فصل اول

ماتریس و حل دستگاه

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.

- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.

- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.

- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.

- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ ماتریس

ابتدا چند تعریف در مورد ماتریس‌ها مرور می‌شود.

۱.۱ ماتریس بالا و پایین مثلثی

قطر اصلی یک ماتریس مربعی از عنصر روی سطر اول و ستون اول شروع می‌شود و تا سطر nام و ستون nام ادامه دارد. ماتریسی که تمام عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس پایین مثلثی و ماتریسی که تمام عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشد را ماتریس بالا مثلثی می‌نامند. به عنوان مثال ماتریس‌های A و B بالا مثلثی و ماتریس‌های C و D پایین مثلثی هستند:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

۲.۱ ضرب ماتریس‌ها

در حالت کلی می‌توان ماتریس $A_{m\times n}$ را در $B_{n\times p}$ ضرب کرد که زیروندها، بعد[۱] یا اندازه ماتریس را نشان می‌دهند. عدد اول تعداد سطرها و عدد دوم تعداد ستون‌های ماتریس را نمایش می‌دهد.

$$C_{m\times p}=A_{m\times n}B_{n\times p}$$

برای ضرب ماتریس‌ها باید سطر ماتریس اول را در ستون ماتریس دوم ضرب کرد و در جای مناسب قرار داد. به عنوان مثال سطر اول ماتریس A اگر در ستون چهارم ماتریس B ضرب شود، پاسخ باید در مکان $(1,4)$ از ماتریس ضرب قرار گیرد. اگر تعریف شود:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad C=AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 10\end{bmatrix}$$

در حالت کلی ضرب قابلیت جابجایی ندارد.

[۱] Dimension

۳.۱ ترانهاده

ترانهاده[۲] جای سطر و ستون یک ماتریس را عوض می‌کند و با قرار دادن T روی ماتریس نشان داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

برخی ویژگی‌های مهم ترانهاده به صورت زیر است:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A^T)^n = (A^n)^T$
- $(A^T)^T = A$
- اگر λ یک عدد باشد $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

اگر ترانهاده یک ماتریس با خودش برابر باشد ($A^T = A$) به آن ماتریس متقارن و اگر با منفی خودش برابر باشد ($A^T = -A$) به آن ماتریس پادمتقارن می‌گویند.

هر ماتریسی را می‌توان به صورت جمع دو ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشت:

$$A = \underbrace{\frac{A+A^T}{2}}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{A-A^T}{2}}_{\text{پادمتقارن}}$$

۲ دترمینان ماتریس

دترمینان یک عدد است که برای ماتریس مربعی تعریف می‌شود. ابتدا با تعریف دترمینان برای ماتریس ۲ در ۲ و سپس ابعاد بالاتر این بحث ادامه می‌یابد.

[۲] Transpose

۱.۲ دترمینان ماتریس ۲ در ۲

اگر A یک ماتریس 2×2 باشد به صورت زیر:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

آنگاه دترمینان ماتریس A با $\det(A)$ یا $|A|$ نشان داده می‌شود و عبارت است از:

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

مثال ۱ دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(3) - (4)(5) = -26$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = (3)(-5) - (0)(1) = -15$$

۲.۲ دترمینان ماتریس $n \times n$

رابطه محاسبه مقدار دترمینان برای ماتریس‌های $n \times n$ به صورت زیر است. برای ماتریس A داریم:

$$\det(A) = \sum_{i} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

سه نکته در مورد ماتریس فوق قابل بیان است:

- مقدار i و j به ترتیب نشان‌دهنده سطر و ستون ماتریس A هستند.
- a_{ij} عنصر موجود در سطر i و ستون j است.
- M_{ij} ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j از ماتریس A است و سپس دترمینان آن حساب می‌شود.

