \end{bmatrix}$$

محاسبه ی نیروی المان:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}[R]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

K برای هر المان جداگانه حساب می شود و در ماتریس بالا قرار می گیرد:

$$K_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1}$$

اگر خواستیم نیروی المان را با u بیان کنیم:

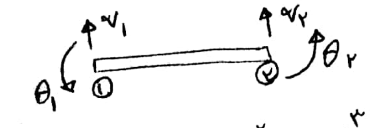
$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

برحسب F و U:

$$[K_e]\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

---

المان تیر:




$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x)\theta_2$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad , \quad N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad , \quad N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

---

مقادیر تنش: (اکسترمم)

$$\sigma_x(x) = y_{max} E \frac{d^2[N]}{dx^2}[\delta]$$

$$\sigma_{x(x=0)} = y_{max} E\left[\frac{6}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{2}{L}(2\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\sigma_{x(x=L)} = y_{max} E\left[\frac{6}{L^2}(v_1 - v_2) + \frac{2}{L}(2\theta_2 + \theta_1)\right]$$

---

استفاده از قضیه کاستیگلیانو:

$$U_e = \int \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \, dv$$

$$U_e = \frac{EI_z}{2}\int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$v(x) = N_1 v_1 + N_2\theta_1 + N_3 v_2 + N_4\theta_2$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_1} = F_1 \;,\; \frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} = M_1 \;,\; \frac{\partial U_e}{\partial v_2} = F_2 \;,\; \frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} = M_2$$

---

ماتریس سختی المان تیر:

$$K = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

---

روش کار معادل برای بارهای گسترده:

$$W = \int_0^L q(x) v(x)\, dx$$

$$W = F_1 v_1 + M_1\theta_1 + F_2 v_2 + M_2\theta_2$$

$$W = \int_0^L q(x)\left[N_1(x) v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x)\theta_2\right] dx$$

$$F_1 = \int_0^L q(x) N_1(x)\, dx \quad , \quad F_2 = \int_0^L q(x) N_3(x)\, dx$$

$$M_1 = \int_0^L q(x) N_2(x)\, dx \quad , \quad M_2 = \int_0^L q(x) N_4(x)\, dx$$

---

ماتریس سختی برای المان تیر با بار محوری:

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

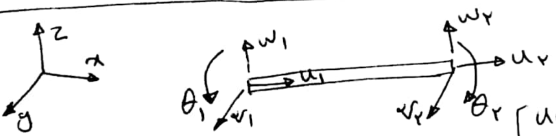
اگر المان تیر کج باشد باید از ماتریس تبدیل استفاده شود:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

اما ماتریس سختی یک المان تیر کج:

$$[K_e]=[R]^T[K][R]$$

المان تیر سه بعدی:

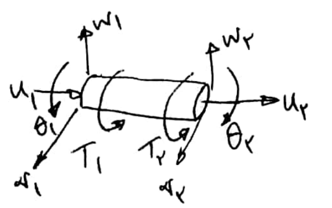



$$\begin{bmatrix} [K_{axial}] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{bending}]_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & [K_{bending}]_{xz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \\ w_1 \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_1} \\ M_{z_1} \\ f_{y_2} \\ M_{z_2} \\ f_{z_1} \\ M_{y_1} \\ f_{z_2} \\ M_{y_2} \end{Bmatrix}$$

برای بار گسترده یکنواخت:

$$\begin{Bmatrix} f_{z_1} \\ M_{z_1} \\ f_{z_2} \\ M_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

حالت سه بعدی برای تیر با تحمل دو پیچش:




درواقع در این حالت داریم:

