

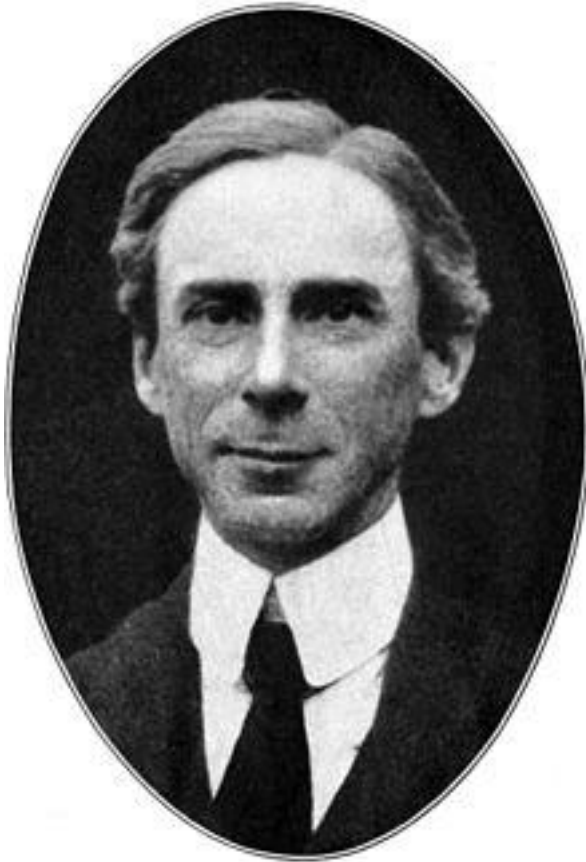
تاریخ ریاضی

جلسه دوم

آنچه گذشت...

- به نظر می رسد که رد پای تاریخ تکامل مفاهیم ریاضی در رشد ذهنی ما دیده می شود.

$[0.99999 \dots]$



• تنها در یک مرحله پیشرفته از تمدن است که می توان این سلسله را به عنوان نقطه عزیمت در نظر گرفت. زمان زیادی می بایست لازم بوده باشد تا کشف شود که یک جفت قرقاول و دو روز هردو مثالهایی برای عدد دو هستند: درجه انتزاعی که در این کار وجود دارد دور از سهولت است.

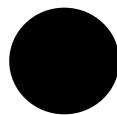
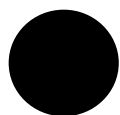
حس عددی