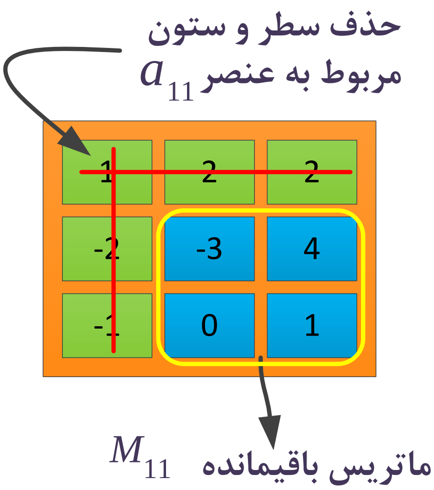
مثال ۲ مقدار دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با حرکت روی سطر اول که اصطلاحاً آن را بسط سطر اول هم می‌نامند داریم:

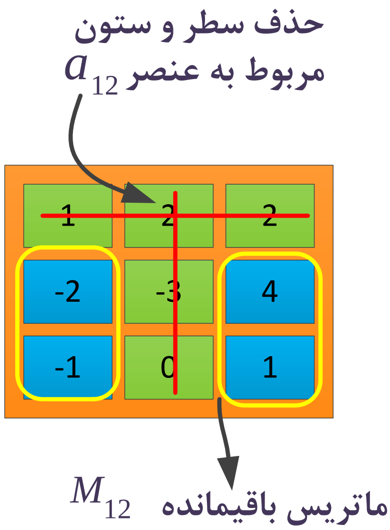
$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(M_{13})$$

درایه‌های a_{11}، a_{12} و a_{13} عناصر روی سطر اول هستند که مشخص‌اند. ماتریس‌های M_{11}، M_{12} و M_{13} به ترتیب از حذف سطر و ستون متناظر با اندیس خود بدست می‌آیند. مثلاً برای یافتن ماتریس M_{11} باید سطر و ستون اول از ماتریس A حذف شود و ماتریس باقیمانده M_{11} است. در این مثال به شکل ۱ توجه شود.

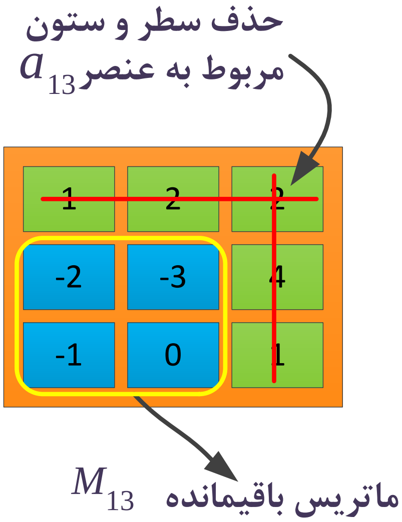


شکل ۱: طریقه تعیین ماتریس M_{11}

برای دو ماتریس دیگر هم مانند شکل ۲ و ۳ عمل شود.



شکل ۲: طریقه تعیین ماتریس M_{12}



شکل ۳: طریقه تعیین ماتریس M_{13}

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(M_{13}) \\
&= (1)\det\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (2)\det\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + (2)\det\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \big((-3)(1) - (0)(4)\big) - 2\big((-2)(1) - (-1)(4)\big) + 2\big((-2)(0) - (-1)(-3)\big) \\
&= -3 - 2(2) + 2(-3) \\
&= -13
\end{aligned}$$

مثال ۳ مقدار دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(M_{13}) \\ &= (5)\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - (0)\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + (-1)\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5\big((1)(-2) - (-3)(1)\big) - \big((2)(1) - (1)(7)\big) \\ &= 5(1) - (-5) \\ &= 10 \end{aligned}$$

مثال ۴ مقدار دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A) &= (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}\det(M_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}\det(M_{13}) \\ &= (-1)\det\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - (4)\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + (0)\det\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -\big((-2)(-1) - (1)(-2)\big) - 4\big((0)(-1) - (1)(1)\big) \\ &= -4 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

مثال ۵ مقدار دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با حرکت بر ستون اول عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\det(A) = (-1)^{1+1}a_{11}\det(M_{11}) + (-1)^{2+1}a_{21}\det(M_{21}) + (-1)^{3+1}a_{31}\det(M_{31}) + (-1)^{4+1}a_{41}\det(M_{41})$$

$$= (4)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (4)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\big((1)(-2) - (1)(1)\big)$$

$$= -12$$

نکته: اگر سطر یا ستونی از یک ماتریس برابر با صفر باشد، دترمینان آن ماتریس برابر با صفر خواهد بود.

