

بردارها

تصویر خط بر صفحه

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



0935 210 4321



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده 🧐 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 🧐 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 🧐 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 🧐 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

اندازه تصویر پاره خط AB با مختصات $A(1, 2, 0)$ و $B(-1, 0, 3)$ روی صفحه $x + y + z = 1$ کدام است؟

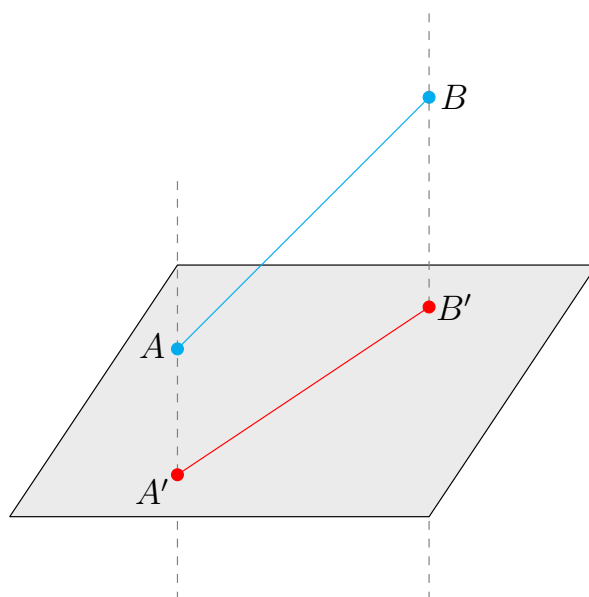
- (۱) $\sqrt{\frac{50}{3}}$ (۲) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ (۴) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ (ارشد فلسفه علم ۱۴۰۰)

۲ روش حل مسئله

😊 پاسخ: برای حل این مسئله دو روش پیشنهاد می‌شود. در روش اول از یافتن تصویر نقاط داده شده روی صفحه می‌توان طول پاره خط را یافت. در روش دوم ابتدا طول پاره خط بدست می‌آید و سپس با توجه به زاویه‌ای که با صفحه می‌سازد، طول تصویر آن مشخص می‌شود.

۱.۲ راه حل اول

در شکل زیر صفحه و نقاط داده شده نمایش داده شده‌اند. با توجه به آنکه بردار مشخصه یک صفحه معادل



بردار مشخصه یک خط است که عمود بر آن صفحه می‌باشد، در این مسئله بردار مشخصه خطوط عمود بر صفحه $\vec{u} = (1, 1, 1)$ است. در نتیجه معادله خطی که از A عبور می‌کند و بر صفحه عمود است با رابطه

(۱) نمایش داده می‌شود.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} \quad (۱)$$

باید نقطه‌ای که خط (۱) صفحه داده شده را قطع می‌کند بیابیم. برای این کار معادله خط به صورت پارامتری و بر حسب t نوشته می‌شود. اگر تمام عبارت‌های خط (۱) برابر با پارامتر t فرض شوند، آنگاه

$$x = t + 1, \quad y = t + 2, \quad z = t$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله صفحه:

$$(t+1) + (t+2) + (t) = 1, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{3}$$

پس نقطه تصویر A روی صفحه که با A' نمایش داده می‌شود به ازای $t = -\frac{2}{3}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A'(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$$

برای تعیین تصویر نقطه B روی صفحه هم به همین ترتیب عمل می‌شود. ابتدا خط عبوری از نقطه B و عمود بر صفحه بدست می‌آید:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1} \quad (۲)$$

سپس خط با پارامتر t نمایش داده می‌شود:

$$x = t - 1, \quad y = t, \quad z = t + 3$$

با جایگذاری رابطه فوق در معادله صفحه:

$$(t-1) + (t) + (t+3) = 1, \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$$

نقطه تصویر B روی صفحه که با B' نمایش داده می‌شود به ازای $t = -\frac{1}{3}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$B'(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$$

با مشخص شدن نقاط A' و B' که روی صفحه قرار دارند، فاصله این دو نقطه از هم مشخص می‌شود:

$$\vec{A'B'} = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}) = \frac{5}{3}(1, 1, -2)$$

طول بردار فوق به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$|\vec{A'B'}| = \frac{5}{3}\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

گزینه ۱ جواب صحیح است.

