IranPhO.ir

منبع: کلیزر کلنکو — داریون — دانشگاه علم و صنعت

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....

بردارها

(یکی از ساختارهای جبری) ساختار جبری چیه؟

خواص بردار: (هر چیزی که در این ویژگی‌ها صدق کند بردار محسوب می‌شود.)

اگر $\vec{a}, \vec{b}$ دو بردار از یک مجموعه‌ای از فضای برداری باشند

1- $\vec{a}+\vec{b} \in V$ — ممکن بردارها را جمع کرد

2- $\alpha \in K$ (اسکالر) $\alpha\vec{a} \in V$

3- $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ — جابجایی کار نمی‌کند — خاصیت جابجایی

4- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ — خاصیت شرکت‌پذیری

5- $\exists \vec{0}$ $\vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ — وجود عضو خنثی جمع و صفر دارد که با $\vec{0}$ نشان داده می‌شه

6- $\exists -\vec{a}$ $(-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$ — وجود عضو معکوس جمع

7- $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

8- $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ $\alpha, \beta \in S$

9- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

مثال ۱: مجموعه n درایه‌ای‌ها

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha\vec{a} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix} \qquad \vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مثال ۲: مجموعه توابعی که درایه‌هایشان تغییر نمی‌کند و هم‌ارز صفر می‌شوند.

F مجموعه توابع است $f, g \in F$

1- $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

2- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

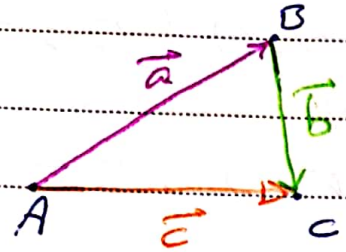
تعریف تابع صفر: if $g \equiv 0$ then $g(x) = 0$

تابع صفر

ako Note Book

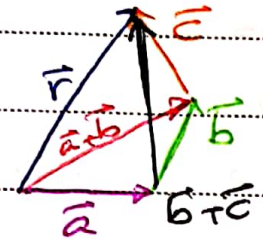
IranPhO.ir

IranPhO.ir

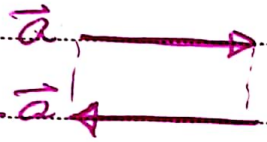


$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

بردار حاصل از دو بردار دیگر تشکیل می‌شود و مستقل تشکیل می‌شود.



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{r}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



حاصل اندازه و جهت عکس

ترکیب خطی Linear Combination

اگر $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ و $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ مقادیر برداری غیرصفر باشند آنگاه ترکیب خطی بردارها با اسکالرها به عنوان ضریب خواهد بود: $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$

if $v_1, v_2, \ldots, v_n$ are vectors and $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are scalars, then the linear combination of those vectors with those scalars as coefficients is $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_n\vec{v}_n$

استقلال خطی Linear Independence

اگر $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$ مقادیر برداری غیرصفر باشند آنگاه این بردارها مستقل خطی اند هنگامی که

if $\sum_i \alpha_i \vec{v}_i = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0$

وابستگی خطی Linear Dependence

در استقلال خطی بیان شد صرفاً اگر ترکیب خطی چند بردار صفر شود و این اسکالرها که ضریب هایشان صفر باشد

(حداقل یک ضریب غیرصفر)

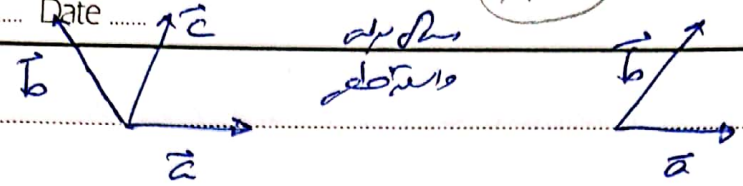
* نمونه‌ای دو بردار که در امتداد متقارن هستند را با هم جمع کرد.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....



وابسته خطی — مستقل خطی

مجموعه‌ی بردارهای کامل:

اگر $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ نوشت کنیم $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ را بردار $\vec{U} \in V$ بصورت $\vec{U} = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i$ اگر هر

کامل است.

$\vec{U}$ برحسب $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ بسط داده شده

مجموعه $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ فضا را تنیده اند

$\forall \vec{U} \in V ; \vec{U} = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i \longrightarrow$ کوچکترین $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ کامل اند

درصفحه دو بعدی اگر دو بردار غیرهم‌راستا داشته باشیم فضا را تنیده اند.

مجموعه‌ی پایه Basis

اگر مجموعه $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ مستقل خطی و کامل باشد این مجموعه پایه می‌گویند.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$

* درصفحه سه بعدی سه بردار که در یک صفحه نباشند مجموعه پایه می‌سازند

سوال ثابت کنید که ضرایب بسط یکتا هستند $\vec{u}_i$ ها پایه اند

$$U = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i = \sum_i \alpha'_i \vec{u}_i$$

$$\sum_i \alpha_i \vec{u}_i - \sum_i \alpha'_i \vec{u}_i = \sum (\alpha_i - \alpha'_i)\vec{u}_i = 0 \xrightarrow{\text{استقلال خطی}} \alpha_i - \alpha'_i = 0$$

$$\alpha_i = \alpha'_i$$

بعد فضا

در فضای عددی به بعد، تعداد بعد بردارهای پایه است.

بردار $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$ در فضای ۵ بعدی وجود دارد. در این فضا ۵ بردار پایه است.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

سوال: ثابت کنید مجموعه بردارهای زیر فضای V وابسته خطی هستند.

Projection vector — vector component

Component α_i بردار $\vec{U}$ در راستای $\vec{u}_i$ است. $\vec{U} = \sum_i \alpha_i \vec{u}_i$

Projection $\alpha_i \vec{u}_i$ بردار $\vec{U}$ در راستای $\vec{u}_i$ است.

طبق تعریف یک ترکیب خطی تنها تعداد محدودی بردار را شامل می‌شود. یک ترکیب خطی می‌تواند صفر بودن را نیز شامل شود. در این صورت طبق قرارداد حاصل ترکیب خطی $\vec{0}$ خواهد بود.

A sequence of vectors $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ from a vector space V is said to be linearly dependent, if there exist scalars $a_1, a_2, \dots, a_n$ not all zero, such that $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$

$\vec{A} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$ بردارهای $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ بردارهای پایه هستند.

$a_1\vec{v}_1, a_2\vec{v}_2, a_3\vec{v}_3$ are called the vector components or vector projections of $\vec{A}$ on the basis vectors, while a_1, a_2, a_3 are the respective scalar components or scalar projections.

اثبات کنید اگر حداقل یکی از بردارها وابسته خطی باشد می‌توان یکی را بر حسب دیگری بردارها بست داد.

اگر حداقل دو بردار وابسته خطی باشیم یکی از بردارها را می‌توان به شکل ترکیب خطی از بقیه بدست آورد.

اگر مستقل خطی باشند هیچکدام را نمی‌توان به شکل ترکیب خطی از بقیه نوشت

$\sum_i \alpha_i \vec{u}_i = 0$ فرض: $\exists \alpha_i \neq 0$

$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{u}_3 - \dots$

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر یا ضرب نرده‌ای

حاصل ضرب اسکالر می‌توان بردارها را در هم ضرب کرد و حاصل جمع کردن را می‌توان در هم ضرب کرد. اگر اینگونه تعریف کنیم خواهیم دید که نمی‌توانیم بردار را این طریق ضرب داخلی دو بردار بگیریم و طبیعت چیزی که تعریف می‌کنیم (ضرب داخلی) چگونه باشد.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

نمادهای مختلف ضرب داخلی: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ $(\vec{a}, \vec{b})$ $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$ $\vec{a}.\vec{b}$

خواص ضرب داخلی (۳ مورد)

۱- $\vec{b}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{b}$

۲- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ ضرب داخلی در جمع بردارها توزیع‌پذیر است

۲'- $\vec{a}.(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}.\vec{b})$

ترکیب ۲ و ۲': $\vec{a}.(\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \dots) = \alpha_1 \vec{a}.\vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{a}.\vec{b}_2 + \dots$

۳- $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$ ضرب داخلی یک بردار در خودش ضرب عددی (غیرمنفی) است.

خاصیت ۳ در مکانیک کلاسیک دانشگاه فرض می‌شود و همه بقیت فرض می‌شود.

$\vec{a}.\vec{a} = 0 \iff \vec{a} = 0$

مثال ۱: ضرب داخلی دو مجموعه n تایی‌ها (ماتریس سطری یا ستونی)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

اگر دقت کنیم این تعریف ضرب داخلی در سه خاصیت حاصل، توزیع و خاصیت ۳ صدق می‌کند.

مثال ۲: ضرب داخلی در مجموعه بردارهای پیوسته

$f, g \in F$ f و g دو تابع برداری هستند

$x \in [a,b]$ ← بازه تعریف دو تابع

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$$= \int_{t=0}^{t=2\pi} f(\theta) g(\theta) d\theta$$

معمولا در این مکان از این توابع استفاده می‌شود.

مجموعه توابع f و g باید بازه تعریف مشترک داشته باشند

و همه توابع باید یک بازه باشند

$$\langle f | f \rangle = \int (f(x))^2 dx$$

تنها مجموعه‌ای که ضرب داخلی بر آن تعریف می‌شود.

مثال ۳: ضرب داخلی در هندسه

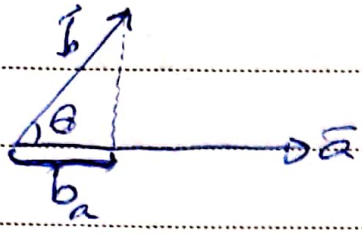
حل: با خط کشی رنگی‌ها با شکاله را اندازه می‌گیریم و مقدار حاصل را بدست می‌آوریم.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\theta)$$

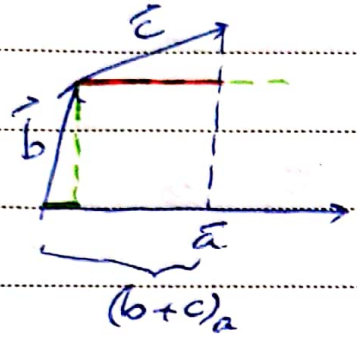
ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir



$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\, b_a$ ← تصویر $\vec{b}$ بر راستای $\vec{a}$



$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,(\vec{b}+\vec{c})_a = |\vec{a}|\,(b_a + c_a)$

$= |\vec{a}|\, b_a + |\vec{a}|\, c_a$

$= \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$(\vec{b}+\vec{c})_a$ تصویر $\vec{b}+\vec{c}$ بر راستای $\vec{a}$

$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

با استفاده از ضرب داخلی اندازه بردارها را تعریف می‌کنیم و دیگر از اندازه‌گیری استفاده نمی‌کنیم

$\sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = |\vec{a}|$ منظم بردارها اندازه بردار یا بزرگی بردار

برای تعریف ضرب داخلی از اندازه و با خط‌کش تعریف شده بود.

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ گوییم $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متعامد یا عمود بر هم‌اند (orthogonal)

مجموعه بردارهای $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ اگر $\vec{u}_i.\vec{u}_j = 0$ $(i \neq j)$ گوییم این مجموعه بردار دو به دو متعامد است

$\vec{a}.\vec{a} = A$ ← یک عدد $\quad \vec{a}' := \frac{1}{\sqrt{A}}\vec{a} \quad \vec{a}'.\vec{a}' = \frac{1}{A}\vec{a}.\vec{a} = 1$: بهنجارکردن

normalization

در حقیقت با بهنجارکردن یک بردار همه بردارهای هم‌راستا با آن را یکی در نظر گرفته‌ایم

بردار یکه بردار هم‌راستا با اندازه واحد یک است. $\vec{a}'.\vec{a}' = 1$

مجموعه بردارهای راست‌هنجار یا متعامد بهنجار

$$\begin{cases} \vec{u}_i.\vec{u}_j = 0 \quad (i \neq j) \\ \vec{u}_i.\vec{u}_i = 1 \end{cases}$$

$\vec{u}_i, \vec{u}_j \in V$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$ دلتای کرونکر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

تمرین: هر مجموعه بردار متعامد مستقل خطی است.

متعامد بودن ← مستقل خطی؟ ← پایه متعامد

کامل

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ متعامد، کامل اند یعنی پایه متعامد اند. همه‌ی را برحسب آنها تفکیک کنیم آنگاه این سه بردار پایه راست هنجار هستند.

ضرب داخلی دو بردار از یک مجموعه راست هنجار برابر با دلتای کرونکر است.

$\vec{e}_i$ پایه راست هنجار $\Leftrightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ، N بعد فضا: توضیح

$\vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i$ $\quad \vec{e}_j \cdot \vec{A} = \sum_i A_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$

$= \sum_i A_i \delta_{ij} = A_j$

A_i مولفه A است.

$A_j = \vec{e}_j \cdot \vec{A}$

$A_i = \vec{e}_i \cdot \vec{A}$

$\vec{A} = \sum_i (\vec{e}_i \cdot \vec{A}) \vec{e}_i$

$P_1 := (\vec{e}_1)\vec{e}_1$

$P_1 \vec{A} = (\vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{A} = A_1 \vec{e}_1$

تصویر A در امتداد e_1

P_1: عملگر تصویر در امتداد e_1 $\quad$ $P_1 B$: تصویر B در امتداد e_1

$P_1 P_2 = 0$ $\quad [(e_1)e_1 \cdot][(e_2)e_2 \cdot] = 0$

کاهندگی عملگرها: ترتیب آنجا مهم است.

$P_1 P_1 = P_1$ $\quad [(e_1)e_1 \cdot][(e_1)e_1 \cdot] = (e_1)e_1 \cdot$

P_1, P_2 عملگر هستند.

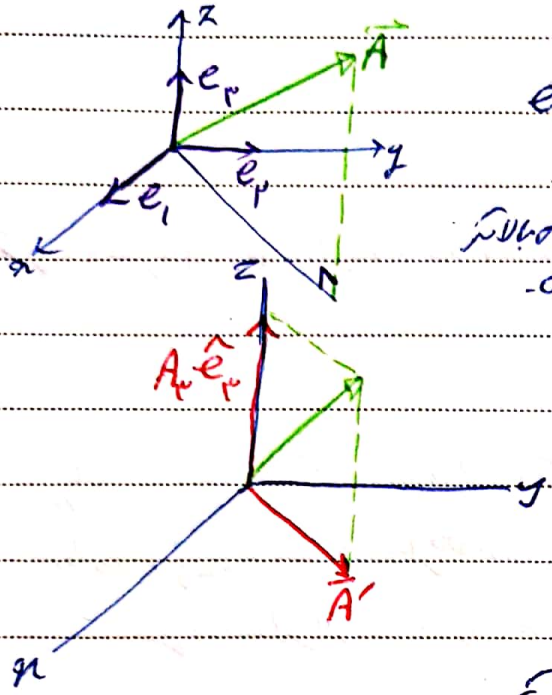
ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

هر بردار جمع بقادیر جمع

$$\vec{A} = \sum A_i \vec{e}_i = \sum (\vec{e}_i \cdot \vec{A}) \vec{e}_i = \sum [\vec{e}_i \vec{e}_i \cdot] \vec{A} = \sum P_i \vec{A}$$

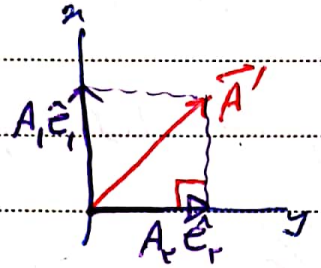


$e_1 e_2 e_3 \perp i j k \perp e_x e_y e_z \perp \hat{x} \hat{y} \hat{z}$

↓

اینها بردارهای بالا تر قابل تغییر است.

تصویر کردن بردار:



در فضای بالا تر می‌توان این تصویر کردن را انجام داد ولی نمی‌توانیم تصور کنیم

$$\vec{A} = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3$$

تمرین: نامساوی شوارتز را اثبات کنید.

$\vec{A}, \vec{B} \in V$ برای فضایی که ضرب داخلی بصورت تعریف شده باشد آنگاه

$$\frac{(\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle)^2}{\langle \vec{A} | \vec{A} \rangle \langle \vec{B} | \vec{B} \rangle} \leq 1$$

با تعریف ضرب داخلی: $\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\cos^2(\theta) = \frac{\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle^2}{\langle \vec{A} | \vec{A} \rangle \langle \vec{B} | \vec{B} \rangle}$

کوسینوس یک در فضای N بعدی اینگونه تعریف می‌شود.

قرارداد جمع زنی انیشتین:

$$\vec{A} = \sum_{i=1} A_i \vec{e}_i = A_i \vec{e}_i$$

از علامت $\sum$ استفاده نمی‌کنیم و اگر در اطراف اندیس دوبار تکرار شد یعنی روی آن جمع شده

$$\vec{e}_i \cdot \vec{A} = \vec{e}_i (A_j \vec{e}_j)$$

اندیس فرضی: اندیسی است که روی آن جمع می‌شود. dummy index

ako Note Book

اندیس نمی‌تواند سه بار تکرار شود اگر دوبار تکرار شد یعنی روی آن جمع شده

حواسمان باشد نافتد

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_i\vec{e}_i)\cdot(B_j\vec{e}_j) = A_iB_j(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)$

$= A_iB_j\delta_{ij} = A_iB_i$

← دو اندیس تکراری داریم، جمع اندیس را حذف می‌کنیم.

عبارتی که جمع اندیس ندارد اسکالر نامیده می‌شود.

یکی از کاربردهای ضرب نقطه‌ای در فیزیک:

$F\cdot d = W$

$\vec{F}$ ، $\vec{d}$

اگر ضرب نقطه‌ای داشته باشیم می‌توانیم اندازه بردارها را تعریف کنیم و زاویه هم تعریف می‌کنیم

نامساوی کوشی

راه‌های اثبات نامساوی مثلثی:

$\vec{A} - \lambda\vec{B} := \vec{C}$

$\vec{A}$ ، $\vec{B}$ دو بردار دلخواه

شرط خاصی ۳: $\vec{C}\cdot\vec{C} \geq 0$ ← برای هر مقداری از λ برقرار است حال

λ را طوری انتخاب کنید که نامساوی کوشی مشخص شود

ضرب خارجی دو بردار:

فقط از فضای سه‌بعدی صحبت می‌شود.

دو بردار دلخواه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فرض کنید

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$

ترکیب خطی از مؤلفه‌های این دو بردار را ضرب خارجی می‌نامیم.

در ابعاد بالاتر چیزهای دیگری تعریف می‌شود.

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 0 & \text{دو یا بیشتر اندیس تکراری باشند} \\ -1 & \text{جایگشت‌های فرد} \\ +1 & \text{جایگشت‌های زوج} \end{cases}$$

Levi (civieda)

۱۲۳

۲۱۳

۱۳۲

۳۲۱

۲۳۱

۳۱۲

$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$

$\epsilon_{213} = \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = -1$

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

جابجایی: اگر بخواهیم مجموعه‌ای از اشیاء را بازآرایی کنیم به این مجموعه جابجایی می‌گوییم

permutation

* اگر اندیس‌ها یا بالا نوشته شده باشند

شروع کنیم		
۱ ۲ ۳	۲ ۱ ۳	۱ → ۲
۲ ۳ ۱	۱ ۳ ۲	۲ → ۳
۳ ۱ ۲	۳ ۲ ۱	
جابجایی زوج	جابجایی فرد	

تعداد جابجایی‌ها برای رسیدن به حالت اولیه

$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ می‌گوییم پادمتقارن:

$C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$

$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \quad C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1$

این عمل را ضرب Contraction، تنگش یا منقبض کردن می‌گوییم

مثال: $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دو بردار دلخواه‌اند. $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ نشان دهید:

حاصلضرب خارجی دو بردار بر هر دو عمود است. $\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = A_i C_j = \epsilon_{ijk} A_i A_j B_k = 0$

ϵ_{ijk} نسبت به تعویض هر دو اندیس پادمتقارن است.

ϵ_{ijk} نسبت به تعویض دو تا دو تا زوج متقارن است. $A_j A_i$ نسبت به تعویض دو تا دو تا متقارن است.

حاصلضرب یک پادمتقارن در متقارن صفر است.

اسم اندیس‌ها را دوباره تغییر دادیم

$D_{\cdots i \cdots j \cdots} N_{\cdots i \cdots j \cdots} = D_{\cdots j \cdots i \cdots} N_{\cdots j \cdots i \cdots}$

متقارن ← D، متقارن ← N

$= -D_{\cdots i \cdots j \cdots} N_{\cdots i \cdots j \cdots} = 0$

فرض D نسبت به تعویض دو تا دو تا پادمتقارن و N متقارن است.

$\sum_{i=1}^{N} A_i B_i = \sum_{j=1}^{N} A_j B_j$

هر کدام اسم اندیس‌ها را عوض کردیم.

هر وقت یک جزء از اندیس زیر یک جمع را با یک بردار ضرب می‌کنیم

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

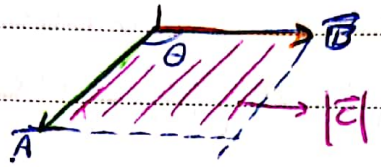
$$C_i = (\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$C^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \overset{\text{تمرین}}{=\!=} |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2$$

$$C^2 = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\theta = |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\sin^2\theta$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

= مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط دو بردار



بردار $\vec{C}$ عمود بر صفحه‌ای است که دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در آن قرار دارند. جهت آن (بالا یا پایین) طبق تعریف مشخص می‌شود که با آمدن دست راست هم‌راستا با $\vec{A}$ روی $\vec{B}$ تعیین می‌کند.

بردارهای یکه: $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\hat{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

تمرین: $\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3$ $\hat{e}_2\times\hat{e}_3 = \hat{e}_1$ $\hat{e}_3\times\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

$\hat{e}_2\times\hat{e}_1 = -\hat{e}_3$

← دیگر همه این خاصیت‌ها را از اینجا با دست راست کار می‌کنیم.

ضرب سه‌گانه:

سه بردار یکی $\vec{A}$، $\vec{B}$، $\vec{D}$ در نظر بگیرید.

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{D} = (\vec{A}\times\vec{B})_i D_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k D_i$$

$$= D_1(A_2B_3 - A_3B_2) + D_2(A_3B_1 - A_1B_3) + D_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{A}\times\vec{B})_i C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k C_i = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$(\vec{A}\times\vec{D})\cdot\vec{C} = (\vec{A}\times\vec{B})_k C_k = \epsilon_{kij} A_i B_j C_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

ako Note Book

مرکز سنجش آنلاین جهت ارزیابی و استخدام کارمندان و دانشجویان

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

دترمینان یک ماتریس مربعی است که از ضرب عناصر آن به دست می‌آید.

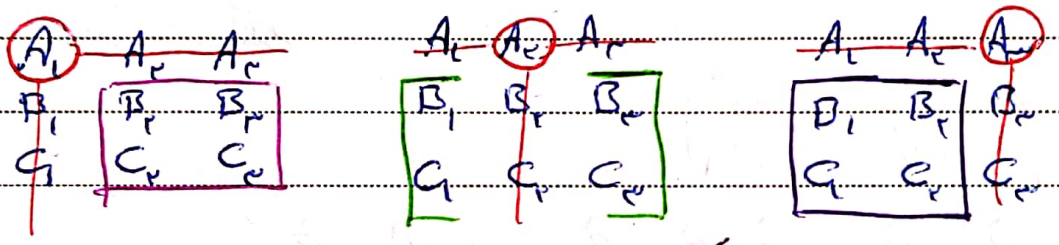
$$\det\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 می‌توانیم از هر سطر یا ستون دلخواه استفاده کنیم. از هر سطر یک عنصر برمی‌داریم، از آن سطر و ستونی که عنصر در آن قرار دارد صرف‌نظر می‌کنیم، دترمینان ماتریس باقی‌مانده را حساب می‌کنیم و در عنصر ضرب می‌کنیم. سپس همین کار را برای عنصر دوم و سوم انجام می‌دهیم و با توجه به علامت‌ها جمع می‌کنیم.

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) - A_2(B_1C_3 - B_3C_1) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)$$

بیشترین کاربرد محاسبه حجم متوازی‌السطوح در روش دترمینان است.

A_1, A_2, A_3 را هم‌مبدأ رسم می‌کنیم و یکی از دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.



$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

ضرب برداری جابه‌جایی ندارد، اما ضرب داخلی جابه‌جایی دارد.

ضرب داخلی دو بردار را با هم عوض کنیم تغییری نمی‌کند.

ویژگی‌های دترمینان این است که اگر جای دو سطر یا دو ستون را عوض کنیم علامت دترمینان عوض می‌شود.

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

خاصیت دترمینان در مورد ضرب خارجی به ε_{ijk} مربوط است.

$$(\vec{A}\times\vec{B})_i C_j = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{A}\times\vec{B})_i\,\hat{e}_i = \det\begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \hat{e}_i$$

خواص ضرب خارجی:

1- $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ خاصیت جابه‌جایی

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....
Year ..... Month ..... Date .....

در یک فضای برداری ضرب داشته باشیم که این ۴ خاصیت را دارا باشد، آن را جبر لی می‌نامیم

۲- $(\vec{A}_1+\vec{A}_2)\times\vec{B} = (\vec{A}_1\times\vec{B})+(\vec{A}_2\times\vec{B})$ ضرب خارجی در جمع بردارها توزیع‌پذیر است.

۲'- $(\alpha\vec{B})\times\vec{A} = \alpha(\vec{B}\times\vec{A})$

خاصیت ۲ و ۲' را با هم دوخطی بودن (bilinearity) می‌گیریم.

$(\sum\alpha_i\vec{u}_i)\times\vec{v} = \sum\alpha_i\vec{u}_i\times\vec{v}$

۳- $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} \neq \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ غیر شرکت‌پذیری است. (nonassosiedive)

استدلال هندسی: $\vec{A}\times\vec{B}$ عمود بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است و $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ عمود بر $\vec{A}\times\vec{B}$ و $\vec{C}$ است. حاصل ضرب خارجی دو بردار در صفحه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

۴- $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}+(\vec{B}\times\vec{C})\times\vec{A}+(\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B} = 0$ اتحاد جاکوبی

$\vec{A}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{A} \Rightarrow \vec{A}\times\vec{A} = 0$ تنها بردارهایی که در خودشان ضرب شوند صفر می‌شوند.

در فضای برداری اگر ضرب را در خاصیت ۱ تا ۴ صدق کند، آن را جبر لی می‌نامیم.

$\vec{A}\times\vec{B} = (A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)\times(B_1\vec{e}_1+B_2\vec{e}_2+B_3\vec{e}_3)$

$= A_1B_1(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)+A_1B_2(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)+A_1B_3(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)+A_2B_1(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)+A_2B_3(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)$ (خاصیت ۲، ۲')
$+A_3B_1(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)+A_3B_2(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)+A_3B_3(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)+A_2B_2(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)$

$= A_1B_2\vec{e}_3 - A_1B_3\vec{e}_2 - A_2B_1\vec{e}_3 + A_2B_3\vec{e}_1 - A_3B_1\vec{e}_2 + A_3B_2\vec{e}_1$

تنسور ... یا تعداد اندیس‌ها آزاد باشند

تنسور رتبه صفر	بدون اندیس	اسکالر
تنسور رتبه یک	یک اندیس	بردار
تنسور رتبه دو	دو اندیس	A_iB_j ، S_{ij} ، T_{ij}
تنسور رتبه سه	سه اندیس	C_{ijk}

یک تنسور رتبه دو در فضای ۳ بعدی ۹ مولفه دارد. ← { تنسور رتبه ۳ ، ۲۷ مولفه دارد.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

حاصل‌ضرب دو تانسور پادگرد مرتبه یک، یک تانسور پادگرد مرتبه دو است.

