از منزل کفر تا به دین یک قدم است
وز عالم شک تا یقین یک نفس است
این یک نفس عزیز را خوش میدار
از حاصل عمر ما همین یک نفس است

فصل دوم: تنش و کرنش – بارگذاری محوری

Stress and Strain – Axial Loading

اکبر اقبالی

WWW.AEGHBALI.BLOG.IR
EGHBALI.D@GMAIL.COM

1393

کرنش عمودی (محوری)

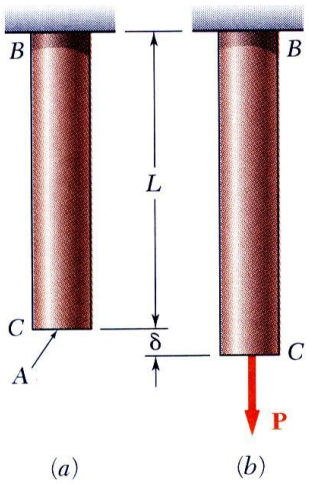


Fig. 2.1

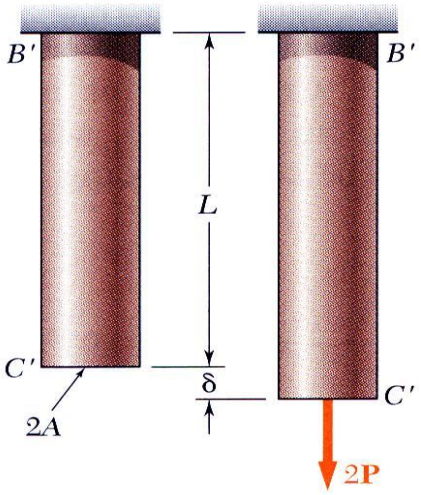


Fig. 2.3

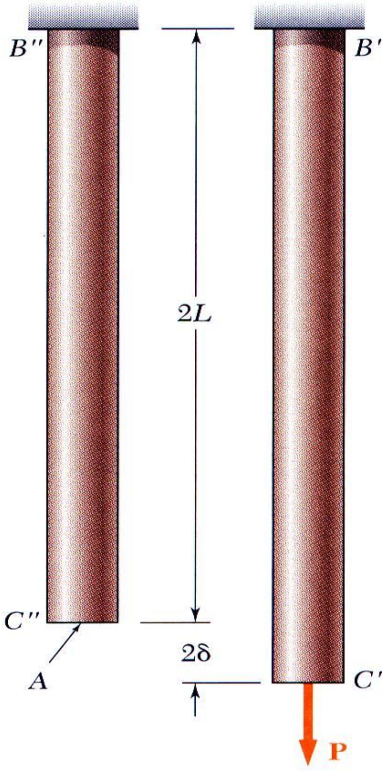


Fig. 2.4

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \text{normal strain}$$

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

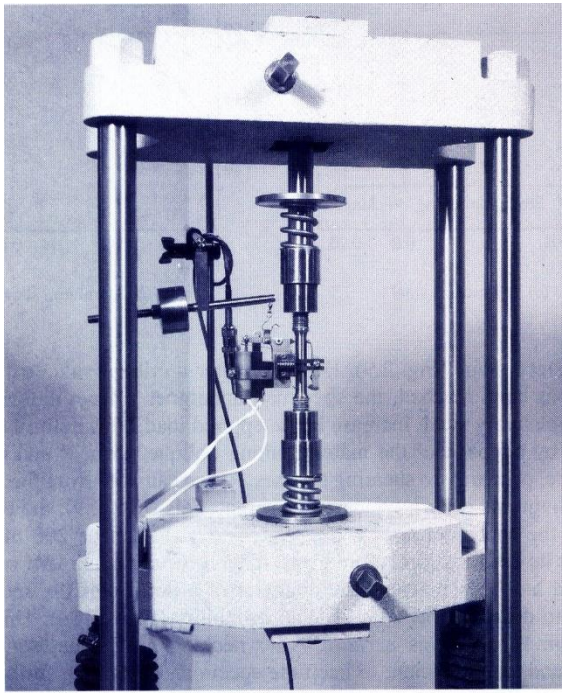
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

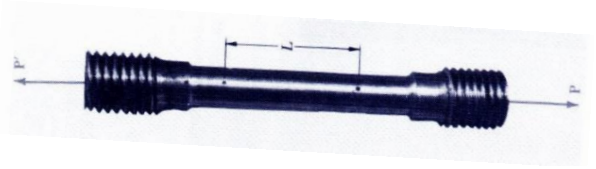
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

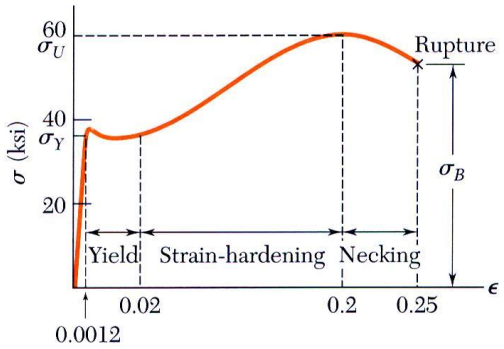
$$\varepsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

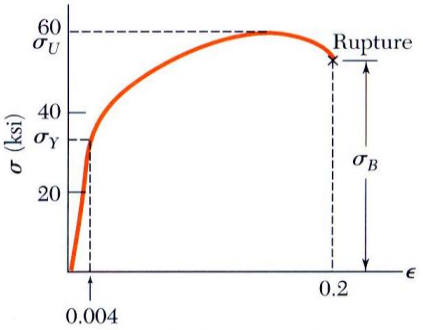
آزمایش تنش - کرنش







(*a*) Low-carbon steel



(*b*) Aluminum alloy

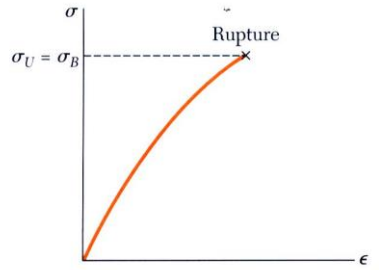


Fig. 2.11 Stress-strain diagram for a typical brittle material.