• زرنگی؟

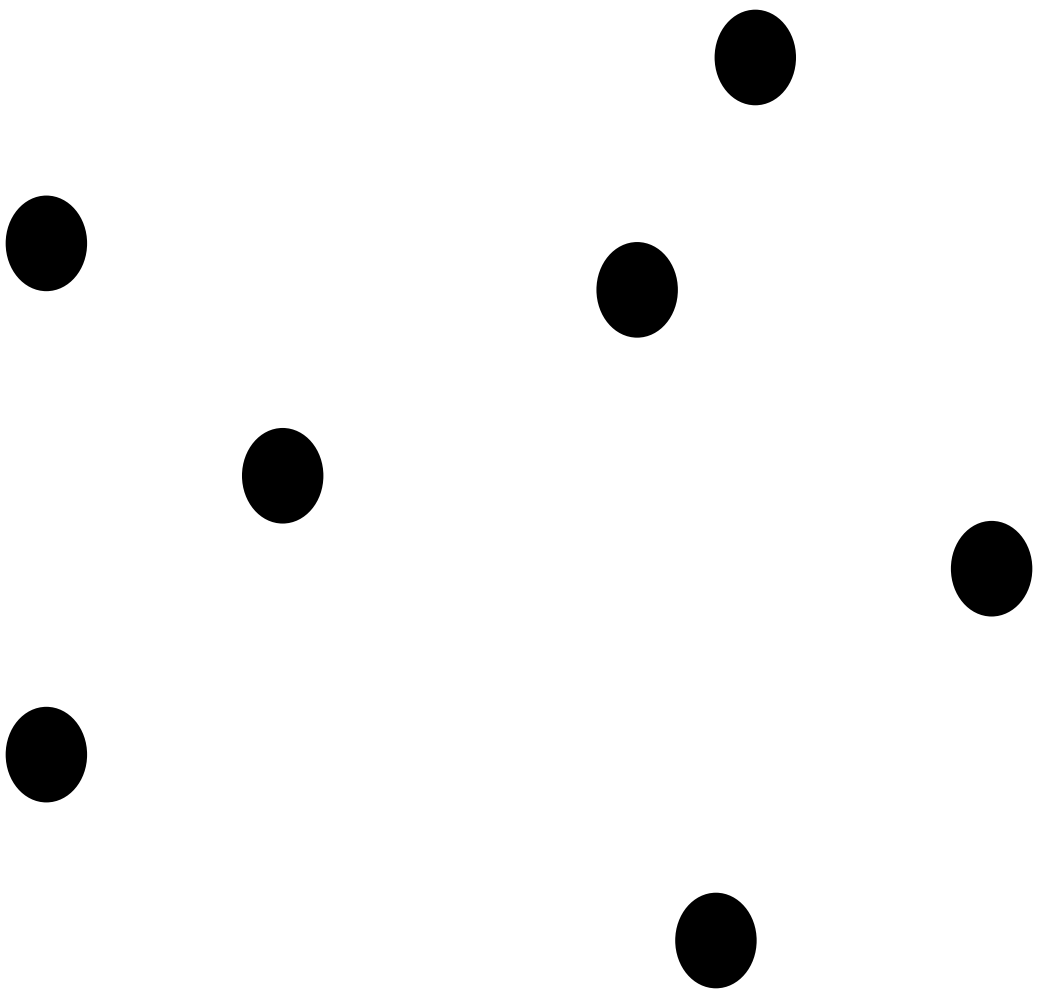


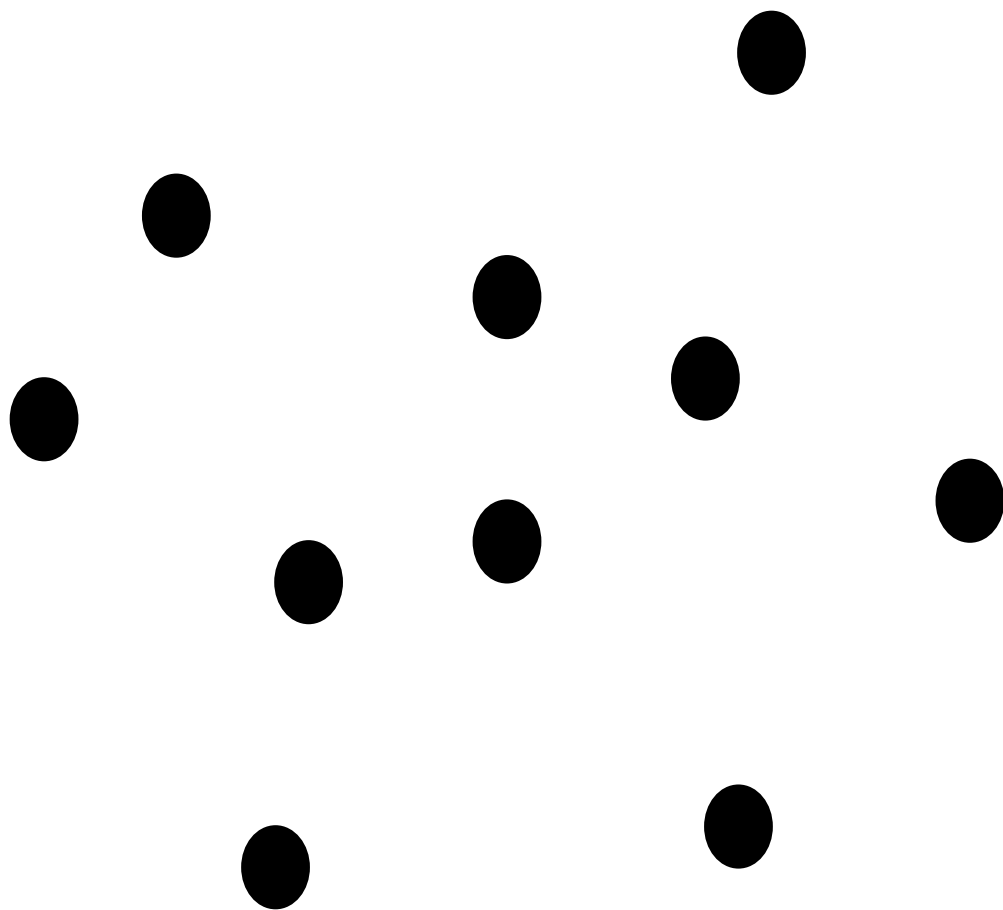




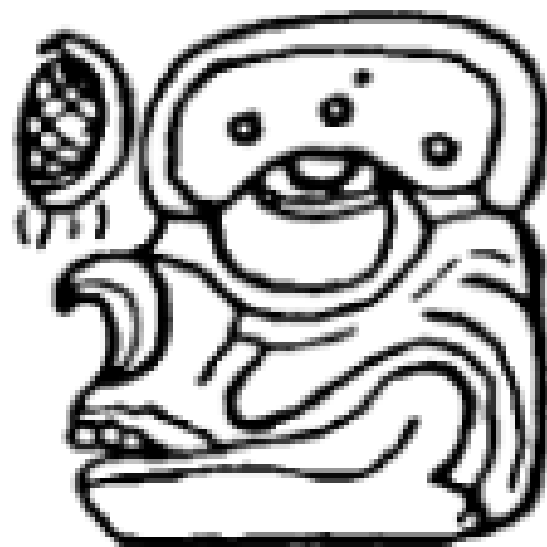








- از مردمی که با الفبای حساب آشنا نباشند، چندان نمی‌توان انتظار داشت که ریاضیات را پیش ببرند. در واقع تاریخ از این لحاظ جای شگفتی برای ما نمی‌گذارد. در هیچ‌یک از تمدن‌هایی که بر تمدن کنونی ما تاثیر گذار بودند، حد دانش ریاضی پایین‌تر از اروپای سده‌های میانی نبود؛ به‌طوری که از سال ۵۰۰ تا ۱۴۰۰ م هیچ ریاضیدان نام‌آوری در سراسر عالم مسیحی ظهور نکرد... بالاترین مرحله در برخی از دانشگاه‌ها این قضیه بسیار ابتدایی بود که زوایای دو ساق یک مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند. (موریس کلاین)





فرایند-شی



