فصل اول

ماتریس و حل دستگاه-بخش دوم

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ دستگاه‌های معادلات خطی

معادلات به فرم زیر را دستگاه معادله خطی می‌نامند:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

اگر این دستگاه به فرم ماتریسی نوشته شود خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

که به طور خلاصه با رابطه $AX = B$ نشان داده می‌شود. ماتریس A ماتریس ضرایب و ماتریس B طرف دوم معادله است. X نیز ستون مجهولات می‌باشد.

به عنوان مثال دستگاه زیر یک دستگاه سه معادله و سه مجهول است:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ -2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

البته این دستگاه را می‌توان به فرم ماتریسی هم در آورد:

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

توجه شود که ماتریس ضرایب از نوشتن ضرایب مجهولات بدست آمده است.

همچنین دستگاه‌های زیر به ترتیب دستگاه‌های دو معادله-دو مجهول و دو معادله-چهار مجهول هستند.

$$\begin{cases} -x + 2y = -5 \\ 2x + 9y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 5w = -1 \\ 2x + y + 3z - 8w = 7 \end{cases}$$

این دو مثال را نیز می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۲ جواب دستگاه معادلات خطی

پس از معرفی دستگاه‌های خطی، در این بخش به تعیین جواب این دستگاه‌ها پرداخته می‌شود. به طور کلی سه حالت برای جواب دستگاه‌های خطی متصور است. یا جواب منحصر به فرد دارند، یا جواب ندارند و یا بینهایت جواب دارند. به طور خلاصه

- جواب منحصر به فرد (تنها یک جواب)
- جواب ندارد
- بینهایت جواب دارد

این حالت‌ها به مقدار دترمینان ماتریس ضرایب وابسته هستند. اگر دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر باشد، آنگاه فقط یک جواب (جواب منحصر به فرد) وجود دارد و اگر دترمینان برابر با صفر باشد، هر کدام از دو حالت (بدون جواب یا بینهایت جواب) می‌تواند به وجود آید. برای سادگی محاسبه از مثال دو معادله-دو مجهول استفاده می‌شود.

مثال ۱ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

برای حل این معادله می‌توان مثلاً معادله اول را در ۲ ضرب و با پایینی جمع کرد. در این صورت مقدار x حذف و مقدار y بدست می‌آید.

$$2\times \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2y + 3y = 2 + 8, \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

سپس با جایگذاری مقدار بدست آمده در یکی از معادلات، مجهول دوم هم بدست می‌آمد که در این مثال مجهول دوم $x = 1$ است. حال اگر به ماتریس ضرایب این دستگاه توجه کنیم، مقدار دترمینان آن غیرصفر است. بنابراین قبل از حل دستگاه هم می‌توانستیم حدس بزنیم این دستگاه فقط یک جواب دارد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (-1)(3) - (2)(1) = -5$$

مثال ۲ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

مانند قبل معادله اول را در ۲ ضرب می‌کنیم و با پایینی جمع. در این صورت اتفاق عجیبی رخ می‌دهد!

$$\begin{matrix} 2\times \\ \end{matrix} \begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2(1) - 2, \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

هیچ کدام از مجهولات بدست نیامد! بهتر است دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه بررسی شود.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (-1)(-2) - (2)(1) = 0$$

چون این دترمینان صفر است پس جواب منحصر به فرد ندارد و حالت بدون جواب یا بینهایت جواب رخ داده است. اما کدامیک از دو حالت باقیمانده جواب است؟ بدون جواب یا بینهایت جواب؟ پاسخ به این سوال در مثال بعد ارائه شده است.

مثال ۳ دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = -2 \end{cases}$$

معادله اول را در ۳ ضرب می‌کنیم و با پایینی جمع. در این صورت اتفاق عجیب‌تر رخ می‌دهد!

$$\begin{matrix} 3\times \\ \end{matrix} \begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x - 3y = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 = 3(1) - 2, \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

نه تنها هیچ کدام از مجهولات بدست نیامد، بلکه به رابطه $0 = 1$ رسیدیم. در این حالت هم دترمینان صفر است.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = (-1)(-3) - (3)(1) = 0$$

چون یک رابطه بی‌معنی ایجاد شد بنابراین این دستگاه معادلات جواب ندارد. اما در مثال قبل چون به رابطه $0 = 0$ رسیدیم که به لحاظ ریاضی صحیح است، پس بینهایت جواب داشت.