۱- خمش حول دو محور y و z

۲- کرنش محوری ناشی از نیروی محوری

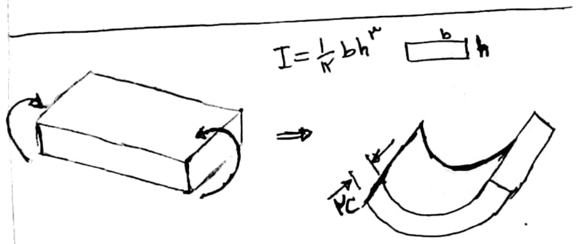
۳- جابجایی های گره در راستای v و w

۴- پیچش در هر گره حول محور اصلی المان

$$\begin{bmatrix} K_{axial} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{bending}]_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{bending}]_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [K_{torsion}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \\ w_1 \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_1} \\ M_{z_2} \\ f_{y_2} \\ M_{z_1} \\ f_{z_1} \\ M_{y_1} \\ f_{z_2} \\ M_{y_2} \\ M_{x_1} \\ M_{x_2} \end{Bmatrix}$$

که درواقع ماتریس سختی در این حالت $12\times12$ می شود.

$I=\frac{1}{12}bh^3$




$$\sigma=\frac{Mc}{I}$$

در تیرها توابع شکل:

$$N_1(x)=1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2(x)=x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3(x)=\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4(x)=\frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}$$

$$v(x)=N_1(x)v_1+N_2(x)\theta_1+N_3(x)v_2+N_4(x)\theta_2$$

## شروط تمامیت و سازگاری:

**سازگاری:** در امتداد مرزهای المان متغیر میدانی و مشتقات جزئی آن تا یک مرتبه کمتر از بیشترین مرتبه مشتق ظاهر شده در فرم انتگرالی معادلات المان باید پیوسته باشند.

**تمامیت:** در صورتیکه اندازه المان در طی بهبود مش بندی به سمت صفر میل کند متغیر میدانی و مشتق های جزئی آن تا مرتبه ای برابر با بیشترین مرتبه مشتق ظاهر شده در فرم انتگرالی باید قادر باشند مقادیر ثابت باشند.

---

متغیر میدانی المان میله:

$$u(x) = N_1(x)\,u_1 + N_2(x)\,u_2$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

---

فرم های چند جمله ای: همای هندسی:

مثلث پاسکال:

$1$

$x \quad y$

$x^2 \quad xy \quad y^2$

$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

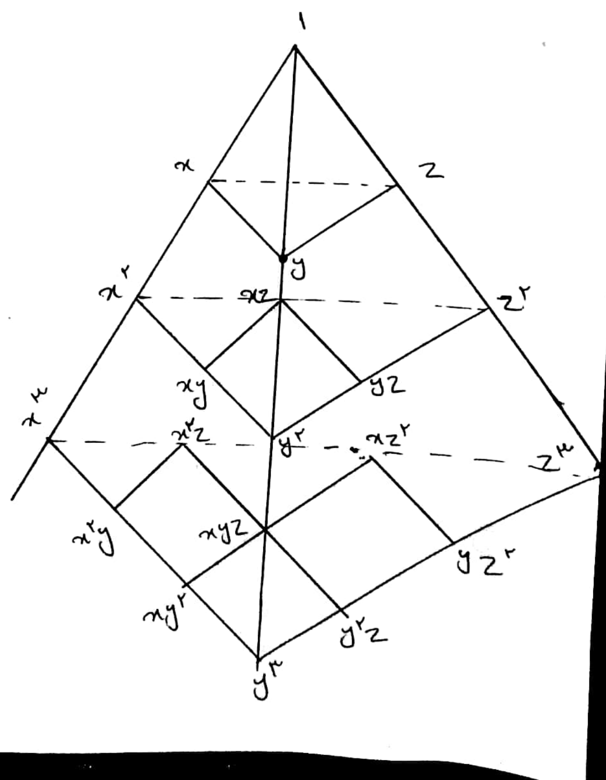
$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$

ناکامل متقارن: $P(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

ناکامل نامتقارن: $P(x,y) = a_0 + a_1x^2 + a_2y + a_3xy$

---

حالت سه بعدی:




---

روش باقیمانده های وزنی گالرکین — شرط همگن بودن — $y(a) = y(b) = 0$

جواب تقریبی $y^* = \sum_{i=1}^{n} C_i N_i(x)$ و $R(x) = D^{(n)}\left[y^*(x), x\right] \neq 0$

$$\int_a^b \underbrace{W_i(x)}_{N_i(x)} R(x)\,dx = 0 \leftarrow a \leqslant x \leqslant b$$

$$N(x) = (x - x_a)^p (x - x_b)^q$$

$$y^* = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots$$

اگر شرایط همگن نبود باید:

$$y(a) \neq y(b) = 0$$

$$\rightarrow y^* = C_1 N_1(x) + \underset{\text{ارضای شرایط ناهمگن}}{f(x)}$$

---

روش اجزا محدود گالرکین:

$$n_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$$

$$n_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$$

$$n_i(x) = 0 \qquad x < x_{i-1} \qquad x > x_{i+1}$$

فرمول بندی المان ها:

$$y(x) = y_i N_1(x) + y_{i+1} N_2(x)$$

$$N_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$$

---

معادلات المانها:

$$\iiint_V N_i(x)\, M\, dV = \int_0^L N_i M A\, dx = 0$$

$M$ معادله دیفرانسیل یک المان دلخواه است.

$$i = 1, 2$$

مثلاً برای میله:

$$E\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \rightarrow E\frac{d^2u}{dx^2} = M$$

برای تیر:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right) - q(x) = 0 \rightarrow M = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right) - q(x)$$

جهت انجام انتگرال گیری انتگرال هایی که مشتق $N_i$ها در آنها ظاهر می شود در سمت چپ تساوی و بقیه روابط سمت راست بروند که سمت چپ همان ماتریس سختی در جا به جایی ها را می دهد و سمت راست نیروها را.

---

دو نوع بهبود مش بندی: ۱ـ نوع h که کاهش اندازه المانهاست ← همگرایی به پاسخ دقیق

۲ـ افزایش مرتبه توابع درونیاب ← همگرایی به پاسخ دقیق

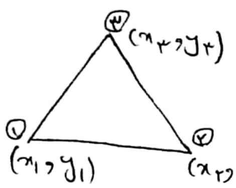
المان مثلثی ۳ گرهی:

$$N_1=\frac{1}{2A}\left((x_2y_3-y_2x_3)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\right)$$

$$N_2=\frac{1}{2A}\left((x_3y_1-x_1y_3)+(y_3-y_1)x+(x_1-x_3)y\right)$$

$$N_3=\frac{1}{2A}\left((x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$




المان مستطیلی ۸ گرهی:

$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(r-1)(1-s)(r+s+1)$$

$$N_2(r,s)=\frac{1}{4}(r+1)(1-s)(s-r+1)$$

$$N_3(r,s)=\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1)$$

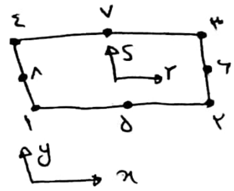
$$N_4(r,s)=\frac{1}{4}(r-1)(1+s)(r-s+1)$$

$$N_5(r,s)=\frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$$

$$N_6(r,s)=\frac{1}{2}(1+r)(1-s^2)$$

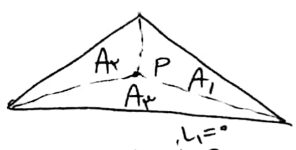
$$N_7(r,s)=\frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$$

$$N_8(r,s)=\frac{1}{2}(1-r)(1-s^2)$$

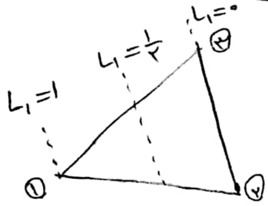


مختصات سطح:

$$L_1=\frac{A_1}{A},\ L_2=\frac{A_2}{A} \text{ و } L_3=\frac{A_3}{A}$$



$$L_1+L_2+L_3=1$$



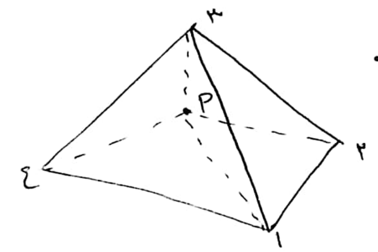
① → $L_1=1$ و $L_2=L_3=0$

② → $L_2=1$ و $L_1=L_3=0$

③ → $L_3=1$ و $L_2=L_1=0$

$$\varphi_{(x,y)}=L_1\varphi_1+L_2\varphi_2+L_3\varphi_3$$

المان هرمی ۴ گرهی:



$v_1 \to P234$

$v_2 \to P134$

$v_3 \to P124$

$v_4 \to P123$

$$L_1=\frac{v_1}{v} \text{ و } L_2=\frac{v_2}{v} \text{ و } L_3=\frac{v_3}{v} \text{ و } L_4=\frac{v_4}{v}$$

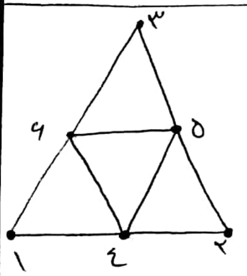
$$v_1+v_2+v_3+v_4=v \text{ و } L_1+L_2+L_3+L_4=1$$

$$v=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}$$

$$\varphi_{(x,y,z)}=L_1\varphi_1+L_2\varphi_2+L_3\varphi_3+L_4\varphi_4$$

$$\iiint_v L_1^aL_2^bL_3^cL_4^d\,dv=\frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}(6v)$$

المان مثلثی ۶ گرهی:



$$N_1=L_1(2L_1-1) \qquad N_4=4L_1L_2$$

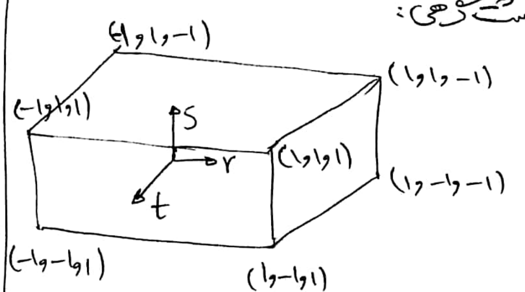
$$N_2=L_2(2L_2-1) \qquad N_5=4L_2L_3$$

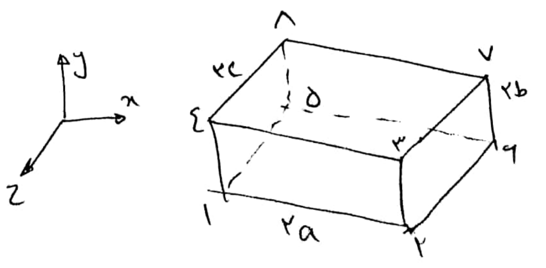
$$N_3=L_3(2L_3-1) \qquad N_6=4L_1L_3$$

انتگرال‌گیری روی مختصات سطح:

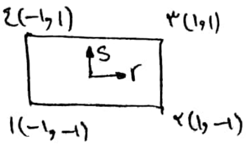
$$\iint_A L_1^aL_2^bL_3^c\,dA=(2A)\frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}$$

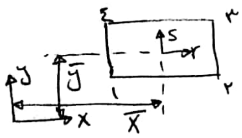
المان آجری هشت گرهی:




المان مستطیلی: (چهار گرهی)



$$\bar{y}=\frac{y_1+y_4}{2}$$

$$r=\frac{x-\bar{x}}{a}$$

$$s=\frac{y-\bar{y}}{b}$$

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$N_1(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_2(r,s)=\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3(r,s)=\frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4(r,s)=\frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

المان آجری:

$$\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2},\ \bar{y} = \frac{y_2 + y_1}{2},\ \bar{z} = \frac{z_5 + z_1}{2}$$

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t),\ N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t),\ N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t),\ N_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t),\ N_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t)$$

شرط سازگاری ← متغیر میدانی یک چندجمله‌ای کامل و متقارن یا کامل باشد.

شرط تمامیت ← مشتق جزئی مرتبه اول متغیر میدانی مقدار ثابتی باشد.

