



آنالیز ریاضی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

نوشته:

تام م. اپوستل

ترجمه:

دکتر علی اکبر عالم زاده

آنالیز ریاضی

نوشته:

تام م. اپوستل

ترجمه:

علی اکبر عالمزاده

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

مؤسسه انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف

ویاستار ارشد: علی کافی
مدیر چاپ: احمد علی طاهرچی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



Mathematical Analysis

(second edition)

Tom M. Apostl

Addison-Wesley, 1975

آنالیز ریاضی

نوشته تام م. آپوستل

ترجمه دکتر علی اکبر عالمزاده

ویراسته احمد بیرشک

مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، تهران

چاپ ششم، ۱۳۷۶

تعداد: ۲۰۰۰

لیتوگرافی، چاپ، و صحافی: چاپخانه دانشگاه صنعتی شریف

حق چاپ برای مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است.

مقدمه مترجم

همه متخصصین ریاضی به کمبود کتابهای ریاضی به فارسی بویژه در زمینه دانشگاهی اذعان دارند، تا آنجا که برخی از آنها با بذل همت و صرف وقت، متناسب با اهمیت موضوع و علاقه شخصی خویش، در راه پرکردن این خلاء علمی گام برداشته اند. یکی از زیباترین مباحث و نیز نیرومندترین حربه های آدمی در حل مسائل علمی، آنالیز ریاضی است، و نظر به اهمیت بنیادی آن در درس ریاضی دانشگاه، همواره ضرورت وجود کتابهایی در این مورد بیش از هر زمینه دیگر احساس می شده است.

مشهورترین کتاب آنالیز سالهای اخیر کتاب *Mathematical Analysis* اثر Tom M. Apostol است، که اینک ترجمه چاپ دوم آن برای اولین بار تقدیم علاقمندان می گردد.

سالها است که این کتاب به عنوان مأخذی جهت تهیه جزوات آنالیز برای دوره لیسانس بکار رفته، و نیز مورد استفاده مکرر دانشجویان فوق لیسانس، چه در امر آموزش و چه برای امتحان ورودی، بوده است.

در ترجمه این کتاب حتی المقدور سعی شده است که از واژه های موجود استفاده شود. اما از آنجا که تا بحال کتابی که تا این حد جدی باشد در این زمینه به فارسی نوشته و یا ترجمه نشده است، و نیز چند اصطلاح متداول مناسب بنظر نمی رسیدند، بناچار برخی واژه های نوظاهر شده اند، که البته هر یک که مورد تأیید اهل فن قرارگیرد جای خود را باز خواهد کرد.

بدیهی است که این ترجمه از عبارات نارسا و غیرمنطبق با متن و نیز واژه های فارسی نامناسب بی بهره نیست، که امید است خوانندگان گرامی مترجم را از نظریات اصلاحی خویش مستحضر فرمایند تا در چاپهای بعدی به رفع نقائص اقدام گردد.

در پایان لازم می‌دانم مراتب سپاسگزاری خود را از مؤسسه انتشارات علمی
دانشگاه صنعتی شریف، که وسائل لازم برای ترجمه، ویرایش، و چاپ این کتاب را
فراهم آورده است، ابراز دارم.

علی اکبر عالم‌زاده

خرداد ماه

۱۳۵۹ هجری شمسی

مقدمه مؤلف

یک نگاه اجمالی به فهرست مطالب آشکار خواهد ساخت که این کتاب درسی مباحث آنالیز را در سطح «حساب دیفرانسیل و انتگرال عالی» مورد بحث قرار می‌دهد. هدف این بوده است که موضوع به صورت صحیح، دقیق، امروزی، و درعین حال نه چندان غیرعملی، عرضه گردد. این کتاب راهی را از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به دوره‌های عالی در نظریه تابعهای حقیقی و مختلط می‌گشاید، و خواننده را با برخی از تفکرات انتزاعی که در آنالیز نوین متداول است آشنا می‌سازد.

چاپ دوم از جهات بسیار با چاپ اول متفاوت است. در این چاپ، توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای در محدوده فضاهای متری کلی بهمان‌گونه فضای n بعدی اقلیدسی عرضه شده، و بر آن دو فصل جدید درباره انتگرالگیری لیگ^۱ اضافه شده است. مطالب مربوط به انتگرالهای خط، آنالیز برداری، و انتگرالهای سطح حذف شده‌اند. ترتیب برخی از فصلها تغییر کرده است، بسیاری از بخشها کاملاً دوباره نویسی شده‌اند، و چند تمرین جدید اضافه گشته است.

انتگرالگیری لیگ به روش ریس-ناگی^۲ عرضه می‌شود، که مستقیماً به تابعها و انتگرالهای آنها توجه داشته و از نظریه اندازه‌ها مستقل است. طرز عمل در این جا آسانتر شده، بسط داده شده، و بنوعی تجدید آرایش یافته است تا در سطح لیسانس عرضه گردد.

چاپ اول این کتاب، در دوره‌های ریاضیات، در سطوح مختلفی بکار رفته است، از سال اول لیسانس تا سال اول فوق لیسانس، و از آن هم به عنوان یک کتاب درسی

وهم به عنوان یک کتاب مرجع تکمیلی استفاده شده است. چاپ دوم این تنوع را حفظ کرده است. به عنوان مثال، از فصلهای ۱ تا ۵ و ۱۲ و ۱۳ می توان درسی در حساب دیفرانسیل تابعهای یک یا چند متغیره و از فصلهای ۶ تا ۱۱ و ۱۴ و ۱۵ درسی در نظریه انتگرالگیری فراهم ساخت. تلفیقهای بسیار دیگری نیز میسر است؛ استادان، هر یک، می توانند، با مراجعه به نمودار صفحه بعد (که معرف ارتباط منطقی فصلها است)، مباحث مورد نیاز خود را انتخاب کنند.

مایلم مراتب قدردانی خود را نسبت به افراد بسیاری که قبول زحمت نموده درباره چاپ اول به من نامه نوشته اند ابراز دارم. نظریات و پیشنهادهای آنها در تهیه چاپ دوم مؤثر بوده است. بخصوص، از دکتر کارالامبوس آلپرانطیس^۱، که تمام نسخه دست نویس را بدقت خوانده و پیشنهادات مفید بسیاری کرده است، سپاسگزارم. بعضی از تمرینهای جدید نیز توسط ایشان فراهم شده است. در خاتمه، خود را مدیون دانشجویان دوره لیسانس مؤسسه صنعتی کالیفرنیا^۲ می دانم که علاقه آنها به ریاضیات انگیزه اصلی تألیف این کتاب بوده است.

تام م. اپوستل

پاسادنا^۳

سپتامبر ۱۹۷۳

1. Dr. Charalambos Aliprantis

2. California Institute of Technology (Caltech)

3. Pasadena

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
	۱ دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط
۹	۱۰۱ مقدمه
۱۵	۲۰۱ اصلهای موضوع میدان
۱۱	۳۰۱ اصلهای موضوع ترتیب
۱۲	۴۰۱ نمایش هندسی عددهای حقیقی
۱۳	۵۰۱ بازه‌ها
۱۳	۶۰۱ عددهای صحیح
۱۴	۷۰۱ قضیهٔ یکنائی تجزیه برای عددهای صحیح
۱۷	۸۰۱ عددهای گویا
۱۷	۹۰۱ عددهای گنگ
۱۹	۱۵۰۱ کرانهای بالائی، عنصر ماکزیمم، کوچکتزین کران بالائی (سوپرمم)
۲۱	۱۱۰۱ اصل موضوع تامیت
۲۱	۱۲۰۱ چند خاصیت سوپرمم
	۱۳۰۱ خاصیت‌هایی از عددهای صحیح که از اصل موضوع تامیت نتیجه می‌شوند
۲۲	
۲۳	۱۴۰۱ خاصیت ارشمیدسی دستگاه عددهای حقیقی
۲۳	۱۵۰۱ عددهای گویا با نمایش اعشاری متناهی
۲۴	۱۶۰۱ تقریب عددهای حقیقی به عددهای اعشاری متناهی
۲۵	۱۷۰۱ نمایشهای اعشاری نامتناهی عددهای حقیقی

صفحه	عنوان
۲۵	۱۸.۱ قدر مطلقها و نامساوی مثلثی
۲۷	۱۹.۱ نامساوی کشی-شوارتز
۲۸	۲۰.۱ به علاوه بی نهایت و منهای بی نهایت و دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته R^*
۲۹	۲۱.۱ عددهای مختلط
۳۱	۲۲.۱ نمایش هندسی عددهای مختلط
۳۲	۲۳.۱ یکه موهومی
۳۳	۲۴.۱ قدر مطلق یک عدد مختلط
۳۴	۲۵.۱ ترتیب ناپذیری عددهای مختلط
۳۴	۲۶.۱ عددهای نمائی مختلط
۳۶	۲۷.۱ خاصیت‌های دیگر عددهای نمائی مختلط
۳۶	۲۸.۱ شناسهٔ یک عدد مختلط
۳۸	۲۹.۱ توانهای صحیح و ریشه‌های اعداد مختلط
۳۹	۳۰.۱ لگاریتمهای مختلط
۴۰	۳۱.۱ توانهای مختلط
۴۱	۳۲.۱ سینوسها و کسینوسهای مختلط
۴۱	۳۳.۱ بی نهایت و صفحهٔ مختلط وسعت یافته C^*
۴۲	تمرین

۲ برخی مفهومیهای اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها

۵۱	۱.۲ مقدمه
۵۲	۲.۲ نمادها
۵۲	۳.۲ جفت‌های مرتب
۵۳	۴.۲ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه
۵۳	۵.۲ رابطه‌ها و تابعها
۵۵	۶.۲ اصطلاحاتی دیگر دربارهٔ تابعها
۵۶	۷.۲ تابعهای یک به یک و معکوسهای آنها
۵۷	۸.۲ تابعهای مرکب
۵۸	۹.۲ دنباله‌ها
۵۹	۱۰.۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی (همعدد)
۵۹	۱۱.۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

صفحه	عنوان	
۶۵	مجموعه‌های شمارش‌پذیر و شمارش‌ناپذیر	۱۲.۲
۶۱	شمارش‌ناپذیری دستگاه عددهای حقیقی	۱۳.۲
۶۲	جبر مجموعه‌ای	۱۴.۲
۶۴	دسته‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر	۱۵.۲
۶۶	تمرین	
	۳ مبانی توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای	۳
۷۲	مقدمه	۱.۳
۷۲	فضای اقلیدسی R^n	۲.۳
۷۵	گوبهای باز و مجموعه‌های باز در R^n	۳.۳
۷۷	نهاد مجموعه‌های باز در R^1	۴.۳
۷۹	مجموعه‌های بسته	۵.۳
۷۹	نقطه‌های چسبیده. نقطه‌های انباشتگی	۶.۳
۸۱	مجموعه‌های بسته و نقطه‌های چسبیده	۷.۳
۸۲	قضیه بولتزانو-وایراشتراس	۸.۳
۸۴	قضیه اشتراکی کانتور	۹.۳
۸۵	قضیه پوششی لیندلف	۱۰.۳
۸۷	قضیه پوششی هاینه-بورل	۱۱.۳
۸۸	فشردگی در R^n	۱۲.۳
۹۰	فضاهای متریک	۱۳.۳
۹۲	توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای در فضاهای متریک	۱۴.۳
۹۵	زیرمجموعه‌های فشرده یک فضای متریک	۱۵.۳
۹۶	کرانه یک مجموعه	۱۶.۳
۹۷	تمرین	
	۴ حدها و پیوستگی	۴
۱۰۵	مقدمه	۱.۴
۱۰۶	دنباله‌های همگرا در یک فضای متریک	۲.۴
۱۰۸	دنباله‌های کشی	۳.۴
۱۱۱	فضاهای متریک تام	۴.۴
۱۱۱	حد یک تابع	۵.۴

صفحه	عنوان
۱۱۴	حدود تابعهای مختلط ۶.۴
۱۱۵	حدود تابعهای برداری ۷.۴
۱۱۶	تابعهای پیوسته ۸.۴
۱۱۸	پیوستگی تابعهای مرکب ۹.۴
۱۱۹	تابعهای مختلط و تابعهای برداری پیوسته ۱۰.۴
۱۱۹	مثالهایی از تابعهای پیوسته ۱۱.۴
۱۲۰	پیوستگی و نقشهای معکوس مجموعه‌های باز یا بسته ۱۲.۴
۱۲۲	تابعهای پیوسته بر مجموعه‌های فشرده ۱۳.۴
۱۲۴	نگاشتهای توپولوژیک (همانسانها) ۱۴.۴
۱۲۵	قضیه بولتزانو ۱۵.۴
۱۲۷	همبندی ۱۶.۴
۱۲۹	مؤلفه‌های یک فضای متری ۱۷.۴
۱۳۰	همبندی کمانوار ۱۸.۴
۱۳۳	پیوستگی یکشکل ۱۹.۴
۱۳۴	پیوستگی یکشکل و مجموعه‌های فشرده ۲۰.۴
۱۳۵	قضیه نقطه ثابت برای انقباضها ۲۱.۴
۱۳۷	ناپیوستگیهای توابع حقیقی ۲۲.۴
۱۳۹	تابعهای یکنوا ۲۳.۴
۱۴۱	تمرین
	۵ مشتقها
۱۵۴	مقدمه ۱.۵
۱۵۴	تعریف مشتق ۲.۵
۱۵۵	مشتقها و پیوستگی ۳.۵
۱۵۷	جبر مشتقها ۴.۵
۱۵۸	قاعده زنجیره‌ای ۵.۵
۱۵۹	مشتقهای یکطرفی و مشتقهای نامتناهی ۶.۵
۱۶۰	توابع با مشتقهای ناصفر ۷.۵
۱۶۱	مشتقهای صفر و اکسترممهای موضعی ۸.۵
۱۶۲	قضیه رل ۹.۵
۱۶۲	قضیه مقدار میانگین برای مشتقها ۱۰.۵

صفحه	عنوان	
۱۶۴	قضیه مقدار میانی برای مشتقها	۱۱.۵
۱۶۶	دستور تیلور با باقیمانده	۱۲.۵
۱۶۸	مشتقهای توابع برداری	۱۳.۵
۱۶۹	مشتقهای جزئی	۱۴.۵
۱۷۱	مشتقگیری از تابعهای یک متغیر مختلط	۱۵.۵
۱۷۳	معادلههای کشی-ریمان	۱۶.۵
۱۷۷	تمرین	
تابعهای با تغییر کراندار و خمهای با درازای متناهی		
۱۸۷	مقدمه	۱.۶
۱۸۷	خاصیتهای توابع یکنوا	۲.۶
۱۸۸	تابعهای با تغییر کراندار	۳.۶
۱۹۱	تغییر کل	۴.۶
۱۹۲	خاصیت جمعپذیری تغییر کل	۵.۶
۱۹۳	تغییر کل بر $[a, x]$ به عنوان تابعی از x	۶.۶
۱۹۴	نمایش تابعهای با تغییر کراندار به صورت تفاضل تابعهای صعودی	۷.۶
۱۹۴	تابعهای با تغییر کراندار پیوسته	۸.۶
۱۹۶	خمها و گذرها	۹.۶
۱۹۷	گذرهای با درازای متناهی و درازای کمان	۱۰.۶
۱۹۹	خاصیتهای جمعپذیری و خاصیتهای پیوستگی درازای کمان	۱۱.۶
۲۰۰	هم‌ارزی گذرها. تغییر پرما	۱۲.۶
۲۰۱	تمرین	
انتگرال ریمان-اشتیل‌یس		
۲۰۷	مقدمه	۱.۷
۲۰۸	نمادگذاری	۲.۷
۲۰۹	تعریف انتگرال ریمان-اشتیل‌یس	۳.۷
۲۱۰	خاصیتهای خطی	۴.۷
۲۱۲	انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء	۵.۷
۲۱۳	تغییر متغیر در انتگرال ریمان-اشتیل‌یس	۶.۷
۲۱۵	تحویل انتگرال ریمان-اشتیل‌یس به انتگرال ریمان	۷.۷

صفحه	عنوان
۲۱۶	تابه‌های پله‌ای به عنوان انتگرال‌گیری
۲۱۸	تحویل انتگرال ریمان-اشتیل‌یس به مجموع متناهی
۲۲۰	دستور جمع‌بندی اویلر
۲۲۱	انتگرال‌گیری صعودی. انتگرال‌های بالائی و پائینی
۲۲۵	خاصیت‌های جمع‌پذیری و خطی انتگرال‌های بالائی و پائینی
۲۲۵	شرط ریمان
۲۲۷	قضیه‌های مقایسه‌ای
۲۲۹	انتگرال‌گیری‌های با تغییر کران‌دار
۲۳۳	شرط‌های کافی برای وجود انتگرال‌های ریمان-اشتیل‌یس
۲۳۳	شرط‌های لازم برای وجود انتگرال‌های ریمان-اشتیل‌یس
۲۳۴	قضیه‌های مقدار میانگین برای انتگرال‌های ریمان-اشتیل‌یس
۲۳۶	انتگرال به عنوان تابعی از بازه
۲۳۷	قضیهٔ اساسی دوم حساب انتگرال
۲۳۸	تغییر متغیر در انتگرال ریمان
۲۴۰	قضیهٔ دوم مقدار میانگین برای انتگرال‌های ریمان
۲۴۱	انتگرال‌های ریمان-اشتیل‌یس که به یک پرما بستگی دارند
۲۴۲	مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال
۲۴۳	تعویض ترتیب عمل انتگرال‌گیری
۲۴۵	محک لبگ برای وجود انتگرال‌های ریمان
۲۵۱	انتگرال‌های ریمان-اشتیل‌یس مختلط
۲۵۲	تمرین

۸ رشته‌های نامتناهی و حاصل‌ضربهای نامتناهی

۲۶۶	مقدمه	۱۰۸
۲۶۶	دنباله‌های همگرا و واگرای عددهای مختلط	۲۰۸
۲۶۷	حد اعلا و حد اسفل یک دنبالهٔ حقیقی	۳۰۸
۲۶۹	دنباله‌های یکنوای عددهای حقیقی	۴۰۸
۲۶۹	رشته‌های نامتناهی	۵۰۸
۲۷۲	درج و حذف کمانکها	۶۰۸
۲۷۳	رشته‌های متناوب	۷۰۸
۲۷۴	همگرایی مطلق و همگرایی مشروط	۸۰۸

صفحه	عنوان
۲۷۵	۹۰.۸ قسمت‌های حقیقی و موهومی یک رشته مختلط
۲۷۶	۱۰۰.۸ آزمون‌هایی برای همگرایی رشته‌های با جمله‌های مثبت
۲۷۶	۱۱۰.۸ رشته‌های هندسی
۲۷۷	۱۲۰.۸ آزمون انتگرال
۲۷۸	۱۳۰.۸ نمادهای اوی بزرگ و اوی کوچک
۲۷۹	۱۴۰.۸ آزمون نسبت و آزمون ریشه
۲۸۱	۱۵۰.۸ آزمون دیریکله و آزمون آبل
۲۸۲	۱۶۰.۸ مجموعه‌های جزئی رشته هندسی $\sum z^n$ بر دایره $ z = 1$ یکه
۲۸۳	۱۷۰.۸ تجدید آرایش رشته‌ها
۲۸۴	۱۸۰.۸ قضیه ریمان درباره رشته‌های همگرای مشروط
۲۸۶	۱۹۰.۸ زیر رشته‌ها
۲۸۸	۲۰۰.۸ دنباله‌های مضاعف
۲۸۹	۲۱۰.۸ رشته‌های مضاعف
۲۹۰	۲۲۰.۸ قضیه تجدید آرایش برای رشته‌های مضاعف
۲۹۲	۲۳۰.۸ شرطی کافی برای تساوی رشته‌های مکرر
۲۹۳	۲۴۰.۸ ضرب رشته‌ها
۲۹۶	۲۵۰.۸ مجموع پذیری چزارو
۲۹۷	۲۶۰.۸ حاصل ضرب‌بهای نامتناهی
۳۰۱	۲۷۰.۸ حاصل ضرب اویلر برای تابع زتای ریمان
۳۰۳	تمرین

۹ دنباله‌های توابع

۳۱۴	۱۰.۹ همگرایی نقطه‌وار دنباله‌های توابع
۳۱۵	۲۰.۹ مثالهایی از دنباله‌های توابع حقیقی
۳۱۷	۳۰.۹ تعریف همگرایی یکشکل
۳۱۹	۴۰.۹ همگرایی یکشکل و پیوستگی
۳۲۰	۵۰.۹ شرط کشی برای همگرایی یکشکل
۳۲۱	۶۰.۹ همگرایی یکشکل رشته‌های نامتناهی از تابعها
۳۲۲	۷۰.۹ یک خم فضا پرکن
۳۲۴	۸۰.۹ همگرایی یکشکل و انتگرالگیری ریمان-اشتیل‌یس

صفحه	عنوان
	۹.۹ دنبالهائی که همگرایی آنها یکشکل نیست ولی می توان از آنها جمله به جمله انتگرال گرفت
۳۲۶	۱۰.۹ همگرایی یکشکل و مشتقگیری
۳۲۹	۱۱.۹ شرطهای کافی برای همگرایی یکشکل یک رشته
۳۳۱	۱۲.۹ همگرایی یکشکل و دنباله های مضاعف
۳۳۳	۱۳.۹ همگرایی میانگینی
۳۳۳	۱۴.۹ رشته های توانی
۳۳۶	۱۵.۹ ضرب رشته های توانی
۳۴۱	۱۶.۹ قضیه جانسانی
۳۴۲	۱۷.۹ متقابل یک رشته توانی
۳۴۳	۱۸.۹ رشته های توانی حقیقی
۳۴۴	۱۹.۹ رشته تیلوری که از یک تابع تولید می شود
۳۴۵	۲۰.۹ قضیه برنشتاین
۳۴۷	۲۱.۹ رشته دو جمله ای
۳۴۹	۲۲.۹ قضیه حدی آبل
۳۵۰	۲۳.۹ قضیه تاو بر
۳۵۳	تمرین
۳۵۴	
	انتگرال لبگ ۱۰
	مقدمه ۱۰.۱۰
۳۶۲	۲۰.۱۰ انتگرال تابع پله ای
۳۶۳	۳۰.۱۰ دنباله های یکنوا از تابعهای پله ای
۳۶۵	۴۰.۱۰ تابعهای بالائی و انتگرالهای آنها
۳۶۸	۵۰.۱۰ تابعهای که انتگرال ریمان دارند به عنوان مثالهایی از تابعهای بالائی
۳۷۲	۶۰.۱۰ رده تابعهای که بریک بازه کلی انتگرال لبگ دارند
۳۷۴	۷۰.۱۰ خاصیتهای اساسی انتگرال لبگ
۳۷۵	۸۰.۱۰ انتگرالگیری لبگ و مجموعه های دارای اندازه صفر
۳۷۹	۹۰.۱۰ قضیه های همگرایی یکنوای لوی
۳۸۰	۱۰۰.۱۰ قضیه همگرایی تسلطی لبگ
۳۸۷	۱۱۰.۱۰ کاربردهای قضیه همگرایی تسلطی لبگ
۳۹۰	

صفحه

عنوان

۳۹۲	انتگرالهای لبگ بر بازه‌های بی کران به عنوان حدود انتگرالها	۱۲۰۱۰
۳۹۴	بر بازه‌های کراندار	
۳۹۹	انتگرالهای ریمان مجازی	۱۳۰۱۰
۴۰۱	تابعهای اندازه‌پذیر	۱۴۰۱۰
۴۰۴	پیوستگی تابعهائی که به وسیله انتگرالهای لبگ تعریف شده‌اند	۱۵۰۱۰
۴۰۹	مشقگیری زیر علامت انتگرال	۱۶۰۱۰
۴۱۳	تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری	۱۷۰۱۰
۴۱۶	مجموعه‌های اندازه‌پذیر بر خط حقیقی	۱۸۰۱۰
۴۱۶	انتگرال لبگ روی زیر مجموعه‌های دلخواه R	۱۹۰۱۰
۴۱۷	انتگرالهای لبگ تابعهای مختلط	۲۰۰۱۰
۴۱۸	حاصل ضربهای داخلی و هنجها	۲۱۰۱۰
۴۲۰	مجموعه $L^2(I)$ از تابعهائی که مرعبه‌ایشان انتگرالپذیرند	۲۲۰۱۰
۴۲۱	مجموعه $L^2(I)$ به عنوان یک فضای نیمه متری	۲۳۰۱۰
۴۲۲	قضیه همگرایی برای رشته‌های توابع در $L^2(I)$	۲۴۰۱۰
۴۲۴	قضیه ریس-فیشر	۲۵۰۱۰
	تمرین	

۱۱ رشته‌های فوریه و انتگرالهای فوریه

۴۳۶	مقدمه	۱۰۱۱
۴۳۶	دستگاههای توابع متعامد	۲۰۱۱
۴۳۷	قضیه بهترین تقریب	۳۰۱۱
۴۳۹	رشته فوریه یک تابع نسبت به یک دستگاه متعامد بهنجار	۴۰۱۱
۴۴۰	خواص ضربهای فوریه	۵۰۱۱
۴۴۲	قضیه ریس-فیشر	۶۰۱۱
۴۴۳	مسأله‌های همگرایی و نمایش برای رشته‌های مثلثاتی	۷۰۱۱
۴۴۴	لم ریمان-لبگ	۸۰۱۱
۴۴۶	انتگرالهای دیریکله	۹۰۱۱
۴۴۹	نمایش مجموعه‌های جزئی یک رشته فوریه به صورت انتگرال	۱۰۰۱۱
۴۵۱	قضیه تمرکز ریمان	۱۱۰۱۱
۴۵۲	شرطهای کافی برای همگرایی یک رشته فوریه در یک نقطه مخصوص	۱۲۰۱۱

صفحه	عنوان
۴۵۳	مجموعه پذیرى جزاى رسته‌هاى فوریه
۴۵۵	نتیجه‌هاى قضیه فجر
۴۵۶	قضیه تقریب و ایراشتراس
۴۵۷	شکلهای دیگر رسته فوریه
۴۵۸	قضیه انتگرال فوریه
۴۶۱	شکل نمائى قضیه انتگرال فوریه
۴۶۲	تبدیلهای انتگرالى
۴۶۴	پیچشها
۴۶۶	قضیه پیچش برای تبدیلهای فوریه
۴۶۹	دستور جمع‌بندى پواسن
۴۷۳	تمرین
حساب دیفرانسیل چند متغیره	
	۱۲
۴۸۶	مقدمه
۴۸۶	مشتق جهتی
۴۸۸	مشتقهای جهتی و پیوستگی
۴۸۹	مشتق کل
۴۹۱	بیان مشتق کل بر حسب مشتقهای جزئی
۴۹۲	کار بردی در تابعهای مختلط
۴۹۳	ماتریس یک تابع خطی
۴۹۶	ماتریس ژاکوبی
۴۹۷	قاعده زنجیره‌ای
۴۹۹	شکل ماتریسی قاعده زنجیره‌ای
۵۰۱	قضیه مقدار میانگین برای تابعهای مشتقپذیر
۵۰۴	شرطی کافی برای مشتقپذیری
۵۰۶	شرطی کافی برای تساوی مشتقهای جزئی مخلوط
۵۰۹	دستور تیلور برای تابعهای از R^n به R^1
۵۱۱	تمرین
تابعهای ضمنی و مسأله‌های اکسترمم	
	۱۳
۵۱۸	مقدمه
	۱۰۱۳

۵۲۰	توابع با دترمینانهای ژاکوبی ناصفر	۲۰۱۳
۵۲۵	قضیهٔ تابع معکوس	۳۰۱۳
۵۲۷	قضیهٔ تابع ضمنی	۴۰۱۳
۵۳۰	اکستریمهای توابع حقیقی یک متغیره	۵۰۱۳
۵۳۱	اکستریمهای توابع حقیقی چند متغیره	۶۰۱۳
۵۳۶	مسأله‌های اکستریم با شرطهای جنبی	۷۰۱۳
۵۴۲	تمرین	

۱۴ انتگرالهای ریمان چندگانه

۵۴۷	مقدمه	۱۰۱۴
۵۴۷	اندازهٔ یک بازهٔ کراندار در \mathbb{R}^n	۲۰۱۴
۵۴۸	انتگرال ریمان یک تابع کراندار که بر یک بازهٔ فشرده در \mathbb{R}^n تعریف شده باشد	۳۰۱۴
۵۵۱	مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر و محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان چندگانه	۴۰۱۴
۵۵۱	ارزیابی یک انتگرال چندگانه به وسیلهٔ انتگرالگیری مکرر	۵۰۱۴
۵۵۷	مجموعه‌های در \mathbb{R}^n که اندازهٔ ژردان دارند	۶۰۱۴
۵۶۰	انتگرالگیری چندگانه روی مجموعه‌هائی که اندازهٔ ژردان دارند	۷۰۱۴
۵۶۱	بیان محتوای ژردان به صورت انتگرال ریمان	۸۰۱۴
۵۶۱	خاصیت جمعپذیری انتگرال ریمان	۹۰۱۴
۵۶۳	قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای چندگانه	۱۰۰۱۴
۵۶۵	تمرین	

۱۵ انتگرالهای لبگ چندگانه

۵۷۰	مقدمه	۱۰۱۵
۵۷۱	تابعهای پله‌ای و انتگرالهای آنها	۲۰۱۵
۵۷۲	تابعهای بالائی و تابعهائی که انتگرال لبگ دارند	۳۰۱۵
۵۷۳	تابعهای اندازه‌پذیر و مجموعه‌های اندازه‌پذیر در \mathbb{R}^n	۴۰۱۵
۵۷۶	قضیهٔ تحویل فویننی برای انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای	۵۰۱۵
۵۷۸	بعضی از خواص مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر	۶۰۱۵
۵۸۱	قضیهٔ تحویل فویننی برای انتگرالهای مضاعف	۷۰۱۵
۵۸۴	آزمون تنلی-هابسن برای انتگرالپذیری	۸۰۱۵

صفحه	عنوان
۵۸۶	تبدیل‌های مختصات ۹۰۱۵
۵۹۱	دستور تبدیل برای انتگرال‌های چندگانه ۱۰۰۱۵
۵۹۲	برهان دستور تبدیل برای تبدیل‌های مختصات خطی ۱۱۰۱۵
۵۹۴	برهان دستور تبدیل برای تابع مشخص‌کننده یک مکعب فشرده ۱۲۰۱۵
۶۰۲	اتمام برهان دستور تبدیل ۱۳۰۱۵
۶۰۳	تمرین
	قضیه کشی و حساب باقیمانده ۱۶
۶۰۹	تابعهای تحلیلی ۱۰۱۶
۶۱۰	گذرها و خمها در صفحه مختلط ۲۰۱۶
۶۱۲	انتگرال‌های پیرامنی ۳۰۱۶
۶۱۴	انتگرال در امتداد یک گذر مستدیر به عنوان تابعی از شعاع آن ۴۰۱۶
۶۱۶	قضیه انتگرال کشی برای یک دایره ۵۰۱۶
۶۱۷	خمهای همجا ۶۰۱۶
۶۲۰	نامتغیر بودن انتگرال‌های پیرامنی باهمجائی ۷۰۱۶
۶۲۱	شکل کلی قضیه انتگرال کشی ۸۰۱۶
۶۲۲	دستور انتگرال کشی ۹۰۱۶
۶۲۳	عدد گردشی یک مدار بر حسب یک نقطه ۱۰۰۱۶
۶۲۵	بی‌کرانی مجموعه نقاطی که عدد گردششان صفر است ۱۱۰۱۶
۶۲۷	تابعهای تحلیلی که به وسیله انتگرال‌های پیرامنی تعریف شده‌اند ۱۲۰۱۶
۶۲۹	بسطهای تابعهای تحلیلی به صورت رشته‌های توانی ۱۳۰۱۶
۶۳۱	نامساویهای کشی. قضیه لیوویل ۱۴۰۱۶
۶۳۳	تنهائی صفرهای یک تابع تحلیلی ۱۵۰۱۶
۶۳۴	قضیه همانی برای تابعهای تحلیلی ۱۶۰۱۶
۶۳۵	ماکزیمم و مینیمم کالبد یک تابع تحلیلی ۱۷۰۱۶
۶۳۶	قضیه نگاشت باز ۱۸۰۱۶
۶۳۷	بسطهای لوران برای تابعهای تحلیلی در یک حلقه دایره ۱۹۰۱۶
۶۴۱	نقطه‌های استثنائی تنها ۲۰۰۱۶
۶۴۳	باقیمانده یک تابع در یک نقطه استثنائی تنها ۲۱۰۱۶
۶۴۴	قضیه باقیمانده کشی ۲۲۰۱۶
۶۴۵	شمارش صفرها و قطبها در یک ناحیه ۲۳۰۱۶

صفحه	عنوان
۶۴۶	ارزیابی انتگرالهای حقیقی به وسیلهٔ باقیمانده‌ها
۶۴۹	ارزیابی مجموع گاوس به وسیلهٔ حساب باقیمانده
۶۵۵	کاربرد قضیهٔ باقیمانده در دستور معکوس کردن برای تبدیل‌های لاپلاس
۶۵۸	نگاشتهای همشکلی
۶۶۰	تمرین
۶۷۵	فهرست علامتهای خاص
۶۷۹	واژه نامه فارسی به انگلیسی
۷۰۷	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۷۳۵	فهرست راهنما

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

دستگاههای اعداد حقیقی و مختلط

۱.۱ مقدمه

در آنالیز ریاضی مفهومی مورد مطالعه قرار می گیرند که بنحوی با عددهای حقیقی مربوط هستند، از این روی کار خود را در آن با بحثی از دستگاه عددهای حقیقی آغاز می کنیم.

روشهای متعدد برای معرفی عددهای حقیقی بکار می روند. در يك روش، در آغاز، عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، . . . به عنوان مفهومیهای تعریف نشده پذیرفته می شوند، و از آنها برای ساختن دستگاهی وسیعتر، که از عددهای گویای مثبت (خارج قسمتهای اعداد صحیح مثبت)، قرینههای آنها، و صفر تشکیل شده است، استفاده می شود. عددهای گویا، به نوبه خود، برای ساختن عددهای گنگ، یعنی عددهای حقیقی مانند $\sqrt{2}$ و π ، که گویا نیستند، بکار می روند. عددهای گویا و گنگ با هم دستگاه عددهای حقیقی را تشکیل می دهند.

هر چند این مطالب قسمت مهمی از بنیادهای ریاضیات را در بر می گیرند، اما در این جا از آنها بتفصیل صحبت نخواهد شد. در حقیقت، در اکثر نمودهای آنالیز تنها به خاصیتهای اعداد حقیقی توجه داریم، نه به روشهایی که برای ساختن آنها بکار رفته اند. بنا بر این، عددهای حقیقی را به عنوان چیزهای تعریف نشده ای اختیار می کنیم که در بعضی از اصلهای موضوع، که خاصیتهای دیگری از این عددها را نتیجه می دهند، صدق کنند. چون خواننده احتمالاً با اکثر خاصیتهای اعداد حقیقی، که در چند صفحه آینده بررسی خواهند شد، آشناست، نمایش این خاصیتها نسبتاً

باختصار برگزار می‌شود. مقصود از این کار این است که خاصیت‌های مهم عددها را از نظر بگذرانیم، و خواننده را متقاعد سازیم که، در صورت لزوم، می‌توان ریشه همه این خاصیتها را در اصلهای موضوع یافت. تفصیل بیشتری را می‌توان در کتابهای مرجع، که در انتهای این فصل از آنها یاد می‌شود، بدست آورد.

برای آسان کردن کار، برخی از نمادها و اصطلاحهای مقدماتی نظریه مجموعه‌ها را بکار می‌بریم. فرض کنیم S مجموعه‌ای (دسته‌ای از چیزها) باشد. نماد $x \in S$ یعنی x در مجموعه S است، و وقتی می‌نویسیم $x \notin S$ یعنی x در S نیست.

مجموعه S را یک زیرمجموعه T می‌نامیم، و می‌نویسیم $S \subseteq T$ ، در صورتی که هر چیز که در S است در T نیز باشد. مجموعه‌ای که دست کم حاوی یک چیز باشد ناتهی نامیده می‌شود.

فرض کنیم مجموعه ناتهی R ، متشکل از چیزهایی به نام عددهای حقیقی، وجود داشته باشد که در ده اصل موضوع زیر صدق کند. این اصلهای موضوع به طور طبیعی به سه گروه تقسیم می‌شوند، که از آنها به عنوان اصلهای موضوع میدان، اصلهای موضوع ترتیب، و اصل موضوع تاهیت (که اصل موضوع کوچکترین کران بالائی یا اصل موضوع پیوستگی نیز نامیده می‌شود) یاد می‌کنیم.

۲.۱ اصلهای موضوع میدان

علاوه بر مجموعه عددهای حقیقی R ، فرض می‌کنیم دو عمل، به نامهای جمع و ضرب، وجود داشته باشند بقسمی که به ازای هر جفت از عددهای حقیقی مانند x و y ، مجموع $x + y$ و حاصل ضرب xy عددهائی حقیقی باشند که به طور منحصر بفرد به وسیله x و y مشخص شوند، و در اصلهای موضوع زیر صدق کنند. (در این اصلها، x ، y ، z و نمایشگر عددهای حقیقی دلخواه می‌باشند، مگر این که خلاف آن گفته شود.)

اصل موضوع ۱ $xy = yx$ ، $x + y = y + x$ (قانونهای تعویض پذیری).

اصل موضوع ۲ $x(yz) = (xy)z$ ، $x + (y + z) = (x + y) + z$ (قانونهای شرکت پذیری).

اصل موضوع ۳ $x(y + z) = xy + xz$ (قانون پخش پذیری).

اصل موضوع ۴ به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ، عددی حقیقی مانند z هست که $x + z = y$. این z با $y - x$ نشان داده می‌شود؛ عدد $x - x$ را با 0 نشان می‌دهیم. (می‌توان ثابت کرد که 0 از x مستقل است.) به جای $x - 0$ می‌نویسیم x ، $0 - x$ را قرینه x می‌نامیم.

اصل موضوع ۵ دست کم یک عدد حقیقی $x \neq 0$ وجود دارد. هرگاه x و y دو عدد حقیقی باشند و $x \neq 0$ ، آنگاه عددی حقیقی مانند z وجود دارد قسمی که $xz = y$. این z را با y/x نشان می‌دهیم؛ عدد x/x با ۱ نشان داده می‌شود، و می‌توان ثابت کرد که ۱ مستقل از x است. اگر $x \neq 0$ ، به جای $1/x$ می‌نویسیم x^{-1} و x^{-1} را متقابل x می‌نامیم.

از این اصلهای موضوع می‌توان همهٔ قانونهای متداول در حساب را نتیجه گرفت؛ مثلاً، $-(-x) = x$ ، $(x^{-1})^{-1} = x$ ، $-(x-y) = y-x$ ، $x - y = x + (-y)$ (برای تفصیل بیشتر، ر. ک. کتاب مرجع ۰.۱.۱)

۳.۱ اصلهای موضوع ترتیب

همچنین فرض می‌کنیم رابطه‌ای مانند $<$ وجود داشته باشد که میان عددهای حقیقی ترتیبی برقرار کند، و این رابطه در اصلهای موضوع زیرین صدق نماید:

اصل موضوع ۶ فقط یکی از رابطه‌های $x = y$ ، $x < y$ ، $x > y$ برقرار باشد. تبصره. $x > y$ و $y < x$ دارای یک معنی هستند.

اصل موضوع ۷ هرگاه $x < y$ ، آنگاه به‌ازای هر z ، $x + z < y + z$.

اصل موضوع ۸ هرگاه $x > 0$ و $y > 0$ ، آنگاه $xy > 0$.

اصل موضوع ۹ هرگاه $x > y$ و $y > z$ ، آنگاه $x > z$.

تبصره. عدد حقیقی x را مثبت گوئیم اگر $x > 0$ ، و منفی نامیم اگر $x < 0$. مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مثبت را با \mathbf{R}^+ ، و مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی منفی را با \mathbf{R}^- نشان می‌دهیم.

از این اصلهای موضوع می‌توان قاعده‌هایی را که در عمل با نامساویها متداول هستند بدست آورد. مثلاً، هرگاه $x < y$ ، آنگاه چنانچه z مثبت باشد $xz < yz$ ، حال آن‌که به‌ازای z منفی $xz > yz$. همچنین، هرگاه $x > y$ و $z > w$ و در آنها y و w هر دو مثبت باشند، آنگاه $xz > yw$. (برای بحث کاملی از این قواعد، ر. ک. کتاب مرجع ۰.۱.۱)

تبصره. علامت $x \leq y$ را به‌عنوان شکل اختصاری عبارت

$$\langle x = y \text{ یا } x < y \rangle$$

بکار می‌بریم. پس $2 \leq 3$ زیرا $2 < 3$ ؛ و $2 \leq 2$ زیرا $2 = 2$. علامت \geq نیز

به نحو مشابه بکار برده می‌شود. عدد حقیقی x را نامنفی گوئیم در صورتی که $x \geq 0$. جفتی از نامساویهای همزمان مانند $x < y$ و $y < z$ را معمولاً به صورت خلاصه‌تر $x < y < z$ می‌نویسیم.

قضیهٔ زیر، که نتیجهٔ ساده‌ای از اصلهای موضوع پیشگفته است، غالباً در برهانها در آنالیز بکار برده می‌شود.

قضیهٔ ۱.۱ هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند بقسمی که

$$(1) \quad \text{به‌ازای هر } \varepsilon > 0, \quad a \leq b + \varepsilon$$

آنگاه $a \leq b$.

برهان. هرگاه $b < a$ ، آنگاه نامساوی (۱) به‌ازای $\varepsilon = (a - b)/2$ نقض می‌شود زیرا

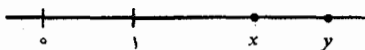
$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a.$$

بنابراین، بنا بر اصل موضوع ۶ باید $a \leq b$.

اصل موضوع ۱۰، یعنی اصل موضوع تامیت، در بخش ۱۱.۱ توصیف خواهد شد.

۴.۱ نمایش هندسی عددهای حقیقی

عددهای حقیقی غالباً به‌شکل هندسی به‌صورت نقطه‌هایی بر يك خط (به‌نام خط حقیقی یا محور حقیقی) نمایش داده می‌شوند. همان‌طور که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است، نقطه‌ای بر این خط برای نمایش ۰ و نقطه‌ای دیگر برای نمایش ۱ انتخاب می‌شوند. این انتخاب مقیاس را مشخص می‌کند. طبق مجموعهٔ مناسبی از اصلهای موضوع برای هندسهٔ اقلیدسی، هر نقطه بر خط حقیقی متناظر با يك، و فقط يك، عدد حقیقی است و، برعکس، هر عدد حقیقی با يك، و فقط يك، نقطه بر خط حقیقی نمایش داده می‌شود. رسم بر این است که به‌جای «نقطهٔ نمایندهٔ عدد حقیقی x » گفته شود «نقطهٔ x ».



شکل ۱.۱

رابطهٔ ترتیبی تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. اگر $x < y$ ، همان‌طور که در شکل

۱.۱ نشان داده شده است، نقطه x در طرف چپ نقطه y قرار دارد. عددهای مثبت در طرف راست o ، و عددهای منفی در طرف چپ o واقعند. اگر $a < b$ ، نقطه‌ای مانند x در نامساویهای $a < x < b$ وقتی، و فقط وقتی، صدق می‌کند که x بین a و b باشد.

۵.۱ بازه‌ها

مجموعه همه نقطه‌های بین a و b بازه نامیده می‌شود. گاهی تمایز بین بازه‌هایی که نقطه‌های انتهایی خود را در بر داشته باشند و بازه‌هایی که چنین نباشند اهمیت دارد.

نمادگذاری. نماد $\{x \mid P\}$ در P صدق می‌کند $\{x \mid$ یعنی مجموعه همه عددهای حقیقی x که در خاصیت P صدق کنند.

تعریف ۲.۱ فرض کنیم $a < b$. بازه باز $]a, b[$ با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}.$$

بازه بسته $[a, b]$ عبارت است از مجموعه $\{x \mid a \leq x \leq b\}$. به طریق مشابه می‌توان با بکار بردن نامساویهای $a < x \leq b$ و $a \leq x < b$ ، بترتیب، بازه‌های نیمباز $]a, b]$ و $[a, b[$ را تعریف کرد. بازه‌های نامتناهی به صورت‌های زیرند:

$$]a, +\infty[= \{x \mid x > a\}, [a, +\infty[= \{x \mid x \geq a\},$$

$$]-\infty, a[= \{x \mid x < a\},]-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}.$$

گاهی خط حقیقی \mathbb{R} به‌عنوان بازه باز $]-\infty, +\infty[$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین، یک نقطه به‌عنوان یک بازه بسته «تبه شده» تلقی می‌گردد.

تبره. علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ عددهای حقیقی نیستند، و در این‌جا صرفاً برای سهولت در نمادگذاری بکار می‌روند. بعداً دستگاه عددهای حقیقی را بقسمی وسعت می‌دهیم که این دو علامت را در برگیرد. ولی تا انجام این عمل، همه عددهای حقیقی «متناهی» می‌باشند.

۶.۱ عددهای صحیح

در این بخش زیرمجموعه بخصوصی از \mathbb{R} ، به نام مجموعه عددهای صحیح، را توصیف می‌کنیم. پیش از این که عددهای صحیح را تعریف کنیم، برای سهولت ابتدا مفهوم مجموعه استقرائی را معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۳.۱ مجموعه‌ای از عددهای حقیقی یک مجموعه استقرائی نامیده می‌شود که دارای دو خاصیت زیرین باشد:

(آ) عدد ۱ در این مجموعه باشد؛

(ب) به‌ازای هر x در این مجموعه، عدد $x + 1$ نیز در مجموعه باشد.

مثلاً، \mathbb{R} يك مجموعه استقرائی است همچنین مجموعه \mathbb{R}^+ . حال عدد های صحیح مثبت را آن عددهای حقیقی تعریف می‌کنیم که متعلق به هر مجموعه استقرائی باشند.

تعریف ۴.۱ يك عدد حقیقی عدد صحیح مثبت نامیده می‌شود در صورتی که این عدد به‌همراه مجموعه استقرائی تعلق داشته باشد. مجموعه عددهای صحیح مثبت را به \mathbb{Z}^+ نشان می‌دهیم.

مجموعه \mathbb{Z}^+ خود يك مجموعه استقرائی است. این مجموعه حاوی عدد ۱، عدد $1 + 1$ (که با ۲ نشان داده می‌شود)، عدد $1 + 2$ (که با ۳ نشان داده می‌شود)، و مانند اینها، می‌باشد. چون \mathbb{Z}^+ زیرمجموعه هر مجموعه استقرائی است، \mathbb{Z}^+ را به‌عنوان کوچکترین مجموعه استقرائی تلقی می‌کنیم. گاهی این خاصیت \mathbb{Z}^+ را اصل استقرا می‌نامند. فرض ما این است که خواننده با اثبات قضایا به وسیله استقرا، که براین اصل استوار است، آشنا باشد. (ر. ک. کتاب مرجع ۱.۱). مثالهایی از چنین اثباتها در بخش آینده داده می‌شوند.

قرینه‌های اعداد صحیح مثبت را عددهای صحیح منفی می‌نامند. عددهای صحیح مثبت، به‌انضمام عددهای صحیح منفی و (صفر)، تشکیل مجموعه‌ای مانند \mathbb{Z} می‌دهند که ما آن را مجموعه عددهای صحیح می‌نامیم.

۷.۱ قضیه یکتائی تجزیه برای عددهای صحیح

اگر n و d عددهائی صحیح باشند و عدد صحیحی مانند c وجود داشته باشد بقسمی که $n = cd$ ، می‌گوئیم d يك مقسوم علیه n است، یا n مضرب d است از d ، و می‌نویسیم $d | n$ (بخوانید: d عاد می‌کند n را). عدد صحیح n را اول نامیم در صورتی که $n > 1$ و تنها مقسوم علیه‌های مثبت آن عبارت باشند از ۱ و n . هرگاه $n > 1$ و n اول نباشد، آنگاه آن را مرکب می‌نامند. عدد صحیح ۱ نه اول است و نه مرکب.

در این بخش نتایجی مقدماتی درباره تجزیه عددهای صحیح گرفته، سپس به کمک آنها قضیه یکتائی تجزیه را، که به قضیه اساسی حساب نیز معروف است، ثابت می‌کنیم.

بنابر قضیه اساسی: (۱) هر عدد صحیح $n > 1$ را می توان به صورت حاصل-ضرب سازه‌های اول درآورد، و (۲) این تجزیه، صرف نظر از ترتیب سازه‌ها، منحصر-بفرد می باشد. اثبات قسمت (۱) آسان است.

قضیه ۵.۱ هر عدد صحیح $n > 1$ یا اول است یا حاصل ضرب چند عدد اول.

برهان. روش استقرا بر n را بکار می بریم. قضیه برای $n = 2$ واضح است. فرض کنیم قضیه برای هر عدد صحیح k ، که $1 < k < n$ ، درست باشد. اگر n اول نباشد، دارای مقسوم علیه مثبتی مانند d ، که $1 < d < n$ ، خواهد بود. بنابراین $n = cd$ ، که در آن $1 < c < n$. چون c و d هر دو کوچکتر از n اند، هر یک یا اول است یا به صورت حاصل ضرب چند عدد اول خواهد بود؛ پس n به صورت حاصل ضرب عدد هائی اول است.

قبل از اثبات قسمت (۲)، یعنی یکتائی تجزیه، چند مفهوم دیگر را معرفی می کنیم.

اگر $d|a$ و $d|b$ ، می گوئیم d یک مقسوم علیه مشترك a و b است. بنابر قضیه زیر، هر جفت از عددهای صحیح مانند a و b دارای مقسوم علیه مشتركی است، که ترکیبی خطی از a و b می باشد.

قضیه ۶.۱ هر جفت از عددهای صحیح مانند a و b دارای مقسوم علیه مشتركی است مانند d به شکل

$$d = ax + by,$$

که در آن x و y عددهائی صحیح هستند. بعلاوه، هر مقسوم علیه مشترك a و b این d را عاد می کند.

برهان. ابتدا فرض می کنیم $a \geq 0$ و $b \geq 0$ ، و روش استقرا را بر $n = a + b$ بکار می بریم. هر گاه $n = 0$ ، آنگاه $a = b = 0$ ، و می توان d را مساوی صفر گرفت و فرض کرد که $x = y = 0$. حال فرض کنیم قضیه برای $0, 1, 2, \dots, n-1$ ثابت شده باشد. بنابر تقارن، می توان فرض کرد که $a \geq b$. اگر $b = 0$ ، قرار می دهیم $d = a$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ؛ اگر $b \geq 1$ چون مجموع $a - b$ و b مساوی a است و $a = n - b \leq n - 1$ ، پس می توان فرض استقرا را در مورد $a - b$ و b بکار برد. بنابراین، $a - b$ و b مقسوم علیه مشتركی مانند d به شکل $d = (a - b)x + by$ دارند. این d عدد $(a - b) + b = a$ را نیز عاد می کند، پس d یک مقسوم علیه مشترك a و b است و $d = ax + (y - x)b$ ، یعنی d ترکیبی خطی از a و b می باشد. برای تمام کردن برهان لازم است نشان دهیم که هر مقسوم علیه مشترك a و b عاد می کند

را. چون هر مقسوم علیه مشترك a و b هريك از a و b را عاد می کند، پس این مقسوم- علیه ترکیب خطی $ax + (y - x)b = d$ را نیز عاد خواهد کرد. پس قضیه برای حالت $a \geq 0$ و $b \geq 0$ برقرار است. اگر یکی یا هر دوی a و b منفی باشند، کافی است نتیجه ای را که هم اکنون بدست آمد در مورد $|a|$ و $|b|$ بکار ببریم.

تبره. هر گاه d يك مقسوم علیه مشترك a و b به شکل $d = ax + by$ باشد، آنگاه $d -$ نیز يك مقسوم علیه مشترك است با همان شکل، زیرا

$$-d = a(-x) + b(-y).$$

از این دو مقسوم علیه مشترك آن را که نامنفی است بزرگترین مقسوم علیه مشترك a و b نامیده بانماد (a, b) بمعنی یا، فقط با (a, b) ، نشان می دهیم. هر گاه $(a, b) = 1$ ، آنگاه a و b را نسبت به هم اول گویند.

قضیه ۷.۱ (لم اقلیدس). هرگاه $a|bc$ و $(a, b) = 1$ ، آنگاه $a|c$.

برهان. چون $(a, b) = 1$ ، می توان نوشت $ax + by = 1$. بنابراین،

$$c = acx + bcy.$$

اما $a|acx$ و $a|bcy$ پس $a|c$.

قضیه ۸.۱ هرگاه عدد اولی مانند p حاصل ضرب ab را عاد کند، آنگاه $p|a$ یا $p|b$. به طوری کلی، هرگاه عدد اولی مانند p حاصل ضرب $a_1 \cdot \dots \cdot a_k$ را عاد کند، آنگاه p دست کم یکی از سازه‌ها را عاد خواهد کرد.

برهان. فرض کنیم $p|ab$ و p عاد نکند a را. هر گاه ثابت کنیم که $(p, a) = 1$ ، آنگاه از لم اقلیدس نتیجه می شود که $p|b$. برای این کار قرار می دهیم $d = (p, a)$. چون $d|p$ ، پس $d = 1$ یا $d = p$. d نمی تواند مساوی p باشد زیرا $d|a$ ولی p عاد نمی کند a را. بنابراین $d = 1$. برای اثبات حالت کلیتر قضیه، روش استقرا را بر k ، یعنی تعداد سازه‌ها، بکار می ببریم. توضیح مفصل آن به خواننده واگذار می شود.

قضیه ۹.۱ (قضیه یکنائی تجزیه). هر عدد صحیح $n > 1$ را می توان، صرف نظر از ترتیب سازه‌ها، فقط به یک طریق به صورت حاصل ضرب عددهائی اول نشان داد.

برهان. روش استقرا بر n را بکار می ببریم. قضیه برای $n = 2$ درست است. اکنون فرض کنیم قضیه برای همه عددهای صحیح بزرگتر از ۱ و کوچکتر از n درست باشد. اگر n اول باشد، قضیه ثابت است. بنابراین، فرض کنیم n مرکب بوده به دو صورت متمایز به سازه‌های اول تجزیه شود، یعنی

$$(۲) \quad n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_t$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $t = s$ ، و هر p مساوی یکی از q هاست. چون p_1 حاصل-ضرب $q_1 q_2 \dots q_t$ را عاد می‌کند، دست کم یکی از سازه‌های آن را عاد خواهد کرد. با دادن برچسب مجدد به q ها در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد که $p_1 | q_1$. چون p_1 و q_1 هر دو اولند، پس $p_1 = q_1$. در رابطه (۲) p_1 را از دو طرف حذف می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \dots p_s = q_2 \dots q_t.$$

چون n مرکب است، $1 < n/p_1 < n$ ؛ از این روی با توجه به فرض استقرا نتیجه می‌شود که دو تجزیه n/p_1 ، صرف نظر از ترتیب سازه‌ها، یکی هستند. بنابراین، دو تجزیه موجود در رابطه (۲) نیز، صرف نظر از ترتیب سازه‌ها، یکی هستند و برهان تمام است.

۸.۱ عددهای گویا

خارج قسمتهای اعداد صحیح مانند a/b ($b \neq 0$) را عددهای گویا می‌نامند. مثلاً، $1/2$ ، $5/7$ ، $-$ ، و 6 عددهائی گویا هستند. مجموعه عددهای گویا با \mathbb{Q} نشان داده می‌شود. این مجموعه \mathbb{Z} را به عنوان یک زیرمجموعه در بر می‌گیرد. باید توجه داشت که همه اصلهای موضوع میدان و اصلهای موضوع ترتیب در مورد \mathbb{Q} برقرار می‌باشند.

فرض می‌کنیم خواننده با بعضی از خاصیت‌های مقدماتی عددهای گویا آشنا باشد. مثلاً، اگر a و b عددهائی گویا باشند، میانگین آنها، یعنی $(a+b)/2$ ، نیز گویا است و بین a و b قرار دارد. بنابراین، بین هر دو عدد گویا تعدادی نامتناهی عدد گویا وجود دارد. این وضع ایجاب می‌کند که اگر عدد گویای معینی داده شده باشد، درباره عدد گویای «بی فاصله بعد از آن» توان سخن گفت.

۹.۱ عددهای گنگ

عددهای حقیقی که گویا نباشند گنگ نامیده می‌شوند. مثلاً، عددهای $\sqrt{2}$ ، e ، π ، و e^π گنگ هستند.

معمولاً اثبات گنگ بودن يك عدد بخصوص کار چندان آسانی نیست. مثلاً، برهان ساده‌ای برای گنگ بودن e^π وجود ندارد. اما اثبات گنگ بودن بعضی از عددها مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ چندان دشوار نمی‌باشد. در حقیقت، با آسانی قضیه آتی را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱ هرگاه n عدد صحیح مثبتی فرض شود و n مربع کامل نباشد، آنگاه \sqrt{n}

گنگ است.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم n در تجزیه خود سازه مربعی بزرگتر از ۱ نداشته باشد. \sqrt{n} را گویا فرض می‌کنیم و با تناقضی روبرو می‌شویم. فرض می‌کنیم $\sqrt{n} = a/b$ ، که در آن a و b دو عدد صحیح بی‌سازه مشترک باشند. در این صورت $nb^2 = a^2$ چون طرف چپ این معادله مضربی است از n ، پس a^2 نیز مضربی از n خواهد بود. اما، اگر a مضربی از n باشد، چون n سازه مربعی بزرگتر از ۱ ندارد، پس a خود نیز مضربی از n می‌باشد. (با تجزیه a به سازه‌های اول باسانی متوجه این مطلب می‌توان شد.) یعنی $a = cn$ ، که در آن c عددی است صحیح. در این صورت، معادله $nb^2 = a^2$ به شکل $nb^2 = c^2n^2$ یا $b^2 = nc^2$ ، در می‌آید. به همان دلیل معلوم می‌شود که b نیز باید مضربی از n باشد. پس a و b هر دو مضربی از n هستند، و این مخالف فرض نداشتن سازه مشترک آنهاست. پس اگر n سازه مربعی بزرگتر از ۱ نداشته باشد، برهان تمام است.

اگر n دارای سازه مربع باشد، می‌توان نوشت $n = m^2k$ ، که در آن $k > 1$ و k دارای سازه مربعی بزرگتر از ۱ نیست. در این صورت $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$ ؛ و اگر \sqrt{n} گویا بود، عدد \sqrt{k} نیز گویا می‌بود، و این خلاف مطلبی است که هم اکنون ثابت گردید.

برای اثبات گنگ بودن e دلیلی از نوع دیگری لازم است. (فرض می‌کنیم خواننده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با تابع نمائی e^x و نمایش آن به صورت یک رشته نامتناهی آشنا باشد.)

قضیه ۱۱.۱ هرگاه

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

آنگاه عدد e گنگ است.

برهان. ثابت می‌کنیم که e^{-1} گنگ است. رشته متناظر e^{-1} یک رشته متناوب است. در این رشته قدر مطلق جمله‌ها رفته رفته نزول می‌کند. در یک چنین رشته متناوبی، اگر در جمله m توقف کنیم، خطائی که مرتکب شده‌ایم دارای علامت جبری اولین جمله‌ای است که از آن صرف نظر می‌شود، و قدر مطلق این خطا از قدر مطلق اولین جمله صرف نظر شده کوچکتر است. از این روی، اگر $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!$ ، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!}.$$

پس به ازای هر عدد صحیح $k \geq 1$

$$(3) \quad 0 < (2k - 1)! (e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}$$

اما $s_{2k-1}!(2k-1)$ همواره عددی است صحیح. پس هرگاه e^{-1} گویا می بود، آنگاه می توانستیم k را آن قدر بزرگ اختیار کنیم که $e^{-1}!(2k-1)$ نیز عددی صحیح باشد. بنا بر رابطه (۳)، تفاضل این دو عدد صحیح عددی بین 0 و $1/2$ است، و چنین چیزی ممکن نیست. بنا براین، e^{-1} ، و در نتیجه e ، نمی تواند گویا باشد.

تبصره. برای اثبات گنگ بودن π ، ر. ک. تمرین ۳۳۰۷.

یونانیان باستان در پانصد سال قبل از میلاد مسیح به وجود عددهای گنگ پی برده بودند، اما نظریه رضایت بخشی درباره عددهای گنگ تا اواخر قرن نوزدهم عرضه نشده بود. در آن زمان سه نظریه متفاوت به وسیله کانتور، دکیندا، و ویراشتراس عرضه شدند. برای مطالعه ای در نظریه های دکیندا و کانتور و هم ارز بودن آنها، ر. ک. کتاب مرجع ۶.۱.

۱۰.۱ کرانه های بالائی، عنصر ما کزیمیم، کوچکترین کران بالائی (سوپریمم)

در جبر وقتی که برای حل برخی معادلات درجه دوم تلاش می کنیم به عددهای گنگ برمی خوریم. مثلاً، می خواهیم عددی حقیقی مانند x داشته باشیم بقسمی که $x^2 = 2$. از نه اصل موضوع یاد شده در بالا نمی توان وجود یک چنین x را در R ثابت کرد، زیرا این ۹ اصل موضوع در مورد Q نیز صادق هستند، و ما ثابت کرده ایم که عدد گویائی وجود ندارد که مربع آن ۲ باشد. به کمک اصل موضوع تامیت می توان عددهای گنگ را در دستگاه عددهای حقیقی معرفی نمود. این اصل به دستگاه عددهای حقیقی خاصیت پیوستگی می بخشد، و این خاصیت اساس بسیاری از قضیه ها در آنالیز است. قبل از توصیف اصل موضوع تامیت، برای تسهیل کار، اصطلاحها و نمادهای دیگری را معرفی می کنیم.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم K مجموعه ای از عددهای حقیقی باشد. هرگاه عددی حقیقی مانند b وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر x در K رابطه $x \leq b$ برقرار باشد، آنگاه b را یک کران بالائی برای K می نامیم و می گوئیم که K از بالا به b کراندار است.

می گوئیم یک کران بالائی، زیرا هر عدد بزرگتر از b نیز یک کران بالائی

است برای S . هرگاه کران بالائی b عضو S هم باشد، آنگاه آن را بزرگترین عضو یا عنصر ماکزیمم S می‌نامیم. حداکثر یک عضو مانند b می‌تواند وجود داشته باشد. در صورت وجود می‌نویسیم

$$b = \max S.$$

هر مجموعه‌ای را که کرانی بالائی نداشته باشد از بالا بی‌کران می‌نامند. اصطلاحهای کران پایینی، ازپائین کراندار، کوچکترین عضو (یا عنصر مینیمم) را می‌توان به نحو مشابه تعریف کرد. اگر S عنصر مینیمم داشته باشد، آن را به $\min S$ نشان می‌دهیم.

چند مثال

۱. مجموعه $+\infty[0, +\infty[$ از بالا بی‌کران است. این مجموعه کران بالائی و عنصر ماکزیمم ندارد. از پائین به ۰ کراندار است ولی عنصر مینیمم ندارد.

۲. بازه بسته $S = [0, 1]$ از بالا به ۱، و از پائین به ۰، کراندار است. در واقع، $\max S = 1$ و $\min S = 0$.

۳. بازه نیمباز $S = [0, 1[$ از بالا به ۱ کراندار است ولی عنصر ماکزیمم ندارد. عنصر مینیمم این مجموعه ۰ است.

برای مجموعه‌هایی شبیه به مجموعه مثال ۳، که از بالا کراندار باشند اما عنصر ماکزیمم نداشته باشند، مفهومی را می‌توان جایگزین مفهوم ماکزیمم نمود. این مفهوم کوچکترین کران بالائسی یا سوپرهم مجموعه نامیده و بدین صورت تعریف می‌شود:

تعریف ۱۳-۱ فرض کنیم S مجموعه‌ای از عددهای حقیقی، و از بالا کراندار باشد. عدد حقیقی b را یک کوچکترین کران بالائی برای S نامیم در صورتی که b دارای این دو خاصیت باشد:

(آ) b یک کران بالائی برای S باشد؛

(ب) هیچ عدد کوچکتر از b یک کران بالائی برای S نباشد.

چند مثال. اگر $S = [0, 1]$ ، عنصر ماکزیمم، یعنی ۱، یک کوچکترین کران بالائی برای S نیز هست. اگر $S = [0, 1[$ ، عدد ۱ یک کوچکترین کران بالائی برای S است، هرچند S عنصر ماکزیمم ندارد.

به‌عنوان تمرینی ساده، می‌توان ثابت کرد که یک مجموعه دارای دو کوچکترین کران بالائسی متفاوت نیست. بنابراین، اگر یک کوچکترین کران بالائسی برای S

وجود داشته باشد، فقط یکی است و می توانیم از کوچکترین کران بالائی مجموعه سخن بگوئیم.

معمولاً به کوچکترین کران بالائی يك مجموعه اصطلاح مختصرتر سوپرمم، با نماد اختصاری \sup ، اطلاق می شود. ما این اصطلاح را می پذیریم، و برای آن که نشان دهیم b سوپرمم S است می نویسیم

$$b = \sup S.$$

هر گاه S عنصر ما کزیم داشته باشد، آنگاه $\max S = \sup S$. بزرگترین کران پائینی، یا اینفیمم S ، که با نماد $\inf S$ نشان داده می شود، دارای تعریفی مشابه است.

۱۱.۱ اصل موضوع تامیت

آخرین اصل موضوع ما برای دستگاه عددهای حقیقی متضمن مفهوم سوپرمم است. اصل موضوع ۱۵ هر مجموعه ناتهی S از عددهای حقیقی که از بالا کراندار باشد سوپرمم دارد؛ یعنی، عددی حقیقی مانند b وجود دارد قسمی که $b = \sup S$. از این اصل نتیجه می شود که هر مجموعه ناتهی از عددهای حقیقی که از پائین کراندار باشد دارای اینفیمم است.

۱۲.۱ چند خاصیت سوپرمم

در این بخش درباره چند خاصیت اساسی سوپرمم که در این کتاب درسی مورد استفاده خواهند بود بحث می کنیم. مشابه این خاصیتها برای اینفیمم وجود دارند، و خواننده می تواند آنها را برای خود تنظیم نماید. اولین خاصیت نشان می دهد که هر مجموعه سوپرمم دار حاوی عضوهای به قدر کافی نزدیک به سوپرمم خود می باشد.

قضیه ۱۴.۱ (خاصیت تقریب). فرض کنیم S مجموعه ای ناتهی از عددهای حقیقی، و دارای سوپرمم باشد، مثلاً، $b = \sup S$. در این صورت، به ازای هر $a < b$ ، $x \in S$ هست قسمی که

$$a < x \leq b.$$

پرهان. اولاً، به ازای هر $x \in S$ ، $x \leq b$. هر گاه به ازای هر x در S داشته باشیم $x \leq a$ ، آنگاه a يك کران بالائی برای S کوچکتر از کوچکترین کران بالائی خواهد بود. بنابراین، دست کم يك x در S که به ازای آن $x > a$ وجود دارد.

قضیه ۱۵.۱ (خاصیت جمعپذیری). فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی R باشند، و C مجموعه

$$C = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$$

باشد. هرگاه A و B هر دو سوپرم داشته باشند، آنگاه C نیز سوپرم دارد و

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

برهان. قرار می‌دهیم $a = \sup A$ و $b = \sup B$. هرگاه $z \in C$ ، آنگاه $z = x + y$ که در آن $x \in A$ و $y \in B$ ، پس، $z = x + y \leq a + b$ ، بنابراین، $a + b$ یک کران بالائی برای C است. پس C سوپرم دارد، مثلاً $c = \sup C$ ، لذا $c \leq a + b$. حال نشان می‌دهیم که $a + b \leq c$. برای این کار $\varepsilon > 0$ دلخواهی اختیار می‌کنیم. بنا بر قضیه ۱۴.۱، $x \in A$ و $y \in B$ وجود دارند بقسمی که

$$a - \varepsilon < x \text{ و } b - \varepsilon < y$$

از جمع این دو نامساوی بدست می‌آید

$$a + b - 2\varepsilon < x + y \leq c.$$

بنابراین، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $a + b < c + 2\varepsilon$ ، پس، بنا بر قضیه ۱.۱،

$$a + b \leq c$$

اثبات قضیه زیر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۱۶.۱ (خاصیت مقایسه‌ای). فرض کنیم S و T دو زیرمجموعه ناتهی R باشند بقسمی که به ازای هر $s \in S$ و هر $t \in T$ ، $s \leq t$ ، هرگاه T سوپرم داشته باشد، آنگاه S نیز سوپرم دارد و

$$\sup S \leq \sup T.$$

۱۳.۱. خاصیت‌هایی از عددهای صحیح که از اصل موضوع تامیت نتیجه می‌شوند
قضیه ۱۷.۱ مجموعه Z^+ متشکل از عددهای صحیح مثبت ۱، ۲، ۳، ... از بالا بی‌کران است.

برهان. هرگاه Z^+ از بالا کراندار باشد، آنگاه Z^+ باید سوپرم داشته باشد، مثلاً $a = \sup Z^+$. بنا بر قضیه ۱۴.۱، به ازای یک $n \in Z^+$ ، خواهیم داشت $a - 1 < n$. بنابراین، به ازای این n ، $n + 1 > a$. چون $n + 1 \in Z^+$ ، پس a نمی‌تواند سوپرم Z^+ باشد، و این ناقض فرض اول ما است.

قضیه ۱۸.۱ به‌ازای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بقسمی که $n > x$.

برهان. اگر حکم صحیح نباشد، برخلاف آنچه در قضیه ۱۷.۱ ثابت شد، عددی مانند x یک کران بالایی برای \mathbb{Z}^+ خواهد بود.

۱۴.۱ خاصیت ارشمیدسی دستگاه عددهای حقیقی

قضیه زیرین خاصیت ارشمیدسی دستگاه عدد های حقیقی را توصیف می‌کند. از نظر هندسی، این خاصیت به ما می‌گوید که هر پاره خط را، هر قدر هم دراز باشد، می‌توان با تعدادی متناهی پاره خط که درازای آنها مساوی عدد مثبت مفروضی است پوشانید، هر قدر هم که این عدد کوچک باشد.

قضیه ۱۹.۱ اگر $x > 0$ و y عدد حقیقی دلخواهی باشد، عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد بقسمی که $nx > y$.

برهان. از قضیه ۱۸.۱ درحالی که در آن y/x به جای x گذارده شده باشد استفاده کنید.

۱۵.۱ عددهای گویا با نمایش اعشاری متناهی

هر عدد حقیقی به شکل

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

را، که در آن a_0 عددی صحیح و نامنفی باشد و a_1, a_2, \dots, a_n عدد هائی صحیح باشند و در رابطه $0 \leq a_i \leq 9$ صدق کنند، معمولاً به صورت ساده‌تر

$$r = a_0.a_1a_2 \dots a_n$$

نوشته، آن را یک نمایش اعشاری متناهی r می‌نامیم. مثلاً،

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \quad \frac{1}{50} = \frac{2}{10^2} = 0.02,$$

$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 7.25.$$

عددهای حقیقی که به شکل بالا نموده شوند لزوماً گویا هستند. در واقع، همه آنها به شکل $r = a/10^n$ می‌باشند، که در آن a عددی است صحیح. اما باید توجه داشت

که همه عددهای گویا را نمی‌توان به صورت اعشاری متناهی نمایش داد. مثلاً، اگر $\frac{1}{3}$ نمایش اعشاری متناهی داشته باشد، باید به ازای عدد صحیح مانند a بتوان نوشت $\frac{1}{3} = a/10^n$ یا $3a = 10^n$. اما این ممکن نیست زیرا ۳ هیچ توانی از ۱۰ را عا د نمی‌کند.

۱۶.۱ تقریب عددهای حقیقی به عددهای اعشاری متناهی

در این بخش، با استفاده از اصل موضوع تامیت، نشان می‌دهیم که عددهای حقیقی را می‌توان با هر درجه‌ای از دقت به عددهای گویای دارای نمایش اعشاری متناهی نزدیک کرد.

قضیه ۲۰.۱ فرض کنیم که $x \geq 0$ در این صورت، به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ یک عدد اعشاری متناهی مانند $r_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ وجود دارد قسمی که

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

برهان. فرض می‌کنیم S مجموعه همه عددهای صحیح نامنفی نایبتر از x باشد. چون $0 \in S$ ، پس S تهی نیست. همچنین، S از بالا به x کراندار است. بنابراین، S سوپرمم دارد. مثلاً $a_0 = \sup S$. با آسانی معلوم می‌شود که $a_0 \in S$ ، پس a_0 عددی صحیح و نامنفی است. a_0 را بزرگترین عدد صحیح در x نامیده، می‌نویسیم $a_0 = [x]$ واضح است که

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

حال فرض می‌کنیم $a_1 = [10x - 10a_0]$ ، یعنی a_1 مساوی بزرگترین عدد صحیح در $10x - 10a_0$ باشد. چون

$$0 \leq 10x - 10a_0 = 10(x - a_0) < 10,$$

نتیجه می‌گیریم که $0 \leq a_1 \leq 9$ و $a_1 + 1 > 10x - 10a_0 \geq a_1$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، a_1 بزرگترین عدد صحیحی است که در نامساویهای

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$$

صدق می‌کند.

به‌طور کلی، پس از انتخاب a_1, \dots, a_{n-1} ، که در آنها $0 \leq a_i \leq 9$ ، a_n را بزرگترین جواب صحیح نامساویهای

$$(۴) \quad a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

فرض می‌کنیم. در این صورت $0 \leq a_n \leq 9$ ، و با فرض $r_n = a_0.a_1a_2 \dots a_n$ نتیجه می‌شود که

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

و برهان قضیه تمام است. بآسانی می‌توان تحقیق کرد که x عملاً مساوی سوپریم مجموعه عددهای گویای r_1, r_2, \dots می‌باشد.

۱۷.۱ نمایشهای اعشاری نامتناهی عددهای حقیقی

عددهای صحیح a_0, a_1, a_2, \dots را که از برهان قضیه ۲۰.۱ حاصل شده‌اند می‌توان برای تعریف نمایش اعشاری نامتناهی x بکار برد. منظور از رابطه

$$x = a_0.a_1a_2 \dots$$

این است که a_n بزرگترین عدد صحیحی است که در نامساویهای (۴) صدق می‌کند. مثلاً، اگر $x = 1/8$ را در نظر بگیریم، بدست می‌آوریم

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5,$$

و به ازای هر $n \geq 4$ ، $a_n = 0$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\frac{1}{8} = 0.125000 \dots$$

اگر در رابطه‌های (۴) جای دو علامت \leq و $<$ را با یکدیگر عوض کنیم، تعریف بسط اعشاری بالا تغییر مختصری می‌کند. در این تعریف جدید با وجود آن که r_n ها در رابطه $r_n < x \leq r_n + 10^{-n}$ صدق می‌کنند، ولی رقمهای a_0, a_1, a_2, \dots لزوماً همانهایی که از (۴) بدست می‌آیند نخواهند بود. مثلاً، اگر تعریف دوم را در مورد $x = 1/8$ بکار ببریم، نمایش اعشاری نامتناهی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{8} = 0.124999 \dots$$

امکان نمایش اعشاری يك عدد حقیقی به دو صورت متفاوت صرفاً انعکاس این واقعیت است که دو مجموعه مختلف از عددهای حقیقی می‌توانند دارای يك سوپریم باشند.

۱۸.۱ قدر مطلقها و نامساوی مثلثی

در آنالیز محاسبات با نامساویها مکرر مورد پیدا می‌کند. این محاسبات وقتی که با

مفهوم قدر مطلق سروکار داشته باشیم دارای اهمیت خاصی خواهند بود. اگر x عددی حقیقی باشد، قدر مطلق آن با $|x|$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می-گردد:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \text{ اگر}$$

یک نامساوی اساسی در مورد قدر مطلقها در قضیه زیر بیان می شود:

قضیه ۲۱.۱ هرگاه $a \geq 0$ ، آنگاه نامساوی $|x| \leq a$ وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که $-a \leq x \leq a$.

پرهان. از تعریف $|x|$ معلوم می شود که چون $x = |x|$ یا $x = -|x|$ ، پس $|x| \leq x \leq |x|$ - هرگاه فرض کنیم که $|x| \leq a$ ، آنگاه می توان نوشت $|x| \leq a$ ؛ پس نیمی از قضیه باثبات رسید. برعکس، فرض کنیم که $-a \leq x \leq a$. در این صورت اگر $x \geq 0$ ، داریم $|x| = x \leq a$ ، حال آن که اگر $x < 0$ ، داریم $|x| = -x \leq a$. در هر حالت $|x| \leq a$ ، و قضیه اثبات شده است.

قضیه بالا را می توان برای اثبات نامساوی مثلثی بکار برد.

قضیه ۲۲.۱ به ازای هر دو عدد حقیقی دلخواه x و y ،

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ (نامساوی مثلثی).}$$

پرهان. داریم $|x| \leq x \leq |x|$ و $-|y| \leq y \leq |y|$. از جمع این دو نامساوی نتیجه می شود که $|x| + |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ - بنابراین، با توجه به قضیه ۲۱.۱، $|x + y| \leq |x| + |y|$ ، و حکم ثابت است. نامساوی مثلثی غالباً به شکل های دیگر بکار می رود. مثلاً، اگر در قضیه ۲۲.۱ فرض کنیم که $x = a - c$ و $y = c - b$ ، خواهیم داشت

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

همچنین، از قضیه ۲۲.۱ معلوم می شود که $|x + y| - |y| \leq |x|$. با فرض $x = a + b$ و $y = -b$ ، داریم

$$|a + b| \geq |a| - |b|.$$

و نیز با تعویض a و b خواهیم داشت $|a + b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$ و در نتیجه

$$|a + b| \geq ||a| - |b||.$$

بعلاوه، به استقرا، می توان تعمیم نامساویهای بالا، یعنی رابطه های زیرین، را ثابت کرد:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geq |x_1| - |x_2| - \dots - |x_n|.$$

۱۹.۱ نامساوی کوشی - شوارتز

اکنون نامساوی دیگری را که غالباً در آنالیز بکار می رود بدست می آوریم.

قضیه ۲۳.۱ (نامساوی کوشی-شوارتز). اگر a_1, \dots, a_n و b_1, \dots, b_n عدد های حقیقی دلخواهی باشند،

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

بعلاوه، اگر دست کم یکی از a_i ها صفر نباشد، تساوی وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که عددی حقیقی مانند x باشد بقسمی که به ازای هر

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad a_k x + b_k = 0.$$

برهان. چون مجموع مربعات چند عدد هرگز منفی نیست، پس به ازای هر عدد حقیقی x ،

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

و این رابطه وقتی، و فقط وقتی، تساوی است که هر جمله آن صفر باشد. این نامساوی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

که در آن

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

اگر $A > 0$ ، با قرار دادن $x = -B/A$ در نامساوی بالا رابطه $B^2 - AC \leq 0$ حاصل می شود، که همان نامساوی مطلوب است. در حالت $A = 0$ اثبات نامساوی کاری است بسیار ساده.

تیمبره. اگر $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ دو بردار n بعدی باشند، نامساوی کوشی - شوارتز به شکل برداری زیر در می آید:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2,$$

که در آن

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، و $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ درازای \mathbf{a} است.

۲۰.۱ به علاوه بی نهایت و منهای بی نهایت و دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته \mathbf{R}^*

اکنون با اضافه کردن دو «نقطه فرضی» به دستگاه عددهای حقیقی آن را وسعت می‌دهیم. این دو نقطه را با علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ («به علاوه بی نهایت» و «منهای بی نهایت») نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۴.۱ منظور از دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته \mathbf{R}^* مجموعه عددهای حقیقی \mathbf{R} به انضمام دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ است که دارای خاصیت‌های زیرین باشند:

(آ) هرگاه $x \in \mathbf{R}$ ، آنگاه

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty,$$

$$x - (+\infty) = -\infty, \quad x - (-\infty) = +\infty,$$

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

(ب) هرگاه $x > 0$ ، آنگاه

$$x(+\infty) = +\infty, \quad x(-\infty) = -\infty.$$

(ج) هرگاه $x < 0$ ، آنگاه

$$x(+\infty) = -\infty, \quad x(-\infty) = +\infty.$$

(د) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

$$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

(ه) هرگاه $x \in \mathbf{R}$ ، آنگاه $-\infty < x < +\infty$.

نمادگذاری. مجموعه R را با $+\infty$ و $-\infty$ ، و مجموعه R^* را با $[\infty, -\infty]$ نشان می‌دهیم. نقطه‌های R را «متناهی» نامند تا از دو نقطه «نامتناهی» $+\infty$ و $-\infty$ تمیز داده شوند.

بکار گرفتن علامتهای $+\infty$ و $-\infty$ صرفاً برای سهولت است. مثلاً، هرگاه $+\infty$ را سوپریم هر مجموعه از عددهای حقیقی از بالا بی کران تعریف کنیم، آنگاه هر زیرمجموعه ناتهی R سوپریمی در R^* دارد. با این تعریف، اگر مجموعه‌ای از بالا کراندار باشد، سوپریم متناهی، و اگر از بالا بی کران باشد، سوپریم نامتناهی خواهد داشت. به نحو مشابه، $-\infty$ را مساوی اینفیم هر مجموعه از عددهای حقیقی از پائین بی کران تعریف می‌کنیم. در این صورت، هر زیرمجموعه ناتهی R دارای اینفیمی است در R^* .

برای انجام کارهایی در مبحث حدها، که بعداً خواهد آمد، جای آن است که اصطلاحهای زیرین را نیز