حاصل‌ضرب دو تانسور پادگرد مرتبه دو، یک تانسور پادگرد مرتبه چهار است.

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}$$

برای اثبات کافی است

نماد m و l را برابر هم قرار دهیم.

اثبات بادلیل و از طریق وارسی معادله معادلیم سمت راست را بررسی کنید

by inspection

اثبات

$$\left[\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\right]_i = \epsilon_{ijk}\,A_j\,(\vec{B}\times\vec{C})_k = \epsilon_{ijk}\,A_j\,\epsilon_{klm}\,B_l\,C_m$$

$$= \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{lmk}\,A_j B_l C_m = (\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl})\,A_j B_l C_m$$

$$= A_j B_i C_j - A_j B_j C_i = B_i(\vec{A}\cdot\vec{C}) - C_i(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

اتحاد بک کب

back cab

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

تانسورهای مرتبه ۲ را می‌توان با ماتریس‌هایشان داده‌ها معرفی کرد.

تانسورهای مرتبه ۳ را می‌توان با ماتریس‌هایشان داد.

تجزیه‌ها دستگاه مختصات تانسورها را مشخص می‌کنند.

به شکل صوری formal اثبات‌هایی که در آن‌ها ماتریس‌ها و بردارها شرکت دارند، کمتر صادق‌اند

که اثبات‌ها عددی باشند. بیشتر ترمینال‌ها نیز از مکعب ترمینال‌ها برای نمایش استفاده کرده‌اند.

توابع برداری

برداری که با یک یا چند کمیت اسکالر مشخص می‌شود.

$\vec{A}(\alpha, \beta, \ldots)$

$\vec{A}(t)$ $\vec{A}(s)$

توابع برداری که تابع مکان (موقعیت فضا) باشند میدان برداری نامیده می‌شوند.

$\vec{A}(x,y,z)$ $\vec{E}(x,y,z)$ $\vec{B}(x,y,z)$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

میدان ایستا $\vec{A}(x,y,z)$ میدان دینامیک $\vec{A}(x,y,z,t)$

$\vec{A}(s)$ یک کمیت برداری که متغیر نردهای s

مشتق: آهنگ تغییرات

$y=f(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y'$$

مشتق را همه‌گاه برای برداری تعریف کرد

$\vec{A}(s)$ $\vec{A}(s+\Delta s)$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{A}(s+\Delta s)-\vec{A}(s)}{\Delta s}=\frac{d\vec{A}}{ds}$$

آهنگ تغییرات بردار $\vec{A}$ نسبت به متغیر s

بردار مشتق بردار با مولفه‌ها:

$\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_3$ ثابت اند، برداری که نه هستند. مولفه‌های برداری که ثابت اند

$$\vec{A}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3$$

$$\vec{A}(s)=A_1(s)\vec{e}_1+A_2(s)\vec{e}_2+A_3(s)\vec{e}_3$$

$$\vec{A}(s+\Delta s)=A_1(s+\Delta s)\vec{e}_1+A_2(s+\Delta s)\vec{e}_2+A_3(s+\Delta s)\vec{e}_3$$

$$\vec{A}(s+\Delta s)-\vec{A}(s)=\Delta\vec{A}=\left(A_1(s+\Delta s)-A_1(s)\right)\vec{e}_1+\left(A_2(s+\Delta s)-A_2(s)\right)\vec{e}_2+\left(A_3(s+\Delta s)-A_3(s)\right)\vec{e}_3$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{A_1(s+\Delta s)-A_1(s)}{\Delta s}\vec{e}_1+\frac{A_2(s+\Delta s)-A_2(s)}{\Delta s}\vec{e}_2+\frac{A_3(s+\Delta s)-A_3(s)}{\Delta s}\vec{e}_3\right)$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{dA_1}{ds}\vec{e}_1+\frac{dA_2}{ds}\vec{e}_2+\frac{dA_3}{ds}\vec{e}_3$$

برداری که اعضای پایه‌ای ثابت هستند

$$\vec{A}(s)=\sum_i A_i(s)\hat{e}_i \qquad \frac{d\vec{A}}{ds}=\sum\left(\frac{dA_i}{ds}\right)\hat{e}_i$$

مشتق یک بردار، بردار است.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date : در ضرب برداری سه بردار، حاصل جمع یا تفریق سه بردار را چه می‌گویند؟

$$\left[(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})\right] = \epsilon_{ijk}(\vec{A}\times\vec{B})_j(\vec{C}\times\vec{D})_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}A_l B_m \epsilon_{knt} C_n D_t$$

$$= -\epsilon_{jik}\epsilon_{jlm}A_l B_m \epsilon_{knt} C_n D_t = -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\epsilon_{knt} A_l B_m C_n D_t$$

$$= -\epsilon_{knt} A_l B_m C_n D_t \delta_{il}\delta_{km} + \epsilon_{knt} A_l B_m C_n D_t \delta_{im}\delta_{kl}$$

(دو عبارت کنار هم را با هم جمع کنید و صرف کنید.)

$$= -\epsilon_{knt} A_i B_k C_n D_t + \epsilon_{knt} B_i A_k C_n D_t$$

$$= -A_i(\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})) + B_i(\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D}))$$

(بردار را بیرون بردیم)

در عبارت بالا فقط i و $-$ بین بردارها تغییر کرده است.

۱۹. اثبات کنید که مشتق برداری حاصل‌ضرب اسکالر در بردار برابر است با مشتق اسکالر در بردار به اضافه اسکالر در مشتق بردار.

مشتق برداری یک بردار یعنی مولفه‌های آن بردار نسبت به پارامتر مشتق گرفته شود.

$$\vec{A}(s) = A_i(s)\vec{e}_i$$

$\vec{e}_i$ بردار یکه ثابت است

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \frac{dA_i}{ds}\vec{e}_i$$

$$\frac{d}{ds}\left[f(s)\vec{A}(s)\right] = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left[f(s+\Delta s)\vec{A}(s+\Delta s) - f(s)\vec{A}(s)\right]$$

$$= \lim\frac{1}{\Delta s}\left[f(s+\Delta s)\vec{A}(s+\Delta s) - f(s)\vec{A}(s+\Delta s) + f(s)\vec{A}(s+\Delta s) - f(s)\vec{A}(s)\right]$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{(f(s+\Delta s)-f(s))\vec{A}(s+\Delta s)}{\Delta s} + \lim_{\Delta s\to 0} f(s)\frac{(\vec{A}(s+\Delta s)-\vec{A}(s))}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(s+\Delta s)-f(s)}{\Delta s}\lim_{\Delta s\to 0}\vec{A}(s+\Delta s) + \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{A}(s+\Delta s)-\vec{A}(s)}{\Delta s}\lim_{\Delta s\to 0} f(s)$$

$$= \vec{A}(s)\frac{df}{ds} + \frac{d\vec{A}}{ds}f(s) \qquad \frac{d}{ds}\left[f(s)\vec{A}(s)\right] = \frac{df}{ds}\vec{A}(s) + f(s)\frac{d\vec{A}}{ds}$$

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$\frac{d}{ds}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{ds}\left[A_i(s)B_i(s)\right] = \frac{dA_i(s)}{ds}B_i(s) + A_i(s)\frac{dB_i(s)}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{A}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{ds} \qquad \frac{d}{ds}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{ds}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{ds}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{ds} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{A}}{ds} \text{ بر } \vec{A} \text{ عمود است}$$

★ اگر $|\vec{A}|$ ثابت باشد

اگر $|\vec{A}|$ ثابت باشد کوچکه $\vec{A}$ بر $\frac{d\vec{A}}{ds}$ عمود است.

$$\frac{d}{ds}\left[\vec{A}(s)\times\vec{B}(s)\right] = \frac{d}{ds}\left(\epsilon_{ijk}A_jB_k\hat{e}_i\right) = \epsilon_{ijk}\hat{e}_i\frac{d}{ds}(A_jB_k)$$

$$= \epsilon_{ijk}\hat{e}_i\left(\frac{dA_j}{ds}B_k + A_j\frac{dB_k}{ds}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{dA_j}{ds}B_k\hat{e}_i + \epsilon_{ijk}A_j\frac{dB_k}{ds}\hat{e}_i$$

$$= \frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\vec{A}(s)\times\vec{B}(s)\right] = \frac{d\vec{A}}{ds}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{ds}$$

مانیز موقع مساله دیدیم که s تابعی از t

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\vec{A}(t)\right) = \frac{df}{dt}\vec{A}(t) + f(t)\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{f}\vec{A}(t) + f(t)\dot{\vec{A}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}_{(t)}\cdot\vec{B}(t)\right) = \dot{\vec{A}}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\dot{\vec{B}}$$ یک حالت خاص

بعد بردار

در فیزیک هر کمیت را به توان یک می‌رسانند.

هر کمیت برداری حتماً فیزیکی مشخص دارد. ① نمی‌توان بردار را از جنس زمان با بردار از جنس نیرو جمع کرد.

بردار جنس یک بعد هستند نتیجه جمع بردار بعد مشخص برمی‌گردد.

هم نیست که بردار جنس یک را به کمیت جنس بردار دیگر بدهیم.

$$\vec{A} = A_i\hat{e}_i \qquad \vec{A}+\vec{B} = (A_i+B_i)\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_i\hat{e}_i$$

↓ جنس A_i و B_i باید یکی باشد

جنس بردار می‌تواند متفاوت باشد

زیرا در فیزیک نقش دهنده یک کمیت است.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

$\vec{F}^{ext} = m\vec{a}$ $[\vec{a}] = LT^{-2}$ برحسب بردارها و مولفه‌ها تفاوتی ندارد

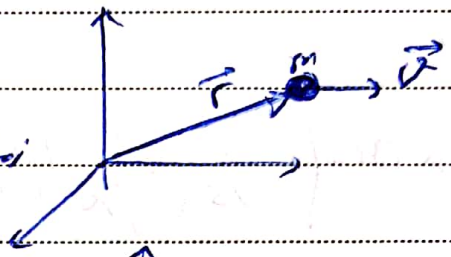
$[\vec{F}] = MLT^{-2}$

$\vec{P} = m\vec{v}$ تکانه $[\vec{P}] = MLT^{-1}$ $[\vec{v}] = LT^{-1}$

$\vec{F}.\vec{d} = W$ کار $[W] = ML^2T^{-2}$ $\vec{F}.\vec{v} = P$ توان $[P] = ML^2T^{-3}$

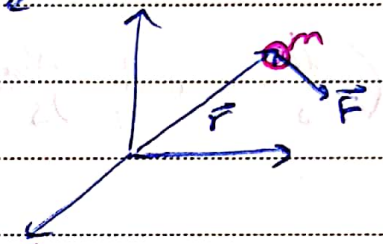
$\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (تکانه زاویه‌ای)

$[\vec{L}] = L \cdot ML T^{-1} = L^2MT^{-1}$ هم‌ابعاد با کار



$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ (گشتاور)

$[\vec{\tau}] = ML^2T^{-2}$ هم‌ابعاد با کار



جمع عددی بردارها به شکل ریاضی تعریف نشده است. گشتاور و کار دارای جهت هستند ولی انرژی جمع عددی است.

$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$MLT^{-2} = QLT^{-1}[\vec{B}]$

$[\vec{B}] = MT^{-1}Q^{-1} = MT^{-2}I^{-1}$

$\vec{B}$ واحد $= \frac{kg}{As^2}$

Q هم‌بعد با $I \cdot t$

$Q = IT$

ساده‌ترین دستگاه مکانیکی

تعیین حرکت

برای تعیین وضعیت یک جسم نقطه‌ای در هر لحظه به اندازه درجات آزادی دستگاه مختصات لازم داریم.

کمترین تعداد مختصات لازم برای تعیین وضعیت دستگاه در هر لحظه، مستقل از زمان، درجات آزادی دستگاه نامیده می‌شود.

$q_1, q_2, \dots, q_N$

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....
Year ..... Month ..... Date .....

کاملاً اصلاح نکنید درباره ذره صرف نظر کنید.

$f_1(t), \dots, f_N(t)$ معادلات است. تعیین کنید چه تعداد پارامتر مستقل وجود دارد.

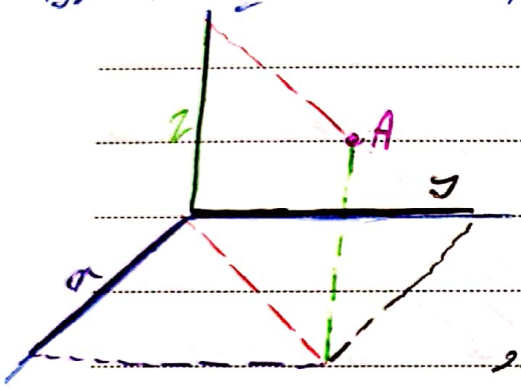
ساده‌ترین دستگاه مکانیکی را ذره می‌نامیم.

در حالت کلی ذره یک جسم نقطه‌ای است که حرکت و برهم‌کنش آن را بررسی می‌کنیم.

یعنی فرض می‌کنیم که در یک مکان مشخص قرار دارد. که مثلاً اینطور است که با مقایسه فاصله تا یک آن را پیدا کرد.

در قطعه هندسی با نقطه کار مشخص می‌شود. یعنی که تعیین شده مختصات

نقاط فضا را معمولاً با مختصات چپ‌گرد x, y, z یک دستگاه مختصات دیکارتی



مبدأ مختصات را مشخص می‌کنیم.

به چپ‌گرد بودن محورهای مختصات را مشخص کنیم.

(فرض) سه عدد حقیقی از مبدأ مختصات به نقطه x, y, z هستند

x, y, z سه عدد حقیقی هستند که فاصله از مبدأ مختصات به نقطه هستند و

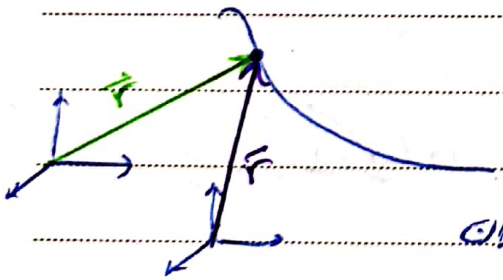
اصطلاحاً این سه عدد را بردار مکان می‌نامیم.

بردار مکان کمیتی است که مربوط به ذره باشد. یعنی با بردار مکان نمی‌توان ذره‌ای را

اما بردار مکان به توصیف حرکت دستگاه (ذره) کمکی ندارد.

$$\vec{r} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

آن چیزی که نیروی ذره بر آن کمک دارد است که ذره در حرکت زمانی



مختصات می‌توان هر مجموعه از اعداد که حالت ذره را مشخص کند.

تعیین مجموعه دستگاه که مختصات ذره را مشخص می‌کنند. به هر مختصات یک

بردار می‌گوید.

ساده‌ترین دستگاه مکانیکی جهت

متغیر همان یک ذره (ساده‌ترین دستگاه) $x(t), y(t), z(t)$ هستند

خم در فضای n بعدی: نگاشتی است از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ که به ازای هر مقدار s مثلاً $x_1(s), \dots, x_n(s)$ مقدار مشخص دارد

و $x_1(s), \dots, x_n(s)$ مختصات یک نقطه را مشخص می‌کنند و هر چه s تغییر کند، این نقاط یک خم می‌سازند.

ako Note Book

یک سلسله نقاط پیوسته هم

Curve, path, trajectory

خم می‌سازند.

IranPhO.ir

IranPhO.ir

جسم یک جهت زمان را انتخاب نمی‌کند. $x(t)$ و $y(t)$ را داشته باشیم نمی‌توانیم $x(-t)$ و $y(-t)$ را بدست آوریم.

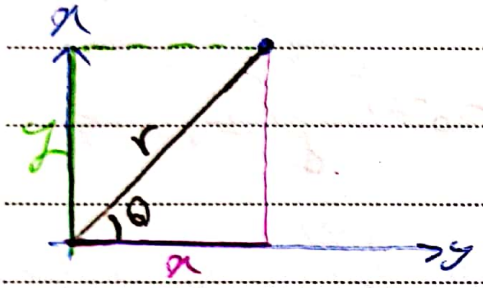
معادلات پارامتری مسیر یا پارامتری کردن: $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ مختصات مسیر حرکت را بر حسب زمان نشان می‌دهد.

$x(t), y(t), z(t)$ ⟵ $f(x,y,z)=0$ ⟵ $g(x,y,z)=0$

هر کدام یک رویه مسیر را نشان می‌دهد. / تراکم مکانیک

محل تقاطع این دو رویه خط مسیر را می‌دهد.

مثال: متحرکی روی دایره‌ای به شعاع 0.2 متر حرکت می‌کند.



نمودار مکان زمان و سرعت زمان یکی نمایش

به نکته دقت کنید که آدیوداد.

اگر بخواهیم u و v را بر حسب x و y بیابیم آنگاه u و v مختصات خطی می‌گویم.

معمولاً یکی از سوال‌ها خواسته دارد که بتوانیم حدس بزنیم که اگر x و y مثبت باشند در چه ناحیه‌ای هستند. یا اینکه علامت $\sin\frac{1}{2}$ و $\cos$ نیز نگاه کنیم.

$u(x,y)$ $v(x,y)$

مختصات مکانی

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ $\tan(\theta)=\frac{y}{x}$ $0<\theta<2\pi$ $r>0$ ضرورت ۲ کمیت را نشان می‌دهند

$x=r\cos(\theta)$ $y=r\sin(\theta)$

کمیت فیزیکی را طوری تعریف می‌کنیم که دستگاه دارد.

حالت دستگاه در لحظه t ⟵ $f_1(t),\dots,f_N(t)$

سرعت کمیت فیزیکی نیست؟

آهنگ تغییر یک متغیر فیزیکی را سرعت می‌نامیم.

سرعت شتاب یک متغیر فیزیکی است.

آهنگ تغییر سرعت را شتاب می‌نامیم.

$$\dot{f}_i(t)\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_i(t+\Delta t)-f_i(t)}{\Delta t}$$

ako

IranPhO.ir

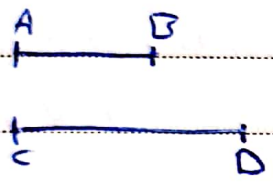
IranPhO.ir

فرض نکته: فرض وجود یک فضا مطلق نیوتنی ... فرض وجود یک فضا مطلق نیوتنی فرضیه نادرستی است که در آن فضا یک چارچوب مرجع ساکن و بی‌حرکت است و این ظرف مرجع به عنوان یک فضا مطلق پذیرفته می‌شود. در این فضا مطلق، قوانین نیوتن برقرار است و یک شتاب نامرئی یا مشخص (شتاب مطلق) نسبت به این فضا تعریف می‌شود. این فرضیه توسط نیوتن مطرح شد اما امروزه با پیشرفت علم و ظهور نظریه‌های جدید، این فرض کنار گذاشته شده است.

ما سعی کردیم در این درس به این سوال پاسخ دهیم که آیا می‌توان فضا را مطلق در نظر گرفت یا خیر.

تعیین بازه‌های طولی یا بازه‌های مکانی

تعیین بازه‌های طولی به این معنی است که بدانیم طول یک پاره‌خط چقدر است.



اگر A را روی یک نقطه مانند C قرار دهیم، اگر B و D بر هم منطبق شوند یعنی $CD = AB$

اگر B را بر D قرار دهیم یعنی $CD < AB$

اگر B را بر D قرار دهیم یعنی $CD > AB$

حالا اگر AB را دو بار پشت سر هم قرار دهیم، $CD < 2AB$

$AB < CD < 2AB$

برای تعیین دقیق‌تر بازه‌ها، از روش‌های مختلفی استفاده می‌کنیم. روش‌های مختلفی برای اندازه‌گیری وجود دارد. در این قسمت به بررسی چند روش می‌پردازیم.

مثلاً اگر بخواهیم طول CD را با دقت ۱ سانتی‌متر اندازه بگیریم، ممکن است طول CD بین ۱۲ و ۱۳ سانتی‌متر باشد.

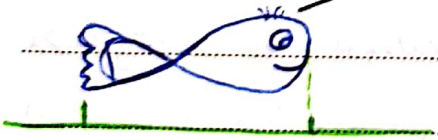
$\frac{112}{100} AB < CD < \frac{113}{100} AB$

$CD < 113\,cm$

$112\,cm < CD < 113\,cm$

اندازه‌گیری طول یک ماهی

برای مشخص کردن طول یک ماهی، ابتدا دو سر ماهی را با خط‌کش اندازه‌گیری می‌کنیم.



اگر دقت خط‌کش ۱ سانتی‌متر باشد، ممکن است طول ماهی بین دو عدد باشد.

اندازه‌گیری زمان

تعیین بازه‌های زمانی نیز مانند تعیین بازه‌های مکانی است. در این روش‌ها نیز ابتدا یک واحد زمان را انتخاب می‌کنیم و سپس تعداد این واحدها را می‌شماریم. برای مثال، اگر بخواهیم زمان را با ثانیه اندازه‌گیری کنیم، ابتدا یک ثانیه را تعریف می‌کنیم و سپس تعداد ثانیه‌ها را می‌شماریم.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

اندازه‌گیری بازه‌های زمانی

فرض کنید آونگی را حرکت داده‌ایم که دوره‌ی تناوب آن ثابت است.

ساده‌ترین حرکت تکرارشونده دوسویه یا رفت و برگشت

فرض کنید دانش‌آموزی کلاس آونگ را به حرکت درآورد.

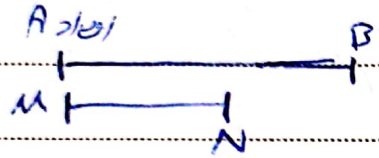
شروع حرکت A ← اولین عبور از نقطه

B ← سومین عبور از نقطه

$\Delta t = t_B - t_A$

برای بیان Δt تنها کافی است تعداد نوسان‌های آونگ را بشماریم.

$nT < \Delta t < (n+1)T$



شروع اندازه‌گیری حرکت تکرارشونده را یکی کردیم و مصرف‌کننده N مثل B عمل می‌کند.

مصرف‌کننده B

مزاحم صوتی: هر صدایی که شنونده نخواهد باشد.

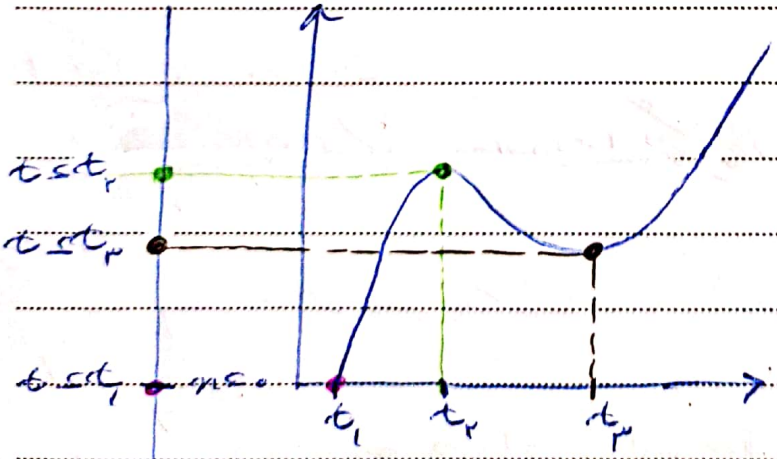
زمان سنج: هر سامانه‌ای که برای اندازه‌گیری زمان ساخته شده باشد.

زمان سنج دیجیتال: هر زمان سنجی که در آن اطلاعات به صورت عدد نمایش داده می‌شود.

زمان سنج دیجیتال مستلزم وجود اطلاعات به صورت عدد است.

ساعتی پیدا کنید که کوک نباشد و هر صدا که شنیدید هر ساعت را بزند.

کلید ارسال اطلاعات را فشار دهید. اگر دو صبر نزدیک باشد ساعت دیجیتال خراب است.



با کلید start و stop زمان را اندازه‌گیری می‌کنیم.

نمودار این ساعت دیجیتال چگونه است؟

هر بار که کلید را فشار می‌دهیم عدد نمایش داده شده یک واحد زیاد می‌شود.

اگر زمان صفر نباشد نمودار از مبدأ نمی‌گذرد. (آن را صفر تنظیم می‌کنیم)

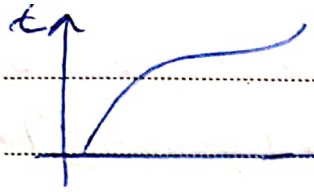
* فاصله‌ی دو عدد متوالی یک ثانیه است و هر کدام نسبت به فاصله‌ی قبلی یک ثانیه بیشتر است.

آنچه را که ما می‌خواهیم را فرض کنیم.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir



در شیب رسم حرکت خودرو x-t را بکشید و آن را با حرکت ذره مقایسه کنید.

حرکت خودرو را در محور x-t و حرکت ذره را روی محور x مقایسه کنید.

ذره مانند خودرو در یک بعد و فقط در راستای x حرکت می‌کند.

سرعت یا سرعت لحظه‌ای

$$\vec{r}(t) = x_i(t)\hat{e}_i = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

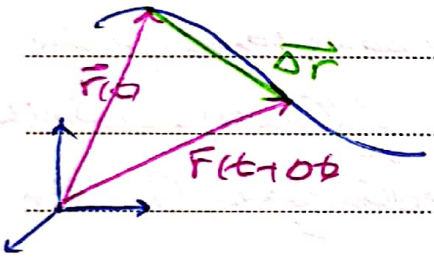
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\rightarrow v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}$$

مشتق مولفه x بردار مکان نسبت به زمان، مولفه x بردار سرعت را به دست می‌دهد.

بردار سرعت همواره بر مسیر مماس است.

سرعت متوسط

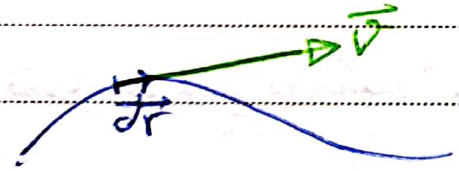


$$\vec{r}(t+\Delta t) = \Delta\vec{r} + \vec{r}(t)$$

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \bar{v}_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \bar{v}_2 = \frac{\Delta y}{\Delta t} \qquad \bar{v}_3 = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$\Delta\vec{r}$: جابجایی که در بازه زمانی Δt رخ می‌دهد.

سرعت متوسط در بازه زمانی Δt برابر با سرعتی است که متحرک اگر با آن سرعت حرکت می‌کرد جابجایی $\Delta\vec{r}$ را در همان بازه زمانی انجام می‌داد.



بردار سرعت بر مسیر مماس است. و بزرگی $d\vec{r}$ است که جزئی از منحنی است.

جهت بردار مکان خودش تغییر میکند.

