

مسئله ۱ صنعتی کتاب مرجع

مخزن در زمان $t=0$ حاوی Q_0 پوند نمک حل شده در ۱۰۰ گالن آب است. نرخ ورود آب شامل $\frac{1}{4}$ پوند نمک در هر گالن با نرخ r وارد مخزن می شود و مخلوط کاملاً یکدست با همان نرخ از مخزن خارج می شود.

الف) مثالی مقدار اولیه ای بنویسید که این فرآیند اختلاط را تشریح کند.

t	زمان بر حسب دقیقه (min)	$Q(t)$	مقدار نمک در مخزن در زمان t بر حسب پوند (lb)
$\frac{dQ}{dt}$	یا $Q'(t)$	نرخ تغییرات مقدار نمک در مخزن بر حسب	$\frac{\text{پوند}}{\text{دقیقه}}$
r_i	نرخ ورود محلول آب نمک به مخزن بر حسب	r_o	نرخ خروج " " از مخزن " " بر حسب
c_i	غلظت محلول آب نمک ورودی به مخزن بر حسب	c_o	غلظت محلول آب نمک خروجی از مخزن " " بر حسب
$r_i \times c_i$	نرخ ورود نمک به مخزن بر حسب	$r_o \times c_o$	نرخ خروج نمک از مخزن " " بر حسب

بنابراین $\frac{dQ}{dt}$ = نرخ خروج نمک از مخزن - نرخ ورود نمک به مخزن

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = r c_i - r_o c_o$$

$V(t)$ حجم محلول آب نمک در زمان t بر حسب گالن gal

بنابراین $\frac{dV}{dt} = r_i - r_o$

همچنین غلظت محلول ورودی یعنی c_i تحت کنترل ما است اما

غلظت محلول خروجی از کنترل ما خارج است اما $c_o = \frac{Q(t)}{V(t)}$

بنابراین در این مثال

$$\begin{aligned} \leftarrow r_i = r_o = r \Rightarrow V'(t) = 0 \Rightarrow \\ V(t) = c = 100 \\ c_i = \frac{1}{4} \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \end{aligned}$$

$$Q'(t) = r \left(\frac{1}{4} \right) - r \left(\frac{Q(t)}{100} \right)$$

IVP $\begin{cases} Q'(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$

پس

(ب) مقدار جرم نمک را در هر لحظه به الکترون (بر حسب Q_0)

منظور آن است که باید IVP را حل کنیم. ابتدا معادله دیفرانسیل حقیقی

مرتباد اول $Q' + \frac{r}{100} Q = \frac{r}{4}$ را حل می‌کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{r}{100} dt} = e^{\frac{rt}{100}}$$

$$Q(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \left(\frac{r}{4}\right) \mu(t) dt + C \right)$$

$$\Rightarrow Q(t) = e^{-\frac{rt}{100}} \left(\int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt + C \right) = e^{-\frac{rt}{100}} \left(\frac{r}{4} \left(\frac{100}{r}\right) e^{\frac{rt}{100}} + C \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 25 + C e^{-\frac{rt}{100}}} \quad \text{جواب عمومی}$$

$$Q_0 = Q(0) = 25 + C e^0 = 25 + C \Rightarrow C = Q_0 - 25$$

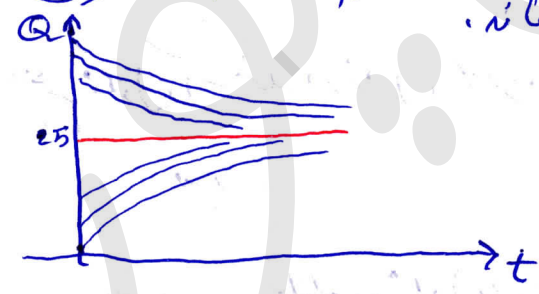
پس جواب IVP به جواب مخصوص به صورت زیر است:

$$\boxed{Q(t) = 25 + (Q_0 - 25) e^{-\frac{rt}{100}}}$$

(ج) پس از سری شدن زمان طولانی، در نهایت چه مقدار نمک در مخزن وجود دارد؟
یعنی مقدار حدی Q_L که $Q(t) \rightarrow Q_L$ را می‌بینیم.

$$Q_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(25 + (Q_0 - 25) e^{-\frac{rt}{100}} \right) = 25 + (Q_0 - 25)(0) = 25$$

پس $Q_L = 25$ یعنی بعد از زمان طولانی جرم نمک موجود در مخزن 25 پونداست و تقریباً در همین مقدار ثابت (در تقادله) می‌ماند.



مثلاً اگر فرضاً $r=3$ داشته باشیم ←

الکترون به روش دیگری بزود توان Q_L را بدون حل کردن IVP بدست آورد. به صورت زیر:

روش دوم: نه ترخ تعسرات صفر شود که میزان Q را بدست می‌دهیم یعنی $Q'(t) = 0$

$$Q'(t) = 0 \Rightarrow \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100} = 0 \Rightarrow r \left(\frac{1}{4} - \frac{Q}{100} \right) = 0 \xrightarrow{r \neq 0} Q_L(t) = 25$$

که جواب تقادله معادله دیفرانسیل در الف است.

روش سوم: چون غنظت نمک ورودی $\frac{r}{4}$ پوندا گالن است پس در نهایت به مقدار $\frac{1}{4}$ حجم مخزن (یعنی 100 گالن) نمک در محلول وجود دارد یعنی $\frac{1}{4} \times 100 = 25$ پوندا.

(د) اگر $r=3$ ، $Q_0 = 2Q_L$ باشد پس از چند دقیقه مقدار نمد موجود در محلول مخزن در سطح حدوداً برابر با (دو درصد) مقدار نمد تازه می شود؟

ابتدا دو درصد Q_L یعنی 25 را حساب می کنیم.

$$\frac{2}{100} \times 25 = 0.5$$

پس باید T ای را پیدا کنیم که $Q(T) = 25 + 0.5 = 25.5$ ، از معادله طبق الف)

$$Q' = \frac{r}{4} + \frac{rQ}{100} \Rightarrow \begin{cases} Q' = \frac{3}{4} + \frac{3Q}{100} \\ Q(0) = 2Q_L = 50 \end{cases}$$

و بتایر (ب) $Q(T) = 25 + (50-25)e^{-\frac{3}{100}T}$

$$Q(T) = 25 + 25e^{-\frac{3}{100}T} = 25.5 \Rightarrow 25e^{-\frac{3}{100}T} = 0.5 \Rightarrow e^{-\frac{3}{100}T} = \frac{0.5}{25} = \frac{1}{50} \Rightarrow e^{-\frac{3}{100}T} = \frac{1}{50}$$

$$\ln\left(\frac{1}{50}\right) = -\frac{3}{100}T \Rightarrow \ln 1 - \ln 50 = -\frac{3}{100}T$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 50}{\frac{3}{100}} \approx 130.4 \text{ min} \Rightarrow \boxed{T \approx 130.4 \text{ min}}$$

بنابراین بعد از حدود 130.4 دقیقه مقدار نمد در سطح (دو درصد) میزان نمد تازه 25.5 قرار می گیرد.

(هـ) نرخ جریان ورودی (خردبین) چقدر باشد که زمان قسمت (د) ، حد اکثر 45 دقیقه شود؟ (با توجه به شرایط (د))

با توجه به قسمت (ب) $Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$ (45)

$$\Rightarrow 25.5 = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{45r}{100}} \Rightarrow 0.5 = 25e^{-\frac{45r}{100}} \Rightarrow \frac{0.5}{25} = e^{-\frac{45r}{100}} \Rightarrow \frac{1}{50} = e^{-\frac{45r}{100}}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{50}\right) = -\frac{45}{100}r \Rightarrow -\ln(50) = -\frac{45}{100}r \Rightarrow$$

$$r = \frac{100}{45} \ln(50) \Rightarrow \boxed{r \approx 8.69 \frac{\text{gal}}{\text{min}}}$$

بنابراین نرخ ورودی خروج باید حداقل تقریباً 8.69 گالن بر دقیقه باشد.