تعریف ۱.۲ آزمایشی که تحت شرایط یکسان بتوان آن را تکرار کرد و نتیجه آن قبل از انجام آزمایش قابل تعیین نبوده ولی کلیه نتایج ممکن آن قابل تعیین باشد را یک آزمایش تصادفی گویند.

مثال ۱.۲.۲ هر کدام از موارد زیر یک آزمایش تصادفی است.

الف- پرتاب یک سکه

ب- پرتاب یک تاس

ج- پرتاب متوالی یک سکه تا مشاهده یک شیر

د- اندازه‌گیری درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز

ه- اندازه‌گیری طول عمر یک لامپ

در هر یک از آزمایشهای مثال ۱.۲.۲ نتیجه آزمایش از قبل قابل تعیین نیست ولی کلیه نتایج آزمایش قابل تعیین می‌باشند. مثلاً در پرتاب یک تاس یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود ولی قبل از انجام آزمایش نمی‌توان گفت که کدام عدد رخ می‌دهد.

تعریف ۲.۲ مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گویند و آن را با نماد S نمایش می‌دهند.

مثال ۲.۲.۲ در مثال ۱.۲.۲ فضای نمونه آزمایشهای تصادفی عبارت اند از

الف- در پرتاب یک سکه داریم $S=\{H,T\}$ که در آن H نمایانگر رخداد "شیر" و T نمایانگر رخداد "خط" است و در پرتاب دو سکه داریم $S=\{HH,HT,TH,TT\}$

ب- در پرتاب یک تاس داریم $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

همینطور فضای نمونه حاصل از پرتاب دو تاس عبارت است از

$$S=\{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\}=\{(x,y) \mid x,y=1,2,\dots,6\}$$

ج- فضای نمونه حاصل از پرتاب یک سکه تا مشاهده یک شیر عبارت است از

$$S=\{H,TH,TTH,TTTH,\dots\}$$

د- اگر درجه حرارت بدن یک بیمار در یک شبانه روز را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از $S=[35,42]$ که یک فاصله بسته است.

ه- اگر طول عمر لامپ تولیدی یک کارخانه که حداکثر ۱۰۰۰۰ ساعت طول عمر دارد را اندازه‌گیری کنیم آنگاه فضای نمونه فاصله $S=[0,10000[$ است.

مثال ۳.۲.۲ از خط تولید یک کارخانه ۳ محصول را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. این محصولات ممکن است خراب یا سالم باشند.

الف- اگر خراب بودن محصول را با D و سالم بودن آن را با N نمایش دهیم، آنگاه فضای نمونه موردنظر عبارت است از

$$S_1=\{NNN,NND,NDN,DNN,DDN,DND,NDD,DDD\}$$

ب- اگر به تعداد قطعات خراب در بین ۳ قطعه انتخابی توجه کنیم آنگاه فضای نمونه عبارت است از

$$S_2=\{0,1,2,3\}$$

مثال ۳.۲.۲ نشان می‌دهد که در یک آزمایش تصادفی، ممکن است بیش از یک فضای نمونه داشته باشیم و جنبه موردنظر از آزمایش تصادفی است که فضای نمونه را تعیین می‌کند. همچنین با توجه به مثالهای بالا می‌توان فضاهای نمونه را به طور کلی به دو گروه زیر تقسیم نمود

۱- فضای نمونه گسسته که شامل دو حالت زیر است

الف- فضای نمونه متناهی که تعداد اعضای آن متناهی است، مانند فضای نمونه در مثال ۲.۲.۲(الف) و (ب).

ب- فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر که یک مجموعه نامتناهی اما شمارش‌پذیر است، مانند مثال ۲.۲.۲(ج).

۲- فضای نمونه پیوسته که اعضای آن به صورت یک فاصله از اعداد حقیقی یا یک سطح در فضای دو بعدی یا... است، مانند مثال ۲.۲.۲ (د) و (ه).

در ادامه نخست بیشتر در مورد فضای نمونه متناهی بحث می‌کنیم و سپس در مورد فضاهای نمونه دیگر در طول فصل بحث می‌کنیم.

تعریف ۳.۲ در یک فضای نمونه متناهی، هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامند. پیشامدی که تنها دارای یک عضو باشد به پیشامد ساده موسوم است و پیشامدی با تعداد اعضای بیشتر از یک عضو را پیشامد مرکب گوئیم. اگر پیشامدی دارای هیچ عضوی نباشد آن را پیشامد محال یا تهی می‌نامیم و پیشامدی که برابر فضای نمونه S باشد به پیشامد حتمی موسوم است.

مثال ۴.۲.۲ اگر یک جفت تاس را یک بار پرتاب کنیم، آنگاه فضای نمونه آن عبارت است از

$$S=\{(x,y) \mid x,y=1,2,\dots,6\}$$

الف- اگر E_1 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس کمتر از ۳ باشد آنگاه E_1 یک پیشامد ساده است و

$E_1=\{(1,1)\}$

ب- اگر E_2 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس بیش از ۱۰ باشد آنگاه E_2 یک پیشامد مرکب است و

$E_2=\{(5,6),(6,5),(6,6)\}$

ج- اگر E_3 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداقل ۱۳ باشد آنگاه E_3 یک پیشامد محال است و

$E_3=\emptyset$

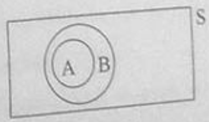
د- اگر E_4 پیشامد این باشد که مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۱۲ باشد آنگاه E_4 یک پیشامد حتمی است و

$E_4=S$

وقوع یک پیشامد گوئیم پیشامد A به وقوع پیوسته است هر گاه نتیجه آزمایش تصادفی منجر به مشاهده عضوی از پیشامد A گردد. برای مثال در مثال ۴.۲.۲ اگر در پرتاب دو تاس نتیجه (۶,۵) را مشاهده کنیم آنگاه گوئیم پیشامد E_2 به وقوع پیوسته و پیشامد E_1 رخ نداده است.

۱.۲.۲ اعمال روی پیشامدها

چون پیشامدها زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه هستند پس می‌توان همانند مجموعه‌ها اعمال جبری را روی آنها انجام داد. در این حالت فضای نمونه مجموعهٔ مرجع می‌باشد و توسط نمودار ون می‌توان پیشامدها و فضای نمونه را به صورت شکل ۱.۲ نمایش داد. بعضی از اعمال روی پیشامدها عبارت‌اند از



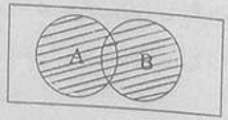
شکل ۱.۲ $A\subset B$

الف- زیر پیشامد پیشامد A را زیر پیشامد، پیشامد B گوئیم هر گاه وقوع A، وقوع B را نتیجه دهد (شکل ۱.۲) و آنرا با نماد $A\subset B$ نمایش می‌دهیم.

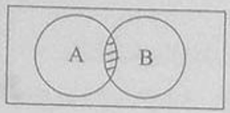
ب- دو پیشامد مساوی دو پیشامد A و B را مساوی گوئیم هر گاه وقوع یکی وقوع دیگری را نتیجه دهد، یعنی

$A=B \Leftrightarrow (A\subset B\ ,\ B\subset A)$

پ- اجتماع دو پیشامد پیشامد $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$ را اجتماع دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cup B$ به معنای وقوع حداقل یکی از دو پیشامد A یا B است (شکل ۲.۲).



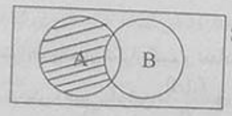
شکل ۲.۲ پیشامد $A\cup B$



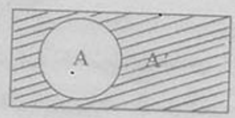
شکل ۳.۲ پیشامد $A\cap B$

ت- اشتراک دو پیشامد پیشامد $A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ و } x\in B\}$ را اشتراک دو پیشامد A و B گوئیم و وقوع $A\cap B$ به معنای وقوع همزمان هر دو پیشامد A و B است (شکل ۳.۲).