$\vec{r}(t)$ ——مشتق گیری نسبت به زمان——▶ $\vec{v}(t)$

شتاب: سرعت سرعت است.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$
$$= \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$a_x = v_x = (\dot{x}) = \ddot{x}$$

نتیجه: یک مجری برای فرستادن پیک را تا وقتی که چیزی نگفته نمی‌فرستد.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

فضا در بعد n یا n تا از فضا زمان مانند

صفحه در بعد

n

فضا زمان $(1+1)$ بعدی

n

c

زمان یک بعدی

صفحه در بعد $(1+3)$ بعدی زندگی می‌کنیم.

شتاب هر جرم در سوی گرانش می‌باشد!

چه نیازی هست اطلاع رسانی در آنی باشد؟

اگر بتوان سیگنالی فرستاد که با سرعت بی‌نهایت (که معمولا از آن صحبت می‌کنیم) آنگاه می‌توان شتاب سرعت

خیلی بیشتر از سرعت حاصل کنیم. اینجا مفهوم شتاب بی‌معنی

ما از سرعت نور که محدود است نمی‌توانیم شتاب بگیریم.

سوال: اگر $\vec{a}(t)$ را بدانیم چگونه می‌توان $\vec{v}(t)$ و $\vec{r}(t)$ را بدست آورد؟

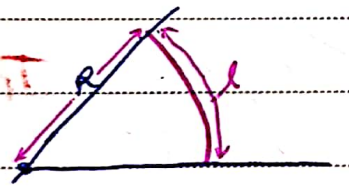
با داشتن $\vec{r}(t)$ اطلاعات کاملی از حرکت را داریم که با مشتق گیری به شتاب و سرعت می‌رسیم.

مشتق گیری

مشتق گیری قواعد خیلی مشخصی دارد.

$$\frac{d}{dt}(c)=0 \quad \frac{d}{dt}t^n=nt^{n-1} \quad \frac{d}{dt}(\sin(\omega t))=\omega\cos(\omega t) \quad \frac{d}{dt}(\cos(\omega t))=-\omega\sin(\omega t)$$

$\sin$ و $\cos$ را به چه چیزی مشتق کرد که بعد نداشته باشد. حاصل $\sin$ و $\cos$ بی‌بعد است



کمان به شعاع دایره می‌دهیم.

$\frac{l}{R}=\theta$ تعریف زاویه: θ

دیفرانسیل زاویه برابر کمان می‌باشد

$d\theta=\frac{dl}{R}$

تنها چیزی که مشتق نشد خودش

$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ را بی‌بعد کنیم $e^0=\exp(0)$

e^{ax} e^{kx}

آرگومان یک e^x، $\sin$، $\cos$ و سایر توابع متعالی بی‌بعد است. حاصل این توابع نیز بی‌بعد است.

سوال: اگر $\vec{a}(t)$ را بدانیم چگونه می‌توان $\vec{v}(t)$ را بدست آورد؟

اگر $\vec{v}(t)$ را بدانیم چگونه می‌توان $\vec{r}(t)$ را بدست آورد؟

به صورت دیفرانسیل بنویسیم:

$\frac{dx}{dt}=v(t)$ ⟶ x

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

انتگرال معکوس مفهوم دقیق‌تری دارد که از پیدا کردن پادمشتق به دست می‌آید.

$t^n \xrightarrow{\text{مشتق}} nt^{n-1}$

$nt^{n-1} \xrightarrow{\text{پادمشتق گرفتن}} t^n$

چون مشتق یک عدد ثابت صفر است همواره در پادمشتق گرفتن می‌توان یک ثابت اضافه کرد.

$t^n \xrightarrow{\text{پادمشتق بگیر}} \frac{t^{n+1}}{n} + C$

اگر کلی‌ترین شکل یک پادمشتق را خواستند حتماً باید ثابت را اضافه کرد.

$\sin(\omega t) \xrightarrow{\text{مشتق}} \omega \cos(\omega t)$

$\cos(\omega t) \xrightarrow{\text{مشتق}} -\omega \sin(\omega t)$

$\sin(\omega t) \xrightarrow{\text{پادمشتق}} -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + C$

$\cos(\omega t) \xrightarrow{} \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + C$

$e^{\alpha t} \xrightarrow{\text{مشتق}} \alpha e^{\alpha t}$

$[\alpha] = T^{-1} \quad [t] = T$

$\frac{d}{dt}\left[e^{\alpha t}\right] = \frac{d}{dt}(\alpha t)\frac{d}{d(\alpha t)}\left(e^{\alpha t}\right) = \alpha e^{\alpha t}$

پادمشتق توابع نمایی خیلی مهم است که اگر مانند مشتق حفظ کنیم.

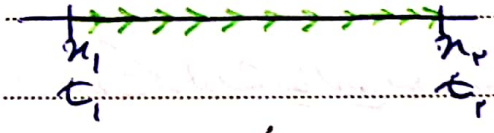
$\frac{d}{dt}\left[e^{f(t)}\right] = \dot{f}\left(\frac{d}{df}(e^f)\right)$

$e^{\alpha t} \xrightarrow{\text{پادمشتق بگیر}} \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} + C$

انتگرال معین:

$\frac{dx}{dt} = v_x(t) \qquad dx = v_x(t)\,dt$

$\Delta x = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt = x_2 - x_1$



$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt$

انتگرال‌ده

تفاوت پادمشتق و انتگرال در v_x است. x پادمشتق v_x است.

$x(t) = \int^{t} v_x(t')\,dt' + C$

$v_x(t)$ یک پادمشتق x است

انتگرال‌ده integrand

آن چیزی است که از آن انتگرال می‌گیریم.

کران پایین انتگرال را مشخص کردیم، پادمشتق را اضافه کردیم

IranPhO.ir

IranPhO.ir

سرعت اولیه: سرعتی که ذره در لحظه صفر دارد.

انتگرال معین:

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$v_x = \frac{eE_0}{m\omega}\left[\cos(\omega t) - 1\right]$$

انتگرال می‌گیریم

$$x = \frac{eE_0}{m\omega}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t\right] + ED$$

$t = 0 \rightarrow 0 = 0 + 0 + ED \rightarrow D = 0$

$$x = \frac{eE_0}{m\omega^2}\left[\sin(\omega t) - \omega t\right]$$

جمله‌ی ωt کوچک‌تر از بقیه و بیشتر با t رشد می‌کند

X با بیشتر شدن t جمله‌ی ωt زودتر از بقیه رشد می‌کند

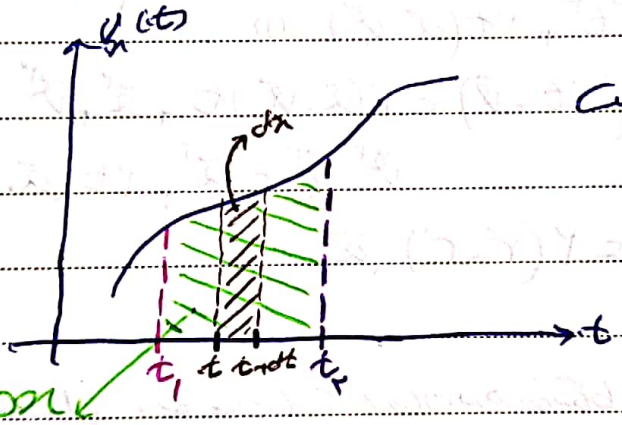
$$\sum_{k=1}^{N} a_k e^{k}$$

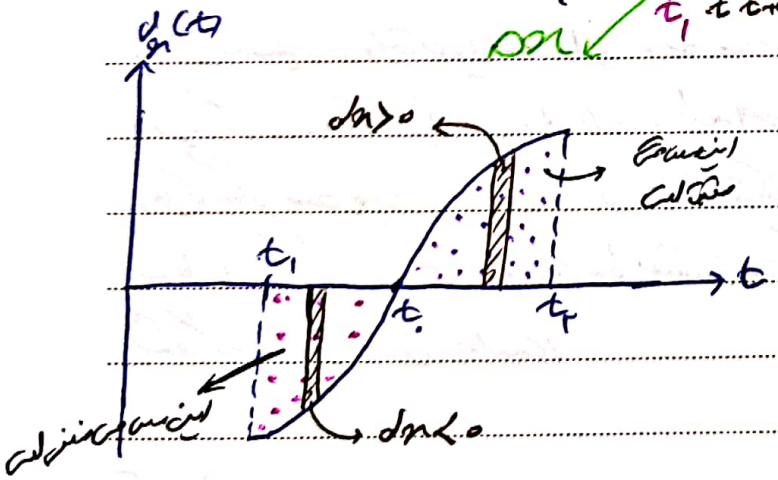
در انتگرال‌گیری از کدام یک از k, N ثابت زیگما استفاده می‌شود؟

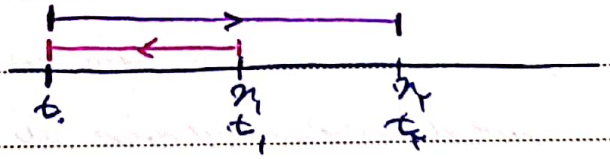
متغیر انتگرال‌گیری است

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,dt$$

با یک نشانه‌ی ساده می‌توان یک حرکت (مسافت طی شده) را نشان داد







جابجایی گرفتن مسیر رفت و برگشت نیست زیرا در حرکت رفت و برگشت

مسافت طی شده

مسیر با شکاف کج

یک بعد $\vec{a} = a_x \hat{i} \rightarrow v_x = a_x t + v_{0x}$

$t = 0 : v_x = v_{0x}$

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$t = 0 : x = x_0$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

معادلات حرکت با شتاب ثابت:

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \quad (a)$$

استفاده از معادلات حرکت با شتاب ثابت در حرکت با شتاب ثابت بر خط راست یا خط شتاب

$$t = \frac{v - v_0}{a} \qquad x = x_0 + \frac{v_0}{a}(v - v_0) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$ معادله مستقل از زمان

در حرکت با شتاب ثابت در یک بعد می‌توان از بردارها نیز استفاده کرد.

$$\vec{a} = ? \qquad \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$2(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{a} = 2\left(\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\right)\cdot\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}a^2t^2 + (\vec{a}\cdot\vec{v}_0)t\right)$$

$$= a^2t^2 + 2t(\vec{a}\cdot\vec{v}_0) \quad (1)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = (\vec{a}t + \vec{v}_0)\cdot(\vec{a}t + \vec{v}_0) = 2(\vec{a}\cdot\vec{v}_0)t + \vec{a}^2 + \vec{v}_0^2 = \vec{v}^2$$

$$\vec{v}^2 - \vec{v}_0^2 = \vec{a}^2 + 2t(\vec{a}\cdot\vec{v}_0) \quad (2)$$

$$(2),(1) \rightarrow \quad \vec{v}^2 - \vec{v}_0^2 = 2(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{a}$$

یک ناظر بسیار بزرگ طول صد برابر ده متر ساعت خودش به صورت ثابت در حرکت است.
حرکت یک ساعت مچی را به سوی ناظر بزرگ مشاهده می‌کند.
ناظر کوچک می‌گوید که عقربه‌ها خیلی آهسته حرکت می‌کنند.
ناظر بزرگ می‌گوید که عقربه‌ها خیلی تند حرکت می‌کنند.
هر دو ناظر درست می‌گویند.
هر کدام از دیدگاه خود درست می‌گوید.

تفاوت تندی و سرعت

تندی اندازه سرعت است

سرعت ← velocity ← $\vec{v}$

تندی ← speed ← $|\vec{v}|$

$$\text{سرعت} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{\vec{l}}{dt} \qquad v = \frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

$\vec{l}$: جابه‌جایی (بردار)

l: مسافت طی شده (تندی لحظه‌ای)

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

سرعت متوسط $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ اسکالر مقدار این تعریف لازم نیست الکیه

تندی لحظه‌ای: اندازه سرعت لحظه‌ای است.

تندی متوسط: اندازه سرعت متوسط نیست!

$dl = |d\vec{r}| \qquad l \neq |\Delta \vec{r}|$

$d\vec{r} = d(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$

توجه: x, y, z تابع s است.

$$l = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}\, ds$$

$dx = \frac{dx}{ds} ds$

حالت خاص که v ثابت باشد،

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

خلاصه روابط:

$\vec{a} =$ ثابت

$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\vec{v}^2 - \vec{v}_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0)$

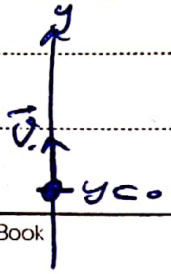
حرکت: $v_x = a_x t + v_{0x} \qquad v_y = a_y t + v_{0y} \qquad v_z = a_z t + v_{0z}$

$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$

مثال: جسمی با سرعت اولیه $\vec{v}_0$ به سمت بالا پرتاب می‌شود.

$a_y = -g \qquad a_x = 0 \qquad a_y = 0 \qquad \vec{v}_0 = v_0 \hat{j} \qquad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$v_y = v_0 - gt \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$



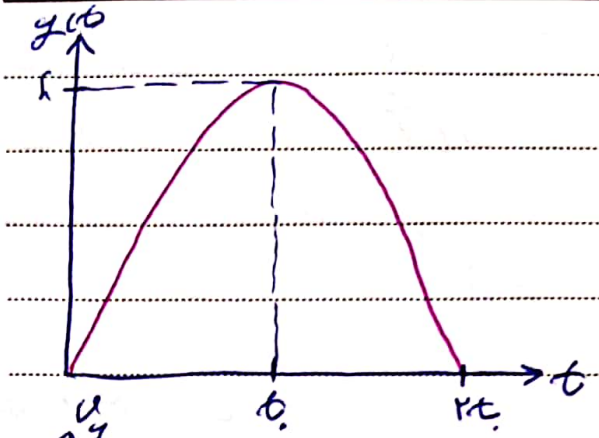
$v^2 - v_0^2 = -2gy$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....



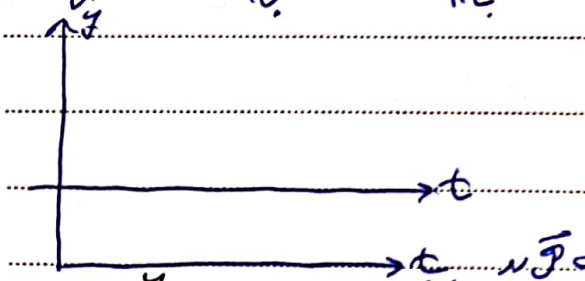
h ارتفاع اوج است.

$t_0 = \frac{v_0}{g}$

نمودار $y-t$ یک سهمی رو به پایین است

که البته این شکل مسیر نیست، مسیر خط عمودی است.

$h = \frac{v_0^2}{2g}$



حرکت پرتابه

پرتابه جسمی است که پرت میشود

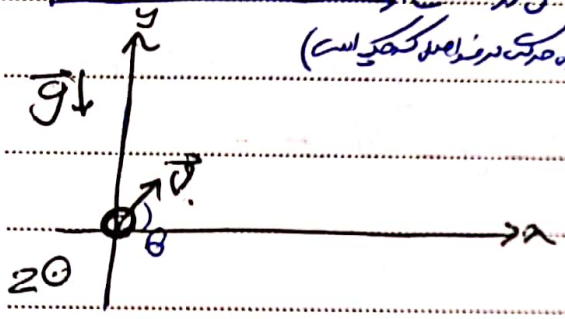
دقت کنید ما فرض میکنیم گرانش داریم و gravity نداریم

افق: عمود بر امتداد گرانش زمین

سطح افق در امتداد آن همه جا یکسان است. یعنی اگر جسمی روی سطح افق حرکت کند

تغییر تقریبا نداریم و ارتفاع ثابت میماند

خلط کردیم (مسیر حرکت در واقع کمی انحنا دارد)



$\vec{a} = -g\hat{j}$ $\vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\hat{i} + v_0\sin\theta\,\hat{j}$

در راستای محور x و y جدا جدا

هیچ ارتباطی نمیدانند

$v_x = v_0\cos\theta + a_x t$ $v_y = v_0\sin\theta - gt$

$a_x = 0$

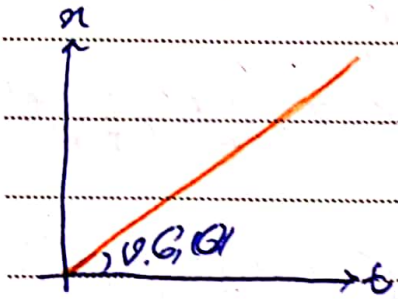
$x = v_0\cos\theta\, t$

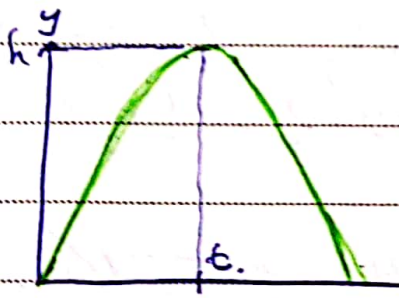
$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\, t$

فرض کردیم کلوله از سطح زمین پرتاب شده و سطح زمین $x=0$ است

و $y=0$ را هم فرض کردیم.

شکل مسیر یعنی $x-t$ و $y-t$ را رسم کنید.





$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$

$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\sin\theta\,\frac{x}{v_0\cos\theta}$

$= -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$

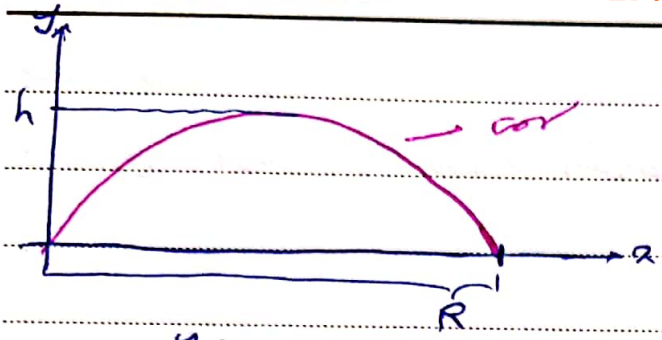
$t_0 = \frac{v_0\sin\theta}{g}$

$h = y(t_0)$ $h = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

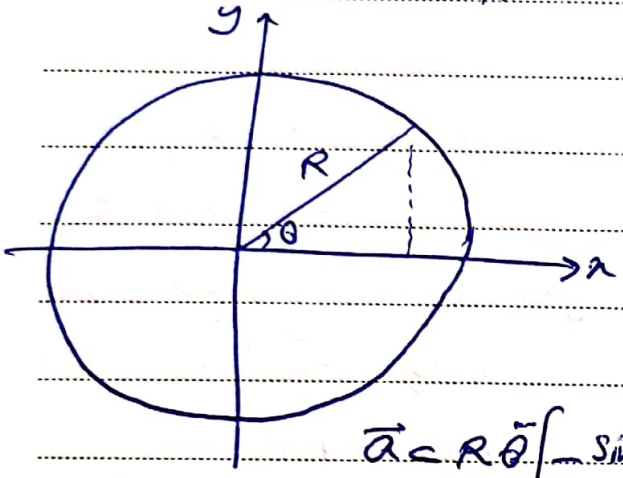


$x = R, y = 0 \quad R = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$

$R = \dfrac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$

حرکت دایره‌ای

پارامتر حرکت ضد ساعتگرد دایره‌ای استاندارد θ است.



$\vec{r} = R\cos(\theta)\hat{i} + R\sin(\theta)\hat{j}$

$\vec{v} = -R\sin(\theta)\dfrac{d\theta}{dt}\hat{i} + R\cos(\theta)\dfrac{d\theta}{dt}\hat{j}$

$= R\dot{\theta}\left[-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}\right]$

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\left[-\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}\right] + R\dot{\theta}^2\left[-\cos(\theta)\hat{i} - \sin(\theta)\hat{j}\right]$

$|\vec{r}| = R$ (مقدار ثابت)

$|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{(R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2} = R$

$|\vec{v}| = R|\dot{\theta}|\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = R|\dot{\theta}|$

دقت $\dot{\theta}$ می‌تواند مقدار مثبت یا منفی باشد.

$\dot{\theta} > 0$ یعنی بردار شعاع در حال چرخش در جهت پادساعتگرد است و $\dot{\theta} < 0$ یعنی بردار شعاع در حال چرخش در جهت ساعتگرد است.

$\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$ سرعت همواره بر بردار شعاع عمود است.

$\vec{a} = (-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta)\hat{i} + (R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)\hat{j}$

$|\vec{a}| = \sqrt{(R\ddot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}^2\cos\theta)^2 + (R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)^2} = \sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^4} = R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$

حالت ساده‌تر: سرعت زاویه‌ای ثابت

سرعت زاویه‌ای: آهنگ تغییرات زاویه θ

شتاب زاویه‌ای: $\ddot{\theta}$

$\theta = \omega t + \theta_0 \quad \theta_0 = 0$

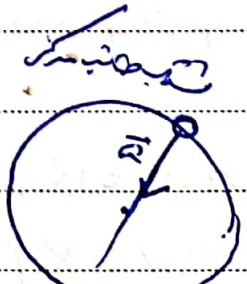
$\dot{\theta} = \omega = \text{Const} \quad \ddot{\theta} = 0$

$\vec{r} = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\sin(\omega t)\hat{j}$

$\vec{v} = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) \quad |\vec{v}| = R\omega$

$\vec{a} = R\omega^2(-\cos(\omega t)\hat{i} - \sin(\omega t)\hat{j}) = -\omega^2\vec{r}$

$|\vec{a}| = R\omega^2 = \dfrac{|\vec{v}|^2}{R}$



شتاب جسم

$|\vec{a}| = \dfrac{|\vec{v}|^2}{R}$ شتاب جسم

ako Note Book
IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

$\ddot{\theta} = \alpha = \frac{a_t}{R}$ — شتاب زاویه‌ای ثابت

دوچرخه‌ای با شعاع R را در نظر بگیرید که با شتاب زاویه‌ای ثابت α شروع به حرکت می‌کند.

$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$v = R\omega(t) = R(\alpha t + \omega_0)$

$a_r = -R\dot{\theta}^2 = -R(\alpha t + \omega_0)^2$

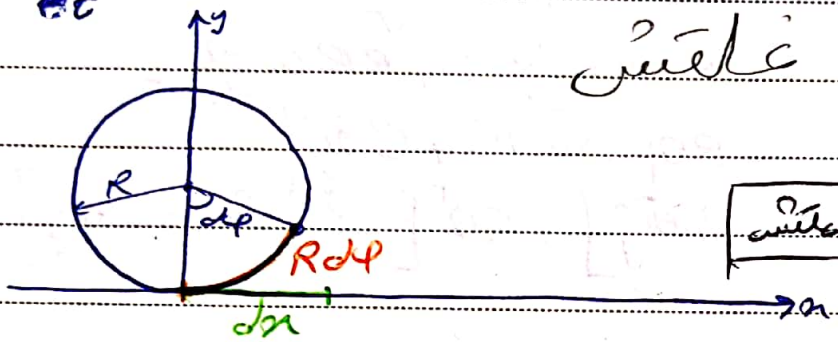
$a_{\theta t} = R\ddot{\theta}$

ω: سرعت زاویه‌ای

t: مدت زمان

مثال: دایره در حال غلتش روی سطح

غلتش: تغلطیدن بدون سر خوردن



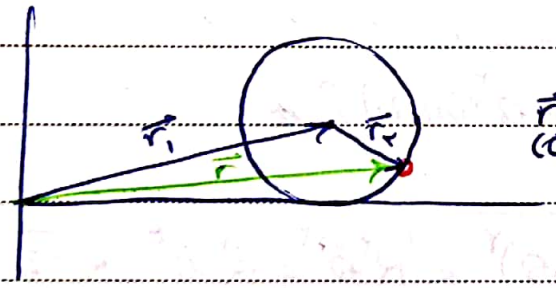
غلتش

شرط غلتش $dx = Rd\varphi$

$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$ $\boxed{v = R\omega}$

خم چرخزاد یا سیکلوئید: منحنی حاصل از مکان یک نقطه از محیط دایره در حال غلتش

cycloid



$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$

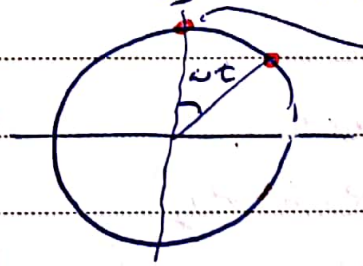
$\vec{r}_1$: بردار مکان مرکز چرخ نسبت به مبدا

$\vec{r}_2$: بردار مکان نقطه مورد نظر نسبت به مرکز چرخ

$\vec{r}_1(t) = vt\hat{i} + R\hat{j}$

$\vec{r}_2(t) = R\sin(\omega t)\hat{i} + R\cos(\omega t)\hat{j}$

$\vec{r} = (vt + R\sin(\omega t))\hat{i} + (R + R\cos(\omega t))\hat{j}$



حرکت نقطه را به دست بیاورید.

$x(t) = R(\omega t + \sin(\omega t))$

$y(t) = R(1 + \cos(\omega t))$

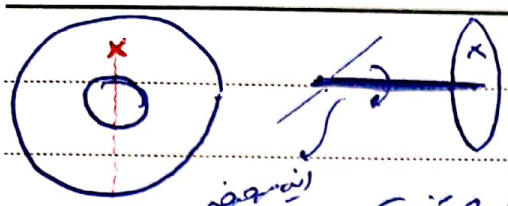
معادله مسیر در بیشتر حالت‌ها حل است.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

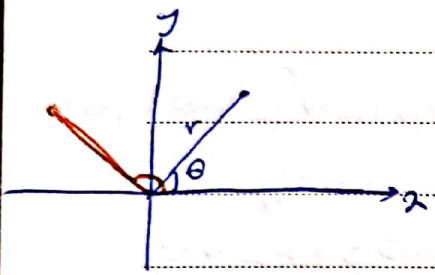


حرکت چرخ روی مسیر دایره‌ای شکل

به مسیرهایی که نقطه‌ی اثر چرخ را دنبال می‌کند هم مسیر گوییم و به تفاوت

مختصات غیر کارتزی موقعیت مردم نیستند.

مختصات قطبی:

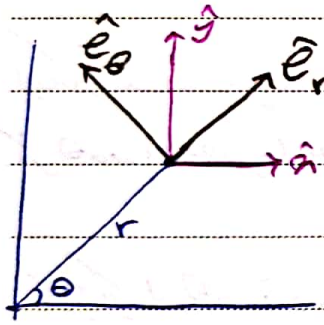


$$x = r\cos(\theta) \quad | \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$y = r\sin(\theta) \quad | \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

به ازای یک مقدار θ یا $\tan\theta$، دو θ وجود دارد که لازم است به x و y هم نگاه کنیم.

$\hat{e}_r$: بردار یکه در جهت خطی که شعاع r افزایش می‌یابد. هر نقطه $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ مخصوص خودش را دارد.

$\hat{e}_\theta$: بردار یکه در جهت خطی که زاویه θ افزایش می‌یابد.



$$\hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$$
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = r\cos(\theta)\hat{x} + r\sin(\theta)\hat{y}$$
$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$$
$$\hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_r = 0 \longrightarrow \text{عمودند}$$

ص ۲

آیا $\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ یک پایه‌ی صحیح هستند؟

موجوداتی که تنها فضای برداری هستند و نقطه بردار نیستند به طور خاص فضای برداری هستند. این موجودات را

خمینه manifold مانند.

سطح کره خمینه دارد. خمینه‌ها را توان مقصد نقطه و توان از نقطه‌ای به نقطه‌ی دوم تفسیر می‌کنند.