- یادم میاد وقتی کلاس پنجم بودم یهو و در کمال تعجب متوجه شدم نتیجه تقسیم ۱۳۴ بر ۲۹، ۲۹ / ۱۳۴ است. عجب وسیله زحمت کم کن شگفت انگیزی! برای من «۱۳۴ تقسیم بر ۲۹» کار شاق و پر زحمتی بود، درحالیکه ۲۹ / ۱۳۴ یک شی بود که کاری لازم نداشت. با هیجان و دوان دوان نزد پدرم رفتم تا **کشف بزرگ خودم** را به اطلاع او برسانم. او اصلا تعجب نکرد و گفت خب معلومه که a/b و a تقسیم بر b یک چیز هستند. برای او این فقط یک تغییر کوچک در نماد گذاری بود. (ترستن، ۱۹۹۰)

پفک

فرایند-شی

۵- یعنی پنج تا کم کن (فرایند)

۵- یعنی ۵- (مفهوم)

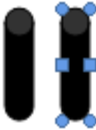
		
		
		
		

$$2x + y = 1$$

$$3y + z = 1$$

$$x + 4z = 1$$

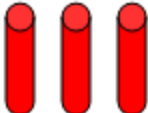










برهماگوپتا (هند، ۶۲۸ م)

- قرض کمتر از صفر دارایی است و دارایی کمتر از صفر قرض است.