به طور خلاصه در جدول زیر پاسخ‌های دستگاه معادلات دسته‌بندی شده است.

اگر $\det(A) \neq 0$	تنها یک جواب دارد
اگر $\det(A) = 0$	بینهایت جواب دارد اگر یک رابطه ریاضی صحیح ایجاد شود مثل $0 = 0$
اگر $\det(A) = 0$	جواب ندارد اگر یک رابطه ریاضی نادرست ایجاد شود مثل $0 = 1$

۳ روش‌های حل دستگاه‌های معادلات خطی

روش دوم راهنمایی! در حل جواب‌های دستگاه معادلات، برای دستگاه‌های بیش از دو مجهول به سختی قابل استفاده است. در این بخش سه روش برای حل دستگاه آموزش داده می‌شود که هر کدام دارای مزایایی است. این سه روش عبارتند از

- روش ماتریس گاوس
- روش کرامر
- روش ماتریس معکوس

۱.۳ روش ماتریس گاوس

در این روش ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم با هم درون یک ماتریس بزرگ‌تر قرار می‌گیرند. با انجام اعمالی به نام اعمال سطری، ماتریس ضرایب را تبدیل به ماتریس بالا مثلثی کرده و جواب را بدست می‌آوریم.

مثال ۴ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x - y - 3z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 3y - 2z = -5 \end{cases}$$

ابتدا دستگاه فوق را به فرم ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس گاوس را که شامل ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم است تشکیل می‌دهیم. ماتریس ضرایب که یک ماتریس 3×3 است سمت چپ قرار می‌گیرد و ماتریس طرف دوم که در اینجا 1×3 است سمت راست وارد می شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

توجه شود که سه ستون اول از ماتریس ضرایب و ستون چهارم از ماتریس طرف دوم انتخاب شده است. برای آنکه ماتریس فوق به بالا مثلثی تبدیل شود، باید عناصر زیر قطر اصلی صفر شوند. به عبارت دیگر عناصر متمایز شده در ماتریس گاوس زیر باید صفر گردند.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

این کار با افزودن ضریبی از یک سطر به سطر دیگر انجام می‌شود. مثلاً برای آنکه عدد $\boxed{-1}$ صفر شود باید سطر اول به سطر سوم افزوده گردد و نتیجه در سطر سوم نوشته شود. بقیه سطرها سر جای خودشان هستند و تغییر نمی‌کنند. در نتیجه می‌نویسیم:

$$R_1 + R_3 \to R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون باید عدد 2 که در جایگاه $(2,1)$ قرار گرفته است، حذف گردد. برای این کار -2 برابر سطر اول به سطر دوم افزوده شده و نتیجه در سطر دوم قرار می‌گیرد.

$$-2R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -11 \\ 0 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

عدد بعدی که باید صفر شود، عدد 2 است که در موقعیت $(3,2)$ ماتریس فوق قرار گرفته است. برای اینکه این عدد صفر شود (تا ماتریس بالا مثلثی تشکیل شود) باید $-\frac{2}{3}$ سطر دوم به سطر سوم افزوده شود و نتیجه در سطر سوم قرار گیرد.

$$-\frac{2}{3}R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & \frac{25}{3} \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس بالا مثلثی ایجاد شده است. از سطر آخر ماتریس داریم:

$$-\frac{25}{3}z = \frac{25}{3}, \quad \Rightarrow \quad z = -1$$

با جایگذاری این عدد در سطر ماقبل آخر داریم:

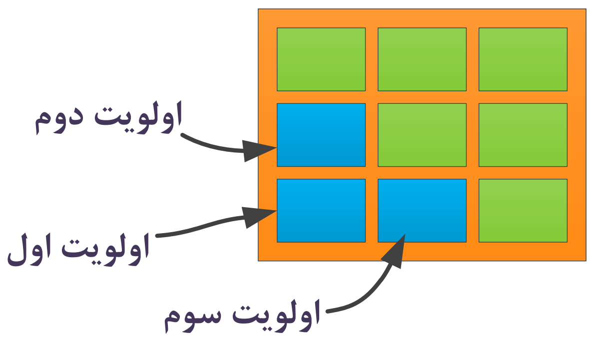
$$3y + 5z = -11, \quad \Rightarrow \quad 3y + 5(-1) = -11, \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

با جایگذاری y و z در سطر اول داریم:

$$x - y - 3z = 6, \quad \Rightarrow \quad x - (-2) - 3(-1) = 6, \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

در نتیجه جواب مسئله به صورت $x = 1$، $y = -2$ و $z = -1$ بدستت آمد.