توان خمینه‌ها در فضای برداری مانند بردارها ثابت نیستند و تفسیر می‌کنند.

فضای مماس متعلق به نقطه‌ی P بر سطح خمینه دارد مماس کره و فرض کرد

اطراف آن نقطه تخت است

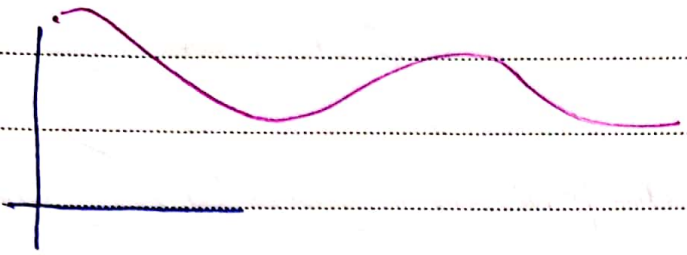
بر صفحه مماس همه فضاهای مماس دیگر هم مماس‌اند

اگر از مختصات غیر کارتزی استفاده کنیم

$\hat{e}_r$ و $\hat{e}_\theta$ یک پایه موضعی حول نقطه P هستند

IranPhO.ir

IranPhO.ir

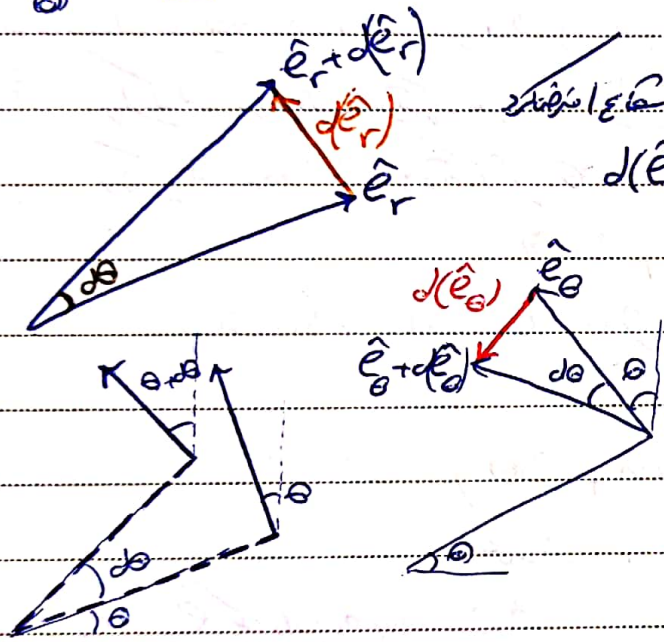


$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r$

$\frac{d}{dt}(\hat{e}_r)_{(\theta)} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(\hat{e}_r(\theta)) = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$

$= \dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\theta)_{(\theta)} = \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = \dot{\theta}(-\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}) = -\dot{\theta}\hat{e}_r$



چون $d\theta$ خیلی کوچک می‌توان کمان را در این بازه با پاره‌خط تقریب زد

$d(\hat{e}_r) = 1 \times d\theta\,\hat{e}_\theta$

این‌طور حدس می‌زنید در حد $d\theta \to 0$ چه اتفاقی بیفتد؟

اگر $d\theta$ در حد صفر میل کند تقریب دقیق‌تر می‌شود

$d(\hat{e}_\theta) = -d\theta\,\hat{e}_r$

علامت منفی از کجا آمد؟

$\frac{d}{dt}(\hat{e}_r) = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \qquad \frac{d}{dt}(\hat{e}_\theta) = -\dot{\theta}\hat{e}_r$

$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \dot{r}dt = dr \qquad \dot{\theta}dt = d\theta \qquad d\vec{r} = dr\hat{e}_r + rd\theta\,\hat{e}_\theta$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$

$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$

a_r مولفه شعاعی $\qquad$ a_θ مولفه عرضی

(عمود بر شعاع)

ako
Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

$r = R = \text{const}$ $\quad v_r = 0$ $\quad a_r = -R\dot{\theta}^2$

$\theta = \theta(t)$ $\quad v_\theta = R\dot{\theta}$ $\quad a_\theta = R\ddot{\theta}$

$\downarrow$

$v = R|\dot{\theta}|$

$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$

$r = a\tilde{\theta}$ $\quad \tilde{\theta} = \theta \bmod (2\pi)$

$\vec{r} = r\hat{e}_r = a\theta\hat{e}_r \Rightarrow a\dot{\theta}\hat{e}_r + a\theta\dot{\theta}\hat{e}_\theta = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$|\vec{v}|^2 = a^2\dot{\theta}^2(1+\theta^2) = u^2 \rightarrow \dot{\theta} = \frac{u}{a\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{d\theta}{dt}$

$\int_0^\theta \sqrt{1+\theta'^2}\, d\theta' = \frac{u}{a}\int_0^t dt' \rightarrow \frac{u}{a}t = \frac{1}{2}\left(\theta\sqrt{1+\theta^2} + \sinh^{-1}(\theta)\right)$ در $\theta = 0$ و $t = 0$ است

انتگرال‌گیری

$\vec{v} = \frac{au}{a\sqrt{1+\theta^2}}\hat{e}_r + \frac{a\theta u}{a\sqrt{1+\theta^2}}\hat{e}_\theta = \frac{u}{\sqrt{1+\theta^2}}(\hat{e}_r + \theta\hat{e}_\theta)$

$$\boxed{\vec{v} = u(1+\theta^2)^{-\frac{1}{2}}(\hat{e}_r + \theta\hat{e}_\theta)}$$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$

$\ddot{r} = a\ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} = -\frac{1}{2}\frac{u}{a}\frac{2\theta\dot{\theta}}{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u^2}{a^2}\frac{\theta}{(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\theta^2}} = -\frac{u^2\theta}{a^2(1+\theta^2)^2}$

$\vec{a} = \left(-\frac{u^2\theta}{a(1+\theta^2)^2} - a\theta\frac{u^2}{a(1+\theta^2)}\right)\hat{e}_r + \left(2a\frac{u^2}{a^2(1+\theta^2)} + 0 - \frac{a\theta u^2}{a^2(1+\theta^2)^2}\right)\hat{e}_\theta$

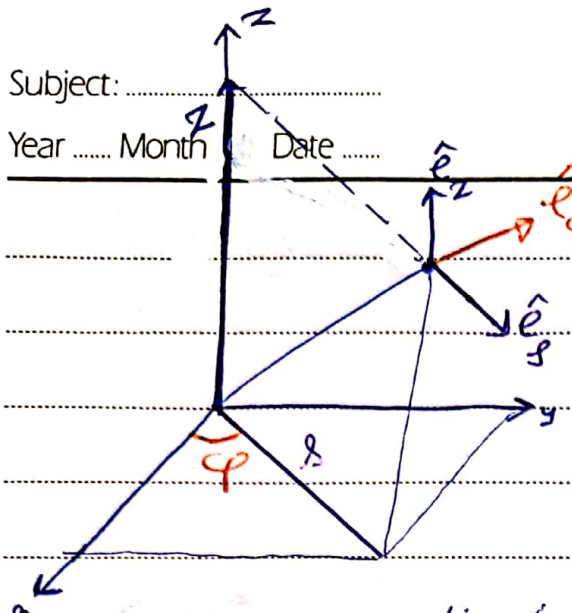
$= -\frac{u^2\theta}{a(1+\theta^2)}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2} + 1\right) + \frac{u^2}{a(1+\theta^2)}\left(2 - \right.$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....



مختصات استوانه‌ای x, y, z ρ, φ, z

$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_z$

دستگاه مختصات راست‌گرد.

$\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho \quad \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\varphi$

آیا بردارهای یکه ثابت هستند؟

ترتیب گفتن ρ, φ, z طوری بوده که راستگرد شود. در غیر این صورت عامل منفی

$x = \rho\cos(\varphi) \quad y = \rho\sin(\varphi) \quad z = z$

$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$

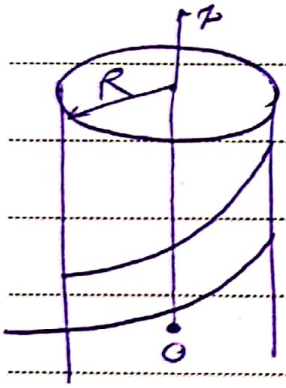
$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z$

$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho - \rho\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{e}_z + \dot{\rho}\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$

$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi + \ddot{z}\hat{e}_z$

مثال: مسافت این نقطه را یک جمله کنید. $\varphi = \tilde{\varphi} \bmod (2\pi) \rightarrow$ $\rho = R \quad z = a\tilde{\varphi}$

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \dot{\varphi}$



$\vec{r} = R\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$

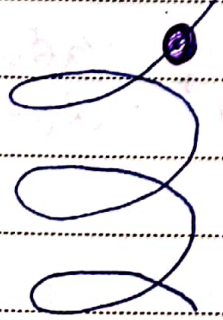
$\vec{v} = R\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\hat{e}_z = R\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + a\dot{\varphi}\hat{e}_z$

$|\vec{v}| = |\dot{\varphi}|\sqrt{R^2 + a^2}$

اعلب پیچ‌ها با این راستگردند

معمولا پیچ‌ها را طوری طراحی می‌کنند که نیروی فشار عامل پیچ، باز کننده، محکم‌تر بشن

$\vec{a} = R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\hat{e}_\rho + a\ddot{\varphi}\hat{e}_z$



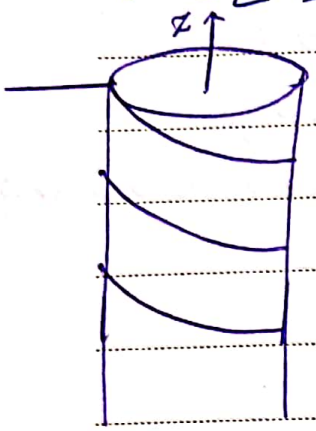
ako

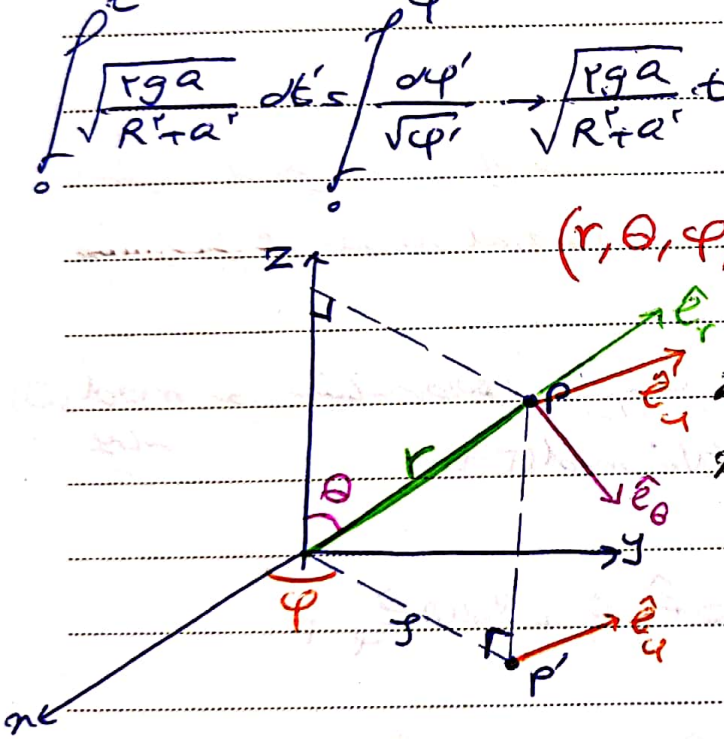
IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....



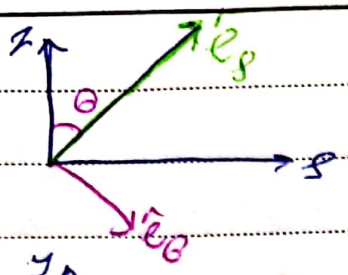


ako

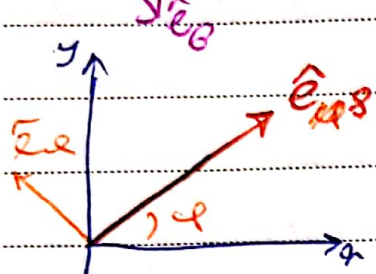
IranPhO.ir

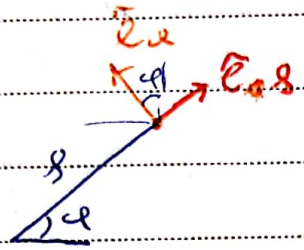
IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....



$$\hat{e}_r = \sin(\theta)\hat{e}_s + \cos(\theta)\hat{e}_z$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{e}_z + \cos(\theta)\hat{e}_s$$





$$\hat{e}_s = \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}$$
$$\hat{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{e}_z + \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y}$$
$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\hat{e}_r = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z}$$
$$\hat{e}_\theta = \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}$$
$$\hat{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\hat{x} + \cos(\varphi)\hat{y}$$

$f(x,y)$ $x(t)$, $y(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

مشتق گیری از توابعی که چند متغیره یا بیشتر هستند؟
مشتق جزئی Partial derivative

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{e}_r(\theta,\varphi)\right) = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} = \hat{e}_\theta\dot{\theta} + \sin(\theta)\hat{e}_\varphi\dot{\varphi}$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \hat{e}_\theta\dot{\theta} + \hat{e}_\varphi\dot{\varphi}\sin(\theta) \qquad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos(\theta)\hat{e}_\varphi$$
$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\sin(\theta)\hat{e}_r + \cos(\theta)\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\hat{e}_\varphi$$
$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin(\theta)\hat{e}_\varphi$$
$$+ r\dot{\varphi}\cos(\theta)\dot{\theta}\hat{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin(\theta)\dot{\hat{e}}_\varphi$$

ضرب‌کان محاسبه کنید

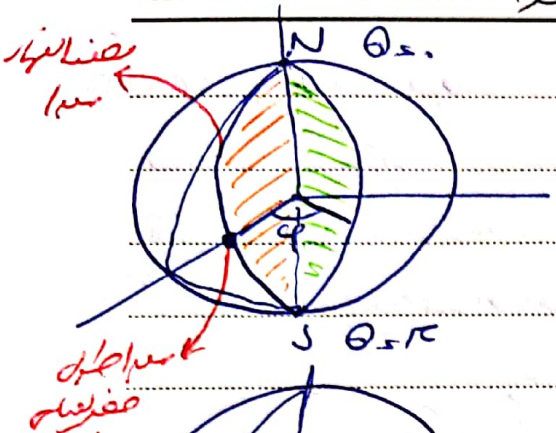
ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....



دایره عظیمه: بزرگترین دایره‌ای که می‌توان در کره کشید به مرکز کره

نصف النهار: خطی فرضی با θ ثابت که از قطبین N و S می‌گذرد

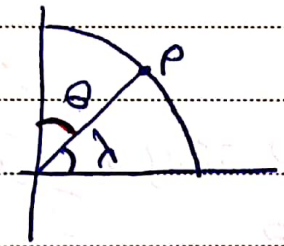
نصف النهار صفر: نصف النهار اصلی

مدار: صفحه‌ای با θ ثابت — دایره به شعاع $r\sin\theta$

صفحه استوایی: $\theta = \frac{\pi}{2}$

هر صفحه‌ای با $0 \le \varphi < 2\pi$ می‌باشد و صفحه استوایی شرقی و غربی داریم

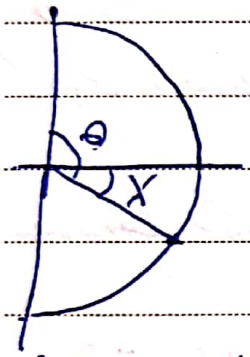
نقاط بالای صفحه استوایی نیمکره شرقی و نقاط پایین صفحه استوایی نیمکره غربی هستند.



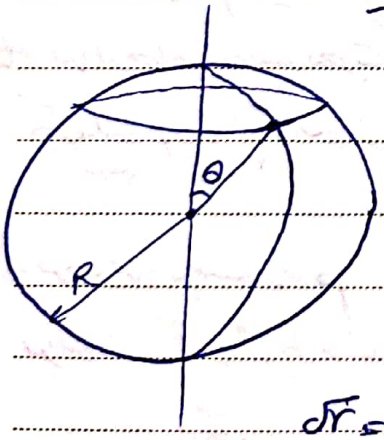
عرض جغرافیایی: متمم زاویه θ (λ)

$\frac{\pi}{2} - \theta$

عرض جغرافیایی جغرافیایی: $\theta - \frac{\pi}{2}$ (λ)



اگر سوالی دیدید که پاسخ‌نامه برحسب داده‌های مسئله باشد و این ممکن نیست نوشته کره حرف مالک سیاه است جواب ندارد اگر ضمن بازنویسی نباشد با احتیاط وارد شوید. توصیه می‌شود احتیاط کنید.



$$d\vec{r} = R\sin\theta\, d\varphi\, \hat{e}_\varphi + R\, d\theta\, \hat{e}_\theta$$

$d\varphi$: تغییرات φ — $R\sin\theta$: شعاع مدار — $R\,d\theta$: جابجایی در راستای نصف النهار

فرض کنید شعاع کره نیز می‌تواند تغییر کند:

$$d\vec{r} = dr\,\hat{e}_r + r\,d\theta\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\hat{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

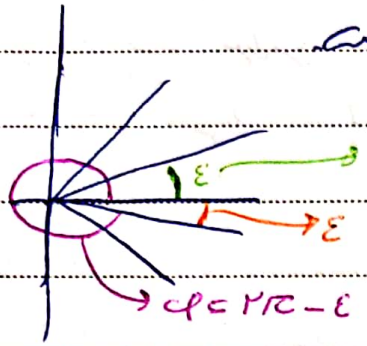
مجموعه‌ای از نقطه‌ها که شرط خاصی دارند و تشکیل یک شکل می‌دهند.

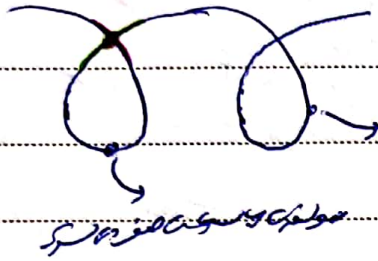
مثلاً دایره مجموعه‌ای از نقاط است که فاصله‌ی همه‌ی آن‌ها از یک نقطه‌ی ثابت برابر است.

ako
Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir





دستگاه مختصات TBN:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$

$\hat{t}$: بردار یکه مماس بر مسیر در جهت حرکت

$\hat{n}$: بردار یکه عمود بر خم و به سمت مرکز انحنای خم

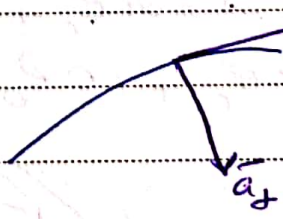
$\hat{b}$: بردار یکه عمود بر صفحه خم

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_u + \vec{a}_\perp$$

$\vec{a}_u$: مولفه مماسی شتاب

$\vec{a}_\perp$: مولفه عمود بر مسیر شتاب



$$\hat{n} = \frac{\vec{a}_\perp}{|\vec{a}_\perp|} \qquad \vec{a}_u = (\vec{a}\cdot\hat{t})\hat{t} \qquad \vec{a}_\perp = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\hat{t})\hat{t}$$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

یادآوری $\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....

$$\vec{a}_\perp^{\,2} = \left[\vec{a} - (\vec{a}\cdot\hat{t})\hat{t}\right]^2 = \vec{a}^2 + (\vec{a}\cdot\hat{t})^2 - 2(\vec{a}\cdot\hat{t})(\vec{a}\cdot\hat{t})$$
$$= \vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot\hat{t})^2$$

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{v^2}{R} = \sqrt{\vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot\hat{t})^2} \longrightarrow R = \frac{v^2}{\sqrt{\vec{a}^2 - (\vec{a}\cdot\hat{t})^2}}$$

$$v^2\vec{a}_\perp = v^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v} \quad \text{(C, A, B)} \qquad \vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})$$

بکارگیری اتحاد برداری

$$v^2|\vec{a}_\perp| = |\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|$$

$$R = \frac{v^2}{v^2|a_\perp|} = \frac{v^2}{|\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|}$$

$$\hat{n} = \frac{v^2|\vec{a}_\perp|}{v^2|\vec{a}_\perp|} = \frac{\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})}{|\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|}$$

$\hat{n}\times\hat{t} = \hat{b} \qquad \hat{t}\times\hat{b} = \hat{n}$

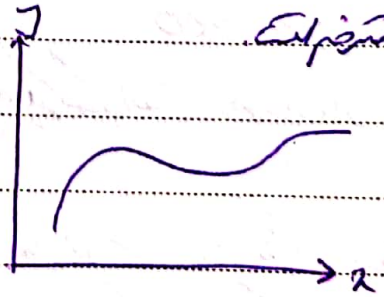
$$\hat{b} = \hat{n}\times\hat{t} = \frac{\left[v^2\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{v}\right]\times\vec{v}}{|\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|\,|\vec{v}|} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|}(\vec{a}\times\vec{v}) = \frac{\vec{a}\times\vec{v}}{|\vec{a}\times\vec{v}|}$$

نیازی نیست حفظ کنید حاصل رو... باید بتونید رسیدن بیارید، اگر دادن همین استفاده کنید

$$\hat{b} = \frac{\vec{a}\times\vec{v}}{|\vec{a}\times\vec{v}|}$$

$y = f(x)$ توابع خوب صعودی x و y

$\vec{r} = x\hat{i} + f(x)\hat{j} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dx} = \hat{i} + f'\hat{j}$



$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dx} = f''\hat{j} \qquad \hat{b} = \hat{k}$

$$\hat{t} = \frac{\hat{i} + f'\hat{j}}{\sqrt{1+f'^2}} \qquad \hat{n} = \hat{t}\times\hat{b} = \frac{(\hat{i} + f'\hat{j})\times\hat{k}}{\sqrt{1+f'^2}}$$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$\vec{a}\times\vec{v} = (\delta''\hat{j})\times(\hat{i}+\delta'\hat{j}) = -\delta''\hat{k}$

$\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v}) = (\hat{i}+\delta'\hat{j})\times(-\delta''\hat{k}) = \delta''(\hat{j}-\delta'\hat{i})$

$R = \frac{v^3}{|\vec{v}\times(\vec{a}\times\vec{v})|} = \frac{(1+\delta'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\delta''|(1+\delta'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1+\delta'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\delta''|}$

↓ اتحاد

این دستگاه مختصات مربوط به حرکتی که شکل مسیر را مشخص می‌کند

بنابراین دستگاه نمی‌تواند مختصات نقاط را تعیین کند. به همین دلیل به آن دستگاه نمی‌گویند.

دینامیک

دینامیک همین نظریه‌ای است که دستگاه را انتخاب می‌کنیم و با یک سری مفاهیم دینامیکی دستگاه را توصیف می‌کنیم که با برآیند نیروها و جرم سروکار دارد.

برای همین برای مثال TBN فقط کافی است شکل مسیر را بدهد تا خودش یک دستگاه دارد

حالا دستگاه با مقادیر همین از مفاهیم دینامیکی N و $f_1, f_2, \dots, f_N$ توصیف می‌شود.

زمان مکان

با دانستن $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ همه دستگاه توصیف می‌شود.

مفاهیمی که روی حرکت جسم موثرند باهم سروکار دارند.

دستگاه ← مفاهیم دینامیکی ← برآیند نیروها ← جرم ← حرکت ← نظریه ارائه می‌دهد

تشریح نیوتنی که همه چیز را با همه چیز می‌توان ارائه می‌کرد

ساده‌ترین دستگاه فیزیکی ممکن **دستگاه بسیط** است. دستگاه مرکب از ترکیب دارای برهمکنش دستگاه‌های بسیط ساخته می‌شود.

ذره: جسمی که در تئوری هندسه حاصل می‌کند. همین نقطه ماده

دستگاه همه دینامیکی داریم که نقطه نیستند پس ابعاد دستگاه نسبت ابعاد مسیر خیلی کوچک است و می‌توان آن را ذره نامید.

ذره چیست؟

گاهی ابعاد دستگاه نسبت ابعاد مسیر کوچک نیست و دستگاه حرکت انتقالی دارد است و می‌توان یک نقطه از دستگاه را توصیف کرد.

حرکت کاسه‌ای محض

حرکت طبیعی یک دستگاه بسیط چیست؟

حرکت طبیعی همین حرکتی که به ما در تصمیم برهمکنش کمک می‌کند.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

بابی یک نظری به دستگاه بدون برهانش داشته باشیم که بگیم وقتی برهانه داره چی میشه

در عمل ممکن نیست حرکت بدون برهانش باشه

در فیزیک ارسطویی حرکت طبیعی در زمین سکون است و در آسمان حرکت دایره ای

چون مردم می‌دیدند همه چی در آسمان حول محور خودش (بخاطر اینکه زمین حول محورش)

سکون از دید کی؟ ارسطو می‌گفت از دید زمین

در فیزیک نیوتنی حرکت طبیعی حرکت با سرعت ثابت است

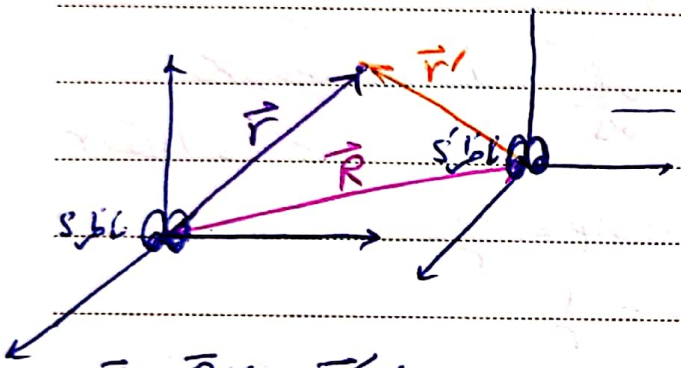
سرعت ثابت از دید کی؟

سرعت، مکان و زمان در ناظر (در مکانیک نیوتنی)

فرض می‌کنیم ناظرها حرکت انتقالی نسبت به هم دارند

حرکت هر دو شتاب‌سنج یکسان است و صفر نشان می‌دهد

زمان در ناظرها یکی است



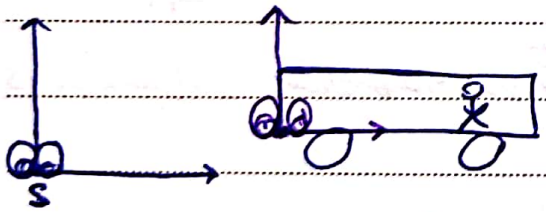
$$\vec{r}_{(t)} = \vec{R}_{(t)} + \vec{r}'_{(t)}$$

$$\frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} = \frac{d\vec{R}_{(t)}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_{(t)}}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

رابطه جمع سرعت‌ها گالیله‌ای:

سرعت S نسبت به زمین = سرعت S نسبت به S' + سرعت S' نسبت به زمین



سرعت متحرک نسبت به زمین = سرعت فرود نسبت به ناظر متحرک + سرعت ناظر متحرک نسبت به زمین

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$$

رابطه جمع شتاب‌ها:

یک نوع دیگر حرکت نسبی که ناظر در نظر بگیریم که می‌بینه یک جسم بدون برهانش سرعتش ثابته. این ناظرها

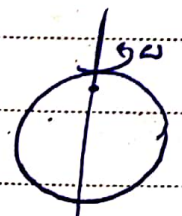
ناظر لخت می‌نامیم

برهان این فرضیه‌ها چیزی دستگیرمون نمیشه

جسم بدون برهانش مثلا یک سنگی که پرتاب می‌کنیم در فضای تهی

در حرکت جایی که زمین نیست که با مقاومت هوا کند بشه یا زمین حرکتش رو تغییر می‌کند و

زمین با تقریب خوبی لخت است



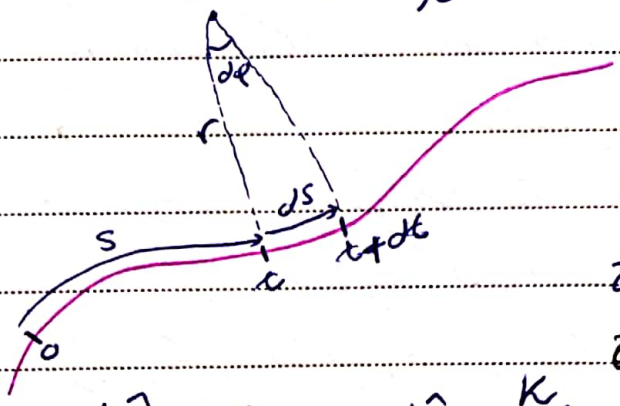
$$\omega = \frac{2\pi}{86400\ s} \ll 1$$

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....