René Descartes (1596 –1637–1650)



False

Blaise Pascal (1623 –1662)



کدام آدم عاقلی ممکن است

نفهمد که اگر ما از هیچی،

چهارتا برداریم، هیچی

نمی ماند.

Augustus De Morgan (1806–1830–1871)



3-8 یک ناممکن است، چنین

چیزی نیازمند این است که

شما از ۳ چیزی بیشتر از

آنچه در آن است بردارید؛ که

این مهمل است.

Augustus De Morgan

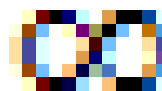
پدری ۵۶ ساله و پسر او ۲۹ ساله است. در چه سالی سن
پدر دو برابر سن پسر است.

$$56 + x = 2(29 + x) : x = -2$$

که البته مهمل است. این نشان می‌دهد که ما
در صورت بندی مساله اشتباه کرده‌ایم.

$$56 - x = 2(29 - x) \quad : \quad x = 2$$

John Wallis (1616–1656–1703)



$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$



CHAP. LXVI. *Of Negative Squares.*

265

Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unlawful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physicall Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary Sense.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and then to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? or how many Yards he is now Forwarder than when he was at A? I find (by Subtracting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5 - 2 = +3$.)



But if, having Advanced 5 Yards to B, he thence Retreat 8 Yards to D; and it be then asked, How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder than when he was at A: I say -3 Yards. (Because $+5 - 8 = -3$.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing.

Which is propriety of Speech, cannot be, (since there cannot be less than nothing.) And therefore as to the Line AB Forward, the case is Impossible.

But if (contrary to the Supposition,) the Line from A, be continued Backward, we shall find D, 3 Yards Behind A. (Which was pretended to be Before it.)

And thus to say, he is *Advanced* -3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech,) he is *Retreated* 3 Yards; or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A.

Which doth not only answer Negatively to the Question asked. That he is not (as was supposed,) Advanced at all: But tells moreover, he is so far from being Advanced, (as was supposed,) that he is Retreated 3 Yards; or that he is at D, more backward by 3 Yards, than he was at A.

And consequently -3 , doth as truly design the Point D, as $+3$ designed the Point C. Not Forward, as was supposed; but Backward, from A.

So that $+$ signifies 3 Yards Forward; and -3 , signifies 3 Yards Backward: But still in the same Straight Line. And each design (at least in the same Infinite Line,) one Single Point: And but one. And thus it is in all Lateral Equations; as having but one Single Root.

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plain also.

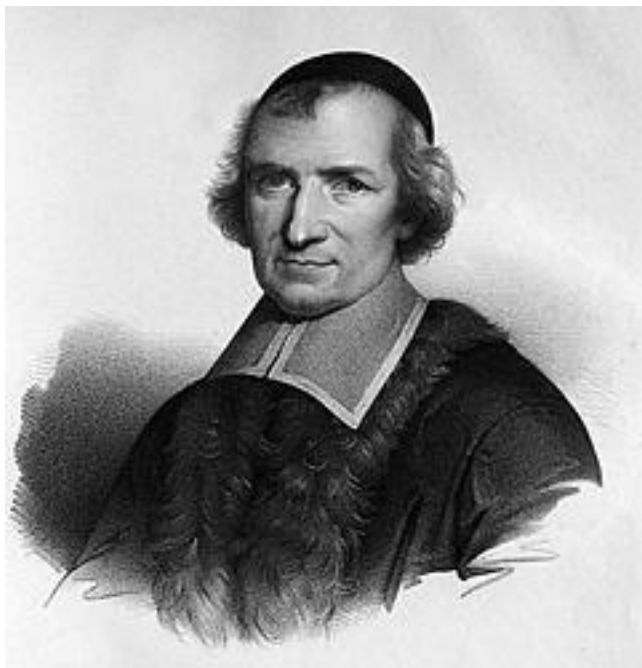
اما غیر ممکن است که هر نوع کمیتی بتواند منفی باشد. چون ممکن نیست کمیتی کمتر از هیچی باشد، یا عددی کمتر از هیچ باشد. اما آنها غیر مفید یا مهمل نیستند وقتی که به درستی فهمیده شوند. در کاربردهای فیزیکی مثل علامت $+$ می توانند به درد بخور باشند به شرطی که با حسی مخالف تعبیر شوند. فرض کنید مردی از نقطه A، 5 یارد به جلو و به نقطه B رفته است، سپس 8 یارد به عقب و به نقطه D رفته است. اگر پرسیده شود وقتی به D رسید چقدر به جلو رفته است، من می گویم -3 یارد، چون $5 - 8 = -3$. این یعنی سه یارد کمتر از صفر به جلو رفته است. اگر درست صحبت کنیم، این بی معنی است. اما اگر بگوییم، سه یارد از A به عقب رفته درست می شود. پس $+3$ یعنی 3 یارد به جلو، -3 یعنی 3 یارد به عقب.