فرمول بندی ایزوپارامتریک:

$$\left.\begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^{8} N_i(r,s)\, x_i \\ y = \sum_{i=1}^{8} N_i(r,s)\, y_i \end{array}\right\} \varphi_{(x,y)} = \varphi_{(r,s)} = \sum_{i=1}^{4} N_i(r,s)\, \varphi_i$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ژاکوبین:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}$$

المان‌های متقارن محوری:

$$\varphi_{(r,z)} = \sum N_i(r,z)\, \varphi_i$$

$$F_{(r,\theta,z)} = \iiint_v f(r,\theta,z)\, dv = \iiint_v f(r,\theta,z)\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$F_{(r,\theta,z)} = F_{(r,z)} = 2\pi \iint_A f(r,z)\, r\, dr\, dz,\quad r = L_1 r_1 + L_2 r_2 + L_3 r_3$$

انتگرال‌گیری عددی (مربع‌سازی گاوسی):

$$I = \int_{x_1}^{x_2} h(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(r)\, dr = \sum_{i=1}^{m} w_i f(r_i)$$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r,s)\, dr\, ds = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_j w_i f(r_i, s_j)$$

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r,s,t)\, dr\, ds\, dt = \sum_{k=1}^{L}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} w_k w_j w_i f(r_i, s_j, t_k)$$

کاربرد در جامدات:

تنش صفحه‌ای:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y - \nu \varepsilon_x)$$

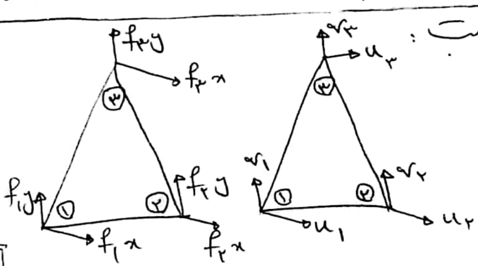
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

انرژی کرنشی جسم تحت تنش صفحه‌ای: $U_e = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon^T D \varepsilon\, dv$

$dv = t\, dx\, dy$ و حجم المان $v$

مثلث کرنش ثابت:




$$u_{(x,y)} = u_1 N_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3$$

$$v_{(x,y)} = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3$$

$$[\varepsilon] = [B][\delta]$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},\quad \delta = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_v \varepsilon^T D \varepsilon\, dv = \frac{1}{2}\iiint \delta^T B^T D B \delta\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\delta^T (v B^T D B \delta)$$

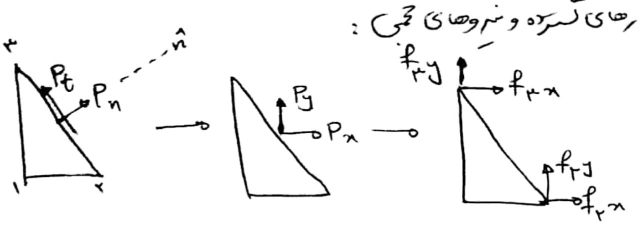
$$f=\begin{bmatrix} f_{1x}\\ f_{2x}\\ f_{3x}\\ f_{1y}\\ f_{2y}\\ f_{3y}\end{bmatrix} \quad , \quad W=\delta^T f$$

$$\Pi = U_e - W$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\delta^T K\delta-\delta^T f$$

$$K=V B^T D B$$

بارهای گسترده و نیروهای حجمی:




$$f_{2x}^{(P)}=t\int_2^3 P_x N_2(x,y)\,ds$$

$$f_{3x}^{(P)}=t\int_2^3 P_x N_3(x,y)\,ds$$

$$f_{2y}^{(P)}=t\int_2^3 P_y N_2(x,y)\,ds$$

$$f_{3y}^{(P)}=t\int_2^3 P_y N_3(x,y)\,ds$$

$$\left\{f^{(P)}\right\}=\int_S [N]^T\begin{bmatrix}P_x\\ P_y\end{bmatrix} t\,ds$$

$$[N]^T=\begin{bmatrix} N_1 & 0\\ N_2 & 0\\ N_3 & 0\\ 0 & N_1\\ 0 & N_2\\ 0 & N_3\end{bmatrix}$$