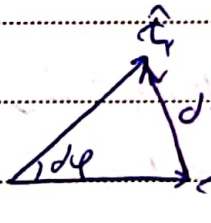
$$\vec{v} = v\hat{t} = \frac{ds}{dt}\hat{t} = \dot{s}\hat{t}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + v\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2\frac{d\hat{t}}{ds}$$

$\frac{d\hat{t}}{ds}$ را تعریف می‌کنیم اندازه K و جهت آن $\hat{n}$، $\frac{d\hat{t}}{ds} \perp \hat{t} \rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds} = K\hat{n}$ به راحتی مشخص است.

r شعاع انحنا است.



$ds = r\,d\varphi$ $\quad |d\hat{t}| = d\varphi = \frac{ds}{r}$ $\quad \frac{|d\hat{t}|}{ds} = \frac{1}{r}$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{r}\hat{n} \qquad \frac{1}{r} = K$$

K انحنا است.

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \alpha\hat{t} + \beta\hat{b} \qquad \frac{d\hat{b}}{ds} = \underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{0} \times \hat{n} + \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} = -\beta\underbrace{\hat{t} \times \hat{b}}_{-\hat{n}} = \beta\hat{n}$$

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \beta\hat{n}$$

β یک پیچش است. نشان می‌دهد صفحه‌ی $\hat{t}$ و $\hat{n}$ با چه سرعتی می‌چرخد.

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{b} \qquad \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d\hat{n}}{ds} \times \hat{b} + \hat{n} \times \underbrace{\frac{d\hat{b}}{ds}}_{0} = K\hat{n} = -\alpha\hat{n}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = K\hat{n} \qquad \frac{d\hat{n}}{ds} = -K\hat{t} - \beta\hat{b} \qquad \frac{d\hat{b}}{ds} = \beta\hat{n}$$

صفحه‌ی $\hat{t}$ و $\hat{n}$ صفحه‌ی بوسان صفحه‌ی $\hat{b}$ و $\hat{n}$ صفحه‌ی راست‌بر

$\hat{n}$ بردار اصلی، $\hat{b}$ بردار عمود

$$m\vec{a} = m\left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{N} + \ddot{s}\hat{T}\right) = F_t\hat{T} + F_n\hat{N}$$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

ساکن بودن نیوتن تعریف ناظر لخت هست و ناظری که ساکن بودن نیوتن برایش صدق میکند ناظر لخت هست

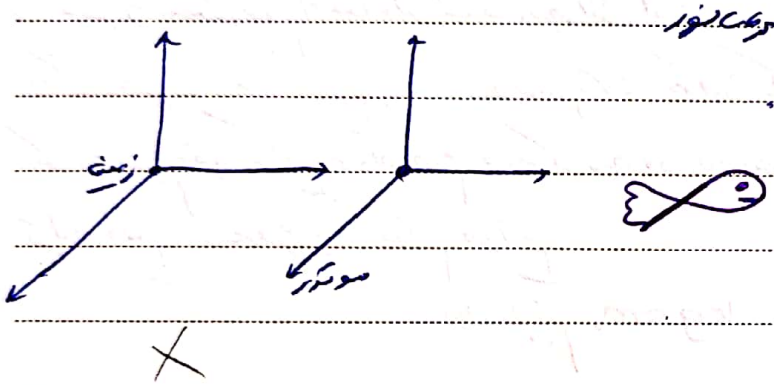
یک جسم بدون برهمکنش جسم روی سطح بدون اصطکاک هست و اسم دیگر بدون برهمکنش هست، برهمکنش‌های عمده خنثی شده‌اند.

به شکل فیزیکی ناظر بلایی هست مقدار باشد نه تنها نسبت زمین و آسمان باشد

در عالم چیزی مثل دستگاه مختصات نیوتنی وجود ندارد و همه اونایی که هست دوربین باتقریب خوب میتوان فرض کرد جزو دستگاه نیوتنی حساب میشود

حرکت نیوتنی یعنی سرعت همه خیلی کوچک، کمتر از سرعت نور

ساکن نیوتنی که در ناظر مشکل ایجاد نمیکند شتاب هست.



تبدیل گالیله: از یک دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر میرویم

کمیت برداری: کمیتی که تحت تبدیل تغییر میکند

کمیت نابرداری: کمیتی که تحت تبدیل تغییر نمیکند

سرعت تحت تبدیل گالیله برداری و شتاب تحت تبدیل گالیله نابرداری است.

با گالیله ماهنده هر جرمی میتوانیم درباره ناظر لخت است.

برهمکنش: چیزی عامل در محیط روی جرم تاثیر میگذارد و باعث کم حرکت تغییر کند.

نیرو: کمیتی فیزیکی که برهمکنش را توصیف میکند

جسم بدون برهمکنش شتابش صفر است $\vec{a}=0$ نیروی به آن وارد نشده $\vec{F}_{net}=0$

جسمی که تحت اثر برهمکنش است $\vec{a}\neq 0$ نیروی به آن وارد شده $\vec{F}_{net}\neq 0$

مثلا فرض کنیم جسم تحت یک برهمکنش است

A B $\vec{F}\propto\vec{a}$

برهمکنش (نیرو) را مناسب با شتاب در نظر بگیریم

حالا آیا خواص جسم نیرو برهمکنش بعدی با او مرتبط است؟

این را در حالت کلی وضع میکنیم. مفهوم نیرو را اینطور وضع میکنیم.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

A_1 [Fell] $\vec{F}$

A_2 [Fell] $\vec{F}$

دو جسم تحت اثر یک برهمکنش (نیرو) قرار می‌گیرند.

جسمی که تغییر شتاب بیشتری دارد لختی کمتری دارد.

کمیتی که میزان تغییر شتاب را در اثر برهمکنش مشخص می‌کند را جرم گوییم.

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

$\vec{F} = m\vec{a}$ حالا نوبت نیرو است.

$[\vec{F}] = MLT^{-2}$

راه تعیین و اندازه‌گیری جرم استفاده از شتاب در برهمکنش است.

چگونه جرم را اندازه بگیریم؟

دو جسم تحت برهمکنش یکسان

یک واحد جرم تعیین می‌کنیم، واحد جرم را جرمی که وقتی با آن برهمکنش یکسان داشته باشد، شتاب برابر با واحد شتاب ایجاد می‌کند.

واحد جرم را کیلوگرم می‌نامیم.

m_0 → $\vec{a}_0$

m → $\vec{a}$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a_0}{a} \qquad kg = m_0$$

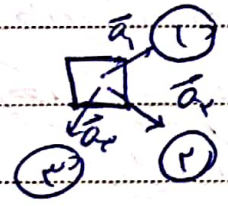
$$\frac{m}{kg} = \frac{a_0}{a} \qquad m = \frac{a_0}{a} kg$$

خلاصه: جسمی که تحت برهمکنش نیست و یا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است، شتاب ندارد و تعادل برقرار است.

جسم تحت چند برهمکنش

$\vec{F} = m\vec{a}$

اولین چیزی که می‌خواهیم بررسی کنیم، در نظر گرفتن جسم و برآیند همه نیروهایی است که از طرف برهمکنش‌گرهای مختلف به جسم وارد می‌شود.



$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1 \qquad \vec{F}_2 = m\vec{a}_2 \qquad \vec{F}_3 = m\vec{a}_3$$

برهمکنش ۱، ۲ یا ۳ چه برهمکنش‌هایی نیروها در جسم هستند.

در حقیقت این برهمکنش‌ها هستند که برآیند گیری می‌شوند.

نیرو صرف برهمکنش است و برهمکنش بین اجسام است.

یعنی اگر نیرویی به جسم وارد می‌شود حتماً باید یک برهمکنش‌گر باشد که آن نیرو را وارد می‌کند.

مشخص

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

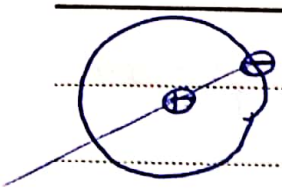
مثلاً اگر بگوییم نیروی جاذبه‌ی زمین یک نوع نیروی جسم نیست اضافه می‌کند، یک نوع نیرو است.

نوع نیرو مثلاً نیروی شناور است.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir



نیروی الکتریکی از الکترون ۲ بیرون داده شده و این نیرو از نوع جاذبه و مرکزی است.

پس حرکت را با فرض معلوم بودن ... بیان کنید!

جرم مستقل از برهمکنش است

این را تقریبی بیاد از مشاهدات بیاد.

جسمی که جرم آن از این دو برهمکنش مورد نظر است

m مجهول شناخته شده است.

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a_0}{a}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a'_0}{a'}$$

فعلا درباره اجسام صحبت می‌کنیم که از چند ذره ولی تعداد مشخص پروتون و الکترون ساخته شده‌اند.

نیروی کان داد؟ بله، نیرو معادله ذره وارد شده. در حالت کلی فرق می‌کند نیروی کجا بر جسم وارد شده.

یا جسم شامل یک ذره باشد: نیروی خود ذره وارد می‌شود و فقط داریم درباره ذرات صحبت می‌کنیم.

مفهوم جمع نیروی جرم

دو جسم m_1 و m_2 را هم می‌چسبانیم

نیرو بصورت مماسی

$$a_1 = \frac{F}{m_1}$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{\frac{F^2}{m_1 + m_2}}{\frac{F}{m_1} + \frac{F}{m_2}} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{F}{m}$$

حاکمون لاماتیه (پایستگی جرم)

$$\Rightarrow \boxed{m = m_1 + m_2}$$

معادله‌ها

وقتی یک سری جسم داشته باشیم نسبت جرم بعضی به بعضی برابر با نسبت شتاب‌های متناظرشان است.

می‌توان معادله‌ها را با جرم تعیین کرد.

چون از بین جرم و معادله‌ها را تعیین کرد، سخن معادله‌ها را بر جرم نسبت می‌دهیم.

بر نسبت متکنند جمع نیروی جسم حتی نمی‌کند.

جرم به انرژی تبدیل می‌شود! معادله‌ها تغییر می‌کنند

$$m = m_1 + m_2 + \frac{\Delta E}{c^2}$$

جرم کل

معادله‌ها تغییر نمی‌کنند

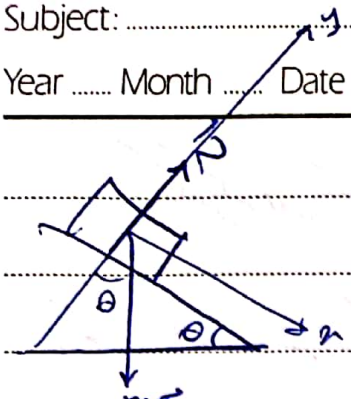
ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

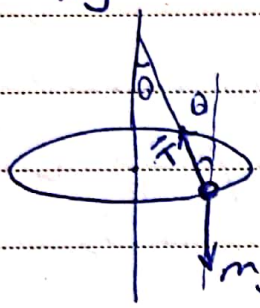
Subject: .....

Year ..... Month ..... Date .....



$\sum F_x = ma_x$ ×

$\sum F_y = ma_y$



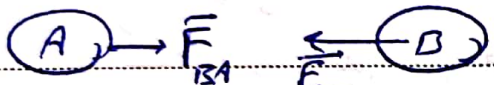
$T\cos(\theta) - mg = 0$

$T\sin(\theta) = mR\omega^2$

$\tan(\theta) = \frac{mR\omega^2}{g} = \frac{R}{g}\sin(\theta)\omega^2$

مکانیک سیستم ذرات

مکانیک سیستم یک گروه از ذرات است که بر هم نیرو وارد می‌کنند.



$m_A\vec{a}_A = \vec{F}_{BA}$ $m_B\vec{a}_B = \vec{F}_{AB}$

جسم A و B از جفت نیروی هستند

$\vec{a}_A = \frac{\Delta\vec{v}_A}{\Delta t}$ $\vec{a}_B = \frac{\Delta\vec{v}_B}{\Delta t}$ ~~$\frac{\Delta\vec{v}_A}{\Delta t}$~~

$\Delta t \to 0$

$m_A\frac{\Delta\vec{v}_A}{\Delta t} = \vec{F}_{BA}$, $m_B\frac{\Delta\vec{v}_B}{\Delta t} = \vec{F}_{AB} \longrightarrow m_A\frac{\Delta\vec{v}_A}{\Delta t} + m_B\frac{\Delta\vec{v}_B}{\Delta t} = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB}$

اگر برایند نیروها صفر باشد $m_A\Delta\vec{v}_A + m_B\Delta\vec{v}_B = 0 \longrightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0$

قوانین نیوتن

قانون نیوتن به ما نمی‌گوید نیرو چقدر و چه جهتی است بلکه می‌گوید طبیعت نیرو چگونه حاصل می‌شود

قوانین نیوتن برای همه نیروها صادق است.

قوانین نیوتن هم‌گشت‌ها را توصیف می‌کند.

۱- قوانین نیروهای بنیادی: هم‌گشت‌هایی که نیروهای بنیادی را توصیف می‌کنند

۲- قوانین عملی empirical: از ترکیب هم‌گشت‌های بنیادی تشکیل شده که به طور مستقیم مشاهده می‌شوند اما قوانین بنیادی را نقض نمی‌کنند.

نیروهای بنیادی: ۱- گرانش ۲- الکترومغناطیس ۳- ضعیف weak ۴- قوی strong

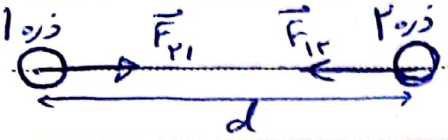
ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

نیروهای بنیادی ـ گرانش

هر دو جسم به هم نیرو وارد می‌کنند. این نیرو در راستای خط واصل این دو است.



نیرویی که ۲ به ۱ وارد می‌کند: $\vec{F}_{21}$

برای دو جسم نزدیک به هم است. دو ذره را در نظر می‌گیریم.

بار گرانشی: مشخصه‌ی مربوط به نوع جسم در نیروی گرانشی

$$|\vec{F}_{21}| \propto \frac{1}{d^2}$$

موثر

بار الکتریکی

به اجسام شدت کنید و هر چه مشخصه‌ای بتوان **بار** نسبت داد که مشخصه‌ای است که روی برهمکنش موثر است.

برهمکنش است که روی برهمکنش موثر است.

مشخص می‌کند بار گرانشی هر جسم با چه جرم لختی‌اش متناسب است.

با مقدار ماده متناسب و مقاومت او با جرم لختی متناسب

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{d^2} \qquad F = \bigcirc \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

تعیین ضریب به انتخاب یک واحد q بستگی دارد. اگر واحد بار گرانشی

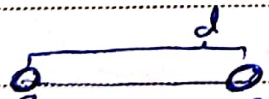
لز Δt آمپر بیاد او وقت ضریب k داریم و در تعیین ضریب ۱ وارد می‌کنیم.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$F = \bigcirc \frac{q_{g1}\, q_{g2}}{d^2}$$

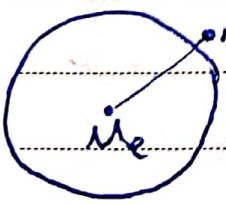
چون q_{g1} بار گرانشی با جرم لختی متناسب هست واحد q_{g1} روی جرم لختی تعیین می‌کنیم. و یک ثابت به عنوان G ظاهر می‌شود.

مثال: نسبت نیروی گرانشی و الکتریکی



m_e, m_p, e

$$\frac{F_{el}}{F_g} \sim 10^{39}$$



$$|\vec{F}_g| = G\frac{M_e m}{d^2} = mg$$

g را شتاب گرانشی می‌نامیم

نزدیک سطح زمین

نیروهای بنیادی ـ الکترومغناطیس

بارها میدان الکتریکی دارند اگر حرکت کنند میدان الکتریکی و مغناطیسی دارند. به علت جریانشان در تغییر مغناطیسی دارد.

مقدار ماده را با مقدار ماده جسم می‌سنجیم که در واقع مقدار ماده است.

ako Note Book

مول مقدار مولکول است. تقریبا هم جرم یک اتم با ۱ واحد g خواهد بود. جرم لختی با مقدار ماده متناسب

IranPhO.ir

IranPhO.ir

بار حسن خوبی شناسه ی جسم است. عوض نمی شه
مقدار عددی آن از دیدگاه کوانتومی بیاد

توسیکه ها اتمی و مولکول ها خنثی هستند چون تعداد پروتون ها و الکترون هایشان برابر است ولی در سیکه فضای
الکترون کنار هسته می چرخه نمی تونه بیشتر از هسته دور بشه پس کاتد همون جاست اگر این فکر نبود کل جمعیت توی یک محدوده
جمع می شد در سیکه مرکز انتقال با جمعیت منفی خالی نزدیکه ولی چون تعادل خنثی هم لازم هستند
در سیکه کیوانی آنرا نیروی غالب نیروی گرانش است.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

واکنش های شیمیایی - چون اتم الکتریسیته خنثی و مکانیک کوانتومی را یاد دارید
اکثر واکنش های شیمیایی برهمکنش الکترومغناطیسی هستند.

وقتی فنری را کشیدیم مجموع خاصیت الکترومغناطیسی فنر چیست که نیرو می دهد فنری خواهد بود جایگزین کرده
اینجا به صورت نیست که از عوامل مکانیک بیاد فنر را بسازیم، بحث چیست که فنر را جدا بررسی کنیم
بار الکتریکی ربطی به جرم ندارد.

نیروهای بنیادی - برهمکنش جاذبه

چیزهایی که جسم را جسم می سازند؟ برهمکنش جاذبه
برهمکنش جاذبه، قدرت است اما در فاصله خیلی کوتاه اثر می کند

سه کوارک { کوارک بالا $\frac{2}{3}e$ ، کوارک کنار $\frac{2}{3}e$ ، کوارک پایین $-\frac{1}{3}e$ }
نوترون { ۲ کوارک پایین $\frac{2}{3}d$ ، ۱ کوارک بالا $-\frac{2}{3}d$ }

اسم نیرویی که این باندها مثبت را نگه می دارد

جسب هسته ای هست.

نیروهای بنیادی - برهمکنش جاذبه ضعیف

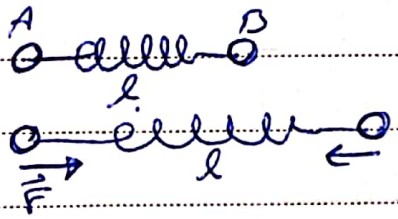
مرد و قدرت برهمکنش جاذبه ضعیف بین الکترومغناطیس است ولی کاربرد بسیار الکتریکی ندارد
احتمال این برهمکنش خیلی کم برهمکنش جاذبه ضعیف هست.

نیروهای اینرسی

اگر فنر را کشیدیم مارکه نشد و اگر نشکند جسم ما را فشار می دهد
قانون هوک جزو این دسته بنیادی نیست.

IranPhO.ir

IranPhO.ir

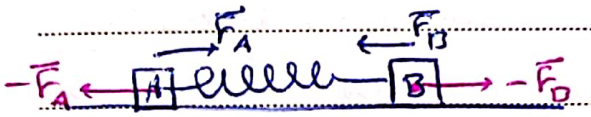


$\vec{F} \propto \Delta l$ ثابت فنر

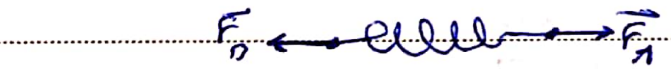
فنرها را موازی هم می‌بندیم.

جسم صلب: جسمی که تحت اثر نیروها تغییر شکل نمی‌دهد.

فنر جزو اجسام کشسان است، فنر کشسان اجسامی هستند که تغییر شکل پیدا می‌کنند و پس از حذف نیرو به حالت اولیه برمی‌گردند. هر یک از اجسام خاصیت کشسانی دارند اما فنر جسمی است که در درس با آن سروکار داریم و خاصیت کشسانی آن بیشتر است.

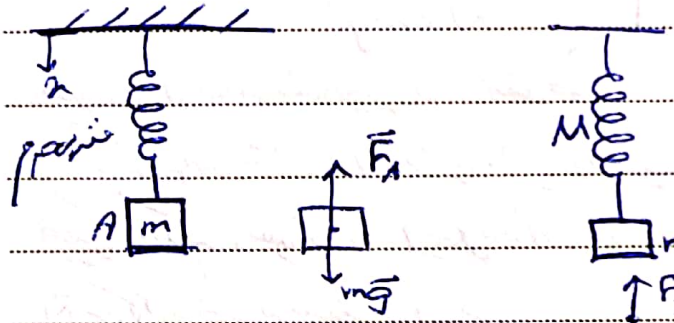


اگر فنر به جسم است از مرکز جرم فنر جا نزنیم یا فنر بی‌وزن باشد



آنگاه از دو طرف فنر

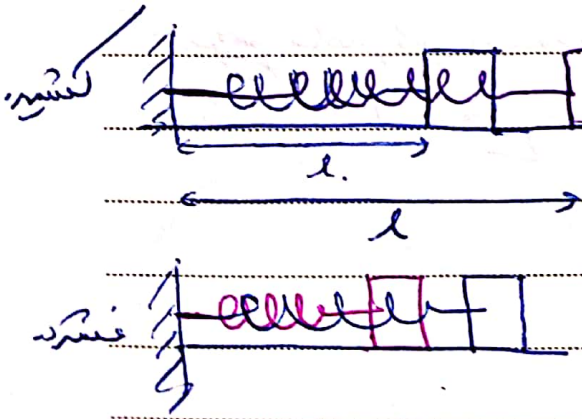
$\vec{F}_A - \vec{F}_B = m_{فنر}\vec{a} = 0$



اگر فنر به جسم باشد نیروی که فنر به دو طرف آن وارد می‌کند برابر است و نیروهایی که جسم از دو طرف فنر را جذب می‌کند برابر است.

$\vec{F}_B - \vec{F}_A = M\vec{a}$

$-Mg$



فنر هر کشیده یا فشرده شود نیرو می‌دهد.

$\Delta l = |x| \quad \vec{F}_e = -k\vec{x}$

فشرده: $x<0$ کشیده: $x>0$

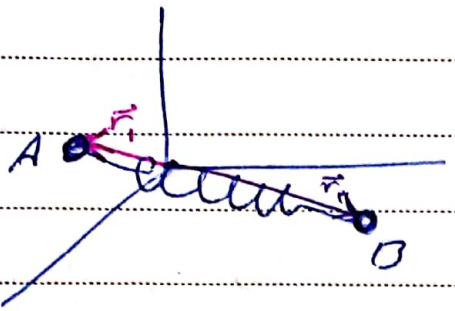
ako

IranPhO.ir

Subject: .....
Year ..... Month ..... Date .....
IranPhO.ir

فنر بی جرم

$$\vec{F}_A = +k\left[|\vec{r}_2-\vec{r}_1|-l\right]\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$



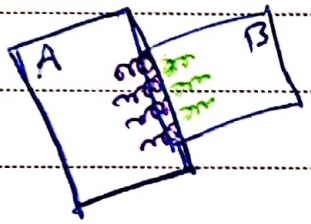
$$\text{اگر } l=0 \text{ آنگاه } \vec{F}_A = -k(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

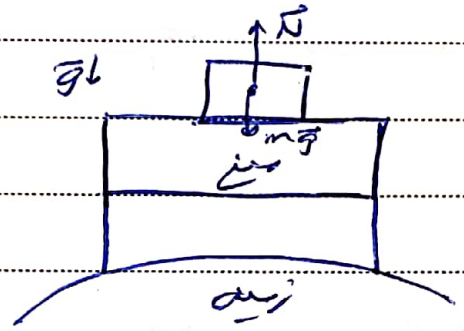
نیروی تکیه‌گاه

وقتی دو جسم با هم تماس دارند به هم نیرو وارد می‌کنند.

سوگرد به سطح جسم عامد شبیه فنر کوچکی است با k بزرگ طوری که طول آن خیلی تغییر نکند و با هر تغییر نیروی کمی مقاومت کند یا فشرده شدن وارد می‌کند.

نیروی تکیه‌گاه یک نیروی عمودی سطح است که اسم دیگر آن نیروی عمود تکیه‌گاه است.





این نیرو عمود بر سطح تماس است.

جسم روی سطح افقی

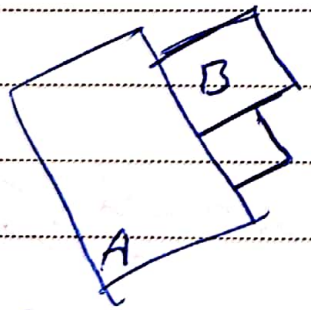
$$N - mg = ma = 0$$

$$\vec{N} = m\vec{g}$$

نیروی $\vec{N}$ از جانب سطح فشرده به جسم وارد می‌شود که ناشی از الکترومغناطیس و برهم‌کنش بین اتم‌های سطح و جسم است و ما با استفاده از فنر Ol فرض کردیم. سپس $\vec{N}$ را از معادله به دست آوردیم.

$\vec{N}$ به گونه‌ای عمود بر سطح وارد می‌شود که نگذارد جسم به طرف زمین حرکت کند.

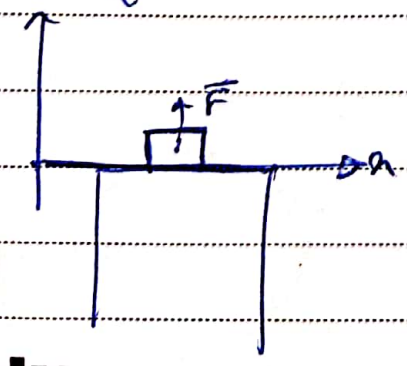
قید Constraint



قیدی که B بر A وارد می‌کند نیروی عمود بر سطح تماس ایجاد می‌کند.

نیروی عمود بر سطح شکل‌های دیگر را بلد باشید.