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{-1} \quad \frac{1}{-2} \quad \frac{1}{-3} \quad \frac{1}{-4} \quad \dots$$

همچنان که مخرجها به صفر نزدیک می‌شوند
مقادیر بزرگتر می‌شوند، در صفر بینهایت و از
صفر که می‌گذرید، از بینهایت بزرگتر
می‌شوند.

Antoine Arnauld (1612–1694)

اقلیدس قرن هفدهم



فرض کنید دو تا عدد داریم، یکی
بزرگتر، یکی کوچکتر. نسبت
بزرگتره به کوچکتره آشکارا
باید از نسبت کوچکتره به
بزرگتره، بزرگتر باشه. با این
حساب، اگه عدد بزرگتر، ۱، و
عدد کوچکتر ۱- باشه، داریم

$$\frac{1}{-1} > \frac{-1}{1}$$

که با قوانین جبر نمی خوره.

7

-5

-a

۱- یک عدد مثبت است با یک علامت پشت آن.

Father Prestet(1675)

ببین، علامتها را فقط برای اعمال استفاده می‌کنیم. اجازه داریم یک کمیت بزرگتر را از یک کمیت کوچکتر کم کنیم. آنچه که بدست می‌آید دقیقا یعنی همین. اما نسبت‌ها، آنها را به خدا می‌سپاریم.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1712 -1716)



$$\frac{dy}{dx}$$

$$\int y dx$$

Acta eruditorum (1712)

عجب نقد هوشمندانه‌ای. اما بگذارید به نمادها و با نمادها فکر کنیم. همانگونه که با محاسبات نمادین موهومی‌ها کنار آمده‌ایم. اجازه دهید چشم‌ها را ببندیم و از قواعد علامت‌ها پیروی کنیم، در این صورت

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$$

مشکلی هم پیش نخواهد آمد.

Leonhard Euler (1707-1760-1783)



Rank Theorem

- (1) $e^{i\pi} = -1$
- (2) Euler's formula for a polyhedron:
 $V + F = E + 2$
- (3) The number of primes is infinite.
- (4) There are 5 regular polyhedra.
- (5) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \pi^2/6.$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$x = 2$$

$$\frac{1}{-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

به آنانی که نگران کار با سربهای واگرا هستند باید بگویم که این پارادوکس ظاهری را می‌توان به طرز هوشمندانه‌ای حل کرد. توجه کنید که دو جور ۱- داریم. اولی همان است که از کم کردن $a + 1$ از a بدست می‌آید، دومی آن است که در جمعی مانند $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ و غیره، ظاهر می‌شود که برابر است با عددی که از تقسیم ۱ بر ۱- حاصل می‌شود. اولی عددی است کمتر از صفر و دومی بزرگتر از بینهایت است (استدلال والیس).

George Peacock (1791 – 1845 – 1858)

توسل به انشاله



$$(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc; a > b, c > d$$

$$a = 0, c = 0: (-b)(-d) = bd$$

کی؟

$[0.99999 \dots]$