نیروهای حجمی:

$$u(x,y)=u_1N_1+u_2N_2+u_3N_3+N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3$$

کار انجام شده توسط نیروهای حجمی:

$$W=\rho t\iint_A F_{Bx}(N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3)\,dx\,dy+$$
$$+\rho t\iint_A F_{By}(N_1v_1+N_2v_2+N_3v_3)\,dx\,dy$$

$$W_b=f_{1x}^{(b)}u_1+f_{2x}^{(b)}u_2+f_{3x}^{(b)}u_3+f_{1y}^{(b)}v_1+f_{2y}^{(b)}v_2+f_{3y}^{(b)}v_3$$

$$f_{ix}^{(b)}=\rho t\int_A N_i F_{Bx}\,dx\,dy \quad i=1,3$$

$$f_{iy}^{(b)}=\rho t\int_A N_i F_{By}\,dx\,dy \quad , i=1,3$$

$$f^{(b)}=\rho t\int_A [N]^T\begin{bmatrix}f_{Bx}\\ f_{By}\end{bmatrix}dx\,dy$$

کرنش صفحه‌ای المان مستطیلی:

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad , \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$$\sigma_x=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right]$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}=G\gamma_{xy}$$

$$U_e=\frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon^T D\varepsilon\,dV$$

$$D=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon=B\delta \quad , \quad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\delta^T=[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

$$U_e=\frac{1}{2}\delta^T K\delta \quad , \quad K=\iiint_V B^T D B\,dV$$

فرمول‌بندی ایزوپارامتریک:

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{4}N_i(r,s)\,u_i$$

$$v(x,y)=\sum_{i=1}^{4}N_i(r,s)\,v_i$$

ماتریس تبدیلات هندسی:

$$[G]=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}J_{22} & -J_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11}\\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} = PS$$

$$\varepsilon = GPS$$

$$B = GP$$

$$\varepsilon = BS$$

$$K = t\int [B]^T DB\, d_A$$

$$d_A = dx\,dy = |J|\,dr\,ds$$

$$K = t\sum\sum w_i w_j\, B^T DB|J|\,dr\,ds$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & \frac{N_2}{r} & \frac{N_3}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$K \simeq 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}]$$

تنش متقارن محوری:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)\right]$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{rz} = G\gamma_{rz}$$

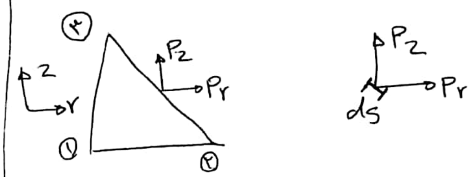
$$\sigma = DE$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

بارهای المان متقارن:

$$f^P = \begin{bmatrix} f_r^{(P)} \\ f_z^{(P)} \end{bmatrix} = 2\pi\int N^T \begin{bmatrix} P_r \\ P_z \end{bmatrix} r\,ds$$

مسیر




نیروهای حجمی (به ازای جرم واحد) $R_B$ و $Z_B$ به ترتیب در امتداد شعاعی و محوری می‌باشند:

$$f^{(B)} = 2\pi\rho\int_A N^T \begin{bmatrix} R_B \\ Z_B \end{bmatrix} r\,dr\,dz$$

فرمول بندی اجزا محدود:

$$u(r,z) = \sum N_i(r,z)u_i$$

$$w(r,z) = \sum N_i(r,z)w_i$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial r}u_i, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \sum \frac{N_i}{r}u_i$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial z}w_i, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial z}u_i + \sum \frac{\partial N_i}{\partial r}w_i$$

$$\varepsilon = BS$$

$$S^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3]$$

$$K = \iiint_V B^T DB\, dV = 2\pi\iint_A B^T DB\, r\,dr\,dz$$