

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

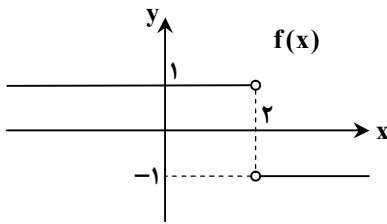
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 + 1 = 0$$

۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطه: کاربرد \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

راه حل اول:

ابتدا تابع را ساده کرده و رسم می‌کنیم:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2-x} = \frac{-(2-x)}{2-x} = -1 & x > 2 \\ \frac{2-x}{2-x} = 1 & x < 2 \end{cases}$$

مطابق شکل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (-1) - (1) = -2$$

راه حل دوم:

برای  $|x-2|$  می‌دانیم اگر  $x \rightarrow 2^+$  آن‌گاه  $x-2 > 0$  و  $|x-2| = x-2$  و همچنین برای  $x \rightarrow 2^-$  داریم  $x-2 < 0$  پس  $|x-2| = 2-x$ . می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{2-x} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (-1) - (1) = -2$$

۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطه: دانش \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

نکته: حد تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و حد راست تابع  $f$  در  $x = a$  موجود و با هم برابر باشند.

مطابق شکل، تابع  $f$  در نقاط با طول‌های صحیح  $-1, 0, 1, 3, 4, 7, 8$  و  $9$  دارای حد است.

اما در نقاط دیگر با طول صحیح حد ندارد، زیرا:

تابع در همسایگی چپ  $2-$  و  $6$  تعریف نشده؛ پس در این نقاط حد ندارد.

تابع در همسایگی راست  $5$  و  $10$  تعریف نشده؛ پس در این نقاط حد ندارد.

حد راست و چپ تابع در  $2$  برابر نیست؛ پس در این نقطه حد ندارد.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطه: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

نکته: اگر  $f$  در همسایگی راست  $a$  تعریف شده باشد، به شرطی در  $a$  حد راست دارد که:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$

نکته: اگر  $f$  در همسایگی چپ  $a$  تعریف شده باشد، به شرطی در  $a$  حد چپ دارد که:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$

با توجه به نمودار داریم:

تابع  $f$  در  $x = 1$  حد راست دارد، ولی حد ندارد.

تابع  $f$  در  $x = 2$  حد چپ و حد راست نابرابر دارد، ولی در این نقطه حد ندارد.

تابع  $f$  در  $x = 3$  دارای حد ۲ است، زیرا:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

تابع  $f$  در  $x = 4$  حد چپ و حد راست نابرابر دارد، ولی در این نقطه حد ندارد.

تابع  $f$  در  $x = 5$  حد چپ دارد، ولی حد ندارد.

بنابراین  $f$  در چهار نقطه  $x = 1$ ،  $x = 2$ ،  $x = 4$  و  $x = 5$  حد یک طرفه دارد ولی حد ندارد.

۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حیطه: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۱، فصل ۵ ◀ درس ۲)

نکته: اگر  $k$  و  $k+1$  دو عدد صحیح متوالی باشند و  $k \leq x < k+1$ ، آن گاه  $[x] = k$

نکته: فرض کنیم تابع  $f(x)$  در یک همسایگی  $a$  (به جز احتمالاً در خود  $a$ ) تعریف شده باشد، می‌گوییم حد تابع  $f(x)$  وقتی  $x$  به  $a$  نزدیک می‌شود، عدد حقیقی  $l$  است؛ هرگاه مقادیر تابع  $f(x)$  را بتوان هر اندازه دلخواه به  $l$  نزدیک کرد، به شرط آنکه  $x$  (با مقادیر مخالف  $a$  از دو

طرف) به قدر کافی به  $a$  نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

برای وجود حد در  $x = 2$  باید تابع در یک همسایگی محذوف این نقطه تعریف شده باشد. بنابراین ابتدا دامنه هر یک از توابع داده شده را به دست می‌آوریم:

$$1 \text{ گزینه: } f(x) = \sqrt{4-x^2} : 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$$

$$2 \text{ گزینه: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} : x^2-4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \Rightarrow D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$3 \text{ گزینه: } f(x) = \frac{1}{[x]-2} : [x]-2 \neq 0 \Rightarrow [x] \neq 2 \Rightarrow x \notin [2, 3) \Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

$$4 \text{ گزینه: } f(x) = \left[ \frac{x}{3} \right] - 1 : D_f = \mathbb{R}$$

فقط تابع  $f(x) = \left[ \frac{x}{3} \right] - 1$  در یک همسایگی  $x = 2$  تعریف شده است. برای این تابع داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \left[ \frac{x}{3} \right] - 1 \right) = \left[ \frac{2}{3} \right] - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \left[ \frac{x}{3} \right] - 1 \right) = \left[ \frac{2}{3} \right] - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \quad \text{نکته ۱}$$

نکته ۲: هر چند جمله‌ای مانند  $p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  در هر نقطه دلخواه  $a$  حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه  $a$  برابر است.