اگر بخواهیم با نیروی عمود بر سطح مماس چیزی بالا ببریم نیروی عمود ماشین نمی‌کند.



$y=0$ تماس

$y<0$ نفوذ: $N \neq 0$

$y>0$ جدایی: $N = 0$

ako
Note Book
IranPhO.ir

IranPhO.ir

قید هولونومیک: قیدی که معادله‌ی آن شامل مختصات و زمان باشد.



$\vec{F}+\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a} \rightarrow \vec{N}+mg-\vec{F}$

$\vec{N}$ با تغییر $\vec{F}$ خود را تنظیم می‌کند تا جایی که $\vec{F}+m\vec{g}, N=0$ شود، یعنی با افزایش $\vec{F}$ جسم لذا به سطح فشرده شده و $\vec{N}$ ضد فشار است.

وقتی که $\vec{N}=0$ شود یعنی از سطح جدا می‌شود حال می‌خواهیم بدانیم

$\vec{F}-m\vec{g}=m\vec{a}$ از چه لحظه‌ای $\vec{N}=0$ می‌شود؟

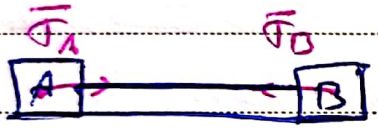
نیروی نخ

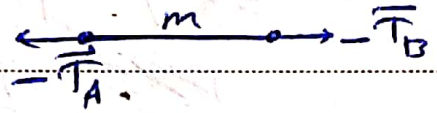
نخ مانند فنری است که قطع نمی‌شود و کشیده می‌شود.

چه چیزهایی نخ را قطع می‌کند؟ نیروی کشش نخ از مقاومتی که می‌تواند بکند بیشتر شود.

کشیدگی نخ وقتی حداکثر مقدار ممکن خود را دارد که نخ کشیده شود.

نیروی کشش نخ در امتداد نخ است.

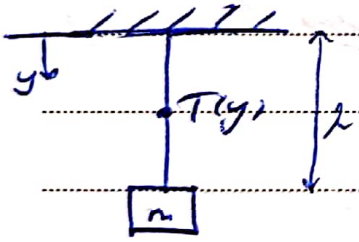




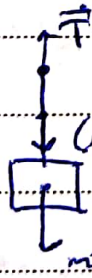
$-\vec{T}_B+(-\vec{T}_A)=m\vec{a} \rightarrow \hat{n}: T_B-T_A=ma$

اگر فرض کنیم نخ جرم دارد چه تغییری می‌کند؟

نیرو به صورت زیر است:

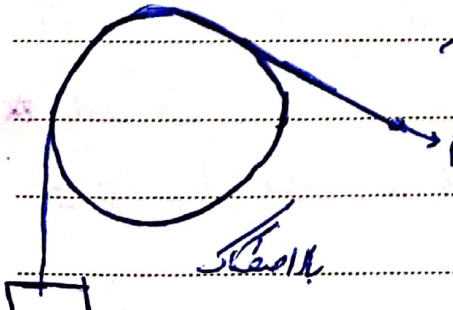


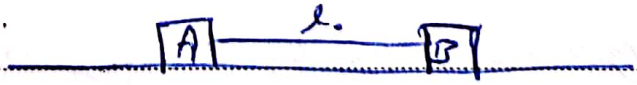
$mg+(l-y)\mu g=T(y)$



معمولاً نخ جرم دار را نخواهیم داشت.

نیروی نخ به ترکیبه این بستگی دارد که چگونه بسته شود.





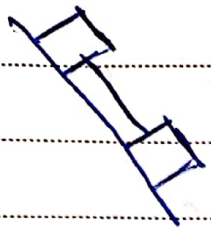
$x_B-x_A \leq l$

$x_B-x_A=l$ کشش نخ حداقل کشیده شده است

$x_B-x_A<l$ نخ شل است

IranPhO.ir

IranPhO.ir



مسائلی که تا حالا حل کردیم جسم‌ها هیچ اصطکاکی نداشتند.

اگر بخواهیم واقع‌بینانه‌تر نگاه کنیم، هیچ سطحی بدون اصطکاک نیست.

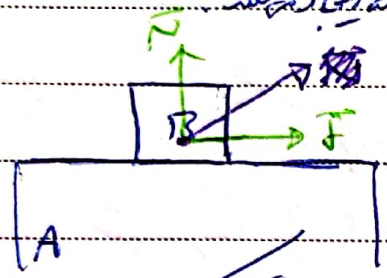
اصطکاک باعث می‌شود که نیروهای عمودی و مماسی با هم ترکیب شوند.

تا الان فقط نیروهای عمودی را حساب می‌کردیم.

حالا باید نیروهای مماسی را هم حساب کنیم.

نیروی اصطکاک Friction

اساس این نیرو الکترومغناطیس است و این نیرو به سه دسته تقسیم می‌شود که ما فقط یکی را بررسی می‌کنیم.



$\vec{f}$: نیرویی است که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود و موازی سطح است.

جهت این نیرو بر سطح عمود است و به سمت سطح است.

اصطکاک وقتی به وجود می‌آید که جسم حرکت کند یا بخواهد حرکت کند.

اگر جسم ساکن باشد و بخواهد حرکت کند، نیروی اصطکاک به وجود می‌آید.

اگر جسم حرکت کند، نیروی اصطکاک به وجود می‌آید.

اگر جسم ساکن باشد و نخواهد حرکت کند، نیروی اصطکاک صفر است.

جسم را روی سطح می‌کشیم و این نیرو جلوی حرکت را می‌گیرد.

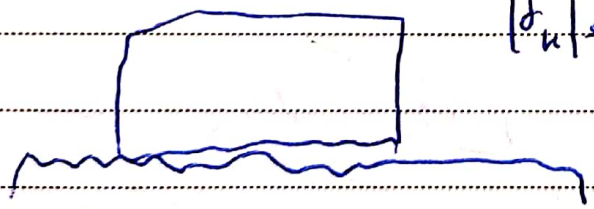
اگر جسم نسبت به سطح حرکت کند، اصطکاک را **جنبشی** می‌نامیم. Kinetic friction

اگر جسم نسبت به هم ساکن باشند، اصطکاک را **ایستایی** Static می‌نامیم.

$\vec{f}_k \propto -\vec{v}$ → جهت نیروی اصطکاک جنبشی همواره خلاف جهت سرعت است.

$|\vec{f}_k| \propto |\vec{N}|$ → این رابطه تجربی است.

$$|\vec{f}_k| = \mu_k |\vec{N}| \qquad \vec{f}_k = -\mu_k N \hat{v}$$



نیروی اصطکاک جنبشی نیروی محافظه‌کار نیست. نیروی اصطکاک ایستایی هم نیست.

$\vec{N}$ عامل جنبشی را تعیین می‌کند که چقدر به هم فشار می‌آورند.

شرط مسئله را هم او دیکته می‌کند.

★ جسم متحرک روی زمین زبر به قدر مسافت زیادی حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. حرکت جسم تغییر جابه‌جایی دارد. برای قدر مسافت طی شده توسط جسم باید از انتگرال استفاده کنیم.

در این مسئله: $\vec{T}$ و $\vec{N}$ مقدارشان از حل مسئله به دست می‌آید و جهت‌هایشان را رسم می‌کنیم.

ako Note Book

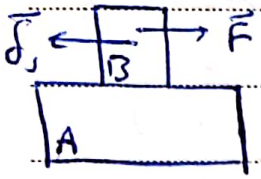
IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

یک مکعب مستطیل با سرعت ثابت $\vec{f}_k = -\mu_k N \hat{v}$

اصطکاک ایستایی

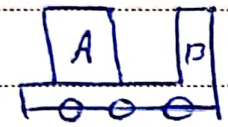


$\vec{a}_{c.m} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{M} = 0$

اصطکاک ایستایی قدرت است و قدر ساکت بودن جسم است

A نسبت به B

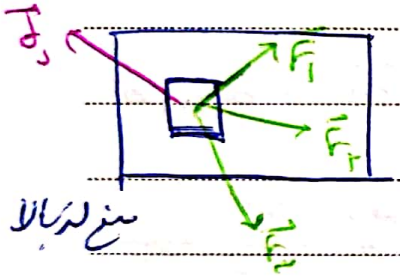
چرا اصطکاک ایستایی این است که B نسبت به A ساکن باشد



جسم A و B جرم دو با شتاب a حرکت می‌کنند در این حالت اصطکاک بین A و B ایستایی است

A → $\vec{f}_s$ $f_s = ma$ با افزایش a، f_s بیشتر می‌شود.

وقتی a بیشتر می‌شود اگر سطح A اصطکاک کمتری داشته باشد جسم B ساکن نمی‌ماند.

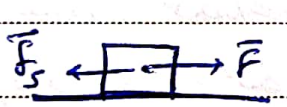


$\sum \vec{F} = ma = 0$

$\vec{f}_s + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$

برآیند $\vec{f}_s$ با یک جفت نیروی مقابل هم کنش می‌کند

برآیند سه نیرو جهت روی میز



آیا می‌توان گفت هرچه $\vec{F}$ را زیاد کنیم جسم سکون خواهد ماند؟

$\vec{f}_s$ یک متغیر است که می‌تواند بیشترین مقدار خود باشد.

$f_{s\,max} \propto |\vec{N}|$ $\quad f_{s\,max} = \mu_s |\vec{N}|$ $\quad |\vec{f}_s| \le \mu_s |\vec{N}|$

ضریب اصطکاک ایستایی به جنس دو جسم بستگی دارد.

دو نیروی سطحی که بر هم عمود هستند.

نیروی اصطکاک ایستایی را با استفاده از معادلات بدست آوریم.

ابتدا که جسم ساکت است یا با سرعت ثابت

مقدار نیروی محرکه = مقدار نیروی مقاوم

مقدار نیروی مقاوم = مقدار نیروی محرکه

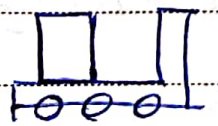
میز

f_s, N, T

همیشه نیروهای با مقدار کمتر را در محاسبات قرار می‌دهیم.

★ وقتی رابطه f_s بر حسب a نوشته شد به محاسبات قرار می‌دهیم.

مثال: شتاب داده شده



$f_s = ma$

$N - mg = 0$

$f_s \le \mu_s N \rightarrow ma \le \mu_s mg$

$a \le \mu_s g$ ، $m > 0$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

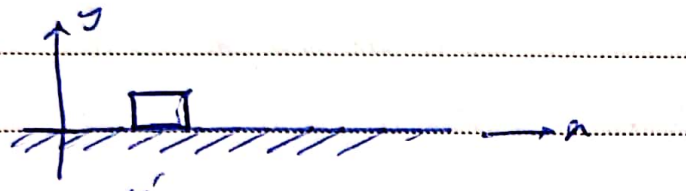
در اردوی نامساعد فکر کنید که یک عدد ثابت ساده کنید، اگر شنیده

کامیون با تندی سرعت ثابت v شروع به حرکت کند و با شتاب a حرکت کند. d را بیابید.

$$v^2 - v_0^2 = -2ad \rightarrow a = \frac{v_0^2}{2d} \qquad \frac{v_0^2}{2d} < \mu_s g \rightarrow d > \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

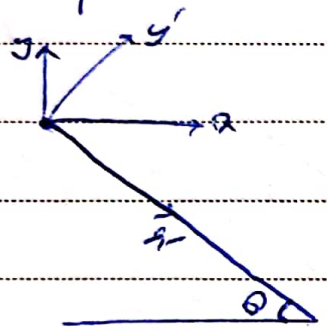
d حداقل باید تا تنگ نسبت کامیون طی شود تا

قید: هر نوع محدودیت بر روی حرکت یک دستگاه.



قید هولونومیک:

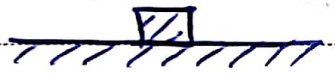
$y = 0$ قید



$y' = 0$ قید

$y = -\tan(\theta)x + 0$ قید

اگر جسم اکنون از اینجا که در سطح نشسته شود قید حرد، $y \geq 0$

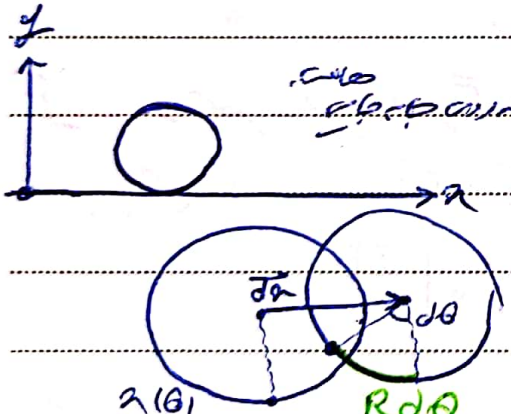


قید هولونومیک: یک تابع، متغیرها را محدود می‌کند.

قید غیرهولونومیک: یک نامساوی، متغیرها را محدود می‌کند و قیدی که در جای جای حالت.

نوع بعدی قید غیرهولونومیک این است که

هر قیدی هولونومیک نباشد، نان هولونومیک



$dx = R\,d\theta$

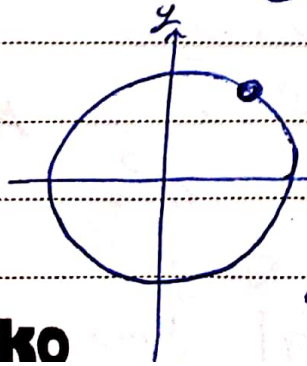
رابطه بین جابه‌جایی‌های مجازی

این رابطه بین جابه‌جایی‌های مجازی است

کمیتی هست که با تبدیل به یک قید هولونومیک

قیدهای هولونومیک خیلی راحت‌تر در سطح لیسانس

$$\int_0^{x(\theta)} dx' = R\int_0^{\theta} d\theta' \rightarrow x = R\theta$$



تعداد درجات آزادی = تعداد مختصات − تعداد قیدها

هر قید را می‌توان به شکل $\varphi(x, y, z) = 0$ نوشت.

$x^2 + y^2 - R^2 = 0$

ako

IranPhO.ir

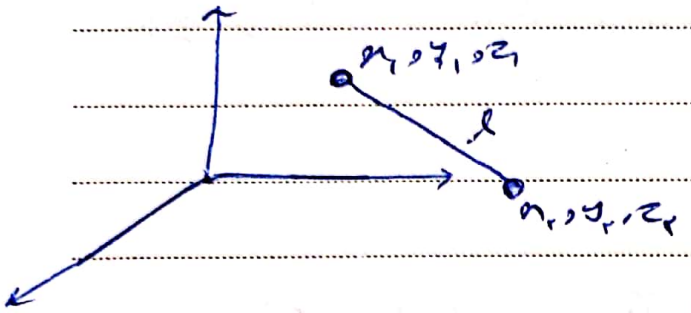
IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

نیروهای اصطکاک ایستایی همواره نیروهایی هستند که در جهت مخالف با نیروی [illegible] عمل می‌کنند

☆ نیروهای اصطکاک ایستایی بیشینه‌ای دارند که فراتر از آن جسم شروع به حرکت می‌کند

مثال: ۱ و ۲ در فاصله l از هم



$$l = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

تعداد درجات آزادی $= 6-1 = 5$

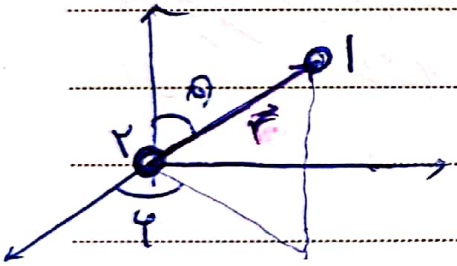
نتیجه: $\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2) = 0 \rightarrow \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} - l = 0$

نقاط مرکز جرم دو ذره را پیدا می‌کنیم و مرکز جرم را مبدأ می‌گیریم

$$x = \frac{x_2+x_1}{2} \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}$$
$$y = \frac{y_2+y_1}{2}$$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$|\vec{r}| = l$



θ, φ, x, y, z: متغیرهای آزاد

generalize coordinates — مختصات تعمیم یافته

نقطه مادی N ذره‌ای داریم و $3N$ مختصه داریم

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N$

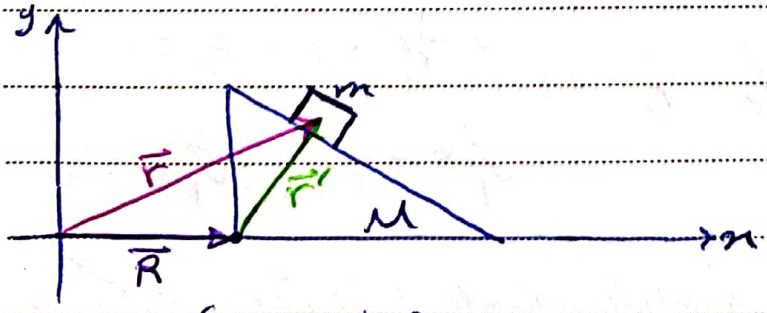
$q_1, q_2, \ldots, q_n$ مختصات تعمیم یافته

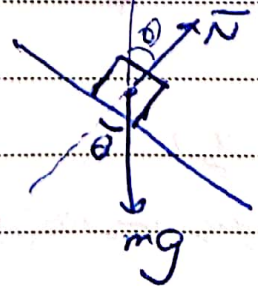
مختصات تعمیم یافته مختصاتی هستند که می‌توان هر دسته‌ای را به کار برد

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ $\quad n = 3N - M$

M: تعداد قیدها

مثال: جسمی روی کره بدون اصطکاک



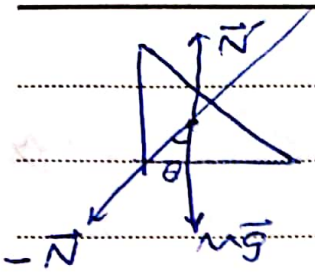


$$m\begin{cases} \hat{n}: N\sin\theta = ma_n \\ \hat{y}: N\cos\theta - mg = ma_y \end{cases}$$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir



$\mu_1 \neq 0 \Rightarrow -N\sin(\theta) = mA_x$

چون N مقاله مشخص نیست معادله ی دیگر نیز نیاز داریم

شرایط تعادل و معادله حرکت جسم داخل نیوتن مشخص نیاز داریم

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \rightarrow \begin{cases} x = x' + X \\ y = y' \end{cases}$

$y = -\tan(\theta)x' + c$ $\quad \dot{y}' = -\tan(\theta)\dot{x}' = -\tan(\theta)(\dot{x} - \dot{X})$

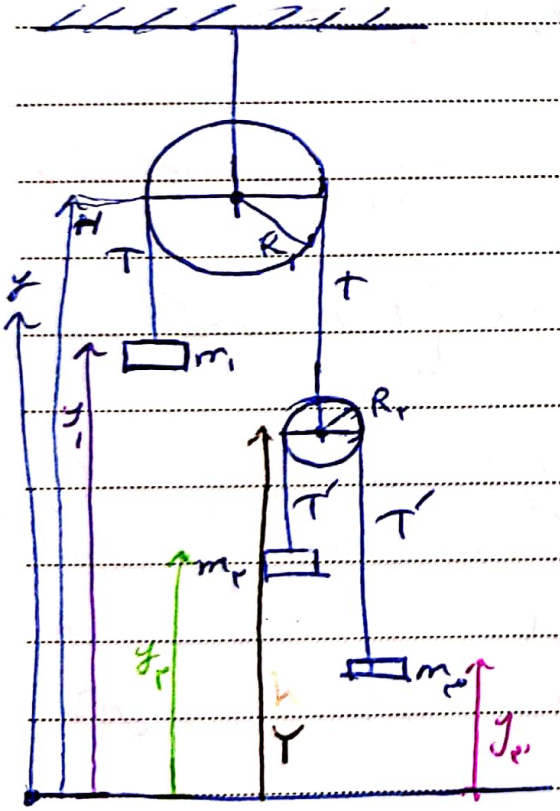
$\ddot{y} = -\tan(\theta)(\ddot{x} - \ddot{X}) \quad a_y = -\tan(\theta)(a_x - A_2)$

$A_x = \ddot{X} < 0$

$$a_x = \frac{g\sin(\theta)}{1 + \frac{m}{M}}$$

مثال: جرقیل

سامانه نشان داده شده در شکل از حالت سکون رها می‌شود. نخ و قرقره‌ها سبک هستند. اصطکاک وجود ندارد.



$T - m_1 g = m_1 a_1$

$T - 2T' = 0$

$T' - m_2 g = m_2 a_2$

$T' - m_3 g = m_3 a_3$

$y_1 + \pi R_1 + H - 2 = l_1$

$y_2 + \pi R_2 + 2 - y_3 = l_2$

$-\ddot{y}_1 - \ddot{Y} = 0$

$2\ddot{Y} - \ddot{y}_2 - \ddot{y}_3 = 0$

$\rightarrow -\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 - \ddot{y}_3 = 0$

$\ddot{y}_1 = -\frac{1}{2}(\ddot{y}_2 + \ddot{y}_3)$

$a_1 = -\frac{1}{2}(a_2 + a_3)$

در ادامه حل مسئله را خودتان انجام دهید.

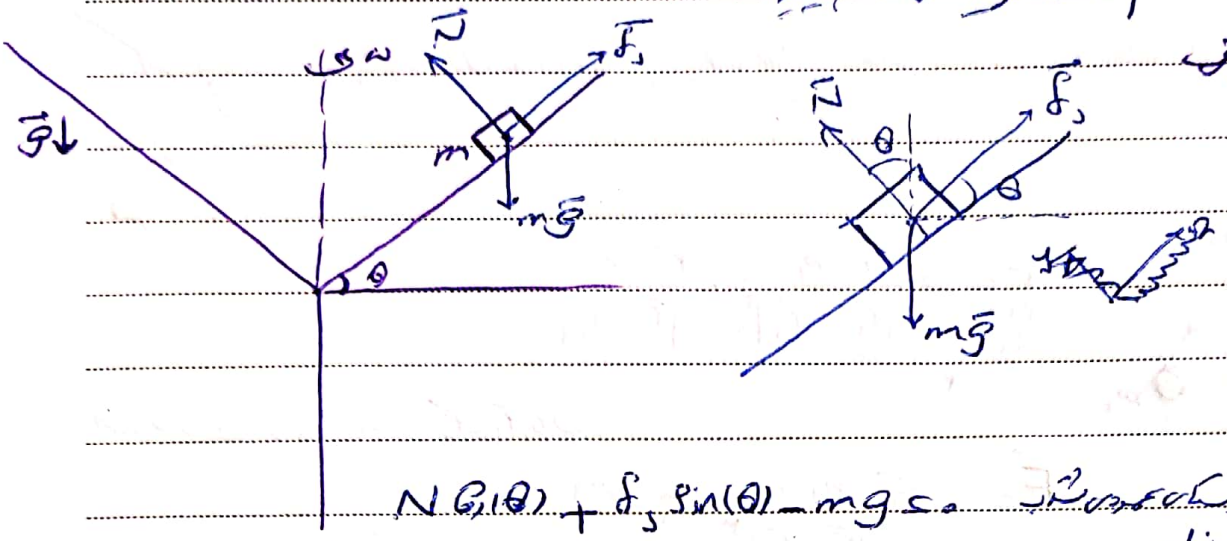
ako

IranPhO.ir

Subject: .....
Year ..... Month ..... Date .....
IranPhO.ir

اگر $\vec{g}$ نباشد که جسم گرانش دارد و سایر نیروها که با گرانش هیچ ارتباطی ندارند، همچنان اصطکاک دارند و نیروی گرانش نیز وجود دارد.

مثال: حرکت روی مخروط



$$N\cos(\theta) + f_s\sin(\theta) - mg = 0$$

$$N\sin(\theta) - f_s\cos(\theta) = mR\omega^2$$

حول سرعت کمینه و بیشینه

* لازم نیست برای هر مسئله این دو معادله را از ابتدا بنویسید. معادلات را حفظ باشید.

اگر جایی واضح لازم نیست بنویسید.

f_s جواب مسئله چیست، واضح نیست.

$$N = m(g\cos(\theta) + R\omega^2\sin(\theta))$$

$$f_s = m(g\sin(\theta) - R\omega^2\cos(\theta))$$

شرط لغزش: $g\sin(\theta) - R\omega^2\cos(\theta) \le \mu_s(g\cos(\theta) + R\omega^2\sin(\theta))$

$$\omega^2 \ge \frac{g}{R}\,\frac{\sin(\theta) - \mu_s\cos(\theta)}{\mu_s\sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

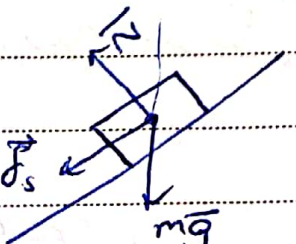
اگر $\sin(\theta) - \mu_s\cos(\theta) < 0$ آنگاه ω_{min} برابر صفر است یعنی حتی بدون چرخش هم جسم نمی‌لغزد.

اگر $\tan(\theta) < \mu_s$ جسم هیچ‌گاه نمی‌لغزد، حتی اگر سطح بسیار سریع بچرخد. یعنی اگر اصطکاک سطح زیاد باشد یا سطح خیلی کم شیب باشد جسم نمی‌لغزد.

$$\omega^2 = \frac{g}{R}\tan(\theta) \longrightarrow f_s = 0$$

اگر بیش از حد آهسته بچرخد جسم می‌لغزد یعنی اصطکاک کم می‌شود.

* وقتی f_s منفی می‌شود یعنی جهت f_s برعکس است.



$$m(R\omega^2\cos(\theta) - g\sin(\theta)) \le \mu_s m(g\cos(\theta) + R\omega^2\sin(\theta))$$

$$\omega^2 \le \frac{g}{R}\,\frac{\sin(\theta) + \mu_s\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_s\sin(\theta)}$$

ako Note Book

البته نیازی نیست همه این روابط را حفظ باشید، فقط اگر f_s منفی شد جهت آن را برعکس کنید.

