# نظریه بازی: بازی‌های شکل نرمال

# نظریه بازی چیست؟

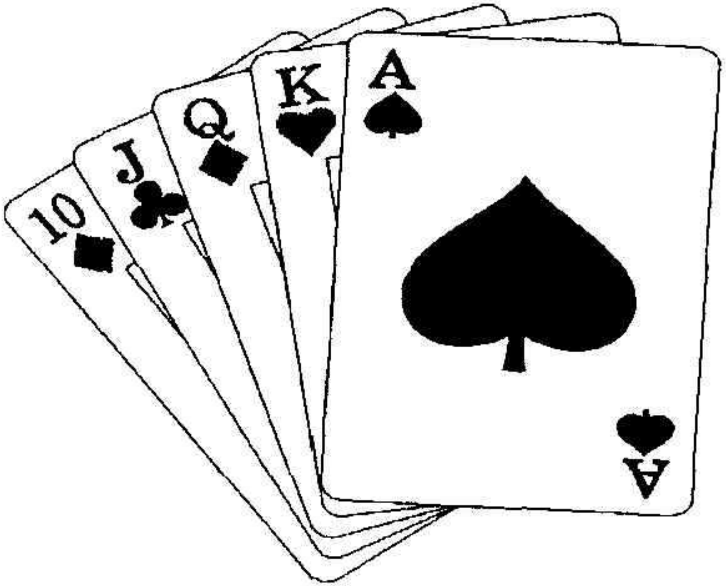


## مطالعه بازی ها!

بلوف زدن در بازی پوکر

محاسبه حرکت بعدی در شطرنج

نحوه انجام بازی سنگ-کاغذ-قیچی



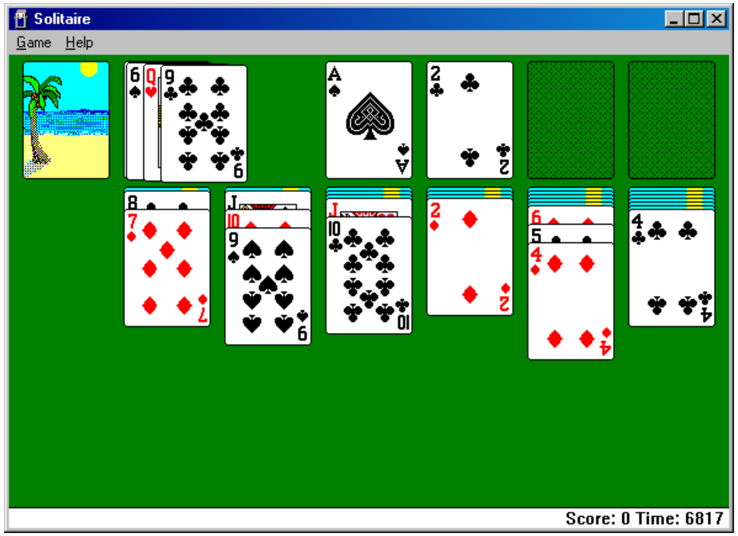

# نظریه بازی چیست؟



نظریه بازی. یک روش رسمی به منظور تحلیل تعاملات میان گروهی از عامل‌های منطقی است که دارای رفتار استراتژیک هستند.

گروه. باید بیش از یک تصمیم گیرنده وجود داشته باشد.

در غیر این صورت با یک مسئله تصمیم‌گیری مواجه هستیم نه یک بازی!




بازی نیست!

# نظریه بازی چیست؟



نظریه بازی. یک روش رسمی به منظور تحلیل تعاملات میان گروهی از عامل‌های منطقی است که دارای رفتار استراتژیک هستند.

تعامل: آنچه که یک عامل انجام می‌دهد به طور مستقیم حداقل یک عامل دیگر را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

استراتژیک: هر عامل باید نگران عمل عامل‌های دیگر باشد.

منطقی: هر عامل می‌کوشد سودمندی مورد انتظار خود را بیشینه سازد (هر عامل با در نظر گرفتن منافع شخصی خود بهترین عمل ممکن را انجام می‌دهد).

# نظریه بازی چیست؟



نظریه بازی بر روی حوزه های گوناگونی تأثیر گذار بوده است:

- اقتصاد
- علوم سیاسی
- زبان شناسی
- روان شناسی
- زیست شناسی
- علوم کامپیوتر
- ...

# نظریه بازی چیست؟



شاخه‌ها.

غیر همکاری کننده:

واحد اصلی در بازی، افراد هستند.

همکاری کننده:

واحد اصلی در بازی، گروه است نه فرد.

# بازی‌های شکل نرمال

# نمادهای رسمی



اجزای سازنده یک بازی

| | نماد | بازی انتخاب اعداد |
|---|---|---|
| بازیکن ها | i, j | همه شما |
| استراتژی ها | $s_i$: استراتژی انتخابی به وسیله بازیکن i | ۱۳ |
| | $S_i$: مجموعه تمام استراتژی های ممکن برای بازیکن i | {۱, ۲, ... , ۱۰۰} |
| مقادیر منفعت | $u_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$<br>$u_i(s_i, s_{-i})$ | برنده ۵ دلار، بقیه صفر |

# بازی های شکل نرمال



## انجام بازی

هر بازیکن $i$ تصمیم می گیرد کدام استراتژی خود را بازی کند: $s_i$

تمام بازیکن ها حرکت خود را به صورت همزمان انجام می دهند که باعث ایجاد یک بردار استراتژی به صورت $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ می گردد.

سپس با توجه به بردار استراتژی $s$، هر بازیکن منفعتی معادل $u_i(s)$ به دست می آورد.

بدیهی است که هر بازیکن سعی می کند بدون توجه به سود و زیان دیگر بازیکن ها منفعت خود را بیشینه کند، اما سؤال اصلی این است که تصمیم درست برای هر بازیکن چیست؟

# یک مثال دیگر



مثال.

| | | | L | C | R |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | | | | |
| 1 | T | | 5 , -1 | 11 , 3 | 0 , 0 |
| | B | | 6 , 4 | 0 , 2 | 2 , 0 |

بازیکن ها ۱ و ۲

استراتژی ها $S_1 = \{T, B\}, S_2 = \{L, C, R\}$

مقادیر منفعت $u_1(T, C) = 11, u_2(T, C) = 3$

# بازی های منفعت-مشترک (هماهنگی محض)



تعریف. یک بازی منفعت-مشترک به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall s \in S_1 \times S_2 \times \cdots S_n \ \ and \ \ \forall i, j, \quad u_i(s) = u_j(s)$$

یعنی، صرف نظر از نتیجه بازی، منفعت همه بازیکن ها یکسان است.

در این نوع از بازی ها اولویت عامل ها با یکدیگر در تضاد نیستند و تنها دغدغه عامل ها انجام عملی است که به نفع همه عامل ها باشد.

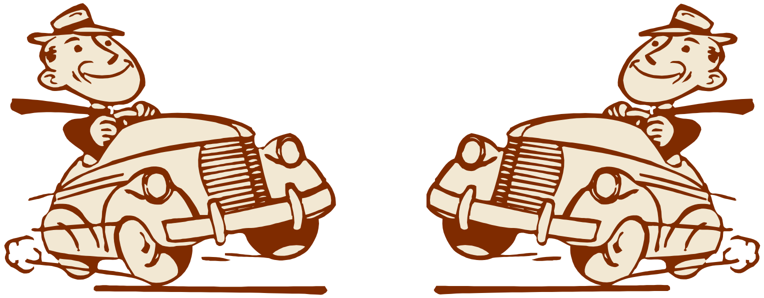
# بازی های منفعت-مشترک (هماهنگی محض)



رانندهها.

دو راننده را در نظر بگیرید که در کشوری زندگی می‌کنند که در آن هیچ قانونی برای رانندگی کردن وجود ندارد. این دو راننده باید به طور جداگانه تصمیم بگیرند که در کدام سمت خیابان رانندگی کنند (چپ یا راست). اگر رانندهها یک سمت خیابان را برای رانندگی انتخاب کنند سودمندی بالایی به دست می‌آورند و اگر دو سمت مختلف را انتخاب کنند، سودمندی پایینی به دست می‌آورند.

ماتریس منفعت.



| | L | R |
|---|---|---|
| L | 1 , 1 | 0 , 0 |
| R | 0 , 0 | 1 , 1 |

# بازی های مجموع-ثابت (اکیداً رقابتی)



تعریف. در بازی های مجموع-ثابت برای هر پیامد ممکن، جمع سودمندی عامل ها برابر با یک مقدار ثابت c است:

$$\forall s \in S_1 \times S_2, \quad u_1(s) + u_2(s) = c$$

اگر بازی های منفعت-مشترک بیانگر همکاری محض هستند، بازی های مجموع ثابت نیز بیانگر رقابت محض هستند.

سود یک بازیکن به زیان بازیکن دیگر است.

# بازی های مجموع-صفر



تعریف. در بازی های مجموع-صفر برای هر پیامد ممکن، جمع سودمندی عامل ها برابر با صفر است:

$$\forall s \in S_1 \times S_2, \quad u_1(s) + u_2(s) = 0$$

یعنی میزان سودی که یک بازیکن به دست می آورد، دقیقاً برابر است با میزان زیان بازیکن دیگر.

# بازی های مجموع-صفر

## تطبیق پنی‌ها.

در این بازی هر یک از دو بازیکن یک پنی دارند و هر کدام به طور جداگانه تصمیم می‌گیرند که سمت شیر یا سمت خط سکه خود را نشان دهند. سپس این دو بازیکن پنی‌های خود را با یکدیگر مقایسه می‌کنند. اگر سمت سکه‌ها یکسان باشند، آنگاه هر دو سکه از آن بازیکن ۱ و در غیر این صورت هر دو سکه از آن بازیکن ۲ خواهد شد.

## ماتریس منفعت.

با داشتن امتیاز یک بازیکن، امتیاز بازیکن دیگر قابل محاسبه است.

| | H | T |
|---|---|---|
| H | 1 , -1 | -1 , 1 |
| T | -1 , 1 | 1 , -1 |

خلاصه

| | H | T |
|---|---|---|
| H | 1 | -1 |
| T | -1 | 1 |

# بازی های مجموع-صفر



## سنگ-کاغذ-قیچی.

تعمیم بازی تطبیق پنی‌ها برای سه استراتژی.

در این بازی هر یک از دو بازیکن یکی از سه عنصر سنگ، کاغذ یا قیچی را به طور جداگانه انتخاب می‌کنند. اگر انتخاب آنها یکسان باشد، هیچ برنده‌ای وجود ندارد و امتیاز هر بازیکن برابر صفر خواهد بود. در غیر این صورت، هر عمل در برابر یکی از دو عمل دیگر برنده و در برابر عمل دیگر بازنده خواهد بود.

## ماتریس منفعت.


| | R | P | S |
|---|---|---|---|
| R | 0 , 0 | -1 , 1 | 1 , -1 |
| P | 1 , -1 | 0 , 0 | -1 , 1 |
| S | -1 , 1 | 1 , -1 | 0 , 0 |

# چند مثال دیگر



اغلب بازی‌ها به نوعی هم شامل عنصر همکاری هستند و هم شامل عنصر رقابت.

جنگ جنسیت‌ها (BoS).

در این بازی یک زن و شوهر می‌خواهند برای تماشای یک فیلم به سینما بروند و می‌توانند یکی از این دو فیلم را انتخاب کنند: «اسلحه مرگبار» (LW) یا «عشق شگفت انگیز» (WL). آن دو بیشتر ترجیح می‌دهند تا با هم فیلم ببینند ولی مرد فیلم LW و زن فیلم WL را ترجیح می‌دهد.

ماتریس منفعت.

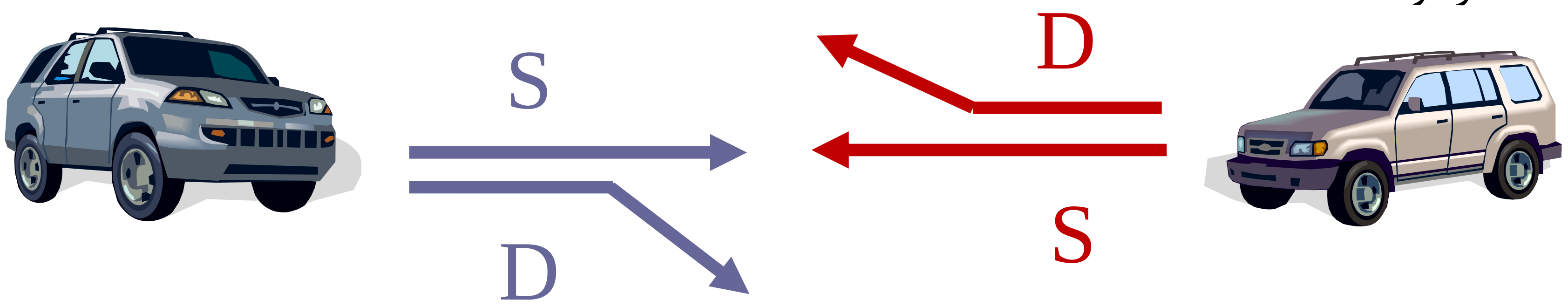
| | | Husband | |
|---|---|---|---|
| | | LW | WL |
| Wife | LW | 1, 2 | 0, 0 |
| | WL | 0, 0 | 2, 1 |

# رقابت بر سر یک منبع غیر قابل تقسیم



## بازی جوجه (بازی شاهین-قمری).

در این بازی دو راننده بر روی یک پل و در یک خط مستقیم به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند. حداقل یکی از این دو راننده باید مسیر خود را کج کند، در غیر این صورت هر دو راننده در یک تصادف کشته خواهند شد. اگر یکی از راننده‌ها مسیر خود را کج کند اما دیگری در مسیر مستقیم حرکت کند، راننده‌ای که مسیرش را کج کرده «جوجه» نامیده می‌شود (به معنای ترسو).




| | Dodge | Straight |
|---|---|---|
| Dodge | 0 , 0 | -1 , 1 |
| Straight | 1 , -1 | -10 , -10 |

| | Dodge | Straight |
|---|---|---|
| Dodge | 3 , 3 | 1 , 4 |
| Straight | 4 , 1 | 0, 0 |

# حل کردن یک بازی



س. در یک بازی، تصمیم درست برای هر بازیکن چیست؟

روش‌های مختلف به منظور پاسخ دادن به سؤال فوق:

- حذف مکرر استراتژی های اکیداً مغلوب یا مغلوب ضعیف
- استراتژی‌های Minimax
- تعادل نَش

س. محاسبه یک راه‌حل چقدر سخت است؟

س. آیا همواره راه‌حل وجود دارد؟

س. آیا راه‌حل‌ها یکتا خواهند بود؟

# حذف مکرر استراتژی‌های مغلوب

# استراتژی های اکیداً غالب و اکیداً مغلوب



تعریف. برای بازیکن i، استراتژی $s_i$' اکیداً مغلوب استراتژی $s_i$ است اگر:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}) \qquad \text{for all } s_{-i}$$

مثال. [هانیبال] هانیبال برای حمله به روم دو راه دارد: راه آسان (از طریق ساحل) و راه دشوار (از طریق کوه‌های آلپ). در اینجا منفعت هانیبال تعداد گردان‌هایی است که سالم به روم می‌رساند.

Attacker

| Defender | e | h |
|---|---|---|
| E | 1, 1 | 1, 1 |
| H | 0, 2 | 2, 0 |

س. شما به عنوان یک ژنرال رومی کدام راه را برای دفاع انتخاب می‌کنید؟ (هیچ کدام از استراتژی‌ها بر دیگری غالب نیست)

# حذف مکرر استراتژی های اکیداً مغلوب

از آنجا که استراتژی های اکیداً مغلوب هرگز بازی نخواهند شد، همواره می توان این استراتژی ها را از بازی حذف نمود.

عمل فوق را می توان به طور مکرر انجام داد، زیرا ممکن است پس از حذف یک استراتژی اکیداً مغلوب، یک استراتژی که قبلاً اکیداً مغلوب نبوده اکنون به یک استراتژی اکیداً مغلوب تبدیل شده باشد.

اگر فرآیند فوق به یک بردار استراتژی همگرا شود، نتیجه یکتا خواهد بود.

این نتیجه یکتا می تواند به عنوان نتیجه بازی در نظر گرفته شود، زیرا تنها پیامد منطقی بازی همین نتیجه است.

# حذف مکرر استراتژی های اکیداً مغلوب



مثال.

$b_4$ اکیداً مغلوب $b_3$ است.

$a_4$ اکیداً مغلوب $a_1$ است.

$b_3$ اکیداً مغلوب $b_2$ است.

$a_1$ اکیداً مغلوب $a_2$ است.

$b_1$ اکیداً مغلوب $b_2$ است.

$a_3$ اکیداً مغلوب $a_2$ است.

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 , 7 | 2 , 5 | 7 , 2 | 0 , 1 |
| $a_2$ | 5 , 2 | 3 , 3 | 5 , 2 | 0 , 1 |
| $a_3$ | 7 , 0 | 2 , 5 | 0 , 4 | 0 , 1 |
| $a_4$ | 0 , 0 | 0 , -2 | 0 , 0 | 9 , -1 |

**$(a_2 , b_2)$**

# استراتژی های غالب ضعیف و مغلوب ضعیف



تعریف. برای بازیکن i، استراتژی $s_i'$ مغلوب ضعیف استراتژی $s_i$ است اگر

$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ for all $s_{-i}$

$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ for some $s_{-i}$

مثال. بازی انتخاب اعداد

بزرگتر از ۶۷: مغلوب ضعیف ۶۷ [عقلانیت]

بزرگتر از ۴۵ و کوچکتر مساوی ۶۷: [پس از حذف اعداد بزرگتر از ۶۷ مغلوب ضعیف هستند]

بزرگتر از ۳۰ و کوچکتر مساوی ۴۵: [پس از حذف اعداد بزرگتر از ۴۵ مغلوب ضعیف هستند]

بزرگتر از ۲۰ و کوچکتر مساوی ۳۰: [پس از حذف اعداد بزرگتر از ۳۰ مغلوب ضعیف هستند]

...

۱

# حذف مکرر استراتژی های مغلوب



س. آیا استراتژی ۲ بر استراتژی ۱ غالب است؟

```
vs 1      u1(1, 1) = 50%    <    u1(2, 1) = 90%
vs 2      u1(1, 2) = 10%    <    u1(2, 2) = 50%
vs 3      u1(1, 3) = 15%    <    u1(2, 3) = 20%
vs 4      u1(1, 4) = 20%    <    u1(2, 4) = 25%
...
```

نتیجه گیری.

استراتژی ۲ بر استراتژی ۱ اکیداً غالب است

با یک استدلال مشابه می توان نشان داد استراتژی ۹ بر استراتژی ۱۰ اکیداً غالب است

# حذف مکرر استراتژی های مغلوب



کاربرد. یک مدل سیاست

بازیکن ها. دو نامزد انتخاباتی

استراتژی ها. انتخاب موقعیت خود از بین طیف های سیاسی

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

۱۰ درصد از آرا به هر موقعیت اختصاص دارد

رأی دهندگان به نزدیکترین نامزد رأی می دهند.

در صورت ایجاد گره آرا به صورت مساوی بین دو نامزد تقسیم می شود

منفعت ها. هر نامزد می خواهد سهم خود را از آرا بیشینه کند

# حذف مکرر استراتژی های مغلوب



س. آیا استراتژی ۳ بر استراتژی ۲ غالب است؟ خیر

```
vs 1     u1(2, 1) = 90%   >   u1(3, 1) = 85%
```

اما پس از حذف استراتژی های ۱ و ۱۰، استراتژی ۳ بر ۲ غالب است.

```
vs 2     u1(2, 2) = 50%   <   u1(3, 2) = 80%
vs 3     u1(2, 3) = 20%   <   u1(3, 3) = 50%
vs 4     u1(2, 4) = 25%   <   u1(3, 4) = 30%
vs 5     u1(2, 5) = 30%   <   u1(3, 5) = 35%
...
```

نتیجه گیری.

استراتژی های ۲ و ۹ مغلوب نیستند، اما پس از حذف استراتژی های ۱ و ۱۰ این دو استراتژی مغلوب هستند

# حذف مکرر استراتژی های مغلوب



پیش بینی. نامزدها موقعیت سیاسی خود را اطراف مرکز در نظر می گیرند

| x | xx | xxx | | | | xxxx | | xx | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

قضیه رأی دهنده میانه.

ایرادها.

- رأی دهندگان به صورت یکنواخت توزیع نمی شوند.
- ممکن از بیش از ۲ نامزد وجود داشته باشد و همچنین ممکن است بعضی ها رأی ندهند.
- ممکن است رأی دهندگان موقعیت اعلام شده از طرف نامزدها را باور نکنند.

# اگر استراتژی مغلوب وجود نداشته باشد



متأسفانه در بسیاری از بازی ها، هیچ استراتژی مغلوبی وجود ندارد.

س. راه حل این بازی ها را چگونه می توان محاسبه نمود؟

ج. تعادل نَش

مثال.

در **بازی جوجه** استراتژی مغلوب وجود ندارد.

| | Dodge | Straight |
|---|---|---|
| Dodge | 0 , 0 | -1 , 1 |
| Straight | 1 , -1 | -10 , -10 |

# یک رویکرد متفاوت: بهترین پاسخ

# بهترین پاسخ



س. شما کدام استراتژی را بازی می کنید؟

در این بازی، هیچ کدام از استراتژی ها بر دیگری غالب نیست!

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 5 , 1 | 0 , 2 |
| M | 1 , 3 | 4 , 1 |
| D | 4 , 2 | 2 , 3 |

در برابر $l$، استراتژی U بهترین پاسخ است

در برابر $r$، استراتژی D بهترین پاسخ است

اما اگر باور داشته باشم احتمال انتخاب این دو استراتژی از طرف رقیب یکسان است:

سودمندی مورد انتظار U $\quad (1/2)(5) + (1/2)(0) = 2.5$

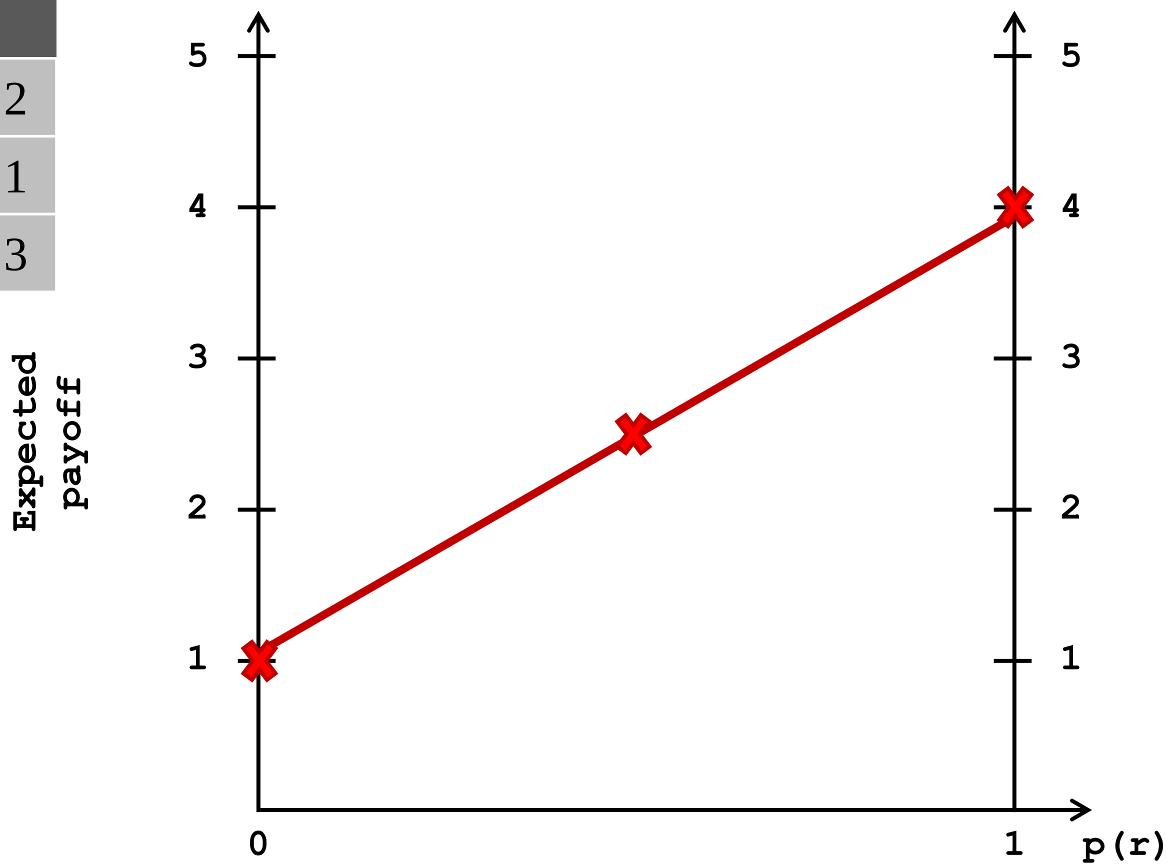
سودمندی مورد انتظار M $\quad (1/2)(1) + (1/2)(4) = 2.5$

سودمندی مورد انتظار D $\quad (1/2)(4) + (1/2)(2) = 3.0$

# بهترین پاسخ



| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 5 , 1 | 0 , 2 |
| M | 1 , 3 | 4 , 1 |
| D | 4 , 2 | 2 , 3 |

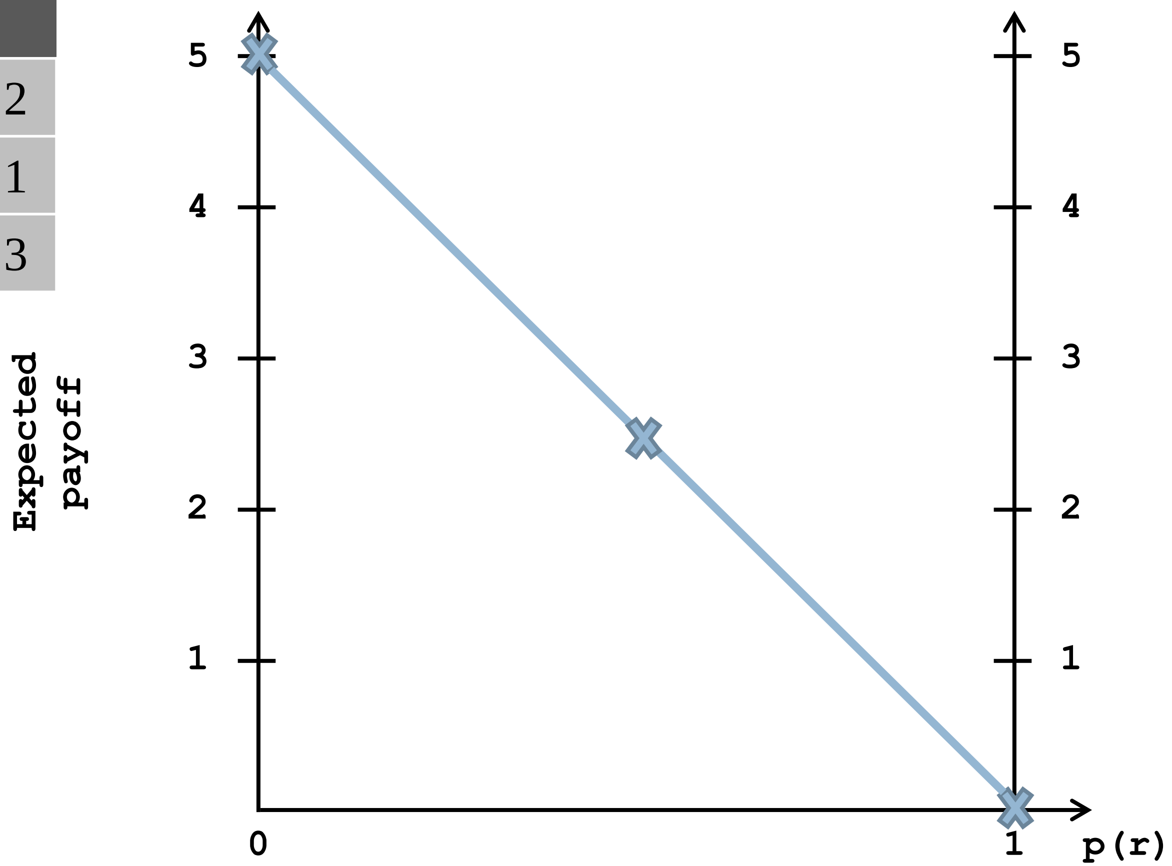



$$E\ u_1(M,\ p(r)) = (1 - p(r))[1] + (p(r))[4]$$

# بهترین پاسخ



| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 5 , 1 | 0 , 2 |
| M | 1 , 3 | 4 , 1 |
| D | 4 , 2 | 2 , 3 |

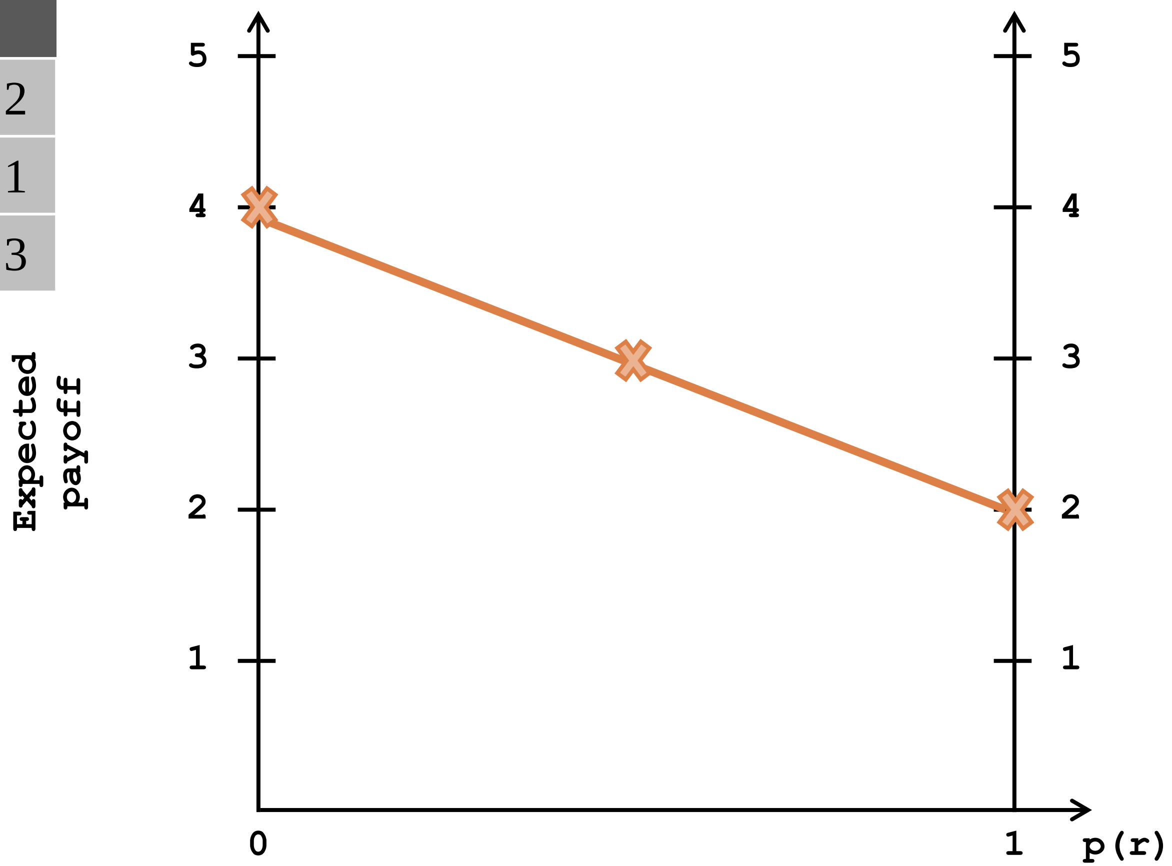



$$E\ u_1(U,\ p(r)) = (1 - p(r))[5] + (p(r))[0]$$

# بهترین پاسخ



| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 5 , 1 | 0 , 2 |
| M | 1 , 3 | 4 , 1 |
| D | 4 , 2 | 2 , 3 |

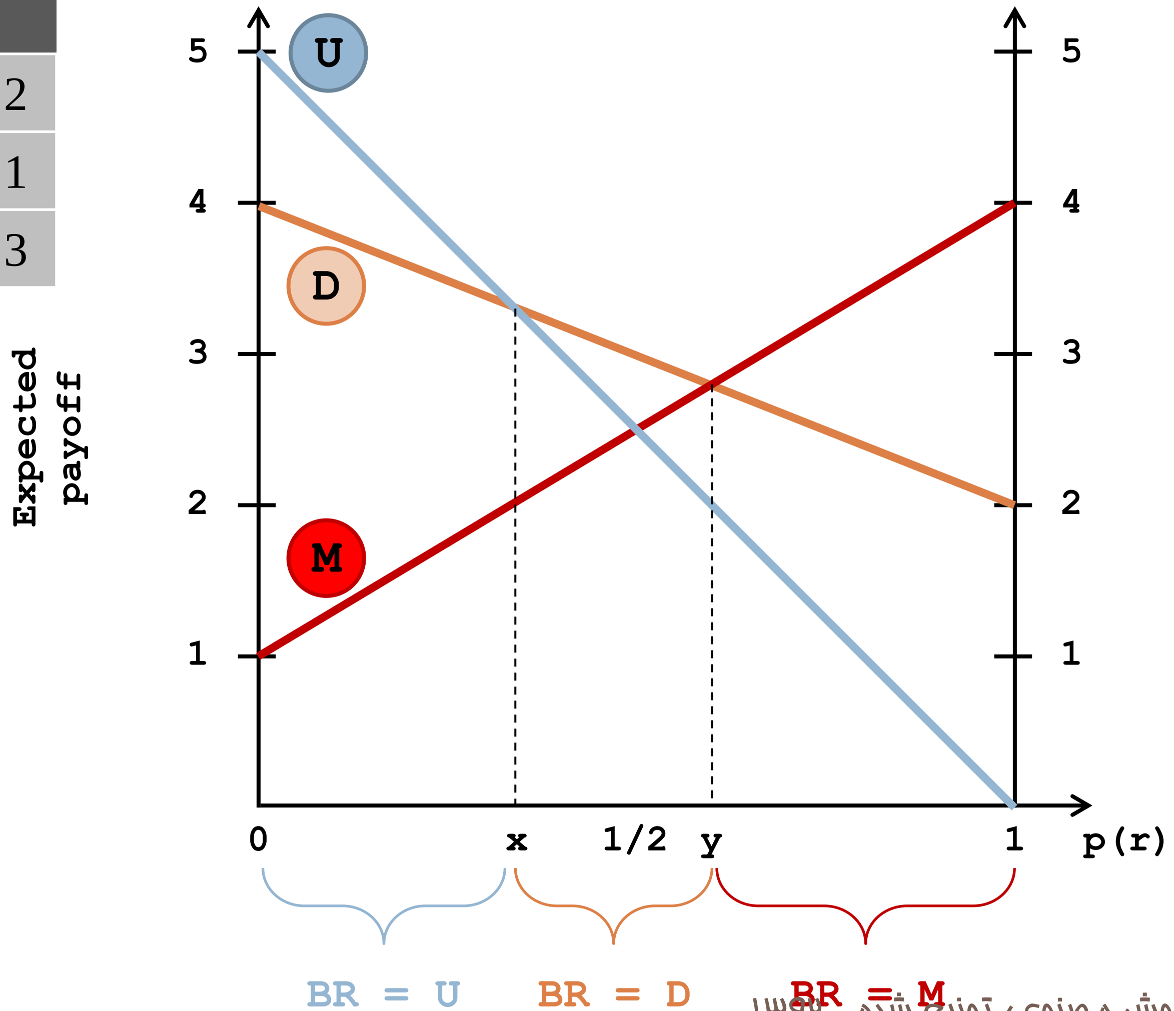



E $u_1$(D, p(r)) = (1 - p(r))[4] + (p(r))[3]

# بهترین پاسخ



| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 5 , 1 | 0 , 2 |
| M | 1 , 3 | 4 , 1 |
| D | 4 , 2 | 2 , 3 |



# بهترین پاسخ



ضربه پنالتی [مهمترین بازی در تمام دنیا]

در این بازی هیچ استراتژی ای بر دیگری غالب نیست!

Goalie

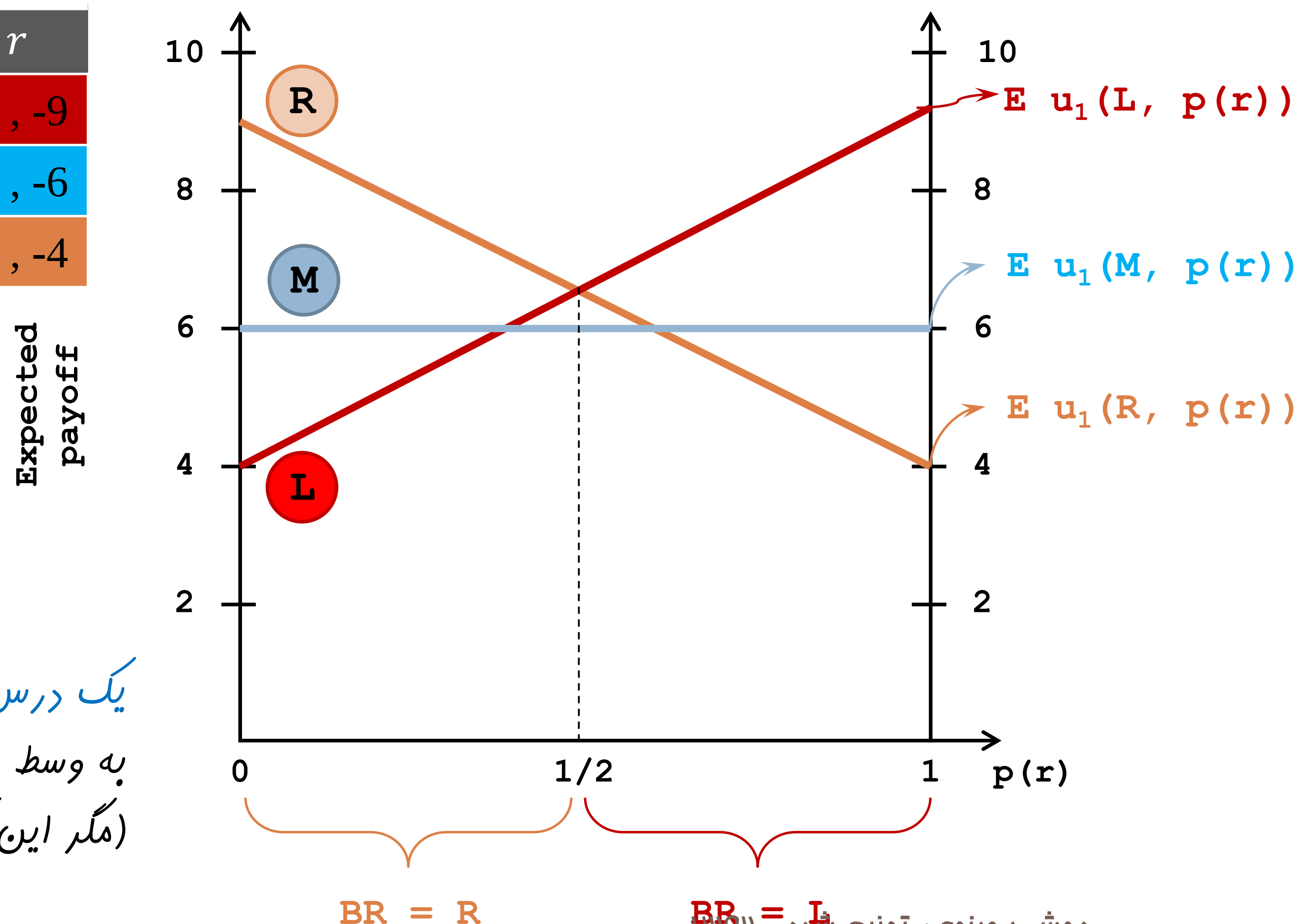
| Shooter | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| L | 4 , -4 | 9 , -9 |
| M | 6 , -6 | 6 , -6 |
| R | 9 , -9 | 4 , -4 |

س. شما توپ را به کدام طرف دروازه شوت می کنید؟

# بهترین پاسخ

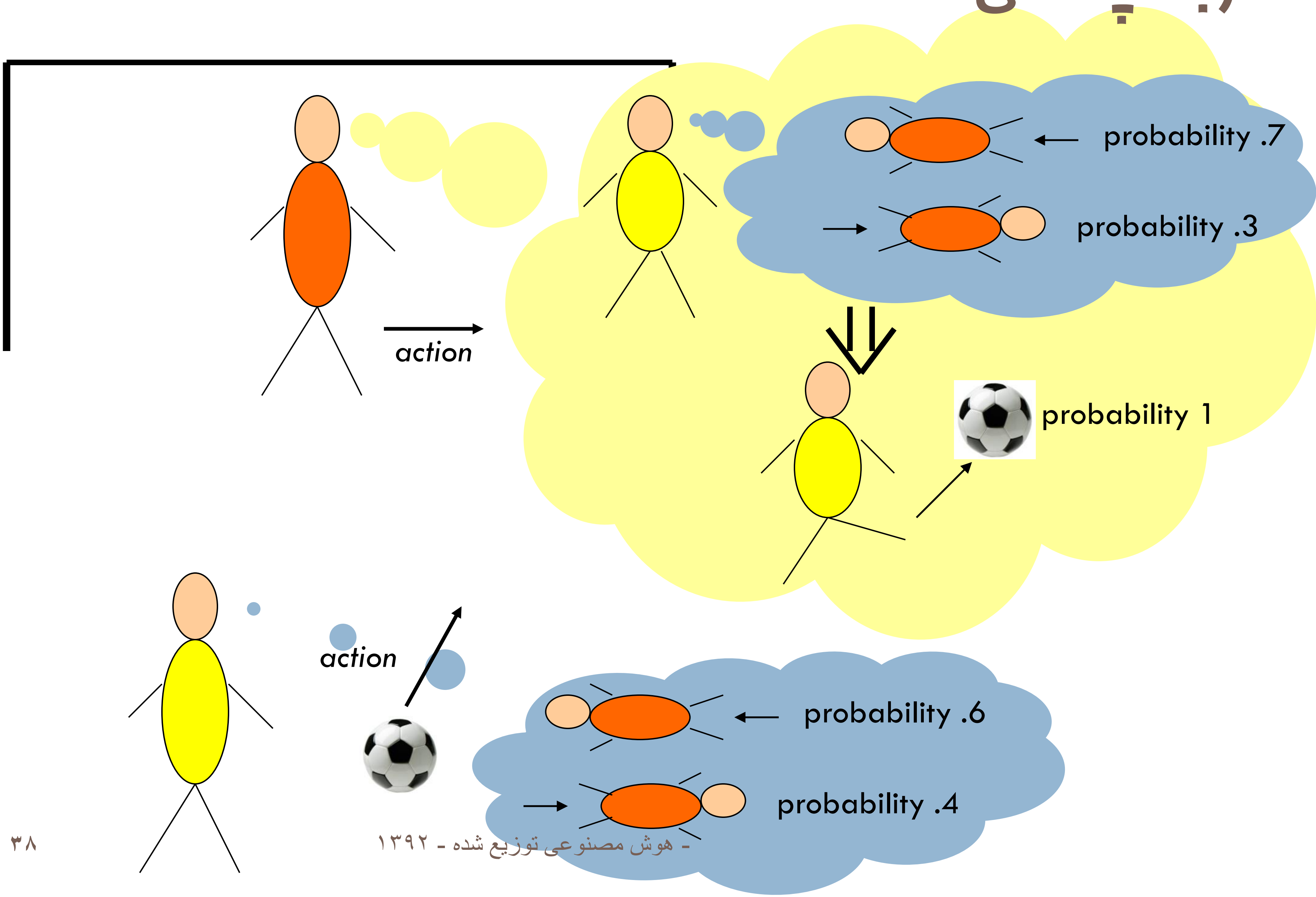


| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| L | 4 , -4 | 9 , -9 |
| M | 6 , -6 | 6 , -6 |
| R | 9 , -9 | 4 , -4 |




یک درس. هیچگاه توپ را
به وسط دروازه شوت نکنید!
(مگر این که آلمانی باشید)

# ضربه پنالتی


probability .7
probability .3
action
probability 1
action
probability .6
probability .4

# بهترین پاسخ



تعریف. برای بازیکن $i$، استراتژی $s_i$ بهترین پاسخ به استراتژی $s_{-i}$ است اگر

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \qquad \text{for all } s'_i$$

# بهترین پاسخ



بازی شراکت.

دو عامل در انجام یک پروژه با هم شریک هستند و قرار است سود حاصل از انجام پروژه را به طور مساوی بین خود تقسیم کنند. هر عامل باید میزان تلاش خود را در انجام پروژه تعیین کند (یک عدد حقیقی بین صفر و چهار).

سود پروژه.

$$4[s_1 + s_2 + bs_1s_2] \qquad (0 \le b \le 1/4)$$

منفعت بازیکن ها.

$$u_1(s_1, s_2) = \tfrac{1}{2}[4(s_1 + s_2 + bs_1s_2)] - s_1^2$$
$$u_2(s_1, s_2) = \tfrac{1}{2}[4(s_1 + s_2 + bs_1s_2)] - s_2^2$$

# بهترین پاسخ



هدف.

$$\max_{s_1}\ 2\left(s_1+s_2+bs_1s_2\right)-s_1^2$$

مشتق گیری.

$$\text{F.O.C.}\quad 2\left(1+bs_2\right)-2\hat{s}_1=0\Rightarrow \hat{s}_1=1+bs_2=BR_1\left(s_2\right)$$

$$\text{S.O.C.}\quad -2<0$$

بهترین پاسخ.

$$\boxed{\hat{s}_1=1+bs_2=BR_1\left(s_2\right)}$$

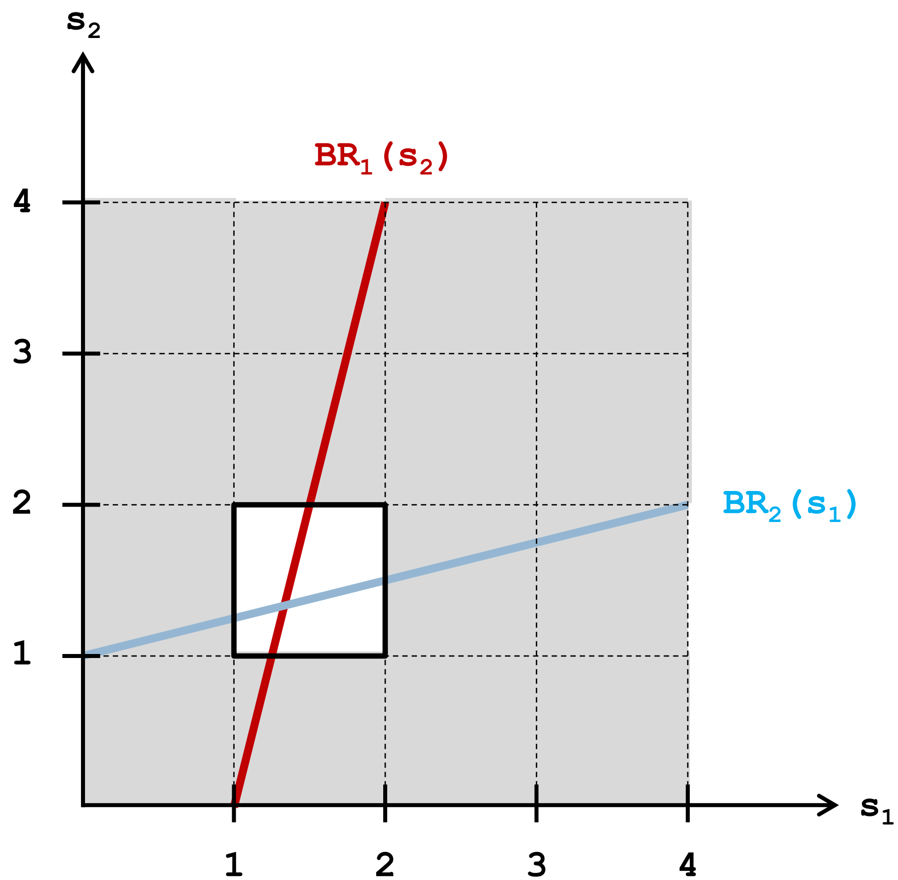
$$\boxed{\hat{s}_2=1+bs_1=BR_2\left(s_1\right)}$$

# بهترین پاسخ



حذف استراتژی هایی که بهترین پاسخ به هیچ استراتژی ای نیستند

(b = ¼)



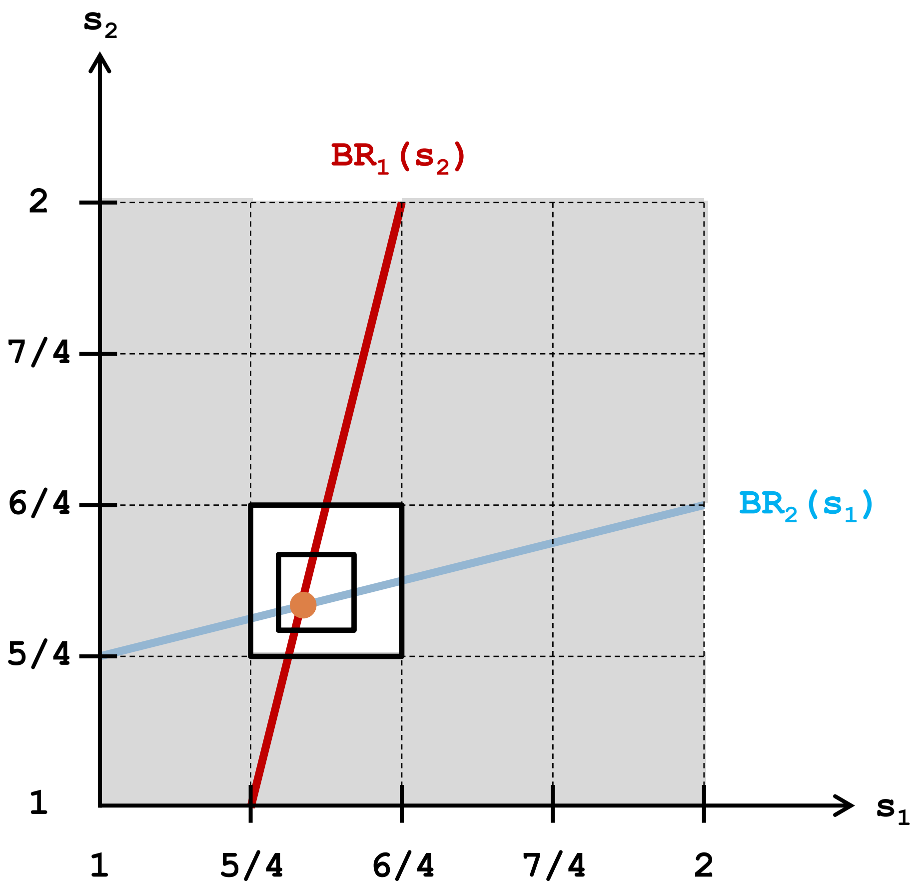
# بهترین پاسخ



حذف استراتژی هایی که بهترین پاسخ به هیچ استراتژی ای نیستند

$$\begin{cases} s_1^* = 1 + b s_2 \\ s_2^* = 1 + b s_1 \end{cases}$$

$$\boxed{s_1^* = s_2^* = \frac{1}{1-b}}$$



# بهترین پاسخ



## مسأله اثرات جانبی [EXTERNALITY]

هر سودی از میزان تلاش من به دست آید، تنها نیمی از آن سود نصیب من می شود اما همه هزینه های مربوط به میزان تلاش من را خودم باید بپردازم.

# تعادل نَش



تعادل نَش. [نقطه تقاطع دو خط داده شده]

استراتژی هر بازیکن بهترین پاسخ به استراتژی های سایر بازیکن ها است.

س. آیا در بازی انتخاب اعداد (دو سوم میانگین) تعادل نَش وجود دارد؟

# تعادل نَش

John F. Nash. 1928–. Winner of 1994 Nobel prize on Economics.

# تعادل نَش

تعریف. بردار استراتژی $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_N^*)$ یک تعادل نَش است اگر به ازای هر بازیکن مانند i، استراتژی انتخاب شده به وسیله او یعنی $s_i^*$ بهترین پاسخ به استراتژی های انتخاب شده به وسیله سایر بازیکن ها یعنی $s_{-i}^*$ باشد.

انگیزه ها.

عدم پشیمانی: هیچ بازیکنی انگیزه ای برای انحراف از تعادل نَش ندارد

اگر یک بازیکن باور داشته باشد که سایر بازیکن ها استراتژی نَش خود را بازی می کنند، آن گاه بهترین استراتژی برای آن بازیکن نیز بازی کردن استراتژی نَش است.

# تعادل نَش



یافتن تعادل نَش.

| | $l$ | $c$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| U | 0 , 2 | 2 , $\boxed{3}$ | 4 , $\boxed{3}$ |
| M | 11 , 0 | 3 , $\boxed{2}$ | 0 , 0 |
| D | 0 , $\boxed{3}$ | 1 , 0 | 8 , 0 |

**NE = (M, c)**

$BR_1(l) = M$

$BR_1(c) = M$

$BR_1(r) = D$

$BR_2(U) = l$

$BR_2(M) = c, r$

$BR_2(D) = l$

# تعادل نَش



یافتن تعادل نَش.

| | $l$ | $c$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| U | 0 , $\boxed{4}$ | 4, 0 | 5 , 3 |
| M | 4, 0 | 0 , $\boxed{4}$ | 5 , 3 |
| D | 3 , 5 | 3 , 5 | 6, $\boxed{6}$ |

**NE = (D, r)**

$BR_1(l) = M$

$BR_1(c) = U$

$BR_1(r) = D$

$BR_2(U) = l$

$BR_2(M) = c$

$BR_2(D) = r$

# تعادل نَش



یافتن تعادل نَش.

| | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| U | 1, 1 | 0, 0 |
| D | 0, 0 | 0, 0 |

$BR_1(l) = U$

$BR_1(r) = U, D$

$BR_2(U) = l$

$BR_2(D) = l, r$

NE = (U, l)
NE = (D, r)

# تعادل نَش و استراتژی های اکیداً مغلوب



یافتن تعادل نَش. [معمای زندانی ها]

| | α | β |
|---|---|---|
| α | 0, 0 | 3, -1 |
| β | -1, 3 | 1 , 1 |

$BR_1(\alpha) = \alpha$ $\quad$ $BR_2(\alpha) = \alpha$

$BR_1(\beta) = \alpha$ $\quad$ $BR_2(\beta) = \alpha$

**NE = (α, α)**

# تعادل نَش



## بازی سرمایه گذاری

تعادل نش:

همه سرمایه گذاری کنند (تعادل نش خوب)

هیچ کس سرمایه گذاری نکند (تعادل نش بد)

س. چگونه می توان تعادل نَش را در این بازی محاسبه نمود؟

ج. حدس و بررسی

دوباره این بازی را انجام دهید.

این بازی یک بازی هماهنگی است. [داشتن ارتباط کمک کننده است]

حوزه ای برای رهبری

# تعادل نَش



## بازی سرمایه گذاری

بازیکن ها: شما

استراتژی ها: عدم سرمایه گذاری یا سرمایه گذاری ۱۰ دلار

منفعت ها:

- اگر سرمایه گذاری نکنی: صفر دلار
- اگر سرمایه گذاری کنی:
  - اگر بیشتر از ۹۰ درصد کلاس سرمایه گذاری کنند، ۵ دلار برنده می شوی
  - در غیر اینصورت، ۱۰ دلارت را از دست می دهی

قانون بازی: هیچ بازیکنی با بازیکن دیگر ارتباط ندارد

# تعادل نَش



بازی رفتن به سینما (جنگ جنسیت ها)

این بازی به نوعی هم شامل هماهنگی است و هم شامل رقابت.

| | BU | GS | SW |
|---|---|---|---|
| BU | 2 , 1 | 0 , 0 | 0 , -1 |
| GS | 0 , 0 | 1 , 2 | 0 , -1 |
| SW | -1 , 0 | -1 , 0 | -2 , -2 |

```
NE = (BU, BU)
NE = (GS, GS)
```

# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



مدل دو فروشنده کورنو. [کورنو: اقتصاددان فرانسوی]

بازیکن‌ها. دو شرکت که در یک بازار بر سر میزان تولید یک محصول رقابت می‌کنند.

استراتژی‌ها. تعداد محصولات یکسانی که تولید می‌کنند.

هزینه تولید.

```
cq (constant marginal cost)
```

قیمت‌ها.

$$p = a - b(q_1 + q_2)$$

منفعت‌ها. بیشینه‌سازی سود!

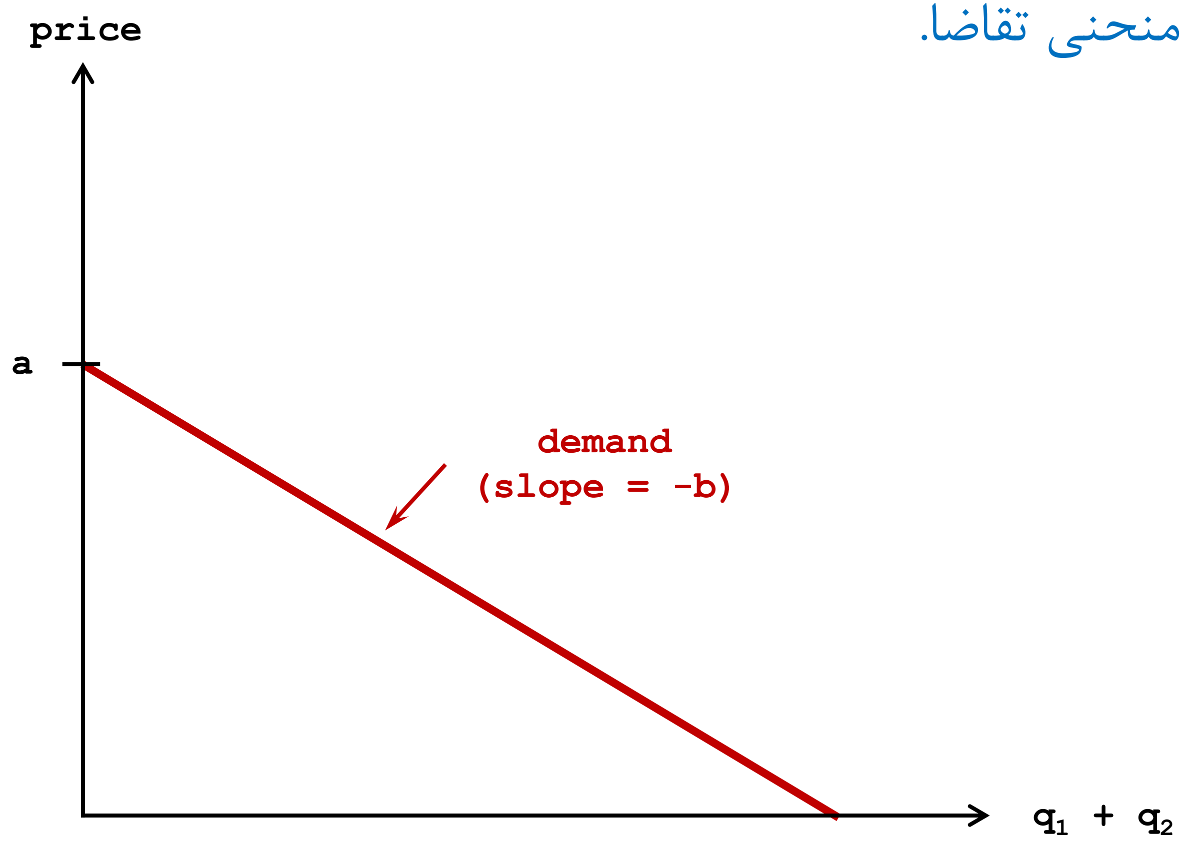
$$u_1(q_1, q_2) = [p]q_1 - cq_1$$
$$u_2(q_1, q_2) = [p]q_2 - cq_2$$

سود    درآمد    هزینه

# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



منحنی تقاضا.



# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



محاسبه بهترین پاسخ.

جایگذاری قیمت در معادله سود

$$u_1(q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

مشتق گیری نسبت به $q_1$

$$\text{F.O.C.} \quad a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$$

$$\text{S.O.C.} \quad -2b < 0$$

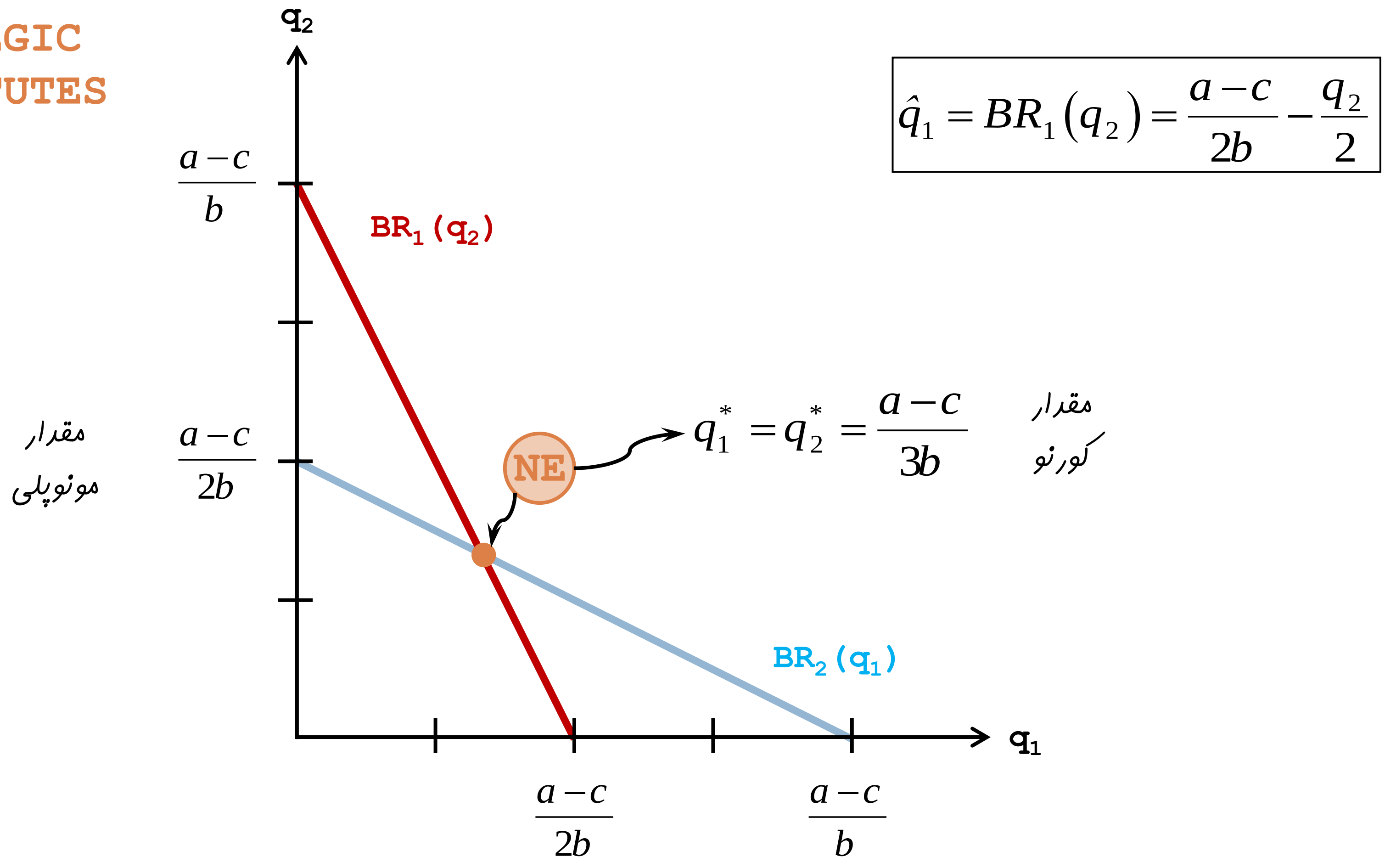
بنابراین

$$\boxed{\hat{q}_1 = BR_1(q_2) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2}}$$

$$\boxed{\hat{q}_2 = BR_2(q_1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}}$$

# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو

**STRATEGIC SUBSTITUTES**



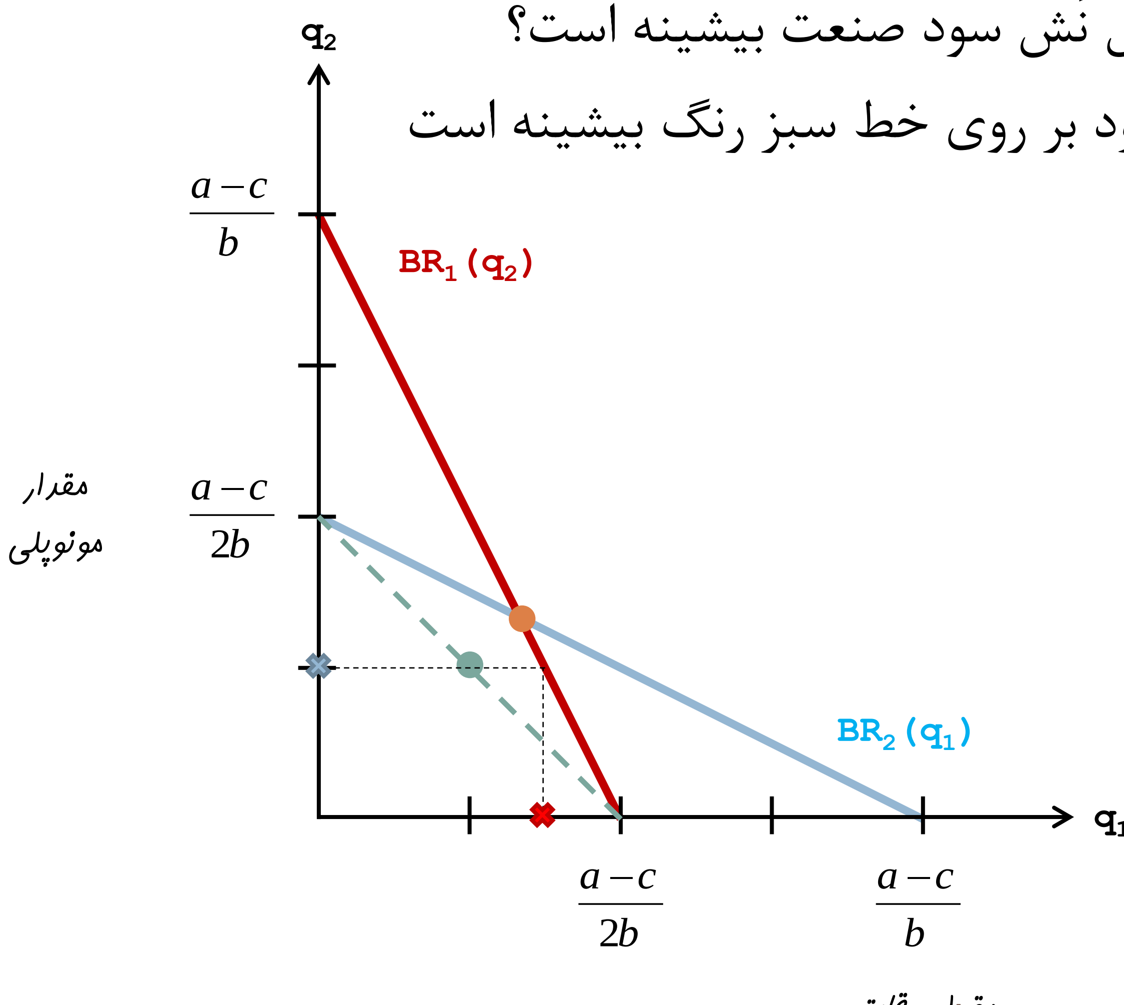

مقدار رقابتی

# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



س. آیا در تعادل نَش سود صنعت بیشینه است؟

ج. خیر، این سود بر روی خط سبز رنگ بیشینه است

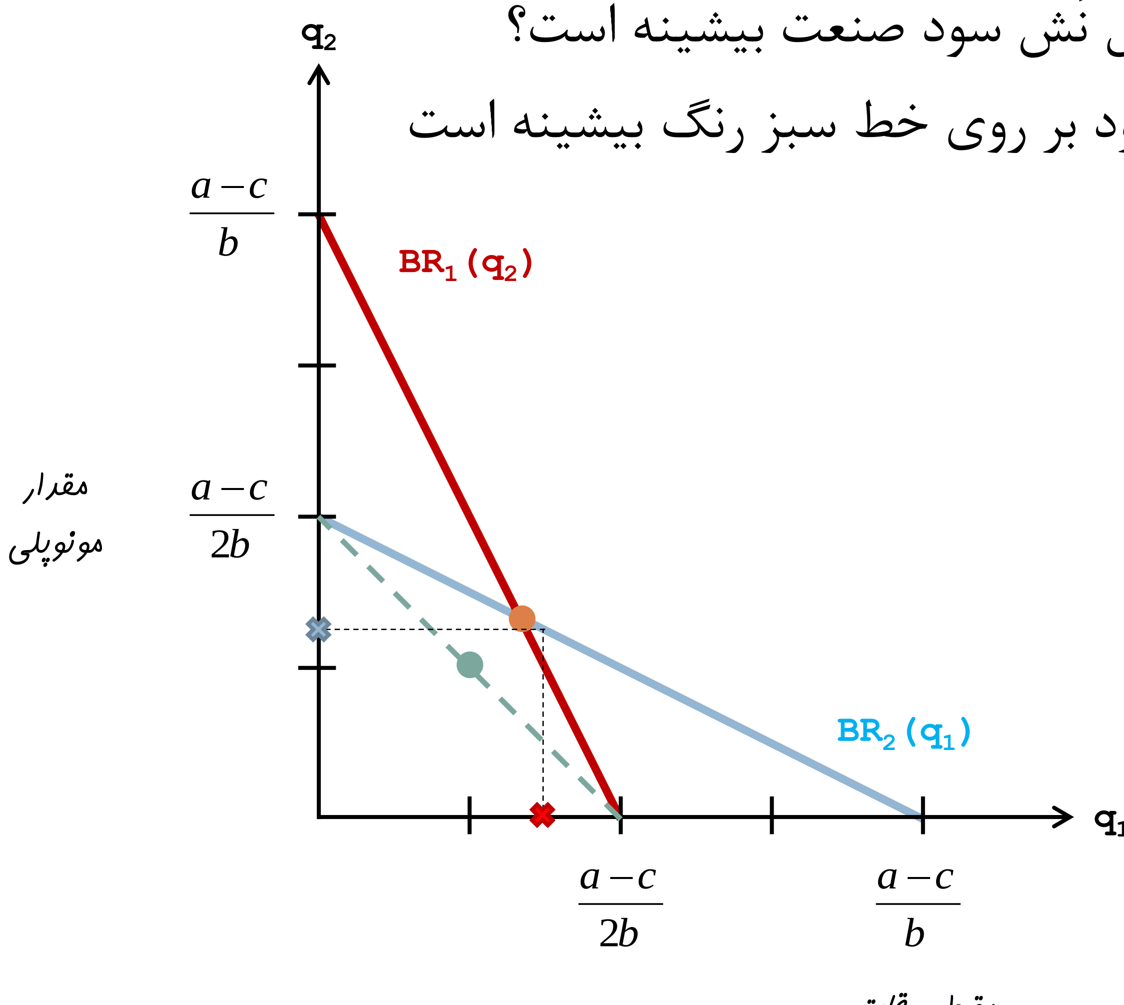


# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



س. آیا در تعادل نَش سود صنعت بیشینه است؟

ج. خیر، این سود بر روی خط سبز رنگ بیشینه است

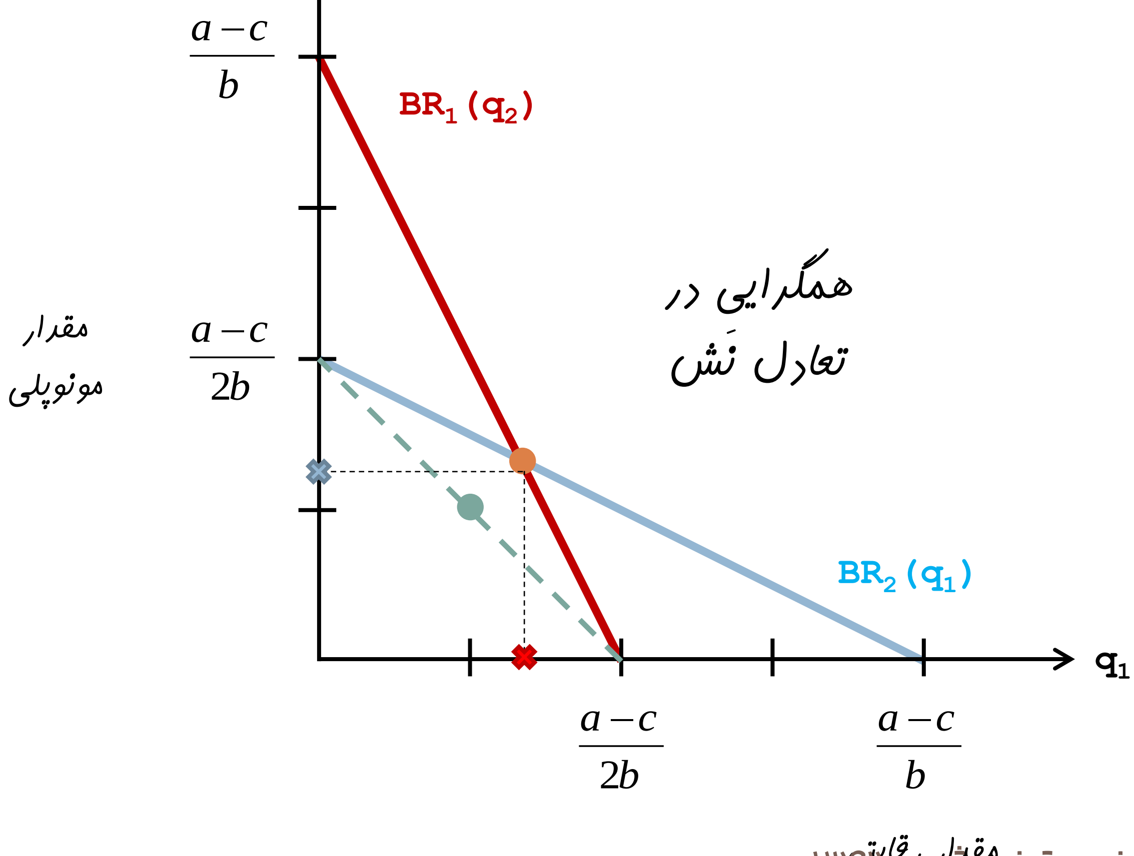


# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



س. آیا در تعادل نَش سود صنعت بیشینه است؟

ج. خیر، این سود بر روی خط سبز رنگ بیشینه است



# استراتژی های مخلوط (تصادفی)

۶۲

# تعادل نَش: مدل دو فروشنده کورنو



یک مشکل دیگر.

در نقطه ای که سود صنعت بیشینه می شود، عرضه کمتر از تقاضاست و در نتیجه شرکت های دیگر سعی می کنند با وارد شدن در این صنعت خلاء موجود را پر کرده و سود کنند.

نکته آخر.

مقایسه کل تولید

$$\frac{a-c}{b} > \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} > \frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$$

مقایسه قیمت

مونوپلی < کورنو < رقابتی

# تعادل نش برای استراتژی های مخلوط



س. اگر یک بازی فاقد تعادل نَش برای استراتژی های خالص باشد (مانند بازی تطبیق پنی ها)، چه می شود؟

از آنجا که در این بازی ها به نظر می رسد هیچ استراتژی خالصی منطقی نیست، شاید بهترین کار تصادفی سازی استراتژی ها باشد.

مثلاً در بازی تطبیق پنی ها، با احتمال p شیر و با احتمال 1 - p خط را انتخاب می کنیم.

چنین استراتژی ای یک استراتژی مخلوط نام دارد.

هدف. محاسبه یک استراتژی مخلوط که تعادل نَش باشد.

قضیه. هر بازی استراتژیک متناهی دارای یک استراتژی مخلوط تعادل نَش است.

**بازی متناهی**. تعداد بازیکن ها متناهی؛ استراتژی های ممکن برای هر بازیکن متناهی

# استراتژی های مخلوط



تعریف. استراتژی مخلوط $p_i$ یک توزیع احتمالات بر روی استراتژی های خالص است.

$p_i(s_i)$: احتمال انتخاب استراتژی $s_i$ در استراتژی مخلوط $p_i$.

$p_i(s_i)$ می تواند برابر با صفر باشد، مانند $(½, ½, 0)$

$p_i(s_i)$ می تواند برابر با یک باشد، مانند $(1, 0, 0)$ [استراتژی خالص]

منفعت یک استراتژی مخلوط. منفعت مورد انتظار استراتژی مخلوط $p_i$ برابر است با میانگین وزن دار منفعت مورد انتظار هر یک از استراتژی های خالص موجود در آن

# استراتژی های مخلوط



سنگ، کاغذ، قیچی

تعادل نش خالص وجود ندارد (چرا؟)

| | R | P | S |
|---|---|---|---|
| R | 0 , 0 | -1 , 1 | 1 , -1 |
| P | 1 , -1 | 0 , 0 | -1 , 1 |
| S | -1 , 1 | 1 , -1 | 0 , 0 |

ادعا. تعادل نش مخلوط وقتی که هر دو بازیکن استراتژی مخلوط (1/3, 1/3, 1/3) را بازی کنند

منفعت مورد انتظار استراتژی مخلوط

# استراتژی های مخلوط: منفعت مورد انتظار



## جنگ جنسیت ها

| | a | b | |
|---|---|---|---|
| A | 2, 1 | 0, 0 | 1/5 |
| B | 0, 0 | 1, 2 | 4/5 |
| | 1/2 | 1/2 | |

$$s = \left( \underbrace{\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)}_{p}, \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{q} \right)$$

$$Eu_2(a) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 0\left(\frac{4}{5}\right) = 0.2$$

$$Eu_2(b) = 0\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{4}{5}\right) = 1.6$$

$$Eu_2(p,q) = 0.2\left(\frac{1}{2}\right) + 1.6\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9$$

# استراتژی های مخلوط: منفعت مورد انتظار



## جنگ جنسیت ها

| | a | b | |
|---|---|---|---|
| A | 2, 1 | 0, 0 | 1/5 |
| B | 0, 0 | 1, 2 | 4/5 |
| | 1/2 | 1/2 | |

$$Eu_1(A) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = 1.0$$

$$Eu_1(B) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5$$

$$s = \left( \underbrace{\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)}_{p}, \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{q} \right)$$

$$Eu_1(p,q) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 0.5\left(\frac{4}{5}\right) = 0.6$$

# استراتژی های مخلوط



## یک نکته ساده ولی بسیار مفید

میانگین وزن دار دنباله ای از اعداد، همواره مقداری بین کوچکترین و بزرگترین عدد در آن دنباله دارد.

نتیجه ۱. سودمندی مورد انتظار یک استراتژی مخلوط، همواره مقداری بین کمترین سودمندی مورد انتظار و بیشترین سودمندی مورد انتظار مربوط به استراتژی های خالص موجود در آن استراتژی مخلوط دارد.

$$u_1(WL)=0.5 \quad < \quad u_1=0.6 \quad < \quad u_1(LW)=1.0$$

$$u_2(LW)=0.2 \quad < \quad u_2=0.9 \quad < \quad u_2(WL)=1.6$$

# تعادل نَش برای استراتژی های مخلوط



تعریف. یک پروفایل از استراتژی های مخلوط مانند

$$\left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*\right)$$

یک تعادل نَش است اگر به ازای هر بازیکن i، استراتژی $p_i^*$ بهترین پاسخ به استراتژی عامل های دیگر یعنی $p_{-i}^*$ باشد.

نکته. اگر احتمال یک استراتژی خالص در استراتژی مخلوط $p_i^*$ در مثبت باشد، آنگاه آن استراتژی خالص نیز بهترین پاسخ به $p_{-i}^*$ است.

# استراتژی های مخلوط



یک نکته ساده ولی بسیار مفید

میانگین وزن دار دنباله ای از اعداد، همواره مقداری بین کوچکترین و بزرگترین عدد در آن دنباله دارد.

نتیجه ۲. اگر یک استراتژی مخلوط بهترین پاسخ باشد، آنگاه هر یک از استراتژی های خالص موجود در آن نیز باید بهترین پاسخ باشند.

به ویژه هر یک از استراتژی های خالص دارای منفعت مورد انتظار یکسان هستند. (چرا؟)

کاربرد: ساده سازی فرآیند محاسبه استراتژی مخلوطی که یک تعادل نَش است.

# مثال: بازی جنگ جنسیت ها



فرض کنید زن با احتمال p عمل LW و با احتمال 1 – p عمل WL را بازی کند.

| | LW | WL | |
|---|---|---|---|
| LW | 2, 1 | 0, 0 | p |
| WL | 0, 0 | 1, 2 | 1 - p |

$$\boxed{U_{husbande}\left(LW\right)=U_{husband}\left(WL\right)}$$

$$1\times p+0\times\left(1-p\right)=0\times p+2\times\left(1-p\right)\Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

زن باید با احتمال 2/3 عمل LW و با احتمال 1/3 عمل WL را انتخاب کند.

$$N.E.=\left[\overset{\textbf{wife}}{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)},\overset{\textbf{husband}}{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}\right]$$

# مثال: بازی جنگ جنسیت ها



محاسبه تعادل نش مخلوط.

فرض کنید شوهر با احتمال p عمل LW و با احتمال 1 – p عمل WL را بازی کند.

| | LW | WL |
|---|---|---|
| LW | 2, 1 | 0, 0 |
| WL | 0, 0 | 1, 2 |
| | p | 1 - p |

$$\boxed{U_{wife}(LW) = U_{wife}(WL)}$$

$$2 \times p + 0 \times (1 - p) = 0 \times p + 1 \times (1 - p) \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

شوهر باید با احتمال 1/3 عمل LW و با احتمال 2/3 عمل WL را انتخاب کند.

# مثال: بازی تطبیق پنی ها



## تطبیق پنی ها

تعادل نَش خالص وجود ندارد.

| | H | T |
|---|---|---|
| H | 1, -1 | -1, 1 |
| T | -1, 1 | 1, -1 |

### محاسبه تعادل نَش مخلوط.

در استراتژی مخلوط، احتمال انتخاب هر استراتژی به وسیله هر بازیکن برابر با ½ است (چرا؟)

$$N.E. = \left[\overset{\textbf{Player 1}}{(.5,.5)},\overset{\textbf{Player 2}}{(.5,.5)}\right]$$

# مثال: تنیس



## تنیس

فرض کنید سرنا ویلیام و ونوس ویلیام در حال انجام یک مسابقه تنیس هستند. در لحظه فعلی سرنا کنار تور است و توپ در زمین ونوس است و ونوس می خواهد تصمیم بگیرد که توپ را به سمت چپ سرنا یا به سمت راست او بفرستد.

اکنون سوال این است که آیا ونوس باید از نقطه قوت خود استفاده کند (ضربات ضربدری) یا از نقطه ضعف سرنا بهره ببرد (بک هند) یا هر دو؟

Serena

| | | *l* | *r* |
|---|---|---|---|
| Venus | L | 50, 50 | 80, 20 |
| | R | 90, 10 | 20, 80 |

تعادل نَش خالص وجود ندارد

## محاسبه تعادل نَش مخلوط.

احتمال انتخاب هر استراتژی به وسیله هر بازیکن در استراتژی مخلوط NE

$$N.E.=\left[\overset{\textbf{Venus}}{(.7,.3)},\overset{\textbf{Serena}}{(.6,.4)}\right]$$

# مثال: تنیس



- محاسبه تعادل نش مخلوط

| | | Serena | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *l* | *r* | |
| Venus | L | 50, 50 | 80, 20 | p |
| | R | 90, 10 | 20, 80 | 1 - p |
| | | q | 1 - q | |

$$\boxed{U_{Serena}(l) = U_{Serena}(r)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{Serena}(l) = [50]p + [10](1-p) \\ u_{Serena}(r) = [20]p + [80](1-p) \end{array}\right\} \Rightarrow p = 0.7$$

$$N.E. = \left[\begin{array}{cc} \textbf{Venus} & \textbf{Serena} \\ (.7,.3), & (.6,.4) \end{array}\right]$$

اگر شما مربی ونوس بودید، با دیدن این حقیقت که سرنا ۶۰ درصد مواقع به سمت چپ می رود، به ونوس چه توصیه ای می کردید؟

# مثال: تنیس



محاسبه تعادل نش مخلوط

Serena

| Venus | *l* | *r* | |
|---|---|---|---|
| L | 50, 50 | 80, 20 | p |
| R | 90, 10 | 20, 80 | 1 - p |
| | q | 1 - q | |

$$\boxed{U_{Venus}(L) = U_{Venus}(R)}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{Venus}(L) &= [50]q + [80](1-q) \\ u_{Venus}(R) &= [90]q + [20](1-q) \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = 0.6$$

# مثال: تنیس



اکنون فرض کنید سرنا با تعویض مربی خود و انجام تمرینات بیشتر، ضربات بک هند خود را تقویت کند. در این صورت، ماتریس منفعت به صورت زیر خواهد بود:

Serena

| Venus | L | R |
|---|---|---|
| L | 50, 70 | 80, 20 |
| R | 90, 10 | 20, 80 |

بهبود ضربات بک هند دو اثر خواهد داشت

اثر مستقیم: سرنا در پاسخ به ونوس بیشتر سعی می کند تا از ضربه بک هند بیشتر استفاده کند.

اثر استراتژیک: از آنجا که ونوس می داند ضربات بک هند سرنا تقویت شده است، کمتر توپ را به سمت چپ سرنا ارسال می کند و در نتیجه باعث می شود سرنا کمتر از ضربات بک هند استفاده کند.

س. اکنون بگویید کدام اثر قویتر خواهد بود؟

# تفسیر تعادل نَش مخلوط



س. بازی کردن یک استراتژی مخلوط چه معنایی دارد؟

تفسیر ۱: تصادفی سازی برای گیج کردن رقیب

مثال: پنالتی زدن در فوتبال

تفسیر ۲: بیانگر باور یک عامل در مورد آنچه که عامل های دیگر انجام خواهند دارد

مثال: بازی جنگ جنسیت ها

تصادفی سازی وقتی که در مورد عمل بازیکن های دیگر مطمئن نیستید

استراتژی های مخلوط توصیفی هستند از آن چه که در یک بازی تکرار شونده ممکن است اتفاق بیفتد

استراتژی های مخلوط دینامیک جمعیت را توصیف می کنند