با توجه به نکته ۲، اگر  $f(x) = x^2 - 4x + 6$ ، حد تابع  $f$  در نقطه  $x = -1$  برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 6 = 11$$

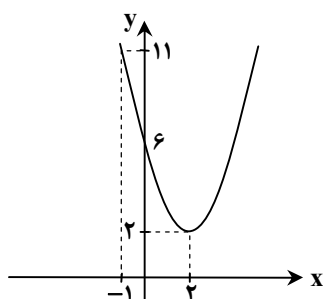
ولی با توجه به اینکه تابع  $f$  داخل جزء صحیح قرار دارد، اهمیت دارد که به‌ازای  $(-1)^+$  مقدار تابع از ۱۱ بیشتر است یا کمتر؛ پس داریم:

$$\begin{cases} x \rightarrow (-1)^+ : x > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \\ x \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -4x < 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x < 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 < 11$$

بنابراین حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} [x^2 - 4x + 6] = 10$  برابر  $[11^-]$  است.

راه حل دوم:

نمودار  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  به صورت مقابل می‌باشد:



مشخص است که تابع  $f$  در همسایگی راست منفی یک کمی از بازده کمتر است و جزء صحیح آن برابر ۱۰ است.

۷- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

اگر  $x < \pi$  آن‌گاه  $\sin x > 0$  پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

اگر  $x > \pi$  آن‌گاه  $\sin x < 0$  پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

بنابراین اختلاف حد چپ و راست تابع  $f$  برابر  $2 = 1 - (-1)$  می‌باشد.

۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۱، فصل ۴ ◀ درس ۲)

باید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

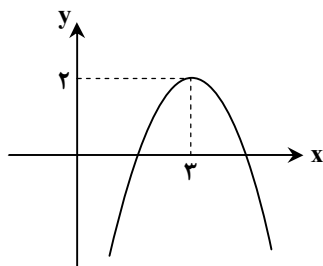
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (|x-2| + a) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x + 2 + a) = -2 + 2 + a = a + 1 \end{cases} \Rightarrow a + 1 = -1 \Rightarrow a = -2$$

۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حیطة: کاربرد \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

نمودار تابع  $f(x) = -x^2 + 6x - 7$  به صورت روبه‌رو است. مطابق شکل مشخص است که وقتی

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [-x^2 + 6x - 7] = 1 \text{ پس } 2 \text{ میل می‌کند،}$$



۱۰- پاسخ: گزینه ۲

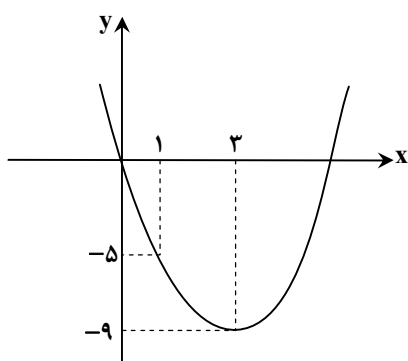
▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

نمودار تابع  $y = x^2 - 6x$  به صورت روبه‌رو است. این تابع از نقطه  $(1, -5)$  می‌گذرد.

مطابق شکل در همسایگی راست ۱، مقدار تابع  $y = x^2 - 6x$ ، کمی کمتر از -۵ است،

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x^2 - 6x] = [(-5)^-] = -6$$



۱۱- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a$$

$$\Rightarrow (1+a) - (a-1) = 2 \Rightarrow 2 \neq -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 1$$

$$x \rightarrow 1^-$$

یعنی هیچ مقداری برای  $a$  یافت نمی‌شود.