IranPhO.ir

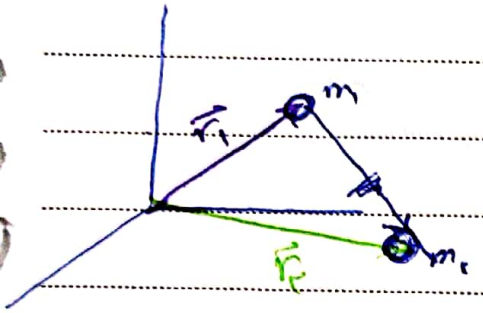
IranPhO.ir

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin(\theta)+\mu_s\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\mu_s\sin\theta}}$$

اگر ω از ω_{max} بیشتر شود آنگاه جسم کنده شده

اگر $\cos(\theta)-\mu_s\sin(\theta)\le 0$ آنگاه ω_{max} بی‌نهایت یا اگر θ برابر $\frac{\pi}{2}$ نزدیک باشد

گرانش



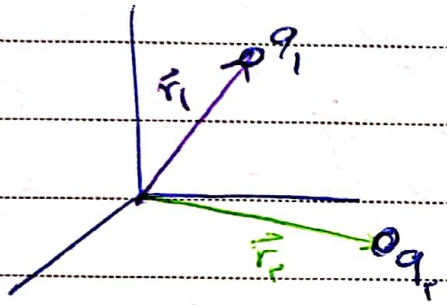
$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^2}\,\frac{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}$$

$1\to 2$

ساده‌ترین حالت برحسب $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ باشد

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

خواص — میدان نقطه‌ای



۲ به ۱ نیروی وارد می‌کند ۲ میدان می‌سازد و ۱ میدان را حس می‌کند

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2\,(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \leftrightarrow -G \qquad q \leftrightarrow m$$

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0\to 0}\frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

میدان در محل $\vec{r}$

برهمنهش اثر میدان‌های الکتریکی مختلف بر یک ذره برابر است با برآیند اثر هر یک از میدان‌ها بر ذره به تنهایی

میدان گرانشی

$$\vec{F}_{m_0} = m_0\,\vec{g}(\vec{r}_0)$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \lim_{m_0\to 0}\frac{\vec{F}_{m_0}}{m_0} = -G\sum_i \frac{m_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

میدان الکتریکی توزیع بار پیوسته

$dq = \rho_e dV$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{\rho_e(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

میدان گرانشی توزیع جرم پیوسته

$dm = \rho_m dV$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G\int dV' \frac{\rho_m(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

میدان گرانشی یک توزیع جرم چیست؟

مشابه پوسته یا خط

قانون گاوس

$$\oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{g}\cdot\hat{n}\,dS = -4\pi G m$$

پوسته کروی متحدالمرکز با بار Q

$$E_{in} = 0 \qquad \oint \vec{E}\cdot dS\hat{n} = 4\pi r^2 E(r)$$

$$E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

شبیه بار نقطه‌ای

پوسته متقارن کروی با جرم M

$$g_{in} = 0 \qquad g_{out} = \frac{GM}{r^2}$$

کره با چگالی ρ یکنواخت

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$g_{out} = \frac{GM}{r^2} \qquad g_{درون} = (4\pi r^2) = 4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= 4\pi G M\frac{r^3}{R^3}$$

$$g_{درون} = \frac{GMr}{R^3}$$

ako Note Book

آزمون‌های بالا به صورت تستی و کوتاه پاسخ تشریحی را به خود آزمون بالا به صورت تستی کنید.

IranPhO.ir

IranPhO.ir

ذره گرانشی و الکترواستاتیک هم شبیه‌اند

بار متحرک $\vec{E}$ و $\vec{B}$ تولید می‌کند

سوچ حرارتی اطلاعات بیاره

دو راه انتقال اطلاعات: ۱- انتقال ذره ۲- انتقال موج

میدان مربوط ← جرم متحرک

میدان الکتریکی ← بار ساکن

میدان گرانشی ← جرم ساکن

بار متحرک ← $\vec{E}, \vec{B}$

چرا تمام اجسام گرانش دارند

سقوط آزاد جرم در میدان گرانشی $\vec{g}$ شتاب $\vec{a}$ می‌گیرد.

$$m\vec{a} = m\vec{g} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

جرم لختی — جرم گرانشی

اینکه در m روی هر دو جسم یکی است که جرم لختی با جرم گرانشی مساوی است

همه اجسام صرف‌نظر از اندازه و جرمشان، در میدان گرانشی حرکت یکسانی دارند. این ویژگی جاذبه در میدان گرانشی است.

و همه ذرات دیگر با spin

میدان الکتریکی: $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

اینکه همه در میدان گرانشی یک شتاب دارند و همگی برابر $\vec{g}$ می‌شوند در واقع سیر هندسی فضا-زمان خم شده را توصیف می‌کند

میدان گرانشی

همگرایی گرانشی

gravitational lensing

حتی نور هم در میدان گرانشی دچار خمیدگی می‌شود.

حل معادلات حرکت

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}^{ext} = \vec{F}^{ext}(\vec{r}, \vec{v}, t, \ldots)$$

حل معادله حرکت یعنی $\vec{F}$ داده باشد را حل کنیم.

معادله دیفرانسیل معادله‌ای است که در آن مشتقات تابع

حل معادلات دیفرانسیل حرکت ممکن است منحصر به فرد نباشد چون $\vec{F}$ می‌تواند علاوه بر مکان جسم، یک سری مکان دیگر اجسام باشد.

بحث یکتایی و وجود جواب:

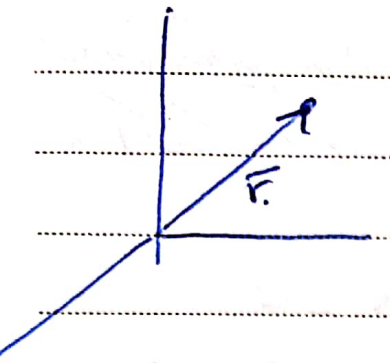
سوال: آیا معادله جواب دارد؟ آیا فقط یک جواب دارد؟

پاسخ هر دو این است که شرط اولیه را بدانیم؟

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v_0 = \frac{r(0+\delta t) - r_0}{\delta t}$$

$$r(0+\delta t) = r_0 + v_0 \delta t := r_1$$

$$\frac{v(0,\delta t) - v_0}{\delta t} = \frac{1}{m} F(r_0, v_0, t=0)$$

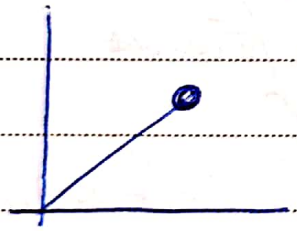
$$v_1 = v(0+\delta t) = v_0 + \frac{\delta t}{m} F(r_0, v_0, t=0)$$

$$\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$$

$$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$$

$$\vec{q}_i = \delta_i(q, \dot{q}, t)$$

$$q_1, q_2, \ldots, q_m \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$$



$$F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = ma_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \qquad q_i(\delta t) - q_i(0) = \dot{q}_i(0)\,\delta t$$

$$\ddot{q}_i = \frac{d\dot{q}_i}{dt} \qquad \dot{q}_i(\delta t) - \dot{q}_i(0) = \ddot{q}_i(0)\,\delta t$$

$$\dot{q}_i(2\delta t) - \dot{q}_i(\delta t) = \ddot{q}_i(\delta t)\,\delta t$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(t) \qquad \int d\vec{v} = \frac{1}{m}\int \vec{F}(t)\,dt$$

ako
Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

انتگرالی که گرفتیم معادله حرکت را نمی‌دهد.
برای انتگرال گیری از سمت راست باید سمت چپ را انتگرال بگیریم.

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\,dt' + C$$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' + C$$

$$v_x(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_x(t')\,dt' + C$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t')\,dt' + C$$

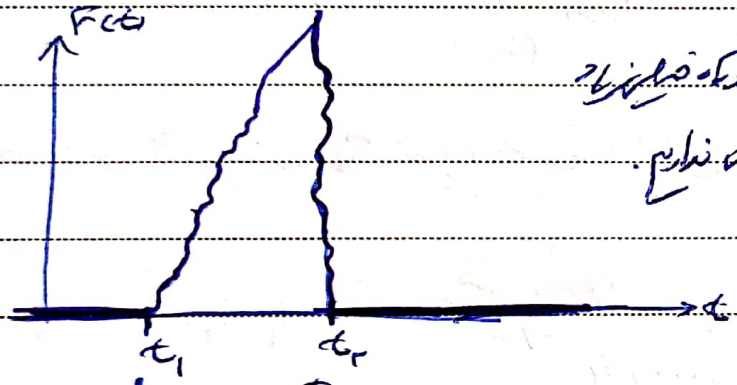
$$v_y(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_y(t')\,dt' + C$$

$$v_z(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_z(t')\,dt' + C$$

اگه انتگرال معین بگیریم دیگه ثابت C نداریم.

نیروهای ضربه‌ای

نیروهایی هستند که در مدت زمان خیلی کوتاه مقدار زیادی
مقدار اطلاعاتی راجع به $F(t)$ در این بازه نداریم.



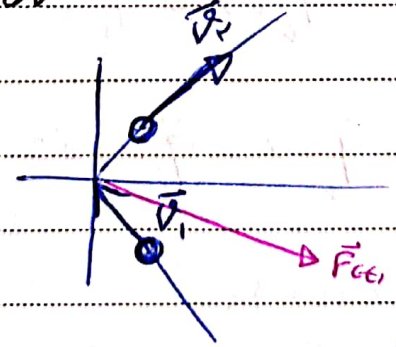
$$m\int_{v_1}^{v_2} d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt \qquad m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt \qquad \vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

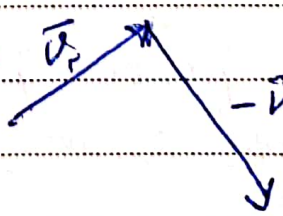
تکانه (اندازه حرکت)

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v}$$

برخورد کشسان





$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \int \vec{F}(t)\,dt$$

که بیرون نمی‌دهد و بلدش کنید.

$$\langle \vec{F}(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t}\int \vec{F}(t)\,dt$$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

خود اگه نیرو تابع توان دوم سرعت باشه چطوره؟

نیروهای مقاوم به سرعت

فرض کنید: $m\frac{dv}{dt} = F(v)$ $\quad m\int \frac{dv}{F(v)} = \int dt$

$\frac{1}{m}\int \frac{dv}{F(v)} = \frac{1}{m}\int dt' + C$ $\quad$ از شرط اولیه $t=0, v=0$ بدست میاد $\quad v = \frac{1}{m}t + C$

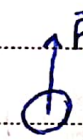
نیروی مقاومت هوا

نیروی مقاومت هوا وابسته به سرعت است.

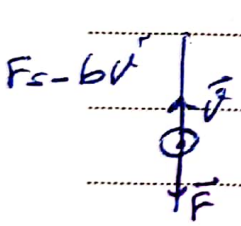
برای به دست آوردن نیروی مقاومت هوا به شکل جسم گرفته و هوا را جدا کنید. مقدار نیرو به کسر اختیاری متناسب با توان α سرعت و خلاف جهت حرکت است.

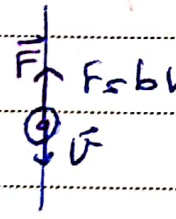
$F_{مقاومت} \propto v^{\alpha}$

نیروی مقاومت خطی: $\vec{F}_c = -b\vec{v}$



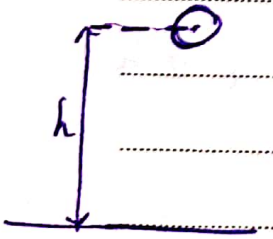
نیروی مقاومت درجه دو: $\vec{F}_c = -bv^2\hat{v}$ $\quad$ با این به بالا رفتن و پایین افتادن سنگ را جدا جدا بررسی می‌کنیم.





کلکولوس با آقای خته

مسئله: جسمی از ارتفاع h در حضور نیروی مقاومت خطی رها می‌شود.



$\vec{F}_c = -mg - bv \quad \vec{F}_c = -b\vec{v}$

$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv \rightarrow \int_0^v \frac{dv'}{g + \frac{b}{m}v'} = -\int_0^t dt' + C$

$\frac{m}{b}\int_{v(0)}^{v} \frac{\frac{b}{m}dv'}{g + \frac{b}{m}v'} = \frac{m}{b}\ln\left|g + \frac{b}{m}v'\right|_0^v = -t$

$v(0) = 0$

$\ln\left|\frac{g + \frac{b}{m}v}{g}\right| = -\frac{bt}{m} \quad 1 + \frac{bv}{mg} = e^{-\frac{bt}{m}}$

$v = \frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$x = -\frac{mg}{b}t + \frac{m^2 g}{b^2}e^{-\frac{bt}{m}} + C$$

در لحظه $t=0$ داریم $x=h$

$$h = -\frac{m^2 g}{b^2} + C \rightarrow C = h + \frac{m^2 g}{b^2}$$

$$x = \frac{m^2 g}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b}t + h$$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ زمان رسیدن به زمین

$v_0 = \sqrt{2gh}$ سرعت برخورد به زمین

$x = h - \frac{1}{2}gt^2$ اگر مقاومت هوا نبود و

اگر $\frac{bt}{m}$ کوچک باشد:

$$v = -\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \approx -\frac{mg}{b}\left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m} + \frac{1}{2}\frac{b^2t^2}{m^2} + \dots\right)\right]$$

حالا که جمله‌ها را داریم، حالا این جمله را کم می‌کنیم

حرف اول سرنخ یک سؤال

تصحیح سرعت از $n=1$

$$v \approx -\frac{mg}{b}\left[\frac{bt}{m} - \frac{1}{2}\frac{b^2t^2}{m^2} + \dots\right]$$

$$\approx -gt + \frac{gb}{2m}t^2$$

تقریب سرعت گرفتن یا اولین سرعت

تصحیح سرعت ← تصحیح سرعت اول

$$x = \frac{m^2 g}{b^2}\left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m} + \frac{b^2t^2}{2m^2} - \frac{b^3t^3}{6m^3} + \dots\right)\right] - \frac{mg}{b}t + h$$

$$\approx h - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{6}\frac{bg}{m}t^3$$

مرتبه صفر — تصحیح مرتبه اول

اندازه‌ی سرعت کم می‌شود و همچنین زمان بیشتر می‌شود این کشش باعث می‌شود

زمان رسیدن به زمین را بیابیم:

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2 + \frac{1}{6}\frac{bg}{m}t_1^3 \qquad \frac{1}{2}gt^2\left(1 - \frac{1}{3}\frac{bt}{m}\right) \approx h$$

ako

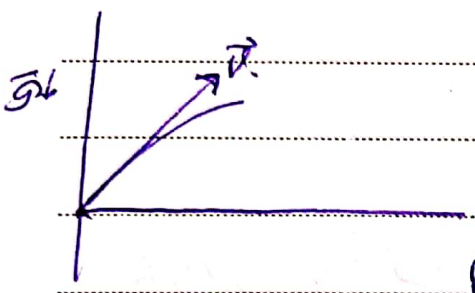
IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g(1-\frac{bQ}{m})}} \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{b}{m}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\frac{b}{m}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

$$t \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{bh}{4mg}$$

حرکت پرتابه در حضور مقاومت هوا



$$\vec{F} = -mg\hat{y} - b\vec{v}$$
$$= -mg\hat{y} - bv_x\hat{x} - bv_y\hat{y}$$

معادلات حرکت و انتگرال‌گیری

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = -bv_x \\ m\frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y \\ v_{0x} = v_0\cos(\theta) \\ v_{0y} = v_0\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x}\frac{dv_x'}{v_x'} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt' \rightarrow v_x = v_0\cos(\theta)\, e^{-\frac{bt}{m}}$$

$$\int_{v_{0y}}^{v_y}\frac{dv_y'}{v_y'+\frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt' \rightarrow v_y = -\frac{mg}{b} + \left(v_0\sin(\theta)+\frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{bt}{m}}$$

با انتگرال‌گیری مجدد، با شرط اولیه $x(0)=y(0)=0$ داریم:

$$x = \frac{mv_0\cos(\theta)}{b}\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right),\quad y = \frac{m}{b}\left(v_0\sin(\theta)+\frac{mg}{b}\right)\left(1-e^{-\frac{bt}{m}}\right) - \frac{mg}{b}t$$

برای یافتن تقریب مرتبه صفر یک (یا هر مرتبه مناسب دیگر)، تقریب زمان رسیدن به نقطه اوج را برای حرکت بدون مقاومت هوا به دست می‌آوریم و در مرتبه مورد نظر جایگذاری می‌کنیم.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta)t + \frac{bt}{m}\left(-v_0\sin(\theta)t + \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$y(T) = 0$ ← زمان رسیدن

$$T^{(0)} = \frac{2v_0\sin(\theta)}{g} \qquad T^{(1)} = \frac{2v_0\sin\theta}{g+\frac{b}{2m}\left(v_0\sin(\theta)-\frac{1}{2}gT^{(0)}\right)}$$

$$= \frac{2v_0\sin(\theta)}{g+\frac{2b}{3m}\left(v_0\sin(\theta)-\frac{2}{3}v_0\sin(\theta)\right)}$$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$T_2^{(1)}$ را به صورت $\frac{2V_0 \sin\theta}{g}$ قرار دهیم

$$T_2^{(1)} = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}\left(1+\frac{2bV_0 \sin\theta}{3mg}\right)^{-1}$$

$$= \frac{2V_0 \sin\theta}{g}\left(1-\frac{2bV_0}{3mg}\sin\theta\right)$$

$\frac{bV_0}{mg} \ll 1$ یا $\frac{bt}{m} \ll 1$ $\qquad \frac{bx}{m}$ (سرعت حد)

چرا انتظار داریم اگر گلوله دو طرف مرتفع مرتب باشد، بعد سرعت گلوله نزدیک صفر شود؟

مرتفع‌ها باعث می‌شوند که مرتفع نصف‌شده اسمیت مرتفع نیست. اگر هم مرتفع‌ها باشد تغییر می‌کند.

$T_1 R - T_1 R = 0$

گلوله سوی گشته و طرفش برابر

می‌توان نشان داد گشتاور حاصل از اصطکاک ناچیز

می‌شود اگر سختش نکنیم فرض کنیم خیلی ریز مرتفع، جزئی از حرکت مرتفع است.

نیروهای وابسته به مکان

وابسته به مکان یعنی نیرو به این شکل هست که اگر مکان دستگاه نسبت به مبدأ جابه‌جا شود، نیرو تغییر کند. اگر دستگاه و محیط را به هم جابه‌جا کنیم نیروها تغییر نمی‌کنند.

نوسانگر جرم و فنر

$$F_e = -kx = ma$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$ نوسانگر ساده

نوسانگر ساده یعنی نیرو تنها فنر یا مکان وابسته

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است. علامت مشتقات زمانی، بیشترین مرتبه مشتق، یک یا دو مرتبه هم دارد.

$$\left[\frac{k}{m}\right] = T^{-2} \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

حوله نوسانگر ساده را حفظ می‌زنیم.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$ مشتق دوم تابع چیزی است.

توابعی که چنین خاصیتی دارند:

$\sin(\theta) \to \cos(\theta) \to -\sin(\theta)$

$\cos(\theta) \to -\sin(\theta) \to -\cos(\theta)$

Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

اگر کل معادلات خطی باشد

معادله‌ی خطی: اگر x_1 و x_2 دو جواب معادله باشند، آنگاه هر ترکیب خطی از x_1 و x_2 جواب است. یعنی هر جواب این معادله یک فضای برداری می‌سازند.

یک لنز چیزهایی که فضای برداری می‌سازند همه جواب‌های یک معادله دیفرانسیل خطی است.

فضای برداری: هر ترکیب خطی از اعضای یک فضای برداری، عضوی از آن فضای برداری می‌باشد.

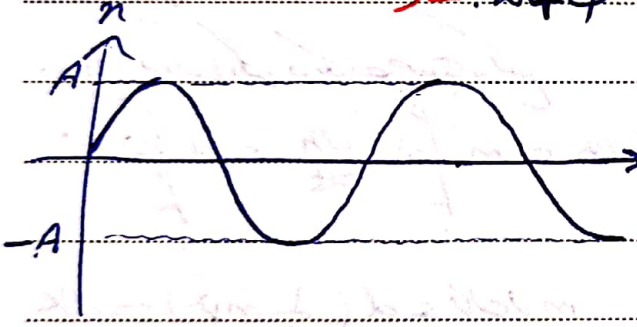
$x = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

$v = -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)$

$x(0) = a \quad v(0) = b\omega \quad x = x(0)\cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t)$

$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t) - A\sin(\omega t)\sin(\varphi)$

A: دامنه نوسان — φ: فاز اولیه — $\omega t + \varphi$: فاز



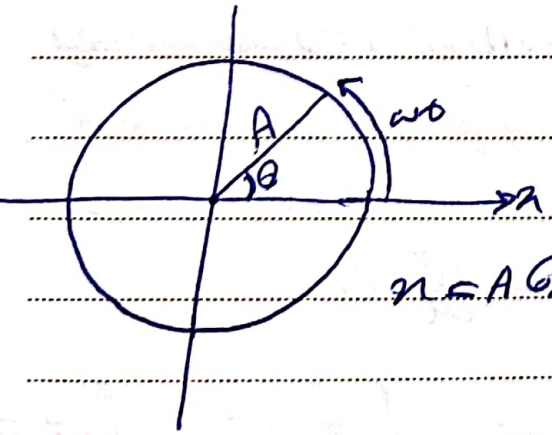
$A\cos(\varphi) = a \quad -A\sin(\varphi) = b$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

تصویر یک دایره روی یک از قطرهایش، یک حرکت نوسانی ساده است.

پاسخ نادیده نوسانی

این دیدگاه دلیل نمی‌شه هر نوسانی رو دایره در نظر بگیریم



$x = A\cos(\omega t)$

هر درجه‌ی دایره $\frac{2\pi}{360} = 1\,\text{deg}$

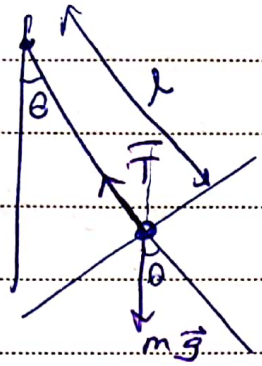
در $\sin$ و $\cos$ بلی هم معیار گرفته شده، $\sin$ و $\cos$ نیز به همین است.

ako

IranPhO.ir

IranPhO.ir

نوسان آونگ



$$T - mg\cos(\theta) = ml\dot{\theta}^2$$

$$-mg\sin(\theta) = ml\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

$$\left[\frac{g}{l}\right] = T^{-2} \qquad \frac{g}{l} = \omega^2$$

برای زاویه‌های کوچک θ حدود ۵ درجه یا کمتر.

$$\theta \ll 1\ \text{rad} \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\sin(\theta) \simeq \theta$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots$$

این معادله شبیه نوسان جرم فنر است و فیزیک آونگ و جرم فنر کاملا شبیه‌اند.

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

θ زاویه‌ای است. در زاویه‌ای باز یا زاویه‌ای بسیار کوچک

θ را برابر سینوس یا تانژانت زاویه حساب نمی‌کنیم.

θ را برابر سینوس یا $\varphi + \omega t$ را برابر سینوس نمی‌گیریم.

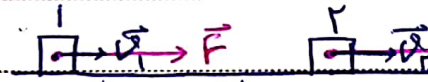
قضیه کار ـ انرژی

نخست دو طرف رابطه دینامیکی را در جابه‌جایی ضرب می‌کنیم.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_1^2 F\,dx = m\int_1^2 \frac{dv}{dt}\,dx \rightarrow \int_1^2 F\,dx = m\int_1^2 dv\,\frac{dx}{dt} = m\int_1^2 v\,dv$$



$$m v\,dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dK$$

$$\int_1^2 F\,dx = \int_1^2 dK = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$$

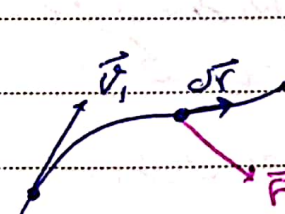
K را انرژی جنبشی می‌نامیم.

این رابطه بیانگر این است که انرژی ظاهر نمی‌شود.

$$K_2 - K_1 = W_F$$

کار نیروی برآیند برابر است با تغییر انرژی جنبشی

شکل برداری را بدست آورید.



$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = W_F \qquad \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\int d\vec{v}\cdot\vec{v} = \int dK$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

$$dK = \frac{1}{2}m\left(2v_x\,dv_x + 2v_y\,dv_y + 2v_z\,dv_z\right) = m\left(v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z\right)$$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

تغییر کل انرژی جنبشی ذره برابر کار برآیند نیروهای وارد بر آن است.

$$\int_{tot} \vec{F}^{(ext)} \cdot d\vec{r} = m \int \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

استفاده از قضیه کار و انرژی برای حل مسائل

$$W = \int \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot d\vec{r}$$ ← برای محاسبه کار نیروی ثابت از این انتگرال استفاده نمی‌کنیم.

حرکتی که F و x را داشته باشیم و بخواهیم کمیتی از متحرک را بیابیم، بهتر است از قضیه کار و انرژی استفاده کنیم. به جای انتگرال‌گیری مستقیم از F بر حسب x، همیشه می‌توان انتگرال را بر حسب t حل کرد.

$$\int F(x, \dot{x}, t)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t), \dot{x}(t), t)\, \dot{x}\, dt$$

$$W = \int F_{net}\, dx$$

انتگرال به دست آمده به شرطی قابل حل است.

نیروی کشسانی وابسته به مکان است.

$$W = \int F(x)\, dx = -\int kx\, dx = -\left(k\frac{x^2}{2} + C\right)\Big|_1^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

دیده می‌شود که ۱ و ۲ هر دو نقطه دلخواه بودند و هیچ تخصیصی روی ۱ و ۲ ندادیم. بنابراین E را تعریف می‌کنیم که در تمام نقاط ثابت بماند.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ثابت}$$

وقتی در فیزیک ترکیبی از متغیرهای دینامیکی، مشتقاتشان پیدا می‌شود که ثابت باشد، ضربی‌ثابت می‌شود.

اگر $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ متغیرهای دینامیکی باشند و $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ مشتقات زمانی‌شان باشد و رابطه N چنین باشد که با تغییر حرکت ثابت بماند، $N(f_1, f_2, \ldots, f_n, \dot{f}_1, \ldots, \dot{f}_n)$

و می‌گوییم N پایستگی برقرار است.

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

انرژی یک نمونه است که در بالا وضع کردیم.

سوال: جرم m را از فاصله A از نقطه تعادل رها می‌کنیم. سرعت آن هنگام عبور از نقطه تعادل چقدر است؟

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + 0 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow |\vec{v}_m| = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

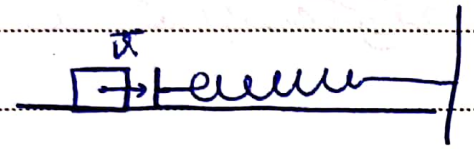
مقدار ثابت E_{mech} که در طول حرکت ، فیزیکی حفظ می‌کند

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

اگر جسمی با سرعت v حرکت کند اصطکاک هوا می‌گیرد مقاومت انجام کار در محیط داده. انرژی در مقابل انجام کار در محیط تغییر می‌کند. مقاومت انجام کار چیزی مرتبط با محیط نیروی وارد کند و چیزی در جای جا کند.

مثال:



نیروی فنر $-kx$ ، نیروی مقاومت محیط $-kx$

جسم با سرعت v از فنر کشیده نشده رها شده، فنر در بیشترین فشردگی A فشرده می‌کند.

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Delta K = \int F(x)\,dx \qquad F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \qquad -kx = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F(x)\,dx = -dV(x)$$

$$\Delta K = -\int dV(x) \qquad K_2 - K_1 = V_1 - V_2 \rightarrow K_2 + V_2 = K_1 + V_1$$

اگر $F(x)$ نیروی وابسته به زمان باشد و $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ آنگاه U را انرژی پتانسیل می‌نامیم.

U و K در بیشترین پتانسیل صدق می‌کنند

$$\Delta U = -\int_1^2 \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$$

جهت تعریف $F = -\frac{dU}{dx}$ در تابع U مقدار ثابتی اضافه کرد و باز هم در تعریف صدق کند.

$U(x)$ تا حد یک مقدار ثابت آزاد است.

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

یک سیستم تعریف کنیم که مشکل آن حل شود.

$$x_0 = 0 \rightarrow C = 0$$

اگر $U(x_0) = 0$ آنگاه x_0 سیستم پتانسیل نامیده شد.