نکته: اولویت صفر کردن عناصر زیر قطر اصلی بدین صورت است که ابتدا ستون اول و سپس ستون دوم و به همین ترتیب بقیه ستون‌ها زیر قطر اصلی صفر شوند. به عنوان نمونه برای یک ماتریس 3×3 در شکل ۱ اولویت صفر کردن عناصر زیر قطر اصلی نمایش داده شده است.



شکل ۱: اولویت صفر کردن عناصر زیر قطر اصلی در یک ماتریس ۳ در ۳

مثال ۵ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} y-3z=-9 \\ x+2y+z=-4 \\ 5x-3y-z=7 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس گاوس که شامل ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم است تشکیل می‌شود:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

در این ماتریس عنصر $(1,1)$ برابر با صفر است. در نتیجه نمی‌توان مانند مثال قبل نسبتی از این سطر را به سطرهای دیگر افزود. در این نوع سوالات سطر اول با سطر دیگری مانند سطر سوم جابجا می‌شود. ماتریس گاوس جدید به صورت زیر است:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

حال یکی از عناصر زیر قطر اصلی صفر است. باید دو عنصر دیگر را با انجام اعمال سطری، صفر نمود. برای اینکه عنصر اول سطر دوم صفر شود، $-\frac{1}{5}$ برابر سطر اول به آن افزوده می‌شود و نتیجه در سطر دوم قرار می‌گیرد.

$$-\frac{1}{5}R_1+R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{27}{5} \\ 0 & 1 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

برای آنکه ماتریس بالا مثلثی تشکیل شود باید عدد 1 زیر قطر اصلی صفر شود. باید $-\frac{5}{13}$ برابر سطر دوم

به سطر سوم افزوده شود و نتیجه در سطر سوم قرار گیرد.

$$-\frac{5}{13}R_2 + R_3 \to R_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 7 \\ 0 & \frac{13}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{27}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{45}{13} & -\frac{90}{13} \end{bmatrix}$$

از سطر آخر ماتریس داریم:

$$-\frac{45}{13}z = -\frac{90}{13}, \quad \Rightarrow \quad z = 2$$

با جایگذاری این عدد در سطر ماقبل آخر داریم:

$$\frac{13}{5}y + \frac{6}{5}z = -\frac{27}{5}, \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{5}y + \frac{6}{5}(2) = -\frac{27}{5}, \quad \Rightarrow \quad 13y = -39, \quad \Rightarrow \quad y = -3$$

با جایگذاری y و z در سطر اول داریم:

$$5x - 3y - z = 7, \quad \Rightarrow \quad 5x - 3(-3) - (2) = 7, \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

در نتیجه جواب مسئله به صورت $x = 0$، $y = -3$ و $z = 2$ بدست آمد.

مثال ۶ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ -x + 3z = 1 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس گاوس که شامل ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم است تشکیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا عنصر $(3,1)$ به کمک سطر اول صفر می‌شود:

$$R_1 + R_3 \to R_3 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-R_1+R_2\to R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&1&3&2\\0&1&3&4\end{bmatrix}$$

$$-R_2+R_3\to R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&1&3&2\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

از سطر آخر داریم:

$$0=2$$

چون این عبارت از لحاظ ریاضی نادرست است، در نتیجه این دستگاه جواب ندارد. با بررسی دترمینان ماتریس ضرایب هم متوجه می‌شویم که این دترمینان صفر است.

مثال ۷ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس گاوس حل کنید.

$$\begin{cases}x+y+z=5\\2x-2y+4z=5\\x+5y-z=10\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-2&4\\1&5&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\5\\10\end{bmatrix}$$

سپس ماتریس گاوس که شامل ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم است تشکیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&5\\2&-2&4&5\\1&5&-1&10\end{bmatrix}$$

ابتدا عنصر $(3,1)$ به کمک سطر اول صفر می‌شود:

$$-R_1+R_3\to R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1&1&1&5\\2&-2&4&5\\0&4&-2&5\end{bmatrix}$$

$$-2R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 + R_3 \to R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از سطر آخر داریم:

$$0 = 0$$

چون این عبارت از لحاظ ریاضی درست است، در نتیجه این دستگاه بینهایت جواب دارد.