۱۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده \* حیطة: کاربرد \* حسابان (فصل ۵ ◀ درس ۲)

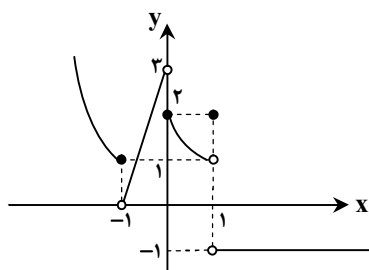
با توجه به نمودار داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 + 0 = 1$$



۱۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

تک تک حدهای گزینه‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\text{گزینه ۱: } \lim_{x \rightarrow 0^-} [1-x] : x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow -x+1 > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [1-x] = 1$$

$$\text{گزینه ۲: } \lim_{x \rightarrow 1^+} [x^2] = [1^+] = 1$$

$$\text{گزینه ۳: } \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] : x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} [2x] = 1$$

$$\text{گزینه ۴: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{x}{2} \right] : x < 2 \Rightarrow \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \frac{x}{2} \right] = 0$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

دامنه تابع  $f$  شامل هیچ همسایگی راست عدد یک نیست، زیرا اگر  $1 \leq x < 2$  باشد، حاصل  $[x]-1$  برابر صفر است، پس تابع  $f$  در این

محدوده تعریف نشده است. اما همسایگی راست یک، در تابع  $g$  تعریف شده است و این تابع در همسایگی راست یک، برابر صفر است، زیرا:

$$1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow [x]-1 = 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

بنابراین حد تابع  $g$  در سمت راست یک، برابر صفر است.

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه ۱: دامنه تابع  $y = \sqrt{3-x}$  برابر  $(-\infty, 3]$  است، پس تابع در همسایگی راست ۳ تعریف نشده و در همسایگی چپ ۳ تعریف شده است، پس حد راست ندارد. \*

گزینه ۲: دامنه  $y = \sqrt{2-x}$  به صورت  $(-\infty, 2]$  است و تابع در همسایگی راست یا چپ ۳ تعریف نشده است. پس حد راست و چپ ندارد. \*

گزینه ۳: تابع  $y = \frac{1}{[x]-3}$  وقتی  $[x] = 3$  تعریف نشده است، پس  $x \in [3, 4)$  در دامنه تابع وجود ندارد، بنابراین تابع در همسایگی راست ۳ تعریف نشده و حد راست ندارد. \*

گزینه ۴: تابع  $y = \frac{1}{[x]-2}$  وقتی  $[x] = 2$  تعریف نشده است، پس اعضای بازه  $[2, 3)$  در دامنه تابع حضور ندارند، بنابراین تابع در همسایگی چپ ۳ تعریف نشده و در همسایگی راست این عدد تعریف شده است، پس حد راست تابع در  $x = 3$  وجود دارد (برابر یک است) ولی حد چپ وجود ندارد.

۱۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

ابتدا حد راست و حد چپ تابع  $f$  را در  $x = 0$  به دست می‌آوریم:

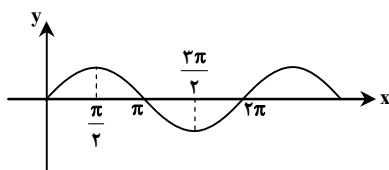
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{-x} = -\infty$$

بنابراین  $-\infty \times 0 = 0$  (دقت کنید که صفر حدی نیست و مطلق است) و گزینه ۴ پاسخ است.

۱۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)  
نمودار تابع  $\text{Sin} x$  به صورت روبه‌رو است:



با توجه به گزینه‌ها، تابع  $[\text{Sin} x]$  در نقاط  $x = \pi$  و  $x = 2\pi$  حد ندارد؛ زیرا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^+} [\text{Sin} x] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} [\text{Sin} x] = 0 \end{cases} \quad \text{حد ندارد.}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2\pi^+} [\text{Sin} x] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} [\text{Sin} x] = -1 \end{cases} \quad \text{حد ندارد.}$$

حال دو نقطه  $\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{3\pi}{2}$  را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [\text{Sin} x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\text{Sin} x] = 0 \quad \text{و} \quad \left[ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \text{Sin} x \right] = \left[ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{Sin} x \right] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} [\text{Sin} x] = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} [\text{Sin} x] = -1 \quad \text{و} \quad \left[ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \text{Sin} x \right] = \left[ \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \text{Sin} x \right] = -1 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط \* حیطة: کاربرد \* حسابان ۱ (فصل ۵ ◀ درس ۲)

نکته: حد تابع  $f$  در نقطه  $x = a$  وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع  $f$  در  $x = a$  موجود و با هم برابر باشند.  
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1 \text{ گزینه } f(x) = \frac{|x|}{x} : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{حد موجود نیست.}$$

$$2 \text{ گزینه } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} \Rightarrow \text{حد ندارد.} \end{cases}$$

$$3 \text{ گزینه } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} : \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}}{x} \Rightarrow \text{حد موجود نیست.}$$

$$4 \text{ گزینه } f(x) = x^2 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \Rightarrow \text{حد دارد.}$$