ث- تفاضل دو پیشامد پیشامد $A-B=\{x \mid x\in A\ ,\ x\notin B\}$ را تفاضل پیشامد B از A گوئیم و وقوع $A-B$ به معنای وقوع «فقط A و نه B» است (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲ پیشامد $A-B$



شکل ۵.۲ پیشامد A'

ج- متمم یک پیشامد پیشامد $A'=\{x \mid x\in S\ ,\ x\notin A\}$ را متمم پیشامد A گوئیم و وقوع A' به معنای عدم وقوع پیشامد A است (شکل ۵.۲).

اشتراک و اجتماع بیش از دو پیشامد نیز به نحو مشابهی تعریف می‌گردد. اجتماع پیشامدهای A_1، A_2، ....، و A_m شامل اعضایی است که حداقل به یکی از A_iها متعلق باشد و اشتراک آنها شامل اعضایی است که در همه پیشامدهای A_1، A_2، ....، و A_m باشند. یعنی

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m \qquad \bigcap_{i=1}^{m} A_i = A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m$$

تعریف ۴.۲ دو پیشامد A و B را ناسازگار (جدا) گوئیم هر گاه $A\cap B=\emptyset$، یعنی دو پیشامد را ناسازگار گوئیم هر گاه هر دو نتوانند همزمان اتفاق بیفتند.

مثال ۵.۲.۲ در پرتاب یک تاس اگر A پیشامد مشاهده عدد زوج و B پیشامد مشاهده عدد فرد باشد آنگاه

$A=\{2,4,6\}\ ,\ B=\{1,3,5\}\ ,\ A\cap B=\emptyset$

بنابراین A و B ناسازگار هستند.

تعریف ۵.۲ پیشامدهای A_1، A_2، A_3 و... را دو به دو ناسازگار گوئیم هر گاه به ازای هر $i \neq j$

$A_i \cap A_j = \emptyset$

۳.۲ احتمال

احتمال وقوع یک پیشامد به معنای شانس وقوع آن پیشامد در انجام یک آزمایش تصادفی است. برای محاسبه احتمال تعبیرهای مختلفی از جمله فراوانی نسبی، هم شانسی و شخصی وجود دارد که هر کدام از این تعبیرها می‌تواند برای بکارگیری احتمال در مسایل عملی مفید باشند ولی به هر کدام انتقادهایی وارد است. در زیر ابتدا روش محاسبه احتمال به طریق فراوانی نسبی را می‌آوریم و سپس تعریف ریاضی احتمال که بر اساس اصول موضوع احتمالات قرار دارد را می‌آوریم.

فرض کنید یک آزمایش تصادفی را n مرتبه تحت شرایط یکسان تکرار کنیم و تعداد دفعاتی که در این n آزمایش پیشامد A بوقوع پیوسته را با $f_n(A)$ نمایش دهیم. بنابراین $r_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$ فراوانی نسبی وقوع پیشامد A می‌باشد و انتظار داریم که با زیاد شدن تعداد آزمایشات n، $r_n(A)$ به یک عدد ثابتی نزدیک شود که این عدد ثابت را احتمال وقوع پیشامد A گوئیم و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} r_n(A)$$

اما انجام آزمایش تصادفی به تعداد دفعات زیاد ممکن است عملی نباشد و یا ممکن است $r_n(A)$ به یک عدد ثابت نزدیک نشود. با این وجود در بیشتر موارد عملی از این تعبیر احتمال برای محاسبه احتمال استفاده می‌شود و این تعبیر با اصول موضوع احتمال که در زیر ارائه می‌شوند، نیز سازگاری دارد. برای مثال اگر سکه‌ای را ۱۰۰۰ مرتبه پرتاب کنیم و مشاهده کنیم که ۴۹۵ مرتبه شیر و ۵۰۵ مرتبه خط مشاهده شده است در این صورت فراوانی نسبی مشاهده شیر و خط به ترتیب ۰/۴۹۵ و ۰/۵۰۵ می‌باشد و می‌توان احتمال وقوع هر کدام از این دو پیشامد را $۰/۵ = \frac{1}{2}$ در نظر گرفت.

تعریف ریاضی تابع احتمال تابع احتمال تابعی از فضای نمونه S به داخل مجموعه اعداد حقیقی R به صورت $P: S \to R$ است (به عبارت دقیقتر احتمال تابعی مانند P است که به هر پیشامد A از فضای نمونه S عدد حقیقی $P(A)$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهد که در ۳ اصل موضوع زیر صدق

کند

۱- $P(S) = 1$

۲- برای هر پیشامد A در S، $P(A) \geq 0$

۳- اگر A_1، A_2، A_3 و... پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

در ادامه تابع احتمال را روی هر یک از فضاهای نمونه گسسته و پیوسته به دست می‌آوریم.

۱.۳.۲ مدل احتمال روی فضای نمونه متناهی

فرض کنید $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه متناهی غیرتهی باشد. یک مدل احتمال روی این فضای نمونه عبارت است از نسبت دادن اوزان (احتمالات) نامنفی p_1، p_2،.... و p_n به نقاط فضای نمونه S به طوری که مجموع تمام این اعداد برابر یک شود یعنی

S	e_1	e_2	...	e_n
احتمال	p_1	p_2	...	p_n

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

این اعداد متضمن ارزیابی وقوع پیشامدهای ساده یک آزمایش تصادفی می‌باشند و بایستی به گونه‌ای نسبت داده شوند که پیشامد ساده‌ای که شانس وقوع آن کمتر است عدد نسبت داده شده به صفر نزدیکتر و پیشامد ساده‌ای که شانس وقوع آن بیشتر است عدد نسبت داده شده به یک نزدیکتر باشد. اگر در یک فضای نمونه پیشامدهای ساده شانس یکسان برای اتفاق افتادن داشته باشند در این صورت بایستی اعداد (احتمالات) یکسان به این نقاط نسبت داده شود. برای مثال در پرتاب یک تاس مدل احتمال برابر است با

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

حال اگر A یک پیشامد در فضای نمونه S باشد، احتمال پیشامد A برابر مجموع تمام احتمالات نسبت داده شده به پیشامدهای ساده تشکیل دهنده A در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subset S \Rightarrow P(A) = p_1 + p_2 + \dots + p_m = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

به راحتی می‌توان نشان داد که تعریف فوق در ۳ اصل احتمال صدق می‌کند.

مثال ۱.۳.۲ سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

حل فضای نمونه حاصل از این آزمایش برابر است با $S=\{TT,TH,HT,HH\}$

اگر سکه سالم باشد آنگاه شانس رخداد شیر یا خط با هم برابر است و در نتیجه به هر کدام از نقاط فضای نمونه شانس یکسان w را نسبت می‌دهیم و بنابراین $4w=1$ و یا $w=\frac{1}{4}$. پس مدل احتمال برای این آزمایش عبارت است از

S	TT	TH	HT	HH
احتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

حال اگر A پیشامد مشاهده حداقل یک شیر باشد آنگاه $A=\{TH,HT,HH\}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال ۲.۳.۲ یک تاس به شکلی است که احتمال آوردن عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد می‌باشد. احتمال آوردن عدد بیشتر از ۳ در پرتاب این تاس را بیابید.

حل فضای نمونه حاصل از این آزمایش برابر است با $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

اگر به اعداد فرد شانس w و به اعداد زوج شانس 2w را نسبت دهیم، چون بایستی جمع احتمالات برابر یک شود پس بایستی $w=\frac{1}{9}$ باشد و بنابراین مدل احتمال برای این آزمایش تصادفی عبارت است از

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمال	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

حال اگر B پیشامد مشاهده عدد بیشتر از ۳ باشد آنگاه $B=\{4,5,6\}$ و در نتیجه

$$P(B)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

مدل احتمال یکنواخت در مثالهای بالا ضرایب وزنی w در حکم احتمال پیشامدهای ساده می‌باشند. با مقایسه دو مثال ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ مشاهده می‌شود که اگر نقاط فضای نمونه $S=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ دارای شانس مساوی برای انتخاب شدن باشند آنگاه احتمال وقوع هر پیشامد $A=\{e'_1,e'_2,\dots,e'_m\}$ در S عبارت است از

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد A}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه S}}=\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}}}$$

این مدل احتمال را مدل احتمال یکنواخت گویند.

مثال ۳.۳.۲ یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آوردن مجموع هفت را به دست آورید.

حل در این آزمایش فضای نمونه دارای $n(S)=6^2=36$ عضو است که همگی دارای شانس یکسان برای به وقوع پیوستن هستند. حال اگر A پیشامد مشاهده مجموع هفت باشد آنگاه

$A=\{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\}$

و $n(A)=6$ بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

مثال ۴.۳.۲ جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه و ۵ توپ قرمز است. یک توپ به تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم

الف- احتمال اینکه توپ انتخابی قرمز باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه توپ انتخابی سفید باشد را بیابید.

حل در این آزمایش فضای نمونه دارای $n(S)=12$ عضو می‌باشد که شانس انتخاب هر توپ با یکدیگر مساوی است.

الف- اگر R پیشامد مشاهده توپ قرمز باشد آنگاه $n(R)=5$ و $P(R)=\frac{n(R)}{n(S)}=\frac{5}{12}$

ب- اگر W پیشامد مشاهده توپ سفید باشد آنگاه $n(W)=3$ و $P(W)=\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{3}{12}$

تذکر توجه کنید که اگر نتوان احتمالات مساوی را به نقاط فضای نمونه نسبت داد، بایستی از طریق تجربه و آزمایش ضرایب وزنی w را به نقاط فضای نمونه نسبت داده و مدل احتمال را تعیین کنیم.

۴.۲ چند قانون احتمال

با استفاده از ۳ اصل احتمال می‌توان نتایج زیر را که برای محاسبه احتمالات مفید می‌باشند، به دست آورد.

قضیه ۱.۲ $P(\emptyset)=0$

اثبات با قرار دادن $A_1=S$ و $A_2=A_3=\dots=\emptyset$ در اصل ۳ احتمال قضیه به سادگی اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۲ اگر $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه

$$P(B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_n)=P(B_1)+P(B_2)+\dots+P(B_n)$$

اثبات با قرار دادن $A_1=B_1, A_2=B_2, \dots, A_n=B_n$ و $A_i=\emptyset \quad \forall i>n$ در اصل ۳ احتمال قضیه به سادگی اثبات می‌شود.

نتیجه ۱.۲ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشد آنگاه

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)} \qquad (۱.۲)$$

مثال ۱.۴.۲ یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال آوردن مجموع هفت یا مجموع بیش از ده را بیابید.

حل در این آزمایش $n(S)=6^2=36$ و اگر A پیشامد مشاهده مجموع هفت باشد آنگاه $n(A)=6$ و $P(A)=\frac{6}{36}$ و اگر B پیشامد مشاهده مجموع بیش از ده باشد آنگاه $n(B)=3$ و $P(B)=\frac{3}{36}$. چون $A\cap B=\emptyset$ پس A و B ناسازگار هستند و بنابراین

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{1}{4}$$

قضیه ۳.۲ اگر A یک پیشامد و A' متمم آن باشد ($A\cup A'=S$) آنگاه

$$\boxed{P(A)+P(A')=1 \quad \text{یا} \quad P(A')=1-P(A)} \qquad (۲.۲)$$

اثبات چون $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\emptyset$ پس با قرار دادن $B=A'$ در نتیجه ۱.۲ قضیه اثبات می‌شود.

مثال ۲.۴.۲ اگر سکه‌ای را ۶ بار پرتاب کنیم آنگاه احتمال آوردن حداقل یک شیر را بیابید.

حل در این آزمایش $n(S)=2^6=64$ و اگر A پیشامد مشاهده حداقل یک شیر باشد آنگاه A' پیشامد مشاهده هیچ شیر است یعنی $A'=\{TTTTTT\}$ و $n(A')=1$ در نتیجه $P(A')=\frac{1}{64}$ و بنابراین

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

با استفاده از نتیجه ۱.۲ و اصول احتمال می‌توان نتایج زیر را به سادگی اثبات کرد. اثبات این نتایج را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۴.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند آنگاه

$$\boxed{P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)} \qquad (۳.۲)$$

نتیجه ۲.۲ اگر A و B دو پیشامد باشند که $A\subset B$ آنگاه

الف- $P(B-A)=P(B)-P(A)$

ب- $P(A)\le P(B)$

نتیجه ۳.۲ برای هر پیشامد A داریم که $0\le P(A)\le 1$

قضیه ۵.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند آنگاه

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)} \qquad (۴.۲)$$

مثال ۳.۴.۲ در یک زندان معین معلوم شده است که $\frac{2}{3}$ از زندانیها دارای سن کمتر از ۲۵ سال و $\frac{3}{5}$ از زندانیها مرد و $\frac{5}{8}$ از زندانیها زن یا دارای سن حداقل ۲۵ سال می‌باشند. احتمال اینکه یک زندانی که به طور تصادفی انتخاب شده است زنی با حداقل سن ۲۵ سال باشد را بیابید.

حل اگر M پیشامد این باشد که زندانی انتخاب شده مرد باشد و A پیشامد این باشد که زندانی انتخاب شده دارای سن کمتر از ۲۵ سال باشد آنگاه

$$P(A)=\frac{2}{3} \quad , \quad P(A')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$P(M)=\frac{3}{5} \quad , \quad P(M')=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$
$$P(M'\cup A')=\frac{5}{8} \quad , \quad P(M'\cap A')=?$$

بنابراین با استفاده از فرمول (۴.۲) داریم که

$$P(M'\cap A')=P(M')+P(A')-P(M'\cup A')=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{5}{8}=\frac{13}{120}$$

مثال ۴.۴.۲ احتمال آنکه یک هواپیمای جدید، تایید طراحی را به دست آورد برابر با ۰/۱۶، کارآیی استفاده از مواد را کسب کند برابر با ۰/۲۴ و هر دو را کسب کند ۰/۱۱ است.

الف- احتمال آنکه لااقل یکی از دو تأیید را به دست آورد را بیابید.

ب- احتمال آنکه فقط یکی از دو تأیید را به دست آورد را بیابید.

حل اگر A پیشامد تأیید طراحی و B پیشامد کارآیی استفاده از مواد باشند آنگاه

$$P(A)=0/16 \quad , \quad P(B)=0/24 \quad , \quad P(A\cap B)=0/11$$

الف- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/16+0/24-0/11=0/29$

ب- پیشامد مورد نظر $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به نتیجه ۲.۲(الف) داریم که

$P((A\cup B)-(A\cap B))=$ ۰/۲۹ - ۰/۱۱ = ۰/۱۸

۵.۲ قواعد شمارش

چنانچه در بخش قبل مشاهده شد برای محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد نیاز به محاسبه تعداد اعضای آن و تعداد اعضای فضای نمونه داریم. اغلب اوقات شمارش اعضای یک مجموعه کار دشواری است و برای انجام این کار نیاز به شناسایی برخی از اصول و قوانین داریم که در ذیل به معرفی آنها می‌پردازیم.

اصل ضرب فرض کنید که یک کار را بتوان با دو عمل پیاپی A و B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و به دنبال آن عمل B بتواند به n طریق انجام پذیرد آنگاه این کار به mn طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۱.۵.۲ با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت در صورتی که

الف- تکرار ارقام مجاز باشد. ب- تکرار ارقام مجاز نباشد.

حل نوشتن یک عدد دو رقمی شامل دو عمل، انتخاب رقم دهگان (A) و انتخاب رقم یکان (B) می‌باشد. بنابراین

الف- رقم دهگان می‌تواند یکی از ارقام ۱، ۲ یا ۳ به ۳ طریق و رقم یکان یکی از ارقام ۰، ۱، ۲ یا ۳ به ۴ طریق باشد. بنابراین

$$\overset{A}{\boxed{۳}} \times \overset{B}{\boxed{۴}} = ۱۲$$

ب- رقم دهگان می‌تواند یکی از ارقام ۱، ۲ یا ۳ به ۳ طریق و رقم یکان می‌تواند رقم ۰ یا یکی از دو رقم باقی مانده از ارقام ۱، ۲ یا ۳ باشد. بنابراین

$$\overset{A}{\boxed{۳}} \times \overset{B}{\boxed{۳}} = ۹$$

اصل جمع فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرند و این دو عمل نتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه این کار به m+n طریق انجام می‌پذیرد.

مثال ۲.۵.۲ به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجوی ریاضی، دو دانشجو را انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنوان سرگروه و نفر دوم به عنوان دستیار باشد و هر دو نفر از یک رشته باشند.

تکراری نباشه

حل طبق اصل ضرب دو دانشجو از رشته کامپیوتر به ۱۲=۳×۴ طریق یا از رشته ریاضی به ۲۰=۴×۵ طریق انتخاب می‌شوند. بنابراین طبق اصل جمع این دو نفر را می‌توان به ۳۲=۲۰+۱۲ طریق انتخاب کرد.

اصول جمع و ضرب را می‌توان برای بیش از دو عمل، مثلاً k عمل A_1، A_2، ...، و A_k نیز گسترش داد.

مثال ۳.۵.۲ یک تاس سالم را ۴ بار به طور مستقل پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در هیچکدام از پرتابها عدد مضرب ۳ مشاهده نشود را بیابید؟

حل در این آزمایش $n(S)$ برابر تعداد حالات ممکن پرتاب ۴ بار یک تاس است، پس $n(S)=۶\times۶\times۶\times۶=۶^۴$ و اگر A پیشامد این باشد که عدد مضرب ۳ مشاهده نشود آنگاه در هر پرتاب ۴ حالت ۱، ۲، ۴ و ۵ مورد نظر ما می‌باشد، بنابراین $n(A)=۴\times۴\times۴\times۴=۴^۴$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴^۴}{۶^۴}=\frac{۱۶}{۸۱}$$

مثال ۴.۵.۲ تحت هر یک از شرایط زیر تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان ساخت را به دست آورید.

الف- اعداد فرد باشند.

ب- اعداد بزرگتر از عدد ۳۳۰ باشند.

پ- اعداد زوج باشند.

حل الف- در این حالت ابتدا رقم یکان به ۳ طریق (ارقام ۱، ۳ و ۵) انتخاب می‌شود. سپس رقم صدگان که به غیر از صفر و رقم یکان انتخاب شده می‌باشد به ۴ طریق انتخاب شده و در آخر رقم دهگان نیز به ۴ طریق انتخاب می‌شود و بنابراین تعداد طریق انتخاب ۴۸=۳×۴×۴ است.

ب- این اعداد به دو صورت می‌باشند. اعدادی که رقم صدگان آنها ۴ یا ۵ است که تعداد طریق انتخاب آنها ۴۰=۴×۵×۲ است، یا اعدادی که رقم صدگان آنها ۳ است که تعداد طریق انتخاب آنها

$8=1\times2\times4$ است. پس طبق اصل جمع تعداد طریق‌های انتخاب برابر $48=8+40$ است.

پ- چون تعداد اعداد زوج متمم تعداد اعداد فرد است و تعداد کل اعداد بدون تکرار ارقام $100=5\times5\times4$ است پس تعداد اعداد زوج $52=48-100$ است. آیا می‌توانید تعداد اعداد زوج را به طور مستقیم محاسبه کنید؟

جایگشتها در بعضی از مسایل می‌خواهیم تعداد طریق قرار گرفتن ۶ نفر در یک صف و یا تعداد طریق انتخاب ۲ نفر از بین ۶ نفر را به دست آوریم. برای این منظور می‌توان از اصول شمارش و مفهوم جایگشت استفاده کنیم.

تعریف ۶.۲ ترتیبی را که می‌توان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد یک جایگشت گویند.

مثال ۵.۵.۲ جایگشتها و تعداد جایگشتهای مختلف سه حرف a، b و c را به دست آورید.

حل جایگشتهای مختلف این ۳ حرف عبارت‌اند از abc-acb-bac-bca-cab-cba. برای به دست آوردن تعداد جایگشتها، این ۳ حرف را می‌خواهیم در ۳ مکان قرار دهیم. مکان اول به ۳ طریق و مکان دوم به دو طریق و مکان سوم به یک طریق می‌توانند اشغال شوند بنابراین تعداد کل جایگشتها برابر $3!=3\times2\times1$ می‌باشد.

در حالت کلی داریم که

> اگر n عنصر متمایز را بخواهیم در یک صف کنار یکدیگر قرار دهیم تعداد جایگشتهای مختلف این عناصر برابر است با $n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)=n!$

مثال ۶.۵.۲ چهار پزشک و پنج مهندس می‌خواهند در یک صف کنار یکدیگر قرار گیرند.

الف- احتمال اینکه مهندس‌ها در یک طرف صف و پزشک‌ها در طرف دیگر صف قرار گیرند را بیابید.

ب- احتمال اینکه پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف قرار گیرند را بیابید.

ج- احتمال اینکه دو مهندس بخصوص همواره کنار یکدیگر قرار گیرند را بیابید.

د- احتمال اینکه دو مهندس بخصوص هیچگاه کنار یکدیگر قرار نگیرند را بیابید.

حل در این حالت $n(S)=9!$ یعنی تعداد کل حالات قرار گرفتن این ۹ نفر در صف می‌باشد.

الف- اگر A پیشامد قرار گرفتن پزشک‌ها در یک طرف صف (به !۴ طریق) و مهندس‌ها در طرف

دیگر صف (به !۵ طریق) باشد، چون شروع صف می‌تواند با پزشک‌ها یا مهندس‌ها باشد پس $n(A)=2!4!5!$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2!4!5!}{9!}$$

ب- اگر B پیشامد قرار گرفتن پزشک‌ها و مهندس‌ها یک در میان در صف باشد آنگاه مهندس‌ها به !۵ طریق در صف قرار می‌گیرند و پزشک‌ها به !۴ طریق در بین مهندس‌ها قرار می‌گیرند پس $P(B)=5!4!$ و در نتیجه

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4!5!}{9!}$$

ج- اگر C پیشامد قرار گرفتن دو مهندس بخصوص در کنار یکدیگر باشد، این دو مهندس به !۲ طریق کنار یکدیگر قرار می‌گیرند و با در نظر گرفتن این دو مهندس به عنوان یک عنصر، در کل ۸ عنصر داریم که می‌توانند در صف قرار گیرند پس $n(C)=8!2!$ و در نتیجه

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{8!2!}{9!}=\frac{2}{9}$$

د- پیشامد مورد نظر متمم C یعنی C' است، در نتیجه $P(C')=1-P(C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

مثال ۷.۵.۲ به چند طریق می‌توان با حروف a,b,c,d,e کلمات دو حرفی ساخت در صورتی که

الف- تکرار حروف مجاز نباشد. ب- تکرار حروف مجاز باشد.

حل الف- حالتهای مختلف ساختن کلمات دو حرفی بدون تکرار در شکل ۶.۲ مشاهده می‌گردد. با استفاده از اصل ضرب این تعداد به صورت زیر محاسبه می‌شود

ab	ac	ad	ae
ba	bc	bd	be
ca	cb	cd	ce
da	db	dc	de
ea	eb	ec	ed

$$5\times4=\frac{(5\times4)\times(3\times2\times1)}{(3\times2\times1)}=\frac{5!}{3!}=\frac{5!}{(5-2)!}$$

شکل ۶.۲ تبدیلات ۲ عنصر از ۵ عنصر

این مقدار را تبدیل ۲ از ۵ گوئیم و با نهاد P_2^5 نمایش می‌دهیم.

ب- با استفاده از اصل ضرب این تعداد برابر $5^2=5\times5$ است.

در حالت کلی داریم که

اگر از بین n عنصر متمایز بخواهیم r عنصر را انتخاب کرده و در یک صف قرار دهیم در این صورت

الف- اگر تکرار عناصر مجاز نباشد آنگاه تعداد راه‌های، ممکن برابر است با $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

ب- اگر تکرار عناصر مجاز باشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با n^r

به P_r^n تبدیل r از n گویند و بایستی همواره $0 \le r \le n$ باشد. چون ۱=!۰ پس $P_n^n = n!$ است.

مثال ۸.۵.۲ کلمه COMPUTER را در نظر بگیرید.

الف- تعداد کلمات ۸ حرفی بدون تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با $P_8^8 = 8!$

ب- تعداد کلمات ۵ حرفی بدون تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با $P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$

پ- تعداد کلمات ۵ حرفی با مجاز بودن تکرار حروف که از حروف این کلمه می‌توان ساخت برابر است با 8^5

مثال ۹.۵.۲ تعداد جایگشتها مختلف حروف کلمه BALL را به دست آورید.

حل در اینجا با عوض کردن جای دو حرف L در کلمه تغییری ایجاد نمی‌شود و جایگشتهای مختلف این حروف عبارت‌اند از

BALL - BLAL - BLLA - LBLA - LBAL - LLBA

ABLL - ALBL - ALLB - LALB - LABL - LLAB

که تعداد آنها ۱۲ است. اگر این ۴ حرف متمایز می‌بودند آنگاه تعداد جایگشتها ۲۴=!۴ می‌شد اما در هر یک از جایگشتهای بالا اگر جای دو حرف L را که به !۲ انجام می‌پذیرد، عوض کنیم تغییری در کلمات بوجود نمی‌آید و بنابراین تعداد جایگشتهای حاصل برابر $12 = \frac{4!}{2!}$ است.

مثال ۱۰.۵.۲ تعداد جایگشتهای مختلف حروف کلمه PEPPER را به دست آورید.

حل در اینجا ۳ حرف P یکسان و ۲ حرف E یکسان و ۱ حرف R داریم. بنابراین تعداد جایگشتهای مختلف حروف این کلمه برابر $60 = \frac{6\times5\times4}{2} = \frac{6!}{3!2!1!}$ است.

در حالت کلی داریم که

اگر n عنصر وجود داشته باشند که n_1 تای آنها از نوع اول و n_2 تای آنها از نوع دوم و... و n_r تای آنها از نوع r ام باشند که $n_1+n_2+\dots+n_r=n$ آنگاه تعداد جایگشتهای این عناصر برابر است با $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$

مثال ۱۱.۵.۲ می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱، ۵ کتاب معادلات دیفرانسیل و ۴ کتاب آمار مهندسی را در کنار یکدیگر در یک قفسه قرار دهیم. احتمال اینکه هر ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ پهلوی هم قرار گیرند را بیابید.

حل در اینجا ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ مانند ۳ حرف M، ۵ کتاب معادلات مانند ۵ حرف E و ۴ کتاب آمار مانند ۴ حرف S می‌باشند پس تعداد طریق قرار گرفتن آنها در یک قفسه $n(S) = \frac{12!}{3!5!4!}$ است. حال اگر A پیشامد قرار گرفتن ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ پهلوی هم باشد آنگاه $n(A) = \frac{10!}{1!5!4!}$ زیرا ۳ کتاب ریاضی عمومی ۱ در حکم یک گروه متصل MMM می‌باشند. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10!}{1!5!4!}\times\frac{3!5!4!}{12!}=\frac{3!10!}{12!}=\frac{1}{22}$$

ترکیب اگر در قرار دادن اعضای متمایز یک مجموعه در کنار یکدیگر (و یا انتخاب اعضا از یک مجموعه) ترتیب قرار گرفتن اعضا در کنار یکدیگر (ترتیب انتخاب اعضا) مهم نباشد، در این صورت جایگشت حاصله را ترکیب گویند.

مثال ۱۲.۵.۲ حروف a,b,c,d,e را در نظر بگیرید

الف- از این حروف چند کلمه دو حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نباشد.

ب- از این حروف چند کلمه هفت حرفی می‌توان ساخت به طوری که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نباشد.

حل الف- این مثال همانند مثال ۷.۵.۲ است با این تفاوت که ترتیب قرار گرفتن حروف مهم نیست، یعنی از دو حالت ab و ba فقط بایستی یکی را انتخاب کرد و... بنابراین تعداد کل حالات از تقسیم P_2^5 بر !۲ (تعداد جایگشتهای دو حرف انتخابی) به دست می‌آید یعنی

$$\text{تعداد کلمات} = \frac{P_2^5}{2!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

این تعداد را با $\binom{5}{2}$ یا C_2^5 نمایش داده و آن را ترکیب ۲ از ۵ گویند.

ب- در شکل ۷.۲-الف بعضی از کلمات ۷ حرفی مورد نظر مشخص شده‌اند. این حالات را می‌توان به صورت دیگری همانند شکل ۷.۲-ب نمایش داد که در آن تعداد xهای سمت چپ خط اول نمایانگر تعداد حرف a، تعداد xهای بین دو خط اول و دوم از سمت چپ نمایانگر تعداد حرف b و...

الف	ب
a a b b c d e	xx|xx|x|x|x
a b b c d e e	x|xx|x|x|xx
b c c d e e e	|x|xx|x|xxx
a b d d d e e	x|x||xxx|xx
a a b c c e e	xx|x|xx||xx
c c c c e e e	||xxxx||xxx

شکل ۷.۲ ترکیبات با تکرار

بنابراین تعداد کلمات مختلف از قرار دادن ۷ حرف x و چهار خط | به دست می‌آید که این تعداد برابر با $\frac{11!}{7!4!}$ و یا $\frac{11!}{7!4!}=\binom{5+7-1}{7}$ است.
در حالت کلی داریم که

اگر از بین n عنصر متمایز بخواهیم r عنصر را انتخاب کنیم به طوری که ترتیب انتخاب مهم نباشد در این صورت

الف- اگر تکرار عناصر مجاز نباشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ب- اگر تکرار عناصر مجاز باشد آنگاه تعداد راه‌های ممکن برابر است با

$$\binom{n+r-1}{r}$$

به $\binom{n}{r}$ ترکیب r از n گویند و همواره بایستی $0 \le r \le n$ باشد.

مثال ۱۳.۵.۲ از بین ۴ پزشک و ۳ پرستار می‌خواهیم یک کمیته ۴ نفری تشکیل دهیم.

الف- احتمال اینکه اعضای کمیته شامل ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه اعضای کمیته شامل حداقل ۲ پرستار باشد را بیابید.

حل چون در انتخاب افراد ترتیب مهم نیست، بنابراین تعداد انتخاب ۴ نفر از این ۷ نفر برابر $n(S)=\binom{7}{4}$ است.

الف- انتخاب ۲ پزشک به $\binom{4}{2}$ و انتخاب ۲ پرستار به $\binom{3}{2}$ طریق انجام می‌شود بنابراین اگر A پیشامد انتخاب ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد آنگاه $n(A)=\binom{4}{2}\binom{3}{2}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{7}{4}}$$

ب- انتخاب حداقل ۲ پرستار به معنای انتخاب ۲ یا ۳ پرستار است، بنابراین اگر B پیشامد انتخاب حداقل ۲ پرستار باشد آنگاه طبق اصل جمع $n(B)=\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}$ است و در نتیجه

$$P(B)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}+\binom{3}{3}\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}}$$

مثال ۱۴.۵.۲ از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است، ۶ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید انتخاب شوند را بیابید.

ب- احتمال اینکه از هر رنگ به تعداد مساوی مهره انتخاب شود را بیابید.

حل در اینجا ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست، پس $n(S)=\binom{12}{6}$

الف- اگر A پیشامد انتخاب ۲ مهره آبی و ۱ مهره سفید باشد آنگاه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{12}{6}}$$

ب- اگر B پیشامد انتخاب از هر رنگ به تعداد مساوی باشد آنگاه

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{12}{6}}$$

مثال ۱۵.۵.۲ تعداد جوابهای صحیح و غیرمنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_n=r$ که در آن $x_i \ge 0 \quad i=1,2,\dots,n$ را به دست آورید.

حل مساله مانند این است که بخواهیم r مهره را در n جعبه قرار دهیم بطوریکه تکرار مهره‌ها در جعبه‌ها مجاز و ترتیب قرار گرفتن مهره‌ها مهم نباشد. بنابراین با توجه به مثال ۱۲.۵.۲(ب) تعداد حالات ممکن برابر $\binom{n+r-1}{r}$ می‌باشد. توجه کنید که با مقایسه با مثال ۱۲.۵.۲(ب) مهره‌ها همان xها و دیواره‌های وسط جعبه‌ها همان خطوط | می‌باشند.

مثال ۱۶.۵.۲ مدیر یک شرکت خصوصی می‌خواهد ۵ سکه بهار آزادی را به عنوان پاداش بین ۳ کارمند A و B و C تقسیم کند احتمال اینکه به کارمند A حداقل ۲ سکه پاداش دهد را بیابید.

حل تعداد کل حالات پاداش دادن از حل معادله $x_i \geq 0$ $\;x_1+x_2+x_3=5$ به دست می آید پس $n(S)=\binom{3+5-1}{5}$ اگر A پیشامد این باشد که کارمند A حداقل ۲ سکه دریافت کند آنگاه تعداد راههای ممکن از حل معادله $x_1+x_2+x_3=5,\ x_1\geq 2,\ x_2,x_3\geq 0$ و یا حل معادله $y_1+x_2+x_3=3,\ y_1=x_1-2\geq 0,\ x_2,x_3\geq 0$ به دست می آید بنابراین $n(A)=\binom{3+3-1}{3}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{5}}=\frac{10}{21}$$

۶.۲ مدل احتمال روی فضای نمونه نامتناهی

در بخشهای قبل در مورد محاسبه احتمال در فضای نمونه متناهی بحث کردیم. در این قسمت در مورد محاسبه احتمال در فضاهای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر و پیوسته بحث می‌کنیم.

۱.۶.۲ فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر

در این حالت فضای نمونه به صورت یک مجموعه نامتناهی شمارش‌پذیر مانند $S=\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$ است که به هر یک از نقاط e_i احتمالات $0\leq p_i\leq 1$ را به گونه‌ای نسبت می‌دهیم که $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i=1$. در این فضا هر پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است و احتمال هر پیشامد را همانند حالت فضای نمونه متناهی محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۶.۲ سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه تعداد فردی پرتاب لازم باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه حداقل ۷ پرتاب لازم باشد را بیابید.

حل فضای نمونه و احتمالات نسبت داده شده به نقاط فضای نمونه به صورت زیر می‌باشد

S	H	TH	TTH	$TTTH$	....
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	....

توجه کنید که مجموع کل احتمالات برابر ۱ می‌شود زیرا با توجه به اینکه این مجموع یک سری هندسی را تشکیل می‌دهد داریم که

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

الف- اگر e_i نمایانگر تعداد i پرتاب تا رسیدن به شیر باشد و A پیشامد تعداد فردی پرتاب باشد آنگاه $A=\{e_1,e_3,e_5,\ldots\}$ و در نتیجه

$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

ب- اگر B پیشامد حداقل ۷ پرتاب باشد آنگاه $B=\{e_7,e_8,e_9,\ldots\}$ و در نتیجه

$$P(B)=(\tfrac{1}{2})^7+(\tfrac{1}{2})^8+(\tfrac{1}{2})^9+\ldots=\frac{(\frac{1}{2})^7}{1-\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$$

تذکر توجه کنید که در این حالت نمی‌توان یک مدل احتمال یکنواخت روی فضای نمونه نامتناهی شمارش‌پذیر پیاده کرد. زیرا اگر $p_i=p\quad \forall i=1,2,3,\ldots$ در این صورت

$$\sum_{i=1}^{+\infty} p_i=\sum_{i=1}^{+\infty} p=+\infty$$

۲.۶.۲ فضای نمونه پیوسته

در یک حالت خاص فضای نمونه پیوسته را می‌توان به صورت یک فاصله کراندار $S=[a,b]$ از اعداد حقیقی (یا یک سطح محدود شده در فضای دو بعدی یا...) در نظر گرفت. در این حالت هر پیشامد می‌تواند به صورت یک زیر فاصله یا اجتماعی از زیرفاصله‌ها (یا یک زیرسطح در فضای دو بعدی یا...) باشد و اگر کل احتمال را به عنوان یک واحد جرم که به طور پیوسته و یکنواخت روی فاصله (یا سطح یا...) توزیع شده است، در نظر بگیریم آنگاه احتمال هر پیشامد A در این فضا را می‌توان به صورت زیر محاسبه می‌کرد

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{طول زیر فاصله } A}{\text{طول فاصله } S}\ \Big(=\text{یا } \frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت ناحیه } S}\text{ یا ...}\Big)}$$

تذکر فضای نمونه پیوسته و همچنین پیشامدها و محاسبه احتمال در این فضا دارای مفاهیمی وسیعتر از موارد گفته شده در بالا می‌باشند. این مفاهیم در کتابهای پیشرفته احتمال مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال ۲.۶.۲ عددی را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی [۱,۴] انتخاب می‌کنیم.

الف- احتمال اینکه عدد انتخابی در فاصله [۲,۳/۵] باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه عدد انتخابی دقیقاً ۲ باشد را بیابید.

حل الف- در اینجا S=[۱,۴] و A=[۲,۳/۵] بنابراین

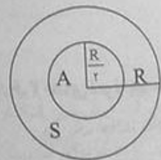
$$P(A)=\frac{\text{طول فاصله } A}{\text{طول فاصله } S}=\frac{۳/۵-۲}{۴-۱}=\frac{۱/۵}{۳}=\frac{۱}{۲}$$

ب- چون در فاصله [۱,۴] بی نهایت عدد وجود دارد و انتخاب یک عدد بخصوص در بین این اعداد غیرممکن است پس $P(\{۲\})=۰$.

* **تذکر** با توجه به مثال بالا، احتمال هر پیشامد تک عضوی در هر فضای نمونه پیوسته صفر می‌باشد.

مثال ۳.۶.۲ از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از فاصله آن تا محیط دایره باشد را بیابید.

حل با توجه به شکل ۸.۲ فضای نمونه S شامل کلیه نقاط درون دایره است و نقاطی که درون دایره به شعاع $\frac{R}{۲}$ باشند فاصله‌اشان تا مرکز کمتر از فاصله‌اشان تا محیط دایره است و بنابراین پیشامد A مورد نظر ما را تشکیل می‌دهند. در نتیجه



شکل ۸.۲

$$P(A)=\frac{\text{مساحت ناحیه } A}{\text{مساحت ناحیه } S}=\frac{\text{مساحت دایره به شعاع } \frac{R}{۲}}{\text{مساحت دایره به شعاع } R}=\frac{\pi\left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}}{\pi R^{۲}}=\frac{۱}{۴}$$

۷.۲ احتمال شرطی

در بعضی از مسایل نیاز به محاسبه احتمال رخداد پیشامد B را داریم مشروط بر اینکه پیشامد A اتفاق افتاده باشد. برای درک این موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۷.۲ یک تاس را که شانس رخداد عدد زوج در آن دو برابر عدد فرد می‌باشد را یک بار پرتاب می‌کنیم.

الف- احتمال رخداد یک عدد زوج را بیابید.

ب- اگر بدانیم عدد حاصل از پرتاب تاس از ۳ بزرگتر بوده است، احتمال رخداد یک عدد زوج را بیابید.

حل الف- مدل احتمال در این آزمایش تصادفی عبارت است از

S	۱	۲	۳	۴	۵	۶
احتمالات	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۲}{۹}$

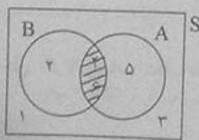
اگر B پیشامد رخداد عدد زوج باشد در این صورت B={۲,۴,۶} و بنابراین $P(B)=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$.

ب- بر اساس اطلاع داده شده فضای نمونه جدید عبارت است از A={۴,۵,۶} که چون شانس مشاهده عدد زوج دو برابر عدد فرد است، پس مدل احتمال روی این فضای نمونه جدید عبارت است از

A	۴	۵	۶
احتمالات	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$

بنابراین احتمال وقوع پیشامد B به شرط آنکه پیشامد A به وقوع پیوسته باشد برابر $\frac{۴}{۵}$ است که آن را با نماد $P(B \mid A)=\frac{۴}{۵}$ نمایش می‌دهند.

احتمال شرطی $P(B \mid A)$ را می‌توان از همان فضای نمونه اولیه به صورت زیر محاسبه کرد. با توجه به شکل ۹.۲ داریم که $P(B \mid A) \propto P(A\cap B)$ و در نتیجه $P(B \mid A)=kP(A\cap B)$. اما همواره داریم که $P(A \mid A)=۱$ و در نتیجه $۱=P(A \mid A)=kP(A\cap A)=kP(A)$ و اگر $P(A)\neq ۰$ باشد آنگاه $k=\frac{۱}{P(A)}$ و بنابراین



شکل ۹.۲ احتمال شرطی

$$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\quad,\quad P(A)\neq ۰$$

برای مثال در مثال ۱.۷.۲ داریم که

$$A=\{4,5,6\} \Rightarrow P(A)=\frac{5}{9}$$

$$A\cap B=\{4,6\} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{9}$$

در نتیجه

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{4}{5}=P(B\mid A)$$

که با مقدار به دست آمده از مثال فوق مطابقت دارد.

تعریف ۷.۲ احتمال شرطی پیشامد B به شرط وقوع پیشامد A که آن را با نماد $P(B\mid A)$ نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A)\neq 0} \qquad (۵.۲)$$

مثال ۲.۷.۲ جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. از این جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم اگر این مهره سفید نباشد احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بیابید.

حل اگر B پیشامد سیاه بودن مهره و W' پیشامد سفید نبودن مهره باشد آنگاه احتمال مطلوب عبارت است از

$$P(B\mid W')=\frac{P(B\cap W')}{P(W')}=\frac{P(B)}{P(W')}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{6}{9}}=\frac{2}{3}$$

مثال ۳.۷.۲ جدول زیر تعداد قطعات سالم و معیوب تولیدی توسط دو کارخانه ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. اگر یک قطعه به طور تصادفی انتخاب شود و این قطعه سالم باشد، احتمال اینکه از کارخانه ۱ انتخاب شده باشد را بیابید.

	کارخانه ۱	کارخانه ۲	جمع
معیوب	۱۵	۵	۲۰
سالم	۴۵	۳۵	۸۰
جمع	۶۰	۴۰	۱۰۰

حل اگر A پیشامد انتخاب قطعه سالم و B پیشامد انتخاب قطعه از کارخانه ۱ باشد در این صورت

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{45}{100}}{\frac{80}{100}}=\frac{45}{80}$$

قانون ضرب احتمال از رابطه (۵.۲) نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۴.۲ اگر A و B دو پیشامد باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\,P(B\mid A) \quad , \quad P(A)\neq 0} \qquad (۶.۲)$$

این فرمول را قانون ضرب احتمال گویند.

مثال ۴.۷.۲ در مثال ۲.۷.۲ اگر دو مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم، مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره انتخابی اول سفید و دومی سیاه باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه مهره انتخابی اول سیاه و دومی قرمز باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$W_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام سفید باشد

$B_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام سیاه باشد $\qquad i=1,2$

$R_i =$ پیشامد اینکه مهره انتخابی iام قرمز باشد

در این صورت $P(W_1)$ به معنای احتمال انتخاب اولین مهره سفید و $P(B_2\mid W_1)$ به معنای احتمال انتخاب دومین مهره سیاه به شرط آنکه بدانیم اولین مهره انتخابی سفید بوده است. بنابراین

الف- $P(W_1\cap B_2)=P(W_1)P(B_2\mid W_1)=\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$

ب- $P(B_1\cap R_2)=P(B_1)P(R_2\mid B_1)=\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{9}$

نتیجه ۴.۲ را می‌توان به حالت کلی‌تر زیر تعمیم داد.

نتیجه ۵.۲ اگر A_1، A_2، ... و A_k پیشامدهایی باشند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند آنگاه

$$\boxed{\begin{aligned}P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_k)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1\cap A_2)\\&\ldots P(A_k\mid A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{k-1})\end{aligned}} \qquad (۷.۲)$$

مثال ۵.۷.۲ در مثال ۲.۷.۲ فرض کنید ۳ مهره یک به یک و بدون جایگذاری از جعبه خارج کنیم. مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره انتخابی اول قرمز، دومی سفید و سومی قرمز باشد را بیابید.

ب- احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک سفید انتخاب شوند را بیابید.

حل الف- با توجه به پیشامدهای معرفی شده در مثال ۴.۷.۲ داریم که

$$P(R_1\cap W_2\cap R_3)=P(R_1)P(W_2 | R_1)P(R_3 | R_1\cap W_2)=\frac{2}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{84}$$

ب - در این حالت ترتیب انتخاب مهره‌ها مهم نیست. اگر A پیشامد انتخاب ۲ مهره قرمز و یک مهره سفید از جعبه باشد در این صورت

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{3}{84}=\frac{1}{28}$$

پیشامدهای مستقل در مثال ۴.۷.۲ فرض کنید پس از انتخاب مهره اول آن را به جعبه بازگردانده و سپس مهره دوم را انتخاب کنیم. در این صورت انتخاب مهره اول تأثیری در انتخاب مهره دوم ندارد و داریم که

$$P(B_2 | W_1)=P(B_2)=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{P(W_1\cap B_2)}{P(W_1)}=P(B_2)$$

و یا

$$P(W_1\cap B_2)=P(W_1)P(B_2)$$

در این حالت پیشامدهای فوق را از یکدیگر مستقل گویند.

تعریف ۸.۲ دو پیشامد A و B را از یکدیگر مستقل گویند اگر و فقط اگر

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)P(B)} \qquad (8.2)$$

مثال ۶.۷.۲ یک ایستگاه آتش نشانی دارای دو ماشین آتش نشان است که به طور مستقل کار می‌کنند و احتمال اینکه یک ماشین آتش‌نشان در موقع نیاز موجود باشد ۰/۹۹ است. احتمال اینکه موقع نیاز حداقل یکی از این دو ماشین موجود باشند را بیابید.

حل اگر $i=1,2$ ، A_i پیشامد این باشد که ماشین iام موقع نیاز موجود باشد آنگاه $P(A_1)=P(A_2)=0/99$ و A_1 و A_2 از یکدیگر مستقل هستند، بنابراین

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)(A_2)=0/99+0/99-(0/99)^2=0/9999$$

استقلال سه پیشامد سه پیشامد A، B و C را مستقل گوئیم اگر و فقط اگر روابط زیر برقرار باشند

۱- $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

۲- $P(A\cap C)=P(A)P(C)$

۳- $P(B\cap C)=P(B)P(C)$

۴- $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

سه رابطه اول می‌گویند که A و B و C بایستی دو به دو از یکدیگر مستقل باشند.

رابطه استقلال و ناسازگاری دو پیشامد همان طور که در قسمتهای قبل مشاهده کردیم دو پیشامد در صورتی ناسازگار هستند که نتوانند همزمان اتفاق بیفتند و دو پیشامد در صورتی مستقل هستند که بتوانند همزمان اتفاق بیفتند اما تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند. حال اگر دو پیشامد بخواهند هم ناسازگار و هم مستقل باشند آنگاه بایستی $P(A\cap B)=0$ و $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ و یا بایستی $P(A)=0$ یا $P(B)=0$ باشد.

مثال ۷.۷.۲ یک جفت تاس را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس ۵ و ۱۰ شود را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$A_i=$ پیشامد اینکه در پرتاب iام مجموع ۵ شود

$B_i=$ پیشامد اینکه در پرتاب iام مجموع ۱۰ شود $\quad i=1,2$

در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از

$P((A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap A_2))=P(A_1\cap B_2)+P(B_1\cap A_2)$ (به دلیل ناسازگاری)

$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)$ (به دلیل استقلال)

$$=\frac{4}{36}\times\frac{3}{36}+\frac{3}{36}\times\frac{4}{36}=\frac{1}{54}$$

۸.۲ فرمول احتمال بیز و فرمول تفکیک احتمال

یکی از فرمولهای مهم احتمال فرمول احتمال بیز می‌باشد که ابتدا آن را با ذکر یک مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱.۸.۲ فرض کنید ۴۰٪ افراد یک شهر را مردان و ۶۰٪ آنان را زنان تشکیل دهند. همچنین فرض کنید ۵۰٪ از مردان و ۳۰٪ از زنان سیگاری باشند. اگر شخصی از بین افراد سیگاری به تصادف انتخاب شود احتمال اینکه این شخص مرد باشد را بیابید.

حل اگر پیشامدهای زیر را تعریف کنیم

$M=$ پیشامد اینکه شخص انتخابی مرد باشد

$W=$ پیشامد اینکه شخص انتخابی زن باشد

$A=$ پیشامد اینکه شخص انتخابی سیگاری باشد

در این صورت از مفروضات مسأله داریم که

$$P(M)=۰/۴۰ \quad , \quad P(W)=۰/۶۰$$
$$P(A|M)=۰/۵۰ \quad , \quad P(A|W)=۰/۳۰$$

و می‌خواهیم $P(M|A)$ را محاسبه کنیم. برای این منظور داریم که

$$P(M|A)=\frac{P(M\cap A)}{P(A)}=\frac{P(M)P(A|M)}{P(A)} \qquad (۹.۲)$$

برای محاسبه $P(A)$ با توجه به شکل ۱۰.۲ داریم که $A=(A\cap M)\cup(A\cap W)$

بنابراین

شکل ۱۰.۲

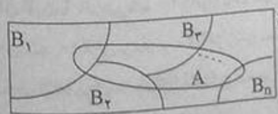
$$P(A)=P(A\cap M)+P(A\cap W)$$
$$=P(M)P(A|M)+P(W)P(A|W)$$

که با توجه به مفروضات مساله $P(A)$ قابل محاسبه است. این فرمول را فرمول تفکیک احتمال گوئیم زیرا با تفکیک پیشامد A به دو پیشامد مجزا، $P(A)$ را قابل محاسبه کردیم. با قرار دادن این مقدار $P(A)$ در فرمول (۹.۲) فرمول زیر که به فرمول احتمال بیز معروف است به دست می‌آید.

$$P(M|A)=\frac{P(M)P(A|M)}{P(M)P(A|M)+P(W)P(A|W)}$$
$$=\frac{(۰/۴۰)(۰/۵۰)}{(۰/۴۰)(۰/۵۰)+(۰/۶۰)(۰/۳۰)}\approx ۰/۵۳$$

برای به دست آوردن فرمول احتمال بیز در حالت کلی، فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، ...، و B_n پیشامدهایی باشند که دو به دو ناسازگار بوده و اجتماع تمام آنها برابر فضای نمونه S باشد. یعنی

$$B_i\cap B_j=\emptyset \quad \forall i\neq j$$
$$S=\bigcup_{i=۱}^{n} B_i$$



شکل ۱۱.۲ تفکیک پیشامدها

اصطلاحاً پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$، ...، و B_n را یک افراز برای فضای نمونه S گویند و یا گویند فضای نمونه S به پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$، ...، و B_n افراز یا تفکیک شده است. حال اگر A پیشامدی با احتمال مثبت باشد داریم که

$$A=A\cap S=A\cap(\bigcup_{i=۱}^{n} B_i)=(A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲)\cup...\cup(A\cap B_n)$$

که در آن پیشامدهای $(A\cap B_۱)$، $(A\cap B_۲)$، ...، و $(A\cap B_n)$ دو به دو ناسازگار هستند. بنابراین

$$\boxed{\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap B_۱)+P(A\cap B_۲)+...+P(A\cap B_n)\\&=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+...+P(B_n)P(A|B_n)\\&=\sum_{i=۱}^{n}P(B_i)P(A|B_i)\end{aligned}} \qquad (۱۰.۲)$$

فرمول فوق را فرمول تفکیک احتمال (و یا فرمول احتمال کل) گویند. همچنین

$$\boxed{P(B_j|A)=\frac{P(B_j\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=۱}^{n}P(B_i)P(A|B_i)} \qquad j=۱,۲,...,n} \qquad (۱۱.۲)$$

فرمول فوق را فرمول احتمال بیز گویند.

مثال ۲.۸.۲ دو جعبه وجود دارند که جعبه اول شامل ۲ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است و جعبه دوم شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز است. از جعبه اول یک مهره چشم بسته انتخاب کرده و به داخل جعبه دوم می‌اندازیم و سپس از جعبه دوم به تصادف یک مهره خارج می‌کنیم. مطلوب است

الف- احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه دوم سفید باشد را بیابید.

ب- اگر مهره خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد، احتمال اینکه مهره خارج شده از جعبه اول سفید بوده باشد را بیابید.

حل اگر پیشامدهای زیر را تعریف کنیم

$W_i=$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره سفید خارج شود

$R_i=$ پیشامد اینکه از جعبه iام مهره قرمز خارج شود $\qquad i=۱,۲$

در این صورت

الف- $P(W_۲)$ مورد سئوال است که از فرمول تفکیک احتمال داریم که

$$P(W_۲)=P(W_۱\cap W_۲)+P(R_۱\cap W_۲)$$

$$=P(W_1)P(W_2|W_1)+P(R_1)P(W_2|R_1)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{8}=\frac{17}{40}$$

ب- $P(W_1|R_2)$ مورد سئوال است که از فرمول احتمال بیز داریم که

$$P(W_1|R_2)=\frac{P(W_1)P(R_2|W_1)}{P(W_1)P(R_2|W_1)+P(R_1)P(R_2|R_1)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{8}}=\frac{8}{23}$$

مثال ۳.۸.۲ فرض کنید که سه صندوق وجود دارد که هر کدام دارای دو کشو است. در هر یک از کشوهای صندوق اول یک سکه طلا وجود دارد و در یکی از کشوهای صندوق دوم یک سکه طلا و در کشو دیگر آن یک سکه نقره وجود دارد و در هر یک از کشوهای صندوق سوم یک سکه نقره وجود دارد. یکی از صندوقهای را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یکی از کشوهای آن را باز می‌کنیم، اگر سکه داخل این کشو طلا باشد احتمال اینکه کشوی دیگر این صندوق نیز شامل سکه طلا باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$B_i=$ پیشامد اینکه صندوق iام انتخاب شود $\quad i=1,2,3$

$A=$ پیشامد اینکه سکه طلا مشاهده گردد

در این صورت

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3},\ P(A|B_1)=1,\ P(A|B_2)=\frac{1}{2},\ P(A|B_3)=0$$

و $P(B_1|A)$ مورد سئوال است. بنابراین از فرمول احتمال بیز داریم که

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0}=\frac{2}{3}$$

مثال ۴.۸.۲ یک موسسه مشاوره‌ای ماشینهای مورد نیازش را از سه آژانس با احتمالهای ۲۰٪ از D، ۲۰٪ از E و ۶۰٪ از F کرایه می‌کند. اگر ۱۰٪ ماشینهای آژانس D، ۱۲٪ ماشینهای آژانس E و ۴٪ از ماشینهای آژانس F لاستیک خراب داشته باشند، مطلوب است

الف- احتمال آنکه موسسه یک ماشین با لاستیک خراب کرایه کرده باشد را بیابید.

ب- اگر ماشین کرایه شده بوسیله موسسه دارای لاستیک خراب باشد احتمال آنکه از آژانس F کرایه کرده باشد را بیابید.

حل اگر قرار دهیم

$B_i=$ پیشامد اینکه موسسه از آژانس نوع iام ماشین کرایه کند $\quad i=D,E,F$

$A=$ پیشامد اینکه ماشین کرایه شده توسط موسسه دارای لاستیک خراب باشد

در این صورت

الف- (فرمول تفکیک احتمال)

$$P(A)=P(B_D\cap A)+P(B_E\cap A)+P(B_F\cap A)$$
$$=P(B_D)P(A|B_D)+P(B_E)P(A|B_E)+P(B_F)P(A|B_F)$$
$$=(0/20)(0/10)+(0/20)(0/12)+(0/60)(0/04)=0/068$$

ب- (فرمول بیز)

$$P(B_F|A)=\frac{P(B_F)P(A|B_F)}{P(A)}=\frac{(0/60)(0/04)}{0/068}=\frac{6}{17}$$

۹.۲ مسائل حل شده

مثال ۱.۹.۲ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم اگر شیر آمد آن سکه را یک بار دیگر پرتاب می‌کنیم و اگر خط آمد یک تاس را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه حاصل از این آزمایش را معین کنید و پیشامد A مربوط به مشاهده عدد کمتر از ۴ در پرتاب تاس را مشخص کنید.

حل

$$S=\{(H,T),(H,H),(T,1),(T,2),\dots,(T,6)\}$$
$$A=\{(T,1),(T,2),(T,3)\}$$

مثال ۲.۹.۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد باشند. پیشامدهای زیر را برحسب این سه پیشامد یا متمم‌های آنها بنویسید

الف- فقط A اتفاق بیفتد.

ب- حداکثر دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتد.

ج- حداقل دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.

د- دقیقاً دو تا از این سه پیشامد اتفاق بیفتند.