مثال ۸ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس گاوس حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

سپس ماتریس گاوس را که شامل ماتریس ضرایب و ماتریس طرف دوم است تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

عنصر $(2,1)$ به کمک سطر اول صفر می‌شود:

$$-3R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

اکنون تنها عنصر زیر قطر اصلی صفر است. در نتیجه داریم:

$$-3y - 2z = 0$$

معادله فوق دو مجهول دارد. به ازای هر مقدار دلخواه از y می‌توان یک z داشت که معادله فوق را برآورده می‌کند. پس این دستگاه بینهایت جواب دارد.

نکته: مزیت روش ماتریس گاوس آن است که در موارد خاص می‌توان فهمید که مسئله بینهایت جواب دارد یا جواب ندارد.

۲.۳ روش کرامر

در این روش ابتدا مسئله به فرم ماتریسی $AX = B$ نوشته می‌شود. سپس از رابطه زیر برای تعیین جواب استفاده می‌گردد.

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

در رابطه فوق منظور از A_k ماتریس A است که در ستون kام آن ماتریس طرف دوم قرار گرفته است. با محاسبه این دو دترمینان می‌توان جواب مسئله را بدست آورد. این روش در مواردی که دترمینان صفر باشد، قابل استفاده نیست.

مثال ۹ دستگاه معادلات زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y = -3 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1(1) - 1(-2) + 1(-1) = 2$$

اکنون برای تعیین مقدار x باید دترمینان زیر حساب شود.

$$\det(A_1) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

اعداد نشان داده به رنگ قرمز همان ستون طرف دوم است که در ستون اول ماتریس ضرایب قرار می‌گیرد. در نتیجه

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1$$

برای مقدار y داریم:

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1$$

برای مقدار z داریم:

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

توجه: ستون قرمز همان ماتریس طرف دوم معادله است که با توجه به آنکه کدام جواب مد نظر باشد، باید در ستون مخصوص به خود قرار گیرد. برای x ستون مذکور باید در ستون اول قرار گیرد و برای y و z به ترتیب در ستون دوم و سوم.

مثال ۱۰ دستگاه معادلات زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - y - z = 2 \\ -x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 1(-2+2) - 2(6-1) - 1(6-1) = -15$$

چون دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر است، پس جواب منحصر به فرد وجود دارد.

مقدار x به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{0}{-15} = 0$$

مقدار y به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{0}{-15} = 0$$

مقدار z به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$z=\frac{\det\begin{bmatrix}1&2&2\\3&-1&2\\-1&2&-4\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&-1\\-1&2&2\end{bmatrix}}=\frac{30}{-15}=-2$$

۳.۳ روش ماتریس معکوس

در این روش مسئله به فرم ماتریسی $AX=B$ نوشته می‌شود. سپس در صورت معکوس‌پذیر بودن ماتریس A، معکوس آن در دو طرف معادله ضرب شده و پاسخ نهایی بدست می‌آید.

$$AX=B,\quad \overset{A^{-1}\times}{\Rightarrow}\quad A^{-1}AX=A^{-1}B,\quad \Rightarrow\quad X=A^{-1}B$$

بنابراین ابتدا باید A^{-1} محاسبه شود و سپس در B ضرب گردد.

مثال ۱۱ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases}x+2y-z=2\\3x-y-z=2\\-x+2y+2z=-4\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&-1\\-1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

در رابطه فوق

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&-1\\-1&2&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

باید معکوس ماتریس A بدست آید.

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{\det(A)}$$

دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix} = -15$$

$$adj(A) = N^T$$

ماتریس N به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N_{11} = (-1)^{1+1}\det M_{11} = \det\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = 0$$

$$N_{12} = (-1)^{1+2}\det M_{12} = -\det\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = -5$$

$$N_{13} = (-1)^{1+3}\det M_{13} = \det\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = 5$$

$$N_{21} = (-1)^{2+1}\det M_{21} = -\det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix} = -6$$

$$N_{22} = (-1)^{2+2}\det M_{22} = \det\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = 1$$

$$N_{23} = (-1)^{2+3}\det M_{23} = -\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix} = -4$$

$$N_{31} = (-1)^{3+1}\det M_{31} = \det\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix} = -3$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2}\det M_{32} = -\det\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix} = -2$$

$$N_{33} = (-1)^{3+3}\det M_{33} = \det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} = -7$$

$$\Rightarrow \quad N=\begin{bmatrix}0&-5&5\\-6&1&-4\\-3&-2&-7\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj(A)=N^T=\begin{bmatrix}0&-6&-3\\-5&1&-2\\5&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{-15}\begin{bmatrix}0&-6&-3\\-5&1&-2\\5&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X=A^{-1}B=\frac{1}{-15}\begin{bmatrix}0&-6&-3\\-5&1&-2\\5&-4&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}=\frac{1}{-15}\begin{bmatrix}0\\0\\30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x=0, \quad y=0, \quad z=-2$$

نکته: روش کرامر و ماتریس معکوس تنها برای ماتریس ضرایب مربعی کاربرد دارد. یعنی تعداد معادلات مستقل با تعداد مجهولات برابر باشند.