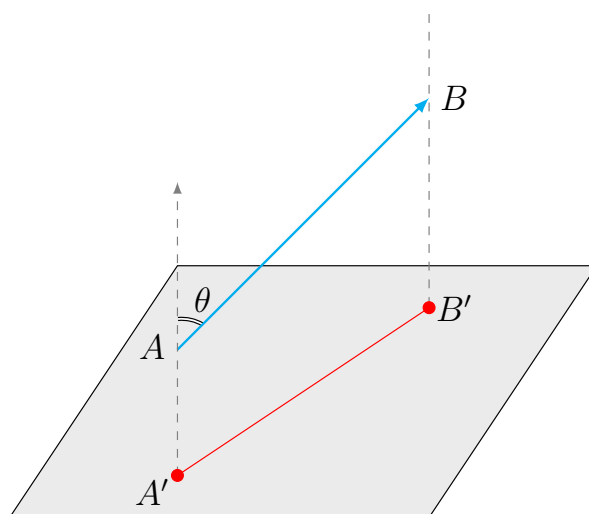
💡 اگر بردار $\vec{b}$ به صورت ضرب یک عدد ثابت مانند k در بردار دیگری مانند $\vec{a}$ باشد ($\vec{b} = k\vec{a}$) آنگاه

$$|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$$

در رابطه اخیر $k = \frac{5}{3}$ و $\vec{a} = (1, 1, -2)$ بود.

۲.۲ راه حل دوم

در شکل زیر زاویه بین بردار $\vec{AB}$ و بردار مشخصه صفحه نمایش داده شده است.



با توجه به شکل، رابطه زیر برای طول بردار تصویر شده روی صفحه برقرار است:

$$|A'B'| = |\vec{AB}| \sin \theta \quad (۳)$$

زاویه θ مربوط به زاویه بین بردار مشخصه صفحه و بردار $\vec{AB} = (-2, -2, 3)$ می‌شود. اندازه بردار $\vec{AB}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{17}$$

با توجه به قانون ضرب داخلی:

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{|\vec{AB}| |\vec{u}|}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{17}}, \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{3}\sqrt{17}}$$

با جایگذاری در (۳) اندازه تصویر بردار روی صفحه بدست می‌آید:

$$|A'B'| = |\vec{AB}| \sin \theta = \sqrt{17} \left(\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{3}\sqrt{17}} \right) = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{3}}$$

۳ مثال مرتبط

مساحت تصویر متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{OB} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ بر صفحه $2x + y - 2z = 5$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (ارشد مدیریت کسب و کار ۱۴۰۰)
- (۳) ۳ (۴) $\frac{7}{2}$

🤔 این مسئله یک درجه مشکل تر از مسئله قبل است.^۱ اما روش حل یکسان است. ابتدا مساحت متوازی الاضلاع بدست آمده و سپس اندازه تصویر آن روی صفحه مشخص می شود. برای این کار نیاز به دانستن زاویه بین متوازی الاضلاع و صفحه داده شده است.

در گام اول مساحت متوازی الاضلاع و بردار مشخصه آن بدست می آیند.

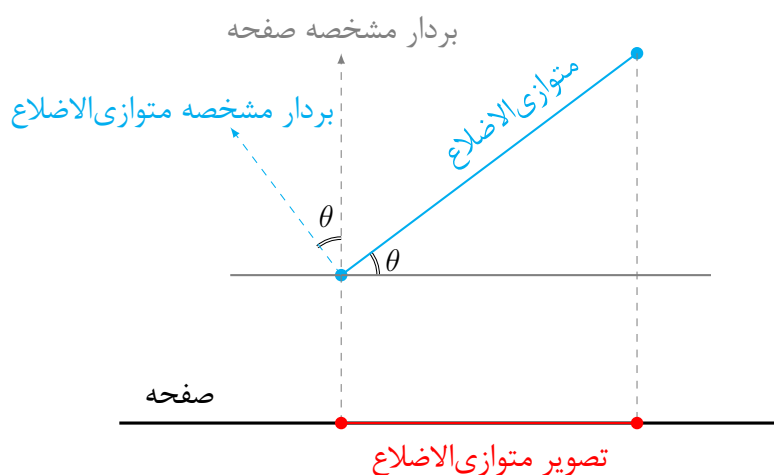
$$\vec{c} = \vec{OA} \times \vec{OB}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k} = (1, -4, -3)$$

رابطه فوق بردار مشخصه متوازی الاضلاع بوده و مساحت متوازی الاضلاع اندازه همین بردار است.

$$S = |\vec{c}| = \sqrt{26}$$

برای تعیین زاویه بین بردار مشخصه متوازی الاضلاع و صفحه داده شده به شکل زیر مراجعه می شود.



^۱ بالاخره باید بین مدیریت کسب و کار با دیگر رشته ها یه فرقی باشه!

با توجه به شکل مساحت تصویر به صورت زیر خواهد بود:

$$S' = S \cos \theta$$

با توجه به آنکه بردار مشخصه صفحه داده شده $\vec{u} = (2, 1, -2)$ است، برای تعیین زاویه بین دو صفحه خواهیم داشت:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{c}}{|\vec{u}| |\vec{c}|} = \frac{4}{3\sqrt{26}}$$
$$\Rightarrow S' = \sqrt{26} \left(\frac{4}{3\sqrt{26}} \right) = \frac{4}{3}$$

گزینه ۱ جواب صحیح است.

بسیاری از افراد موفق در زمان‌هایی که
دیگران در حال وقت تلف کردن هستند،
پیشرفت می‌کنند.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

  0935 210 4321

 AvaEducation16@gmail.com