۳.۲ ویژگی‌های دترمینان

چند ویژگی مهم دترمینان ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- اگر هر دو ماتریس مربعی باشند $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- اگر λ یک عدد باشد $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ که در آن n بعد ماتریس است.
- برای ماتریس قطری بلوکی $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ داریم: $\det(M) = \det(A)\det(C)$

به عنوان مثال برای تعیین دترمینان ماتریس تعریف شده M به صورت زیر عمل می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix} = (-11)(15)(-4) = 660$$

لازم به ذکر است که در عبارت فوق منظور از $\begin{vmatrix} -4 \end{vmatrix}$ دترمینان ماتریس تک عضوی است که برابر با خودش است و نباید با قدر مطلق اشتباه شود. (هر چند که نتیجه یکسان است، نگران نباشید!)

۳ معکوس ماتریس

معکوس یک ماتریس، یک ماتریس است که اگر در ماتریس اولیه ضرب شود، ماتریس همانی تشکیل می‌شود ($A^{-1}A = I,\ AA^{-1} = I$). ماتریس همانی ماتریسی است که عناصر روی قطر اصلی یک بوده و بقیه عناصر صفر هستند. معکوس یک ماتریس هنگامی قابل تعریف است که دترمینان ماتریس صفر نباشد.

۱.۳ معکوس ماتریس ۲ در ۲

برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس در صورت معکوس‌پذیر بودن (دترمینان غیرصفر) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال ۶ معکوس ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(3) - (4)(5) = -26$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

۲.۳ معکوس ماتریس $n \times n$

رابطه محاسبه معکوس ماتریس برای ماتریس‌های $n \times n$ به صورت زیر است.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

در رابطه فوق $\det(A)$ دترمینان ماتریس A بوده و $adj(A)$ یک ماتریس است که به صورت زیر تعریف و ماتریس الحاقی[۳] نامیده می‌شود:

$$adj(A) = N^T$$

هر کدام از درایه‌های ماتریس N به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

از بخش دترمینان می‌دانیم که M_{ij} ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j می‌باشد و جزئیات محاسبه آن در بخش قبل بیان گردید.

مثال ۷ معکوس ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

رابطه اصلی برای معکوس کردن ماتریس به شرح زیر است:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -15$$

اکنون برای تعیین ماتریس $adj(A)$ داریم:

$$adj(A) = N^T$$

[۳] adjoint

ماتریس N به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -5$$

$$N_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 5$$

$$N_{21} = (-1)^{2+1} \det M_{21} = -\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -6$$

$$N_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$N_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -4$$

$$N_{31} = (-1)^{3+1} \det M_{31} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2} \det M_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -2$$

$$N_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -7$$

$$\Rightarrow \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

ماتریس $adj(A)$ ترانهاده ماتریس N می‌باشد.

$$adj(A) = N^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ -5 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-15}\begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ -5 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

۳.۳ مثالی از معکوس ماتریس چهار در چهار

این مثال به جهت زیاد بودن محاسبات کمی دشوار است، اما روند مشخصی دارد.

مثال ۸ معکوس ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ابتدا معکوس‌پذیری ماتریس با غیر صفر بودن دترمینان آن تعیین می‌شود. برای محاسبه دترمینان بهتر است سطر یا ستونی انتخاب شود که بیشترین صفر را دارد. در اینجا سطر سوم یا ستون چهارم می‌توانند انتخاب شوند.

$$\det(A) = (-1)^{3+1}2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

اکنون باید دترمینان 3×3 بدست آید. هم می‌توان به صورت در نظر گرفتن سطر یا ستون سوم حل نمود و هم می‌توان از بلوکی-قطری بودن ماتریس استفاده کرد و مقدار دترمینان را بدست آورد.

$$\Rightarrow \quad \det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3, \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 2(3) = 6$$

چون دترمینان ماتریس غیر صفر است، بنابراین معکوس‌پذیر است. اکنون با توجه به رابطه زیر معکوس ماتریس بدست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

که در آن $adj(A) = N^T$ می‌باشد و $N_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ است. در این مثال باید ۱۶ درایه ماتریس N بدست آید. لازم به یادآوریست که ماتریس M_{ij} از حذف سطر i و ستون j بدست می‌آید. به عنوان نمونه M_{11} ماتریس ایجاد شده از حذف سطر اول و ستون اول ماتریس A است.

