

## تبدیل معادله تفاضلی به دستگاه معادلات مرتبه اول

مثال: معادله  $u'' + 2u' + 2u = 0$  را به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول بنویسید.

متغیران  $x$  و  $y$  را به صورت متغیرهای معرفی کنیم:  $x := u$  ,  $y := u'$

$$\Rightarrow x' = u' = y \quad , \quad x'' = y' = u'' \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' + 2y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

مثال: معادله  $u'' + \frac{1}{2}u' + 2u = 3\sin t$  را به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول بنویسید.

$$x := u \quad , \quad y := u' \Rightarrow x' = u' = y \quad , \quad x'' = y' = u'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' + \frac{1}{2}y + 2x = 3\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - \frac{1}{2}y + 3\sin t \end{cases}$$

مثال: معادله  $t^2 u'' + t u' + (t^2 - 1)u = 0$  را به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول بنویسید.

$$x := u \quad , \quad y := u' \Rightarrow x' = u' = y \quad , \quad x'' = y' = u''$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ t^2 y' + t y + (t^2 - 1)x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -(\frac{t^2 - 1}{t^2})x - \frac{1}{t}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = (\frac{1}{t^2} - 1)x - \frac{1}{t}y \end{cases}$$

مثال: معادله  $u^{(4)} - u = 0$  را به صورت یک دستگاه معادلات مرتبه اول بنویسید.

$$x := u \quad , \quad y := u' \quad , \quad z := u'' \quad , \quad w := u'''$$

$$\Rightarrow x' = u' = y \quad , \quad y' = u'' = z \quad , \quad z' = u''' = w \quad , \quad w' = u^{(4)} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = w \\ w' - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = w \\ w' = x \end{cases}$$

مثال: یک معادله اولیه داده شده را به کمک معادله اولیه برای دو معادله مرتبه اول تبدیل کنید.

$$\begin{cases} u'' + u' + 4u = 2 \sin(4t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 3 \end{cases}$$

$$x := u, y := u' \Rightarrow x' = u' = y, \quad x'' = u'' = y' \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' + y + 4x = 2 \sin 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -4x - y + 2 \sin 4t \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 3$$

حل یک دستگاه همگن به روش حذف

تبدیل یک دستگاه همگن از دو معادله مرتبه اول به یک معادله از مرتبه دوم (موسوم به روش حذف حل دستگاه)

این موضوع در واقع برعکس مثالهای قبلی است و به روش حذفی گاوس برای حل دستگاهها مشهور است.

مثال الف) دستگاه همگن  $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$  را به یک معادله مرتبه دوم تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} (x' = -2x + y) \Rightarrow y = x' + 2x & \xrightarrow{\text{حالا یکنفره در معادله دوم دستگاه}} \\ y' = x'' + 2x' & \left\{ \begin{aligned} x'' + 2x' &= x - 2(x' + 2x) \\ y' &= x'' + 2x' \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x'' + 2x' - x + 2x' + 4x = 0 \Rightarrow x'' + 4x' + 3x = 0$$

ب) دستگاه (الف) را حل کنید.

ابتدا از معادله  $x'' + 4x' + 3x = 0$  را پیدا کنیم که یک معادله مرتبه دوم با ضرایب ثابت است و

$$\text{معادله مشخصه (اگر به صورت } r^2 + 4r + 3 = 0 \text{)} \Rightarrow r = -1, r = -3$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

حال با جایگزینی  $x$  و  $x'$  در معادله اولیه (دستگاه) می توان  $y$  را نیز بدست آورد.

$$\Rightarrow x' = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t} \xrightarrow{\text{حالا یکنفره در معادله اولیه دستگاه (الف)}} -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t} = -2(c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}) + y$$

$$\Rightarrow y(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t} + 2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{-3t} \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t}$$

ج) جوابی برای دستگاه (الف) بیابید که در شرایط اولیه  $x(0) = 2, y(0) = 3$  صدق کند.

$$\begin{aligned} x(0) = c_1 + c_2 &= 2 \\ y(0) = c_1 - c_2 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \\ y(t) &= \frac{5}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \end{aligned}$$

مثال: دستگاه معادلات همگن  $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$  با شرایط اولیه  $x(0) = 3$  و  $y(0) = \frac{1}{2}$  را به روش حذفی حل کنید.