مثال:

$$F = av^\beta = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \int v^{-\beta}\,dv = \frac{a}{m}\int dt$$

ako Note Book

$$v^{\beta-1} = \frac{mv_0^{\beta-1}}{m - a(\beta-1)t\,v_0^{\beta-1}} \qquad \text{if } v_0 = 0 \text{ ; } v = 0$$

IranPhO.ir

IranPhO.ir

ذره‌ای جسم یک بعد ساکن حرکت

$\Delta K = \int F dx$ $\quad \Delta K = \int_1^2 F(x)dx = \int_1^2 (-dU)$

از ۲ عبارت بالا و پایین هم می‌گیریم

$F(x) = -\frac{dU}{dx}$ $\quad \Delta K = -\Delta U \rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$

$E = U(x) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ $\quad U(x)$ یک تابع هم انتخاب می‌شود.

$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - U(x))$ $\quad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}$

با دانستن E و U اولیه جسم می‌توان سرعت جسم را در هر نقطه تعیین کرد.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

بسته به اینکه در کدام بازه حرکت می‌کند از + یا − استفاده می‌کنیم.

بازه t_1 و t_2 را طوری انتخاب می‌کنیم که حرکت در آن بازه یک‌طرفه باشد

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} = \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow x \text{ بر حسب } t \rightarrow x(t)$$

در حرکت نوسانی در یک بعد حرکت در یک ناحیه محدود است و E و x_0 را می‌دانیم

یک فنر ایده‌آل را در نظر بگیرید که یک سر آن ثابت است و سر دیگر آن به جسمی متصل است.

$m\ddot{x} + kx = 0$ معادله حرکت

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ انرژی مکانیکی

به معادله بالا انتگرال اول حرکت می‌گویند.

$m\ddot{x} = F(x) \rightarrow m\dot{x}\ddot{x} - F(x)\dot{x} = 0$ $\quad F(x) = -\frac{dU}{dx}$

$m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dU}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)\right) = 0$

مثال: سقوط آزاد

در نظر گرفتن اینجا علاوه بر g اعمال شده، خلاصه نیست.

$F = -mg$

$m\ddot{y} = -mg$

$-\frac{dU}{dy} = -mg \rightarrow U(y) = mg(y - y_0)$ انرژی پتانسیل گرانشی

$U(y_0) = 0$ $\quad y_0$ را انتخاب می‌کنیم.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

به جای پتانسیل ضرب در انرژی پتانسیل می‌کنیم.

در حل مسئله انتخاب روی شکل انرژی پتانسیل را مشخص کنید. کافیه لازم نیست انتخاب بدیم.

مکانیک اگه بدیم روی شکل نشون بدیم اینا نوشتن کمتره. اگه جایی لازم بود استفاده نکنیم مشکلی نیست

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + U(y_0) = E \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

شرایط اولیه: از نقطه $y=0$ پرتاب می‌کنیم با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاب کردیم.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - mgy\right)} = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

انتگرال را طوری بنویسیم که صبر مورد بالا تا پایین رسیدن به نقطه اوج می‌گیریم سمت مثبت را انتخاب می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy} \rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} = \int dt$$

$$\int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{v_0^2 - 2gy'}} = \int_0^t dt' \rightarrow -\frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gy}\Big|_0^y = t$$

$$\rightarrow \sqrt{v_0^2 - 2gy} - v_0 = -gt \rightarrow v_0^2 - 2gy = (v_0 - gt)^2$$

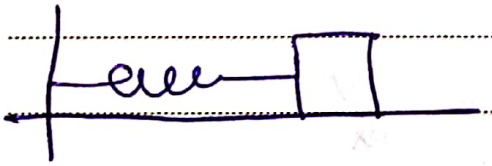
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

آیا میشه به راه دیگه هم مسئله را حل کرد؟ این مسئله پیوسته است، نیروی مقاوم نداریم و بسته

دیده بعضی از شما چنین رابطه‌ای به پایه کمان هم استفاده کرد. سوال ایرادی نداره.

مثال: انرژی پتانسیل فنر $t=0$ شروع به نوسان می‌کند. وقتی که $x=A$ و $v=0$ است.

تکلیف را روشن کنیم.



$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm\omega\int dt$$

$$\int_A^x \frac{dx'}{\sqrt{A^2 - x^2}} = -\omega\int_0^t dt' \rightarrow \int_A^x \frac{A\cos(\omega t)\,dt}{\sqrt{A^2 - A^2\sin^2(\omega t)}} = -\omega t$$

$x = A\sin(\omega t)$

$dx = A\cos(\omega t)\,dt$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)\Big|_A^x = -\omega t$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = -\omega t$$

ako Note Book

IranPhO.ir

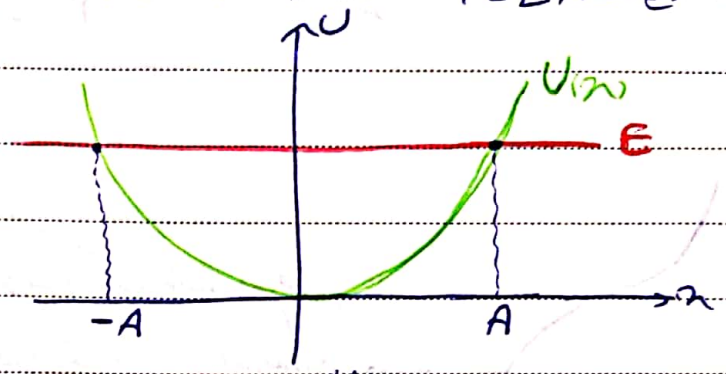
IranPhO.ir

انرژی جنبشی نیز: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$E = U(x) + \frac{1}{2}mv^2$

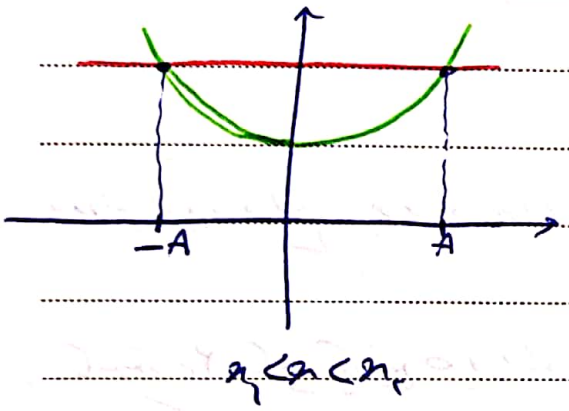
$E \geq U(x)$ برای هر پتانسیل دلخواه:

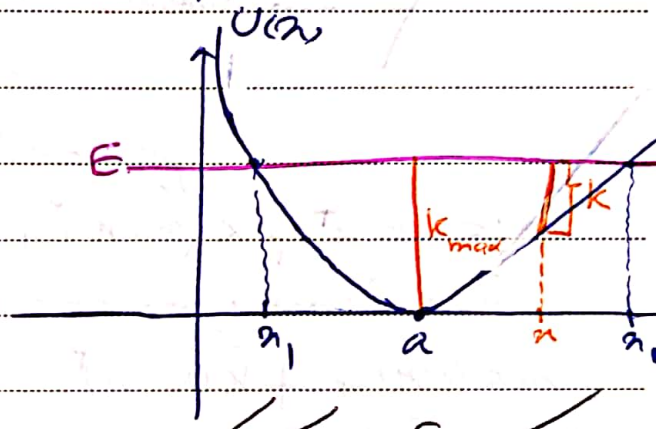
در یک مسئله E ثابت است ولی به ازای مقادیر مختلف E را رسم کرد.



$E_{min} = 0$ $E = 0$ $U(x) = 0$

$x = 0$ $x = 0$





حرکت نقطه که تحت تاثیر پتانسیل حرکت نوسانی انجام می‌دهد.

حرکت نوسانی ساده نیست.

اختلاف ارتفاع بین خط E و پتانسیل در هر نقطه، انرژی جنبشی ذره در آن نقطه را نشان می‌دهد.

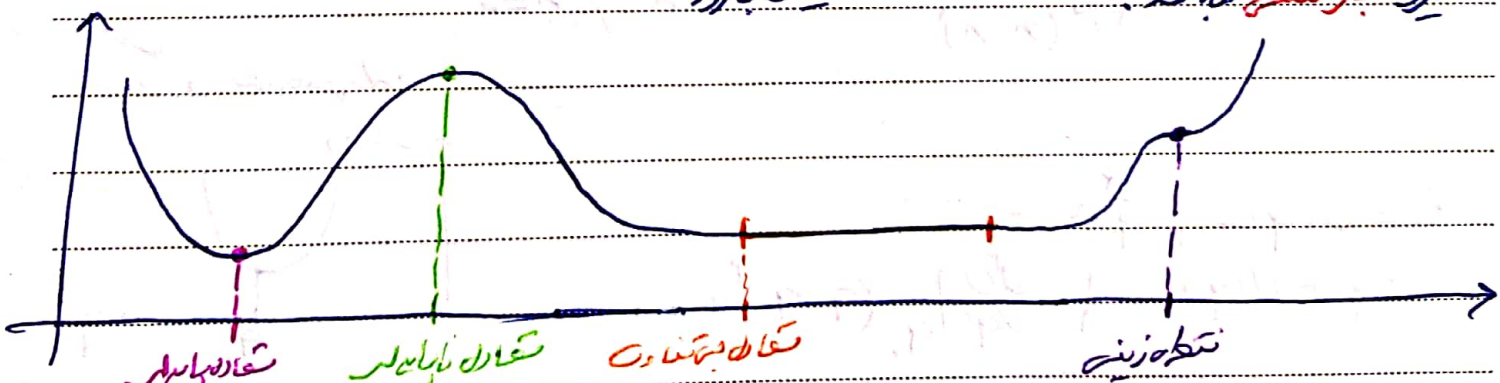
اگر حرکت نوسانی ساده باشد x را بر حسب $\sin(\omega t)$ و $\cos(\omega t)$ می‌نویسیم. $\omega = \frac{2\pi}{T}$

در حرکت نوسانی غیر ساده x را بر حسب $\sin(n\omega t)$ و $\cos(n\omega t)$ نمی‌نویسیم $\sin(2\omega t), \sin(3\omega t)$

توجه: ذره در هر سمت وقتی به x می‌رسد حرکت می‌کند.

تعادل پایدار: اگر ذره اندکی از تعادل پایدار دور شود نیروی خالص به سمت تعادل باز می‌گرداند.

نیروی بازگشتی وجود دارد.



تعادل جایی است که نیرو صفر شود و مشتق پتانسیل صفر شود.

$\frac{dU}{dx} = 0$

$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$ تعادل پایدار

$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$ تعادل ناپایدار

$\frac{d^2U}{dx^2} = 0$ تعادل خنثی

نقطه‌ای که در یک سمت صفر است نقطه زینی است.

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

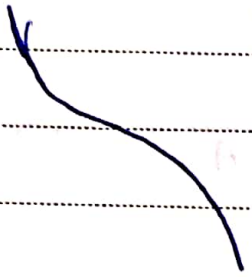
x_0 نقطه‌ی کمینه‌ی پتانسیل است

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2 + \dots$$

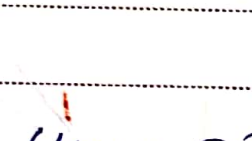
نوع نقطه‌ی تعادل با نگاه به پتانسیل: هر نقطه‌ی تعادل حتماً نقطه‌ی اکسترمم است!

نقطه‌ی تعادل پایدار: نقطه‌ای که تغییر مکان کند، نیروی برآیند برگردانده به جایگاه اولیه

نقطه‌ی تعادل ناپایدار: نقطه‌ای که تغییر مکان کند، نیروی برآیند در جهت جابجایی



نقطه‌ی تعادل خنثی: نقطه‌ای که تغییر مکان کند، نیروی برآیند صفر



سیستمی را در نظر می‌گیریم در x_0، حول همان نقطه‌ی تعادل کمی جابجا می‌کنیم

$$U(x) = \text{ثابت} + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 + \dots$$

با توجه به اینکه انرژی پتانسیل همیشه مثبت است، ولی اگر حداقل صفر در نظر گرفته شده باشد

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

حول نقطه‌ی کمینه، انرژی پتانسیل یک سیستم تکانه‌ی ساده‌ی خطی است

$$k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

f: بسامد

ω: بسامد زاویه‌ای

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

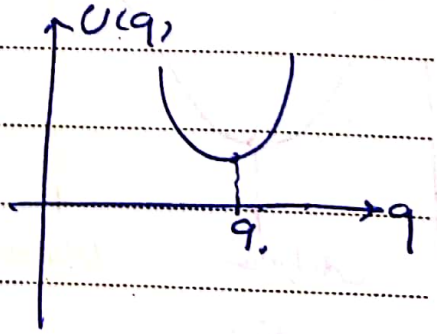
↳ نکته

اگر x_0 بیشینه باشد:

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}(x-x_0)^2$$

$$U(x) = U(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x-x_0)^2 \qquad m\ddot{x} - \beta x = 0$$

اینجا دیگر به صفر نرسیده



$$E = U(q_1) + \frac{1}{2}\dot{q}^2 a = \text{ثابت}$$

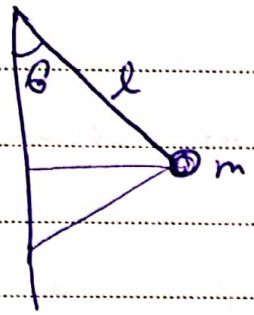
$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0}(q-q_0)^2 + \dots$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{a}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q_0}}$$

Note Book

IranPhO.ir

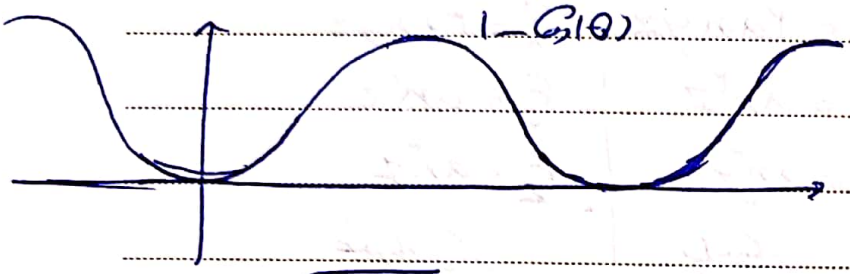
IranPhO.ir



$U_{\text{گرانش}} = mgh$

$h = l(1-\cos\theta)$

$E = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2) + mgl(1-\cos\theta)$



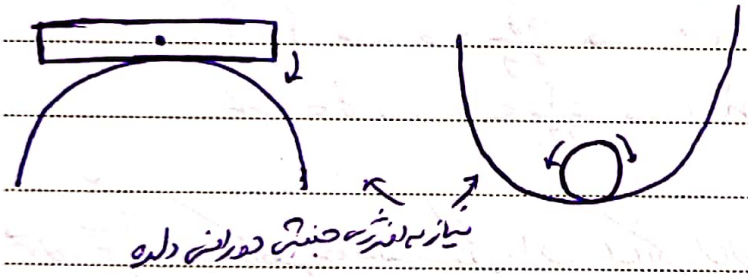
$\theta \ll 1 : 1-\cos\theta = \frac{1}{2}\theta^2$

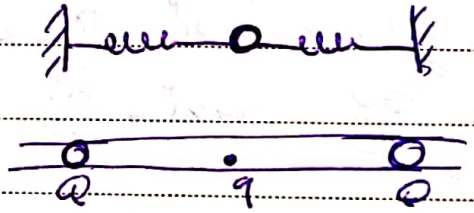
$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$

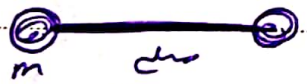
$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مقایسه کنید با

$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

بسیاری از حرکت‌های حول تعادل پایدار را می‌توان







نیروی وابسته به مسیر

$\Delta K = \int_{\text{مسیر}} \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots$

برای یک ذره که تحت اثر چند نیرو حرکت می‌کند

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz = d(\text{یک چیز})$

اگر بتوانیم این یک چیز را بر حسب تابعی از مکان بنویسیم

نیروی پایستار $= -dU$

$\Delta K = -\int dU = -\Delta U \qquad K + U = \text{ثابت}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz$

$\Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \rightarrow \vec{F} = -\nabla U$

ako Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{e}_z$$

شرط پایستاری یک میدان نیروی پایستار

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + U(x,y,z) = E$$ ثابت

مثال: میدان نیروی زیر را بررسی کنید.

$U(x,y,z) = -a x^2 y z$ → $F_x = 2axyz$ | $F_x = 2axyz$
$F_y = ax^2 z$ | $F_y = ax^2 z$
$F_z = ax^2 y$ | $F_z = ax^2 y$
پایستار | غیرپایستار

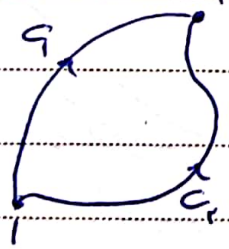
مثال: نیروی پایستار زیر را بررسی کنید.

$F_x = 2axyz = -\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow U = -axyz^2 + f(y,z)$

$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ax^2 z + \frac{\partial f}{\partial y} = ax^2 z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \rightarrow f = f(z)$

$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -axy^2 + \frac{\partial f}{\partial z} = ax^2 y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \rightarrow f = c$ ثابت

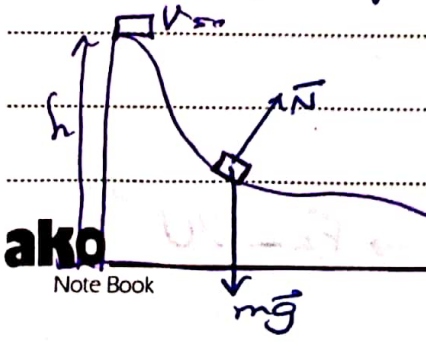
$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(U_2 - U_1)$ یعنی اگر $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dU$ باشد، مقدار $\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$ به مسیر بستگی ندارد.
↳ تنها به نقاط ابتدا و انتها بستگی دارد.



$$\int_{C_1}^{2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}^{2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \rightarrow \int_{C_1}^{2}\vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_2}^{2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \int_{C_1}^{2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2}^{1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$ حاصل انتگرال روی یک مسیر بسته صفر است.

$\vec{F} = -mg\hat{e}_y$ $\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int -mg\,dy = -\int d(mgy)$



$W_{\text{کل}} = W_N + W_{mg} = 0 + (-\Delta(mgy))$ ثابت

$\Delta K = -\Delta U$

$mgy + \frac{1}{2}mv^2$ ثابت $= 0 + mgh$

ako Note Book

IranPhO.ir

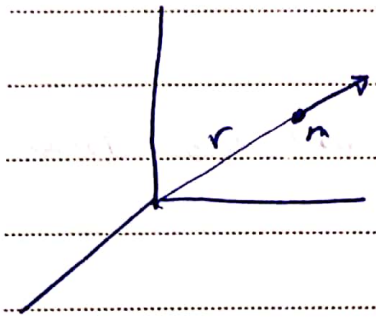
IranPhO.ir

$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = mgh \rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$ از ارتفاع h با سرعت صفر رها کرده

نیروی مرکزی

$\vec{F} = f(r)\hat{r}$

نیروی مرکزی نیرویی است که اندازه‌ی آن تنها تابع r و جهت آن تنها در جهت $\hat{r}$ است.



کسینوس‌های هادی مبدا اختصاصی است.

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{F} = F\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

گرادیان در کوردینات

$\vec{F}.d\vec{r} = dU \rightarrow -\nabla U.d\vec{r} = -dU$

در کروی: $d\vec{r} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\hat{e}_\varphi$

تعریف گرادیان $\nabla f.d\vec{r} = df$

$f(r,\theta,\varphi)$ $\frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi = (\nabla f).\left(dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\hat{e}_\varphi\right)$

$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{d\theta}{rd\theta}\hat{e}_\theta +$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$

$\vec{F}.d\vec{r} = (F(r)\hat{e}_r).\left(dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi\right) = F(r)dr = -dU$

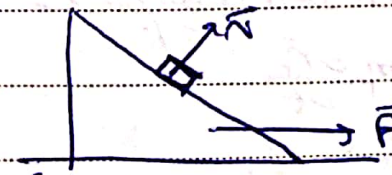
$F(r) = -\frac{dU}{dr}$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial s}\hat{s} + \frac{1}{s}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

آیا نیرو همیشه عمود به کار است؟

کار انجام شده توسط نیروی عمود $N = 0$

اگر در جهت کار انجام شده مؤلفه‌ای از نیرو وجود داشته باشد.



$\frac{dE}{dt} \neq 0$

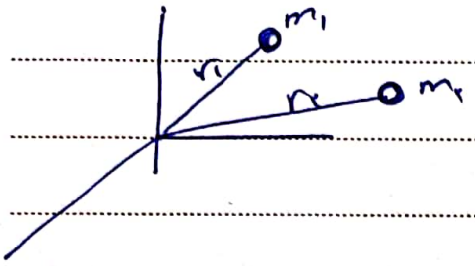
اگر نیروی F وارد کنیم آنگاه سرعت جسم تغییر می‌کند. کار N صفر است زیرا کار انجام شده توسط نیروی عمود صفر است.

ako
Note Book

IranPhO.ir

IranPhO.ir

ساده‌ترین دستگاه هم‌ارز یک ذره ← فردی ۲



$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21}$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12}$$

معادلات حرکت این ذره جفت‌شده هستند

جمع معادلات حرکت ←

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + 0$$

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{tot}) = \vec{F}_{ext}$$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ را تکانه‌ی کل دستگاه ذره‌ها می‌نامیم

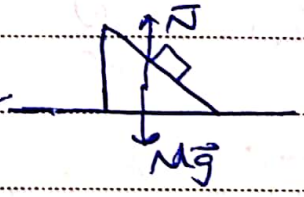
$$\frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{tot}^{ext}$$

قانون پایستگی تکانه‌ی خطی

اگر $\vec{F}_{tot}^{ext} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{ثابت}$ یعنی $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{ثابت}$

قانون پایستگی تکانه می‌گوید که صبر و استقامت نداشته باشی. حکمران بدی هستی.

$F_{x,tot}^{ext} = 0 \rightarrow P_x = \text{ثابت}$ یعنی $m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = \text{ثابت}$



پایستگی تکانه در راستای افقی را در سطح صیقلی گوه

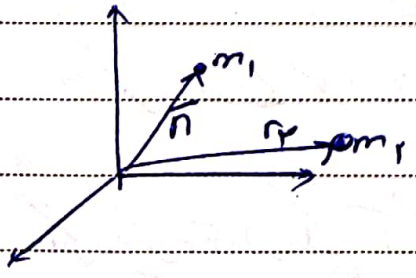
مرکز جرم:

جرم دستگاه $M = m_1 + m_2$

$$(m_1+m_2)\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

(cm) (1) (2)

مرکز جرم یک نقطه‌ی فرضی است که حرکت ذره‌ی قرینه می‌کند.



$$(m_1+m_2)\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

$$(m_1+m_2)\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_{tot}$$

تکانه‌ی کل برابر است با حاصل‌ضرب جرم کل در سرعت مرکز جرم.

اصطلاحاً تکانه‌ی کل را تکانه‌ی مرکز جرم می‌گوییم.

ako Note Book

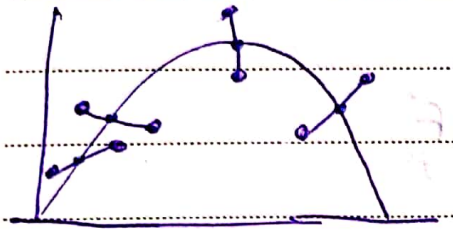
IranPhO.ir

IranPhO.ir

Year ..... Month ..... Date .....

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=\vec{F}^{ext}=\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(M\vec{r}_{cm})=M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}=M\vec{a}_{cm}=\vec{F}^{ext}_{tot}$$



سرعت جسم سرعت مرکز جرم جسم است

$$M\vec{a}_{cm}=\vec{F}^{ext}=m_1\vec{g}+m_2\vec{g}=M\vec{g}$$

$$\vec{a}_{cm}=\vec{g}$$

معادله حرکت جرم m_1 و معادله حرکت m_2 را در m_1 ضرب میکنیم

$$m_1m_2\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=m_2\vec{F}_1^{ext}+m_2\vec{F}_{12}$$

$$m_1m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=m_1\vec{F}_2^{ext}+m_1\vec{F}_{21}$$

$$m_1m_2\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=m_2\vec{F}_1^{ext}-m_1\vec{F}_2^{ext}+m_2\vec{F}_{21}-m_1\vec{F}_{12}$$

اگر $m_1\vec{F}_1^{ext}-m_1\vec{F}_2^{ext}=0$ باشد $\rightarrow m_1m_2\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=m_2\vec{F}_{21}-m_1\vec{F}_{12}$

نشان میدهد که $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{21}$ تنها برهمکنش نیروی وزنه سنگ دارند. اینکه کجا قرار دارند

$$\vec{r}_1-\vec{r}_2:=\vec{r}$$

$$m_1m_2\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=(m_1+m_2)\vec{F}_{21}(\vec{r})$$

$\vec{r}_{CM}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ $\quad\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_{21}(\vec{r})$ $\quad\mu=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}$ جرم کاهیده

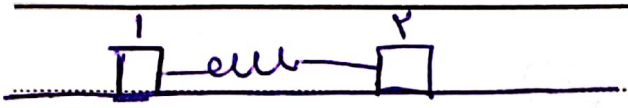
$$M\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2}=\vec{F}^{ext}_{tot}$$

با انتخاب دستگاه دستگاه مرجع

ako

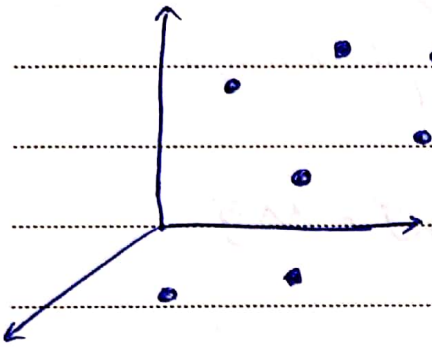
IranPhO.ir

IranPhO.ir



$\vec{r}_{cm}(t) =$ ..... مسیر

α



دستگاه متشکل از ذره‌ها

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \cdots$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \cdots$$

جمع روابط به ازای همه‌ی iها:

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}^{ext} + 0 \qquad M\ddot{\vec{r}}_{cm} = \vec{F}^{ext}$$

ترتیب جرم کل سیستم ۳ ذره ضلعی کنید

$$M\vec{r}_{cm} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

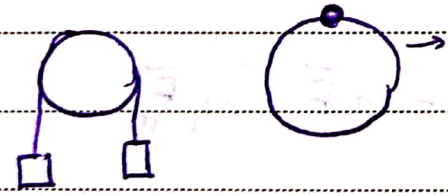
مایلی بتوانید هر مسئله‌ای را از این راه انرژی حل کنید.

پاسخگو انتظار دقت می‌خواهد

تکانه مرکز جرم را اجمالا بیان کنید کفایت می‌کند

گاهی مرکز جرم مهم نیست مسئله دو جسم را امتحان

نیرو مرکز نگذشت



$$-\frac{GmM}{r}$$

ako

IranPhO.ir