کرنش عمودی

قانون هوک

رفتار مواد

ضریب پواسون

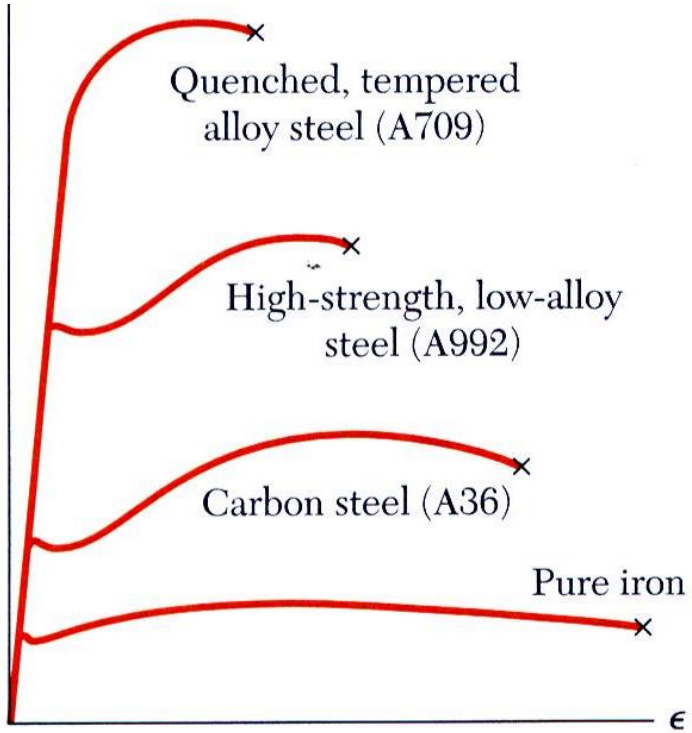
کرنش برشی

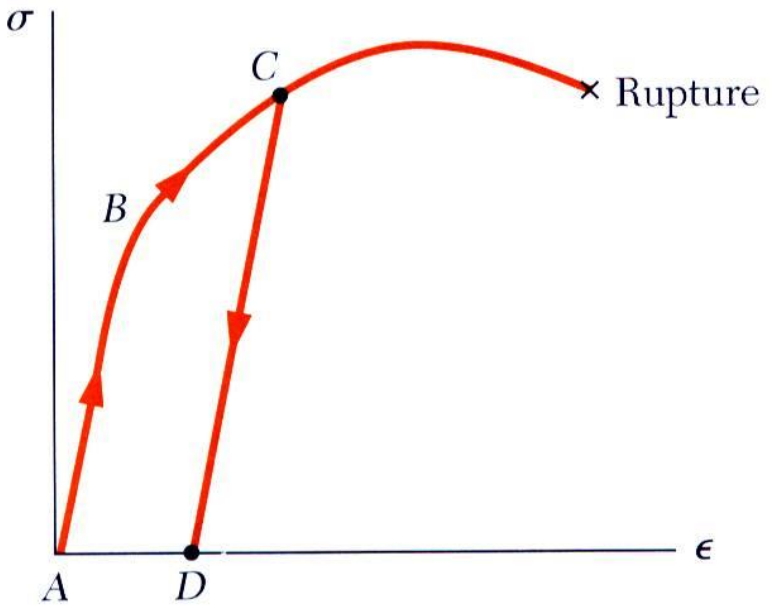
روابط *E, ν, G*

مواد مرکب

مباحث تکمیلی

قانون هوک – مدول الاستیسیته و رفتار پلاستیک





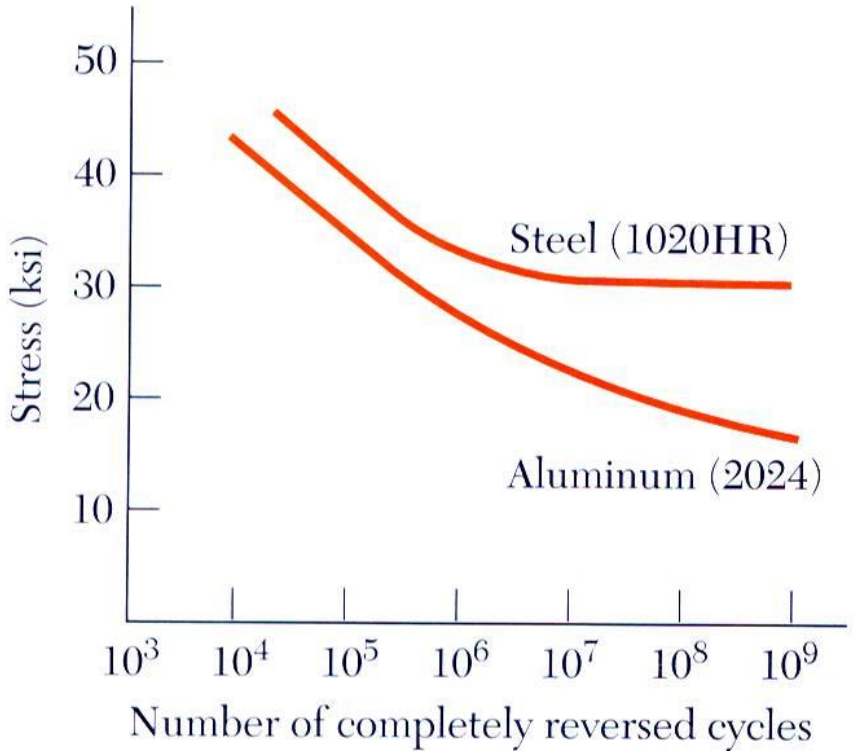
$\sigma = E\varepsilon$

E = Youngs Modulus or
Modulus of Elasticity

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

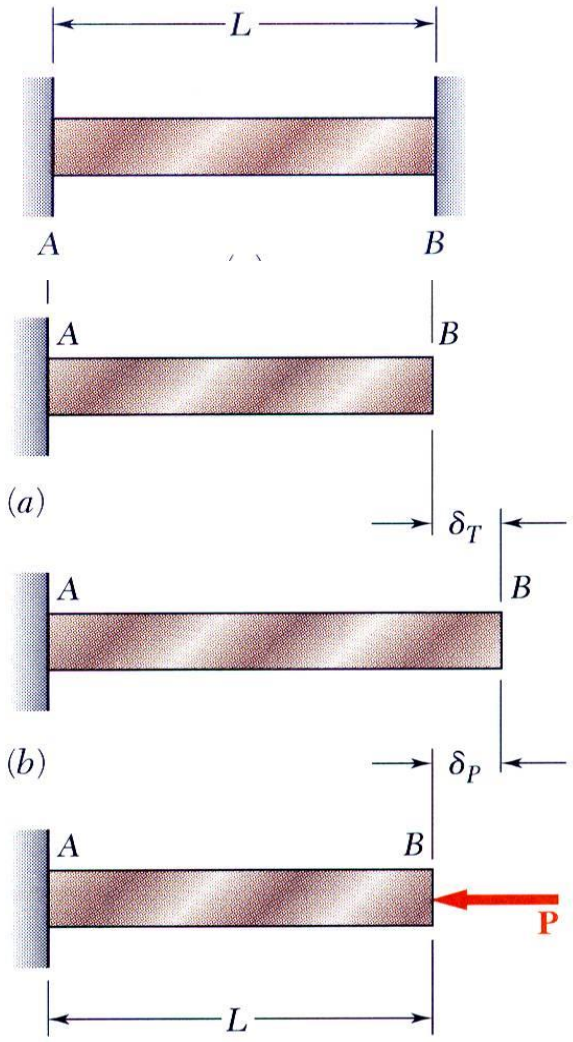
Fatigue شکست

- خصوصیات شکست در نمودار *S-N* نشان داده می شود.



- شکست یک عضو می تواند در تنشی کمتر از تنش نهایی رخ دهد اگر عضو مورد نظر برای سیکل های زیادی زیر بار باشد.
- اگر تنش به کمتر از حد تحمل کاهش (*Endurance limit*) یابد، شکست هرگز (حتی در سیکل های بالای بارگذاری) رخ نخواهد داد.

تنش حرارتی



$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \qquad \delta_P = \frac{PL}{AE}$$

$\alpha = \text{thermal expansion coef.}$

$$\delta = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T)$$

تغییر شکل در بارگذاری محوری

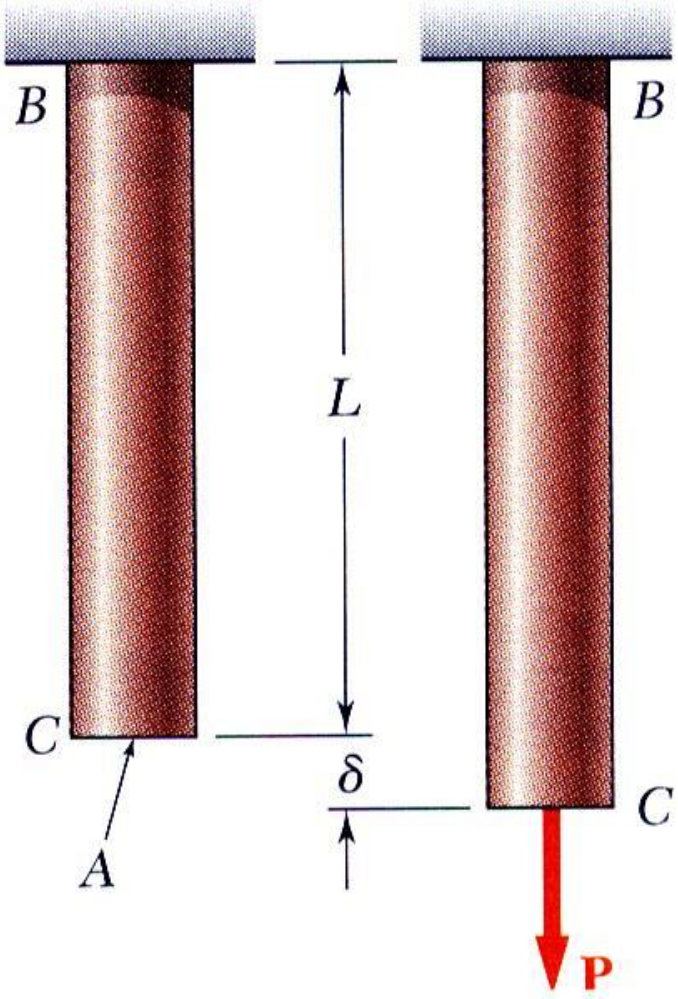


Fig. 2.22

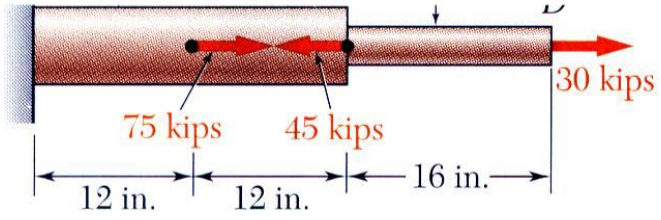
$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{P}{AE} \\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \end{cases}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

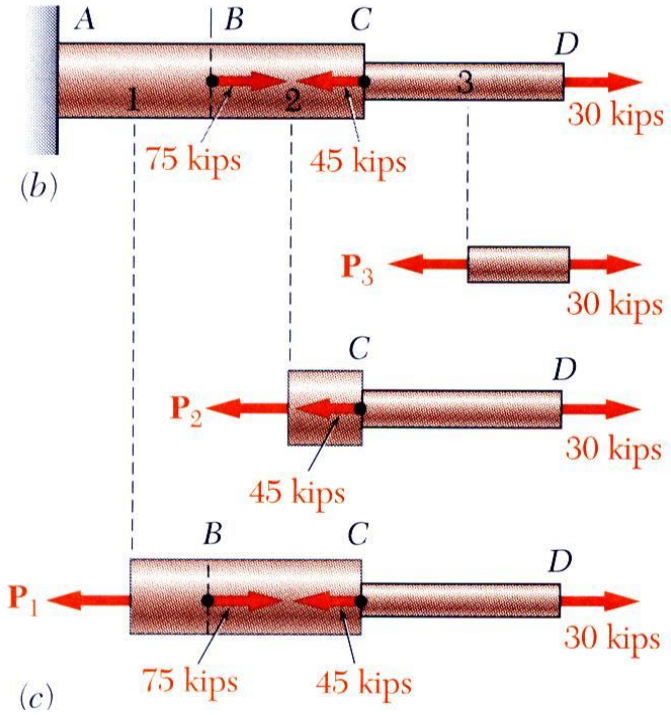
کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

مثال



$$E = 29\times10^{-6}\,\text{psi}$$

$$D = 1.07\,\text{in.} \quad d = 0.618\,\text{in.}$$



$$L_1 = L_2 = 12\,\text{in.} \qquad P_1 = 60\times10^3\,\text{lb}$$

$$A_1 = A_2 = 0.9\,\text{in}^2 \qquad P_2 = -15\times10^3\,\text{lb}$$

$$L_3 = 16\,\text{in.} \qquad P_3 = 30\times10^3\,\text{lb}$$

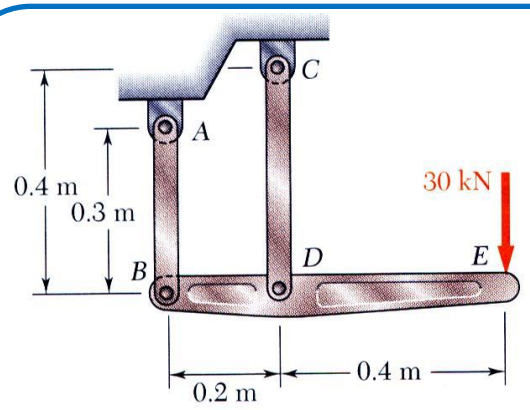
$$A_3 = 0.3\,\text{in}^2$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1L_1}{A_1} + \frac{P_2L_2}{A_2} + \frac{P_3L_3}{A_3}\right)$$

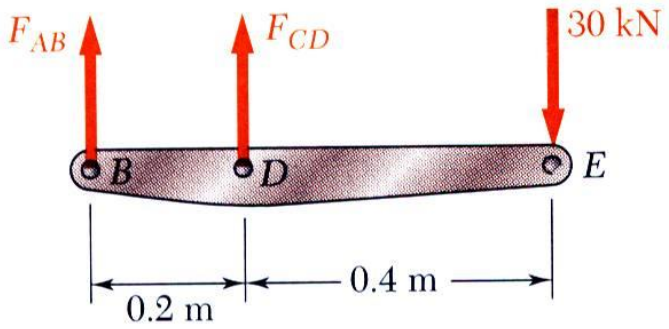
$$= \frac{1}{29\times10^6}\left[\frac{(60\times10^3)12}{0.9} + \frac{(-15\times10^3)12}{0.9} + \frac{(30\times10^3)16}{0.3}\right]$$

$$= 75.9\times10^{-3}\,\text{in.}$$

مثال



- BDE: The rigid bar
- AB: aluminum (E = 70 GPa) & 500 mm²
- CD: steel (E = 200 GPa) & 600 mm²
- Determine the deflection of B, D and E.



$$\sum M_B = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.6\,\text{m}) + F_{CD} \times 0.2\,\text{m}$$

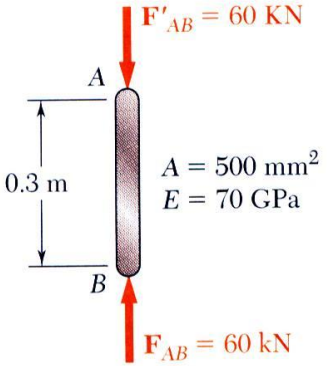
$$F_{CD} = +90\,\text{kN} \quad \textit{tension}$$

$$\sum \text{M}_\text{D} = 0$$

$$0 = -(30\,\text{kN} \times 0.4\,\text{m}) - F_{AB} \times 0.2\,\text{m}$$

$$F_{AB} = -60\,\text{kN} \quad \textit{compression}$$

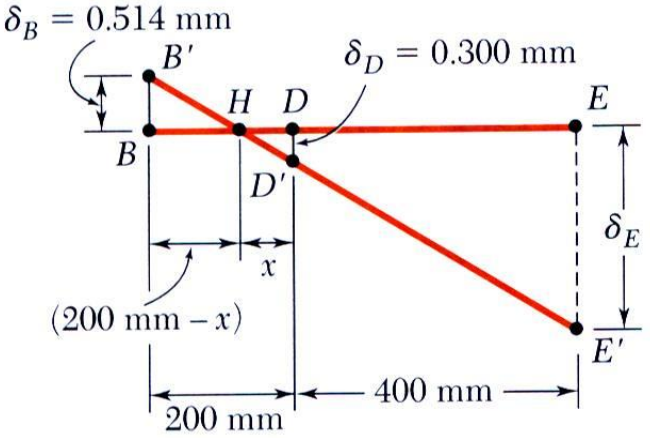
مثال



$$\delta_B = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(-60\times10^3\,\text{N})(0.3\,\text{m})}{(500\times10^{-6}\,\text{m}^2)(70\times10^9\,\text{Pa})}$$

$$= -514\times10^{-6}\,\text{m}$$



$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

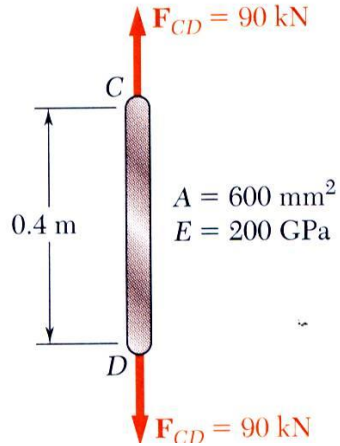
$$\frac{0.514\,\text{mm}}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(200\,\text{mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7\,\text{mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300\,\text{mm}} = \frac{(400 + 73.7)\text{mm}}{73.7\,\text{mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\,\text{mm}$$



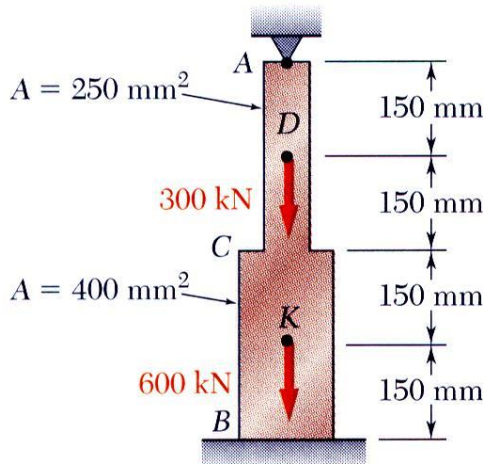
$$\delta_D = \frac{PL}{AE}$$

$$= \frac{(90\times10^3\,\text{N})(0.4\,\text{m})}{(600\times10^{-6}\,\text{m}^2)(200\times10^9\,\text{Pa})}$$

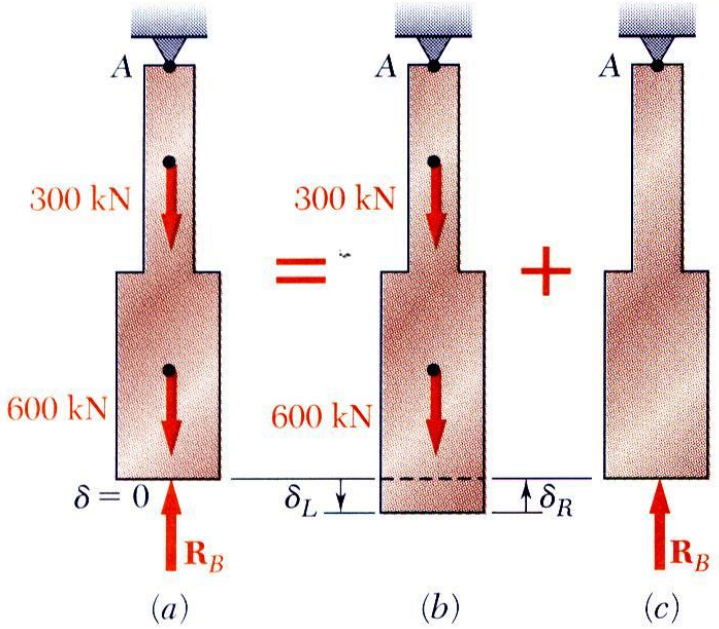
$$= 300\times10^{-6}\,\text{m}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

مثال



Determine the reactions at A and B.



$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600\times10^3\,\text{N} \quad P_4 = 900\times10^3\,\text{N}$$

$$A_1 = A_2 = 400\times10^{-6}\,\text{m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250\times10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\,\text{m}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125\times10^9}{E}$$

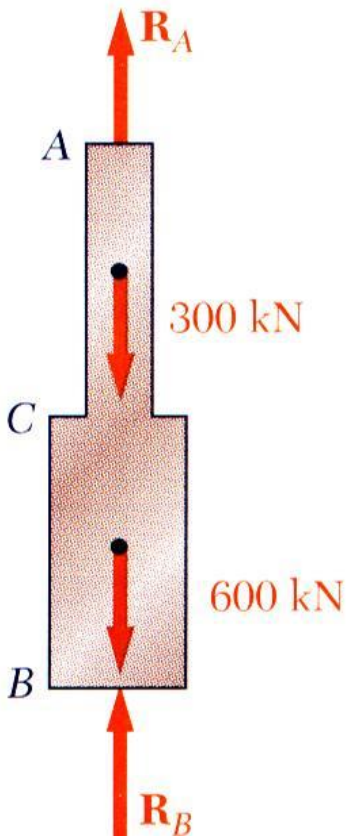
$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400\times10^{-6}\,\text{m}^2 \quad A_2 = 250\times10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300\,\text{m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = -\frac{\left(1.95\times10^3\right)R_B}{E}$$

مثال



$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125\times10^{9}}{E} - \frac{\left(1.95\times10^{3}\right)R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577\times10^{3}\,\text{N} = 577\,\text{kN}$$

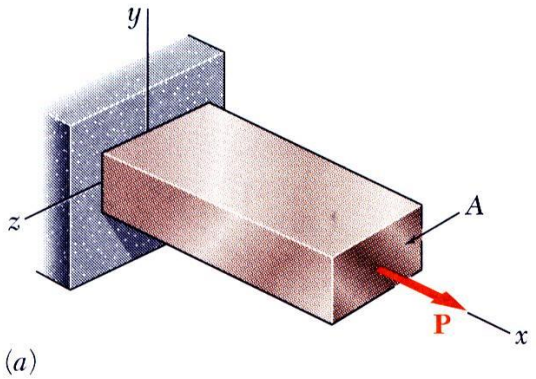
$$\sum F_y = 0 = R_A - 300\,\text{kN} - 600\,\text{kN} + 577\,\text{kN}$$

$$R_A = 323\,\text{kN}$$

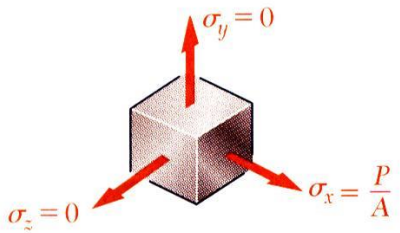
$$R_A = 323\,\text{kN}$$

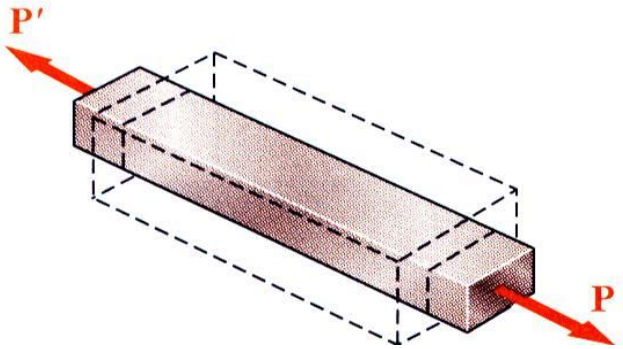
$$R_B = 577\,\text{kN}$$

ضریب پواسون



(a)





- برای یک تیر نازک با بار محوری:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

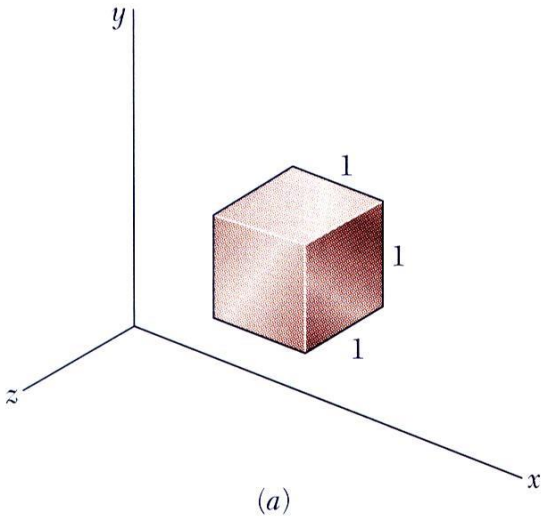
- کشیدگی در یک راستا (محوری) بر روی دیگر راستاها تاثیر دارد. برای یک جسم ایزوتروپ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$$

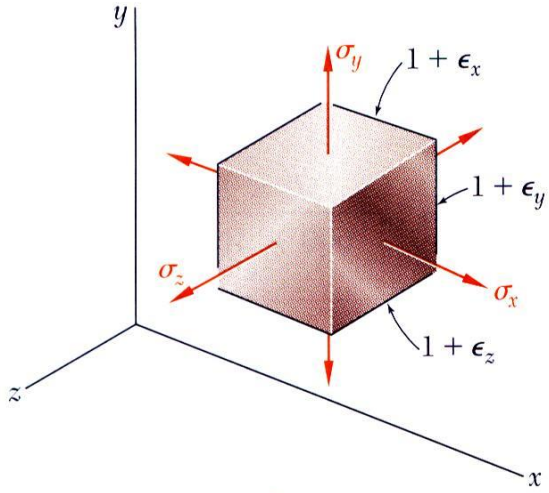
$$\nu = \left| \frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

قانون هوک تعمیم یافته



(a)



(b)

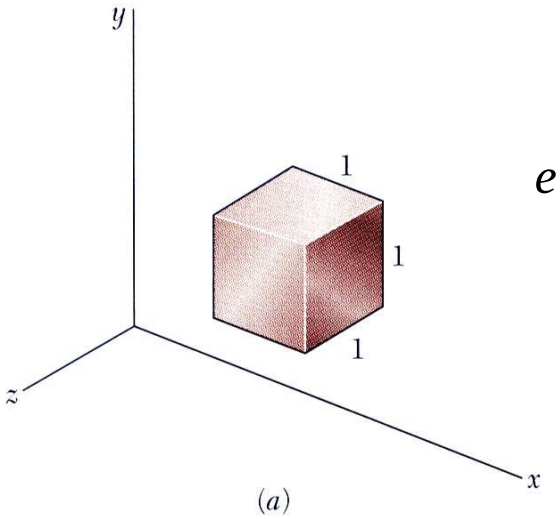
- برای یک المان که در معرض چند بارگذاری محوری قرار دارد، مولفه های کرنش محوری را می توان از اصل بر هم نهی (*Superposition*) محاسبه نمود:
  - رابطه خطی کرنش با تنش
  - تغییر شکل های جزئی

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

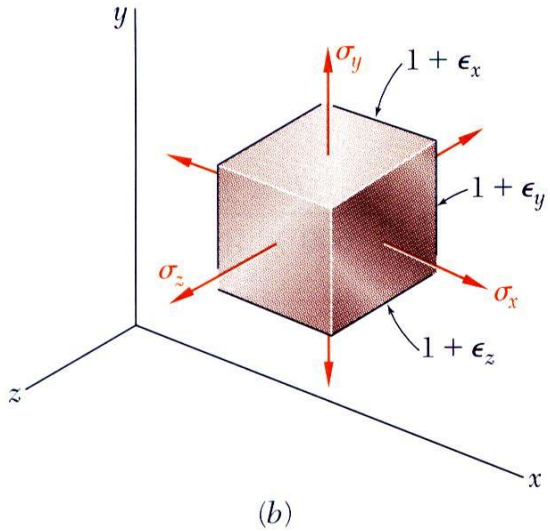
$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

مدول حجمی



(a)



(b)

- تغییر حجم برای المان:

$$e = 1-\left[(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)\right] = 1-\left[1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right]$$

$$= \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

- برای المانی که در معرض فشار یکنواخت هیدرواستاتیکی باشد:

$$e = -p\frac{3(1-2\nu)}{E} = -\frac{p}{k}$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \text{bulk modulus}$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$

کرنش برشی

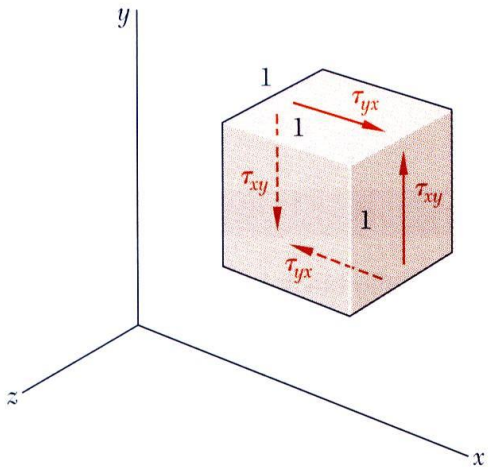


Fig. 2.46

- یک المان مکعبی در معرض تنش برشی قرار می گیرد و به یک لوزی شکل تبدیل می شود. کرنش برشی متناظر با این تنش بصورت زاویه بین دو صفحه بیان می شود:

$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

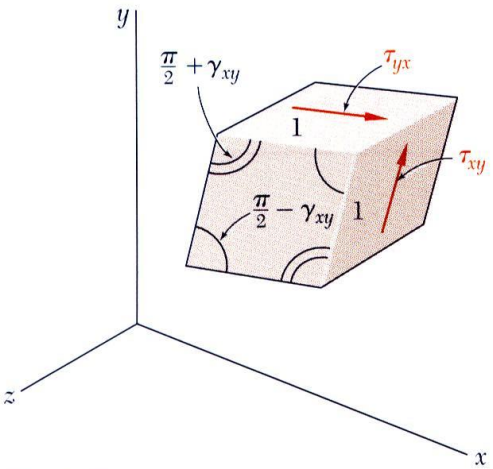


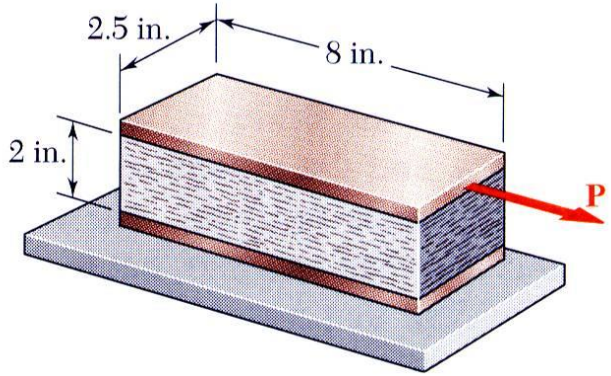
Fig. 2.47

- رابطه میان تنش و کرنش برشی مانند رابطه تنش و کرنش محوری است:

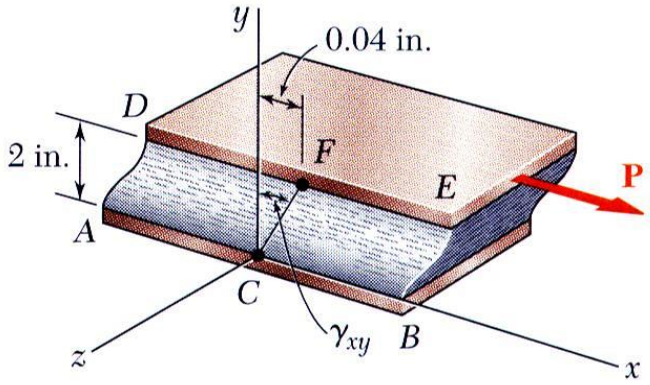
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$
$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

- G: مدول برشی

مثال



- G = 90 ksi
- the upper plate moves through 0.04 in.
- Determine the average shearing strain
- Determine the force exerted on the plate.

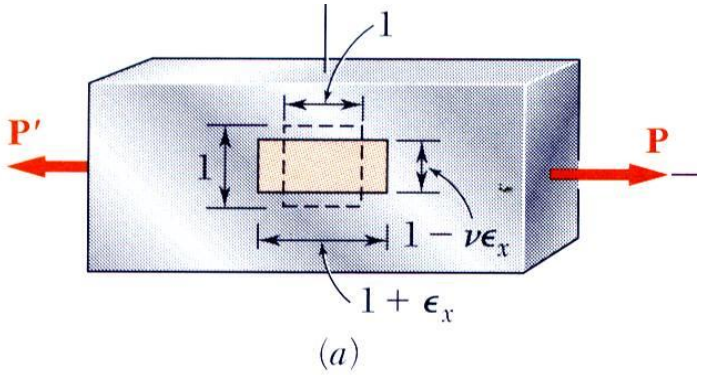


$$\gamma_{xy} \approx \tan\gamma_{xy} = \frac{0.04\text{in.}}{2\text{in.}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020\text{rad}$$

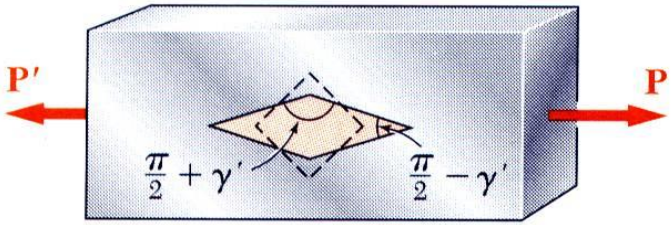
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \left(90\times10^{3}\,\text{psi}\right)\left(0.020\,\text{rad}\right) = 1800\,\text{psi}$$

$$P = \tau_{xy}A = \left(1800\,\text{psi}\right)\left(8\,\text{in.}\right)\left(2.5\,\text{in.}\right) = 36\times10^{3}\,\text{lb}$$

روابط میان E, v, G



(a)

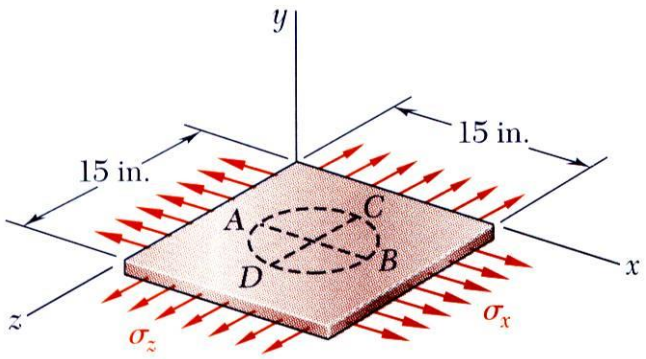


- یک تیر زیر بار محوری، دارای کشیدگی در راستای محور و فشردگی در دیگر راستاها است.
- یک المان مربعی زیر بار محوری باشد، تبدیل به مستطیل می شود.
- اگر المان مورد نظر مانند شکل پایین در نظر گرفته شود، تغییر شکل ناشی از تنش برشی خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\frac{E}{2G}=(1+\nu)$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, v, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

مثال



- *d = 9 in, t = 3/4 in, E = 10x106 psi, v = 1/3*
- *σx = 12 ksi, σz = 20 ksi*
- *Determine the change in:*
  - *the length of diameter AB & CD.*
  - *the thickness & volume of the plate.*

$$\varepsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10\times10^6\,\text{psi}}\left[(12\,\text{ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20\,\text{ksi})\right]$$

$$= +0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= -1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= +1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.}$$

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (0.533\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.}) = 4.8\times10^{-3}\,\text{in}$$

$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (1.600\times10^{-3}\,\text{in./in.})(9\,\text{in.}) = 14.4\times10^{-3}\,\text{in}$$

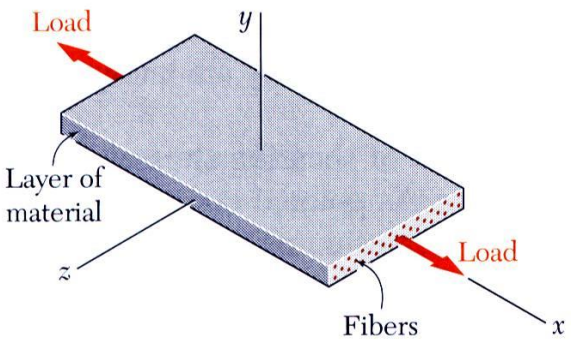
$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067\times10^{-3}\,\text{in./in.})(0.75\,\text{in.}) = -0.8\times10^{-3}\,\text{in}$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.067\times10^{-3}\,\text{in}^3/\text{in}^3$$

$$\Delta V = eV = 1.067\times10^{-3}(15\times15\times0.75)\,\text{in}^3$$

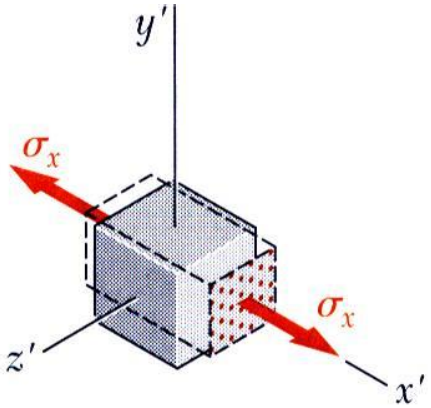
$$\Delta V = +0.187\,\text{in}^3$$

مقدمه



- ماتریس فیبرهای گرافیت، شیشه یا پلیمر.
- تنش ها و کرنش های عمودی طبق قانون هوک با هم مرتبطند:

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \quad E_z = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$$

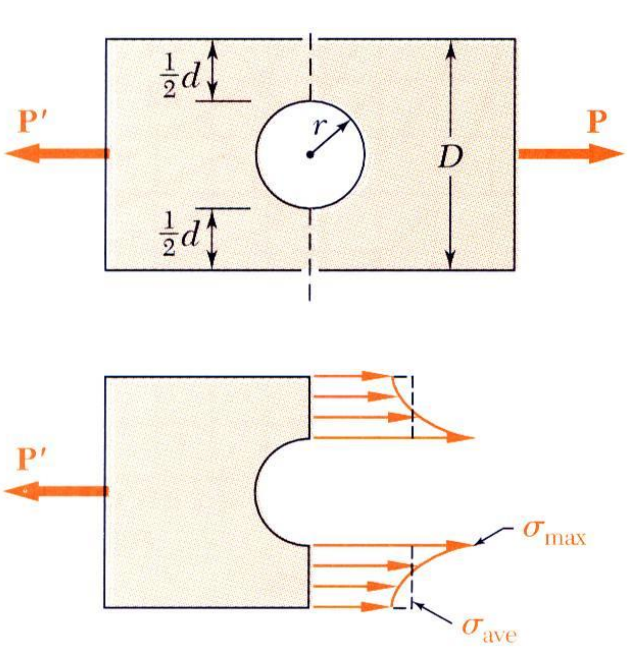


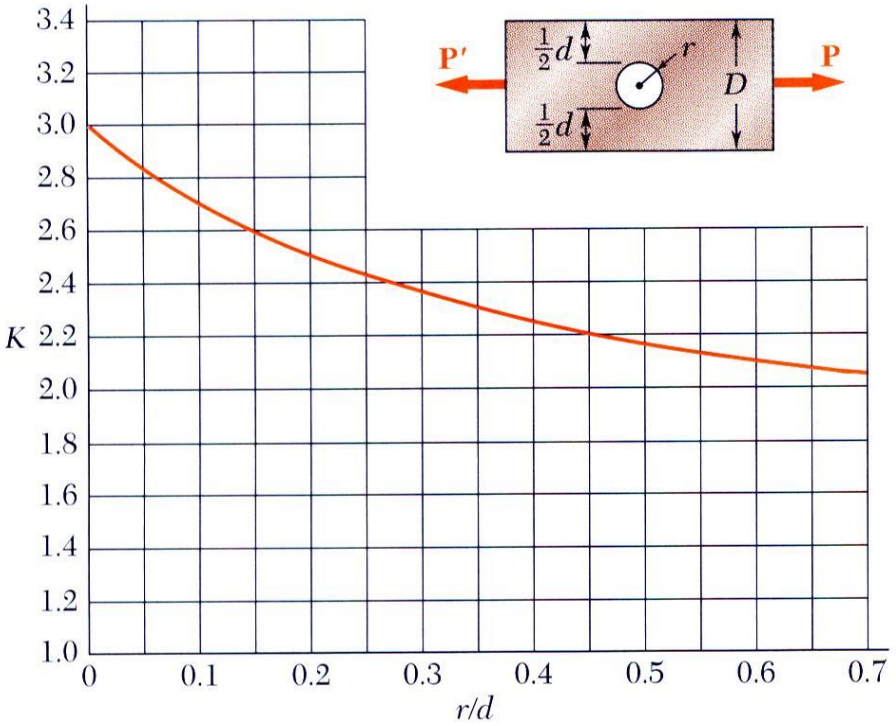
- فشردگی های عرضی بر حسب ضریب پواسون بیان می شوند:

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad \nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

تمرکز تنش



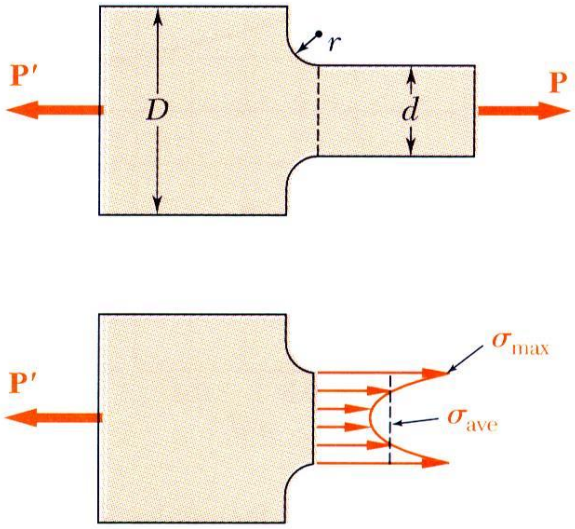


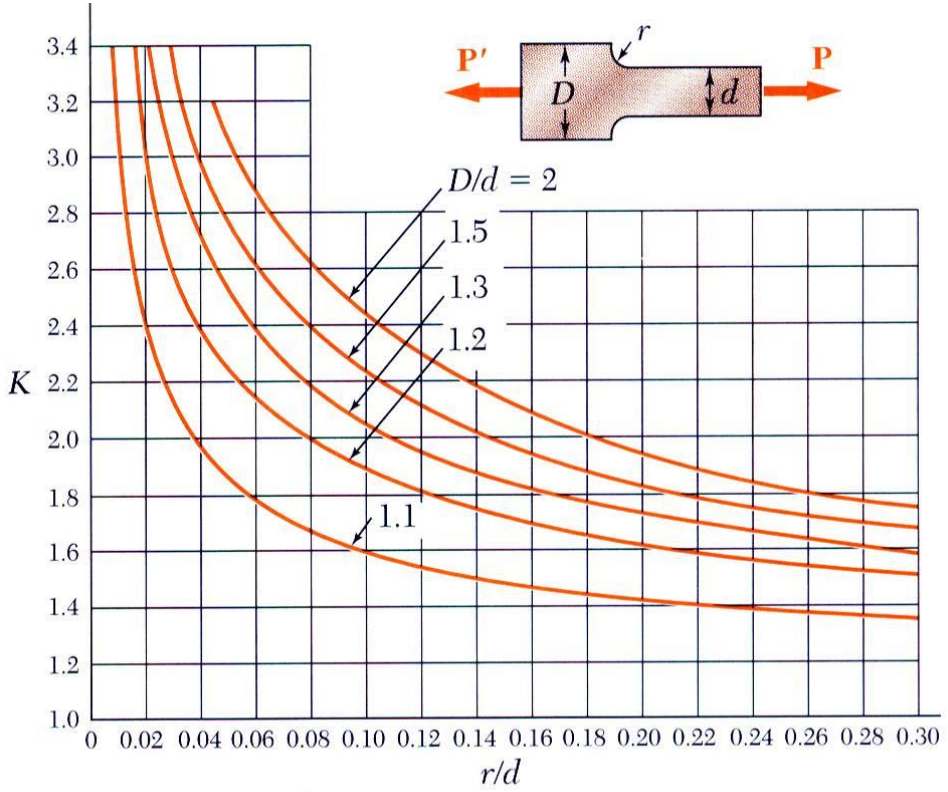
(*a*) Flat bars with holes

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط *E, ν, G*
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

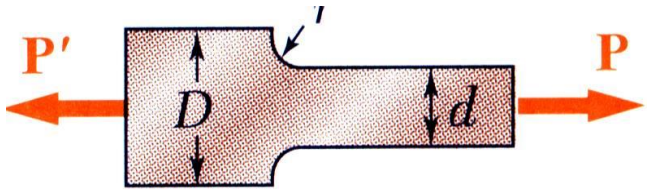
تمرکز تنش



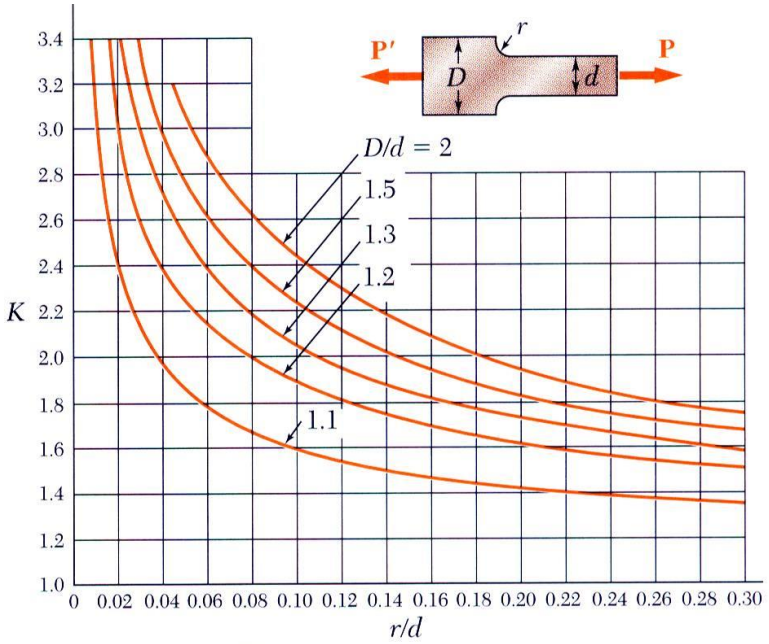


(*b*) Flat bars with fillets

مثال



- Both 10 mm thick, 40 and 60 mm wide
- r = 8 mm, allowable stress of 165 MPa.
- Determine the largest axial load P



$$\frac{D}{d}=\frac{60\,\text{mm}}{40\,\text{mm}}=1.50 \qquad \frac{r}{d}=\frac{8\,\text{mm}}{40\,\text{mm}}=0.20$$

$$K=1.82$$

$$\sigma_{\text{ave}}=\frac{\sigma_{\max}}{K}=\frac{165\,\text{MPa}}{1.82}=90.7\,\text{MPa}$$

$$P=A\sigma_{ave}=(40\,\text{mm})(10\,\text{mm})(90.7\,\text{MPa})=36.3\times10^{3}\,\text{N}$$

کرنش عمودی
قانون هوک
رفتار مواد
ضریب پواسون
کرنش برشی
روابط E, ν, G
مواد مرکب
مباحث تکمیلی

انسان صبور

پیروزی را از دست نمی دهد

هر چند زمان آن طولانی گردد.

امیر مؤمنان، امام علی علیه السلام