حل: روش حل عیناً مانند سه مرحله مثال قبل است.

معادله اول (معادله اول دستگاه)  $x' = 3x - 2y \Rightarrow 2y = 3x - x' \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x' \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x''$

حال در معادله دوم جای نشاندن داریم:

$$y' = 2x - 2y \Rightarrow \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x'' = 2x - 2\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x'\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}x'' - 2x + 3x - x' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x'' + \frac{1}{2}x' + x = 0$$

در (2) ضرب  $\Rightarrow x'' - x' - 2x = 0 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = -1, r = +2$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}}$$

حال با جایگزینی  $x$  و  $x'$  در معادله اول از دستگاه، می‌توان  $y$  را یافت.

$$x'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \Rightarrow -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} = 3(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}) - 2y$$

$$\Rightarrow 2y = 4c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \Rightarrow \boxed{y(t) = 2c_1 e^{-t} + \frac{1}{2}c_2 e^{-2t}}$$

حال برای یافتن جواب خصوصی از شرایط اولیه داده شده استفاده می‌کنیم  $c_1$  و  $c_2$  بیست آید.

$$x(0) = c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow -3c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow c_2 = \frac{11}{3}$$

$$y(0) = 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{2t}, \quad y(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{11}{6}e^{2t}}$$

**\*\*** می‌توانید تمرینات ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صفحه ۳۹۲ کتاب مرجع را به طور مشابه حل کرد.

تذکره با فرض ماتریس  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  و  $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  دستگاه

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

را به صورت ماتریسی  $X' = AX$  می‌نویسند.

مثلاً مثال قبل به صورت ماتریسی به صورت  $X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X$  و  $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  نوشت.

مثال: شکل ماتریسی دستگاه هگلی  $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$  با شرط اولیه  $x(0) = -1$   $y(0) = 2$  به صورت

$$\begin{cases} X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} X \\ X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

یا مثال شکل ماتریسی دستگاه هگلی  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 4x + 2\sin 4t \end{cases}$  با شرط اولیه  $x(0) = 1$   $y(0) = 3$  به صورت

برای دست بر آید:

$$\begin{cases} x' = 0x + y + 0 \\ y' = -4x - y + 2\sin 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} X + g(t) \\ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\sin 4t \end{bmatrix} \end{cases}$$

مثال: دستگاه هگلی  $X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$  با شرط اولیه  $X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  را به روش حذفی حل کنید و

جواب را به صورت ماتریسی بنویسید.

حل: این همان مثال صفحه قبل است که باز شده آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ 2x + 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 2y \\ x(0) = 3 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

که جوابی که به صورت  $x(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{2t}$   $y(t) = -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{11}{6}e^{2t}$  است که شکل (فرم) ماتریسی آن

به صورت زیر است:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{11}{3}e^{2t} \\ -\frac{4}{3}e^{-t} + \frac{11}{6}e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix} e^{2t}$$

مثال: معادله  $u'' + 2u' + 2u = 0$  را به شکل یک دستگاه معادلات تفاضلی بنویسید و سپس آن را حل کنید.

حل: ساده است. (به همراه راهنمایی)

مثال ۴ ص ۴۷۸ کتاب مرجع - حل دستگاه‌های تافلین به کمک تبدیل لاپلاس

با استفاده از تبدیل لاپلاس، دستگاه تافلین

$$\begin{cases} x' = -2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x - 2y + 3t \end{cases} \quad \text{با فرض } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

از طرفین هر معادله، تبدیل لاپلاس بگیریم.

$$\begin{cases} L\{x'\} = L\{-2x + y + 2e^{-t}\} \\ L\{y'\} = L\{x - 2y + 3t\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sL\{x\} - x(0) = -2L\{x\} + L\{y\} + 2L\{e^{-t}\} \\ sL\{y\} - y(0) = L\{x\} - 2L\{y\} + 3L\{t\} \end{cases}$$

$$(s+2) \begin{cases} L\{x\} - L\{y\} = \frac{2}{s+1} \\ -L\{x\} + (s+2)L\{y\} = \frac{3}{s^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+2)L\{x\} - L\{y\} = \frac{2}{s+1} \\ -(s+2)L\{x\} + (s+2)^2 L\{y\} = \frac{3(s+2)}{s^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4s + 3)L\{y\} = \frac{3(s+2)}{s^2} + \frac{2}{s+1} = \frac{3(s+2)(s+1) + 2s^2}{s^2(s+1)} = \frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)}$$

$$\Rightarrow L\{y\} = \frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)(s^2 + 4s + 3)} = \frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)}$$

این کسر را به کسرها ساده تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{5s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} + \frac{E}{s+3}$$

$$= \frac{AS(s+1)^2(s+3) + B(s+1)^2(s+3) + Cs^2(s+1)(s+3) + Ds^2(s+3) + Es^2(s+1)^2}{s^2(s+1)^2(s+3)}$$

if  $s=0 \Rightarrow B=2$

if  $s=-1 \Rightarrow D=1$

if  $s=-3 \Rightarrow E=\frac{2}{3}$

if  $s=1 \Rightarrow \begin{cases} 16A + 8C = -\frac{56}{3} \\ 90A + 60C = -90 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{5}{3}, C = +1$

$$\Rightarrow L\{y\} = -\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left\{-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{5}{3} + 2t + e^{-t} + te^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t}$$

ادامه در صفحه بعد ←

اینجا با یکدیاری  $L\{y\} = \frac{5s^2 - 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)}$  در  $L\{x\} - L\{y\} = \frac{2}{s+1}$  می توان

$L\{x\}$  را بدست آورد.

$$(s+2)L\{x\} - \frac{5s^2 - 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)} = \frac{2}{s+1} \Rightarrow (s+2)L\{x\} = \frac{2}{s+1} + \frac{5s^2 - 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)}$$

$$\Rightarrow (s+2)L\{x\} = \frac{2(s^2(s+1)(s+3)) + 5s^2 - 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+3)}$$

$$\Rightarrow L\{x\} = \frac{2s^2(s+1)(s+3) + 5s^2 - 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+2)(s+3)} \Rightarrow L\{x\} = \frac{2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 9s + 6}{s^2(s+1)^2(s+2)(s+3)} \right\} = L^{-1} \left\{ -\frac{4}{3} \left( \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{s+3} \right) \right\}$$

تجزیه کسر مشابه حالت صفحه قبل

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{4}{3} + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

بدین ترتیب بدایع  $x(t)$  و  $y(t)$  برای این دستگاه نا همگن با شرایط ثابت بدست آمد.

نمازگاه را در کتاب مرجع در ص ۷۸ (مثال ۴)

از ماتریس های مقابل می توان استفاده کرد:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

در کتاب با این بزرگ معمول آمده

این صورت ماتریسی زیر نوشته:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x + y + 2e^{-t} \\ y'(t) = x - 2y + 3t \end{cases} \quad \text{دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی نا همگن با شرایط ثابت}$$

این معادلات دستگاه

$$\begin{cases} X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix} \\ X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{جمله نا همگن}$$

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ماتریس فرایب ثابت}$$

$$\Rightarrow X' = AX + g(t) \quad , \quad L\{g(t)\} =: G(s)$$

$$X(s) := L\{X(t)\} \quad \text{(البته در کتاب با نماد اینس بزرگ بزرگ آورده است)}$$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \\ -\frac{5}{3} + 2t + e^{-t} + te^{-t} + \frac{2}{3}e^{-3t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

که دقیقاً همان جواب صنفی ۷۹ کتاب مرجع است. پس جواب ماتریسی و مسئله ماتریسی دستگاه تفاوتی با مسئله ای که ما در اینجا حل کردیم ندارد. اینک می توان به مسائل در ص ۷۹ و ۸۰ کتاب مرجع را به روش تبدیل لاپلاس حل کنیم.