مثال ۱۲ دستگاه معادلات زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

$$\begin{cases}3x+3y+2z=-1\\x+2y+3z=-2\\-2x-y+2z=0\end{cases}$$

پاسخ: ابتدا دستگاه فوق به فرم ماتریسی نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}3&3&2\\1&2&3\\-2&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}$$

باید معکوس ماتریس A بدست آید.

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{\det(A)}$$

دترمینان ماتریس ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\det\begin{bmatrix}3&3&2\\1&2&3\\-2&-1&2\end{bmatrix}=3$$

ماتریس N به صورت زیر بدست می‌آید:

$$N_{11} = (-1)^{1+1} \det M_{11} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$N_{12} = (-1)^{1+2} \det M_{12} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -8$$

$$N_{13} = (-1)^{1+3} \det M_{13} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

$$N_{21} = (-1)^{2+1} \det M_{21} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -8$$

$$N_{22} = (-1)^{2+2} \det M_{22} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 10$$

$$N_{23} = (-1)^{2+3} \det M_{23} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = -3$$

$$N_{31} = (-1)^{3+1} \det M_{31} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5$$

$$N_{32} = (-1)^{3+2} \det M_{32} = -\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7$$

$$N_{33} = (-1)^{3+3} \det M_{33} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \quad N = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ -8 & 10 & -3 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = N^T = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -8 & 10 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -8 & 10 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -8 & 10 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 \\ -12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = 3, \quad y = -4, \quad z = 1$$

نکته: همان طور که قبلاً هم مطرح شد هنگامی که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد، نمی‌توان از روش کرامر یا ماتریس معکوس استفاده کرد. بنابراین تنها روش گاوس قابل استفاده است. در مسائلی که بینهایت جواب یا بدون جواب باشد، روش ماتریس گاوس استفاده می‌شود.

مثال ۱۳ به ازای کدام مقدار a مسئله زیر

الف- بینهایت جواب دارد.

ب- جواب ندارد.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

پاسخ: با بررسی دترمینان مشخص است که $\det(A) = 0$. پس دو حالت برای این دستگاه وجود دارد. یا بینهایت جواب دارد یا جواب ندارد. ماتریس گاوس را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

جای سطر دوم را با سوم عوض می‌کنیم تا ماتریس بالا مثلثی تشکیل شود:

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$$

برای آنکه عبارت ریاضی مربوط به سطر آخر صحیح باشد باید داشته باشیم:

$$0 = a + 1, \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

در این صورت دستگاه معادلات، بینهایت جواب دارد. اما اگر $a \neq -1$ باشد، دستگاه فوق هیچ جوابی ندارد.

۴ تمرین

۱. به ازای چه مقداری از m ماتریس زیر وارون‌پذیر نیست؟

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2m & -1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{bmatrix}$$

۲. دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت ماتریسی نمایش دهید.

$$\begin{cases} 3x+y+z=-2 \\ x+y-z=0 \\ -4x+3y=-3 \\ 5y=-4 \\ 5x+4y-3z=2 \end{cases}$$

۳. دستگاه معادله خطی زیر را به سه روش ماتریس گاوس، کرامر و ماتریس معکوس حل کنید. (واضح است که جواب بدست آمده از هر سه روش باید یکی باشد.)

$$\begin{cases} 2y-z=4 \\ x-y+3z=2 \\ 3x+y-z=-2 \end{cases}$$

۴. به ازای چه مقداری از a دستگاه زیر جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد؟ (**راهنمایی:** شرط اول آنست که دترمینان صفر باشد.)

$$\begin{cases} x-y+(2-a)z=3 \\ ax+y+3z=0 \\ (a-1)x+z=a-1 \end{cases}$$

کسی که هیچ وقت اشتباه نمی‌کند،

هیچ وقت هم چیز جدیدی یاد نمی‌گیرد.

آلبرت انیشتین