$$N_{11} = (-1)^{1+1}\det M_{11} = \det\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{12} = (-1)^{1+2}\det M_{12} = -\det\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -6$$

$$N_{13} = (-1)^{1+3}\det M_{13} = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

$$N_{14} = (-1)^{1+4}\det M_{14} = -\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{21} = (-1)^{2+1}\det M_{21} = -\det\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{22} = (-1)^{2+2}\det M_{22} = \det\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -6$$

$$N_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$N_{24} = (-1)^{2+4} \det M_{24} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{31} = (-1)^{3+1} \det M_{31} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2} \det M_{32} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -3$$

$$N_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$N_{34} = (-1)^{3+4} \det M_{34} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -9$$

$$N_{41} = (-1)^{4+1} \det M_{41} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{42} = (-1)^{4+2} \det M_{42} = \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{43} = (-1)^{4+3} \det M_{43} = -\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{44} = (-1)^{4+4} \det M_{44} = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 6$$

تاکنون ماتریس N به صورت زیر بدست آمد:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

طبق رابطه

$$adj(A) = N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

در نهایت معکوس ماتریس A به صورت زیر بدست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

این مثال کمی طولانی شد! اما روند همین طور است. برای ماتریس‌های 3×3 که عموماً با آن روبرو هستیم، محاسبات کمتر است.

۴.۳ ویژگی‌های معکوس ماتریس

چند ویژگی مهم برای ماتریس‌های معکوس‌پذیر به شرح زیر است:

- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ که در آن λ یک عدد ثابت غیر صفر است.
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ که در آن n یک عدد ثابت است.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ که در آن منظور از ^{T} ترانهاده است.
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

مثال ۹ اگر $A = \lambda B^T C^{-1} D^{-1}$ باشد، آنگاه A^{-1} را بر حسب ماتریس‌های داده شده بدست آورید. λ یک عدد غیر صفر است.

پاسخ: از ویژگی‌های معرفی شده کمک گرفته می‌شود.

$$A^{-1} = (\lambda B^T C^{-1} D^{-1})^{-1}, \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\lambda} DC(B^T)^{-1}$$

مثال ۱۰ مقدار دترمینان ماتریس A^{-1} را هنگامی که ماتریس A به صورت زیر تعریف شده باشد، بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پاسخ: دو راه حل برای این مسئله وجود دارد. در روش اول ابتدا معکوس ماتریس محاسبه می‌شود و سپس از آن دترمینان گرفته می‌شود. این روش محاسبات طولانی دارد. در روش دوم از ویژگی‌های ذکر شده برای معکوس ماتریس می‌توان استفاده نمود.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

دترمینان این ماتریس را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\det(A) = 1\Big((3)(-1) - (1)(-5)\Big) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۱ برای ماتریس زیر حاصل $\det(\frac{1}{3}A^{-1}A^TA^2)$ را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ابتدا دترمینان ماتریس داده شده تعیین می گردد.

$$\det(A) = -18$$

سپس از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و قوانین دترمینان روی آن‌ها استفاده می‌گردد:

$$\begin{aligned}
\det(\frac{1}{3}A^{-1}A^TA^2) &= (\frac{1}{3})^2 \det(A^{-1}A^TA^2) \\
&= (\frac{1}{3})^2 \det(A^{-1}) \det(A^T) \det(A^2) \\
&= \frac{1}{9}\frac{1}{\det(A)} \det(A)\Big(\det(A)\Big)^2 \\
&= \frac{\Big(\det(A)\Big)^2}{9} \\
&= \frac{(-18)^2}{9} \\
&= 36
\end{aligned}$$

۴ تمرین

۱. دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

الف- $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$ ب- $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ ج- $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

د- $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 22 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ه- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و- $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & 1 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

۲. برای ماتریس زیر بخش متقارن و پادمتقارن را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

۳. معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -10 & -9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

۴. اگر $A = \frac{2}{3}F^{-1}G^TH^2K^{-1}$ باشد، مقدار A^{-1} را بر حسب ماتریس‌های مربعی معکوس‌پذیر داده شده بدست آورید.

۵. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 21 & -19 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $3A^TA$ را بدست آورید.

۶. اگر دترمینان ماتریس‌های A و B به ترتیب 1 و -2 و ابعاد هر دو ماتریس برابر باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $(A^3B^4B^T)^{-1}$ را تعیین کنید.

انگیزه باعث شروع کار و عادت باعث

حرکت مدام تو در مسیر می‌شود.

Jim Rohn