انتگرال‌های مجازی :

تاکنون انتگرال‌های معین مورد بحث بودند که در آن تابع انتگرالده $f(x)$ $\int_a^b f(x)\,dx$ بر بازه بسته و کران‌دار $[a,b]$ پیوسته بود و لذا پاسخ انتگرال یک عدد متناهی حقیقی می‌شد و لذا انتگرال‌های فوق را انتگرال‌های حقیقی نیز می‌نامیدیم.

اما با کلمات دادن به این انتگرال‌ها دو اتفاق ممکن زیر نیز می‌توانند رخ دهند :

الف) بازه انتگرال گیری نامتناهی شود یعنی $a=-\infty$ یا $b=\infty$ گردد (مجازی نوع اول)

مثال $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

ب) تابع f در یکی از نقاط (یا هر دو نقطه) دو سر بازه ، بی‌کران باشد (ناپیوسته شود) (مجازی نوع دوم)

مثال $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

نکته : ۱) در تشخیص مجازی‌های نوع دوم باید دقت کرد . چون ممکن است که تابع در نقطه‌ای در وسط بازه به مشکل بر بخورد که البته در این حالت باید نقطه مشکل دار را به یکی از کرانه‌ها رساند یعنی انتگرال را در نقطه ناپیوستگی می‌شکنیم.

۲) هر انتگرال مجازی فقط باید شامل یک مشکل باشد . در غیر اینصورت انتگرال را می‌شکنیم.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

دلخواه و بین صفر و بی‌نهایت

انتگرال مجازی نوع اول:

اگر f بر $[a,\infty)$ پیوسته باشد، انتگرال مجازی f روی $[a,\infty)$ را به عنوان حد تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx$$

به همین نحو برای تابع پیوسته f بر بازه $(-\infty, a]$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u\to -\infty} \int_u^{a} f(x)\,dx$$

توضیح: اگر حد موجود (وعددی متناهی) باشد گوئیم انتگرال مجازی همگراست؛
اگر حد ناموجود باشد گوئیم انتگرال مجازی واگراست؛ و
اگر حد $\pm\infty$ باشد گوئیم انتگرال مجازی به $(\pm)$ بی‌نهایت واگراست.

مثال: همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی نمائید.

$$*\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} x^{-2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{x}\Big|_1^a$$

$$= \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a}+1 = 0+1=1$$

«همگرا به یک»

* $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left(\ln|x|\right)_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(\ln a - \overset{\text{صفر}}{\cancel{\ln 1}}\right)$$

$= \infty$ واگرا به بی‌نهایت

* $\int_0^\infty \cos x\,dx$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \cos x\,dx = \lim_{a\to\infty} \sin x\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty} \left(\sin a - \overset{\text{صفر}}{\cancel{\sin 0}}\right)$$

که حد فوق موجود نیست و لذا حاصل واگراست.

* نکته: برای محاسبه انتگرال مجازی توابع پیوسته بر $\mathbb{R}$ که روی بازه $(-\infty,\infty)$ نوشته شده‌اند باید انتگرال را شکست.

مثال:

* $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = A$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^\infty x\,dx$$

که البته به جای صفر می‌توان از نقطه ای دیگر استفاده کرد و

$$\int_0^\infty x\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a x\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty} \frac{a^2}{2} - 0 = \infty$$

(محاسبه $\int_{-\infty}^{0} x\,dx$ برعهده دانشجویان) که البته محاسبه آن لازم نیست زیرا

$A = (?) +$ واگرا $\Rightarrow$ A واگراست

«مطالعه این صفحه برعهده دانشجو»

انتگرال مجازی توابع زوج و فرد:

فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته بوده و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ همگرا باشد.

الف) اگر f زوج باشد آنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f\,dx$

ب) اگر f فرد باشد آنگاه $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = 0$

مثال: حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$*\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

حل: تابع $f(x)=e^{-|x|}$ تابعی زوج است (؟) ولذا

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx \overset{\text{به شرط}}{\underset{\text{وجود و همگرایی}}{=}} 2\int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx$$

که $\int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx$ همگراست زیرا

$$\int_{0}^{\infty} e^{-|x|}dx \overset{x\geq 0}{=} \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \underset{\text{برعهده دانشجو}}{\cdots\cdots} = +1$$

و در نتیجه: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2(1) = 2$. □

مثال: شرط همگرایی انتگرال لازم است و اگر به آن دقت نشود فاجعه بار است.

مثلاً در حل مسأله آخر صفحه قبل (صفحه ۱۴۴)، بدون دقت به این شرط:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \xrightarrow[\text{تابع فرد}]{f(x)=x} \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx = \lim 0 = 0 \quad \times$$

درحالی که نوع این انتگرال واگرا می‌باشد.

انتگرال مجازی نوع دوم :

اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته بوده و احتمالاً در مجاورت a بی‌کران باشد، انتگرال مجازی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx ,$$

به همین نحو اگر f بر $[a, b)$ پیوسته و احتمالاً در مجاورت b بی‌کران باشد، انتگرال مجازی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx .$$

این انتگرال‌ها می‌توانند همگرا، واگرا یا واگرا به $\pm\infty$ باشند.

مثال: همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی نمائید.

* $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

حل: با توجه به اینکه تابع انتگرالده $\frac{1}{x^2}$ در $x=0$ ناپیوستگی دارد و زمانی که $x\to 0^+$ دارای حد ∞ می‌باشد (بی‌کران است) داریم:

$\int x^{-2}$

$$= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} -1+\frac{1}{t} = +\infty$$

که در نتیجه واگرایی انتگرال فوق را نشان می‌دهد. ▨

توجه: با توجه به مثال‌های قبل و مثال اخیر داریم:
جمع‌بندی

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \text{همگرا}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \Rightarrow \text{واگرا}$$

به کران‌ها و توان x توجه بیشتری داشته باشید.

* $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\ln|x|\right)_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(\ln 1 - \ln a\right) = +\infty$$ در صفر مشکل دارد

واگرا به بی‌نهایت. ▨

* توجه کنید که $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ نیز واگرا به ∞ بود.

* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} = 2$$ در صفر مشکل دارد

همگرا به دو. ▨

⚠ اخطار: بی‌دقتی در انتگرال‌های مجازی نوع دوم شایع است و سبب اشکالات اساسی می‌شود:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^1 x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -1 + \frac{1}{-1} = -2 < 0$$

درحالی که انتگرال یک تابع مثبت لزوماً مثبت است.

$\Downarrow$ حل صحیح

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx}_{\text{طبق مثال قبل: واگرا}} \Rightarrow$$ واگرا

مثال: $$\int_0^1 \frac{2x}{x^2-1}dx \xrightarrow[\text{در یک مخرج صفر می‌شود}]{\text{در صفر مشکل ندارد}} \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{2x}{x^2-1}dx = \lim_{a\to 1^-}\left(\ln|x^2-1|\right)_0^a$$

$$= \lim_{a\to 1^-}\left(\ln|a^2-1| - \underbrace{\cancel{\ln|-1|}}_{\text{صفر}}\right) \overset{\ln(0^+)}{=\!=} -\infty$$

واگرا به $-\infty$. ▨

آزمون (p-انتگرال‌ها) : فرض کنید $a>0$ باشد؛ در این صورت:

الف) $\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \Rightarrow \begin{cases} 1<p & \text{همگراست.} \\ p\leq 1 & \text{واگراست.} \end{cases}$

ب) $\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx \Rightarrow \begin{cases} 1\leq p & \text{واگراست.} \\ p<1 & \text{همگراست.} \end{cases}$

مثال: مثال‌های قبل را با این آزمون و بدون حل آنها بررسی نمائید.

مثلاً $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ که $p=2>1$ (نوع الف) همگراست و

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ که $p=\frac{1}{2}<1$ (نوع ب) همگراست و

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ و نیز $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$ هر دو واگرایند زیرا $p=1$.

مثال: همگرایی یا واگرایی $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ را بررسی نمائید.

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}\,dx$

کران پایین $x=e \Rightarrow u=\ln e=1$

کران بالا $x\to\infty \Rightarrow u=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$

$\Rightarrow$ انتگرال $=\int_1^\infty \frac{du}{u^2}$

نوع (الف) و $1<p=2$ پس طبق p-انتگرال‌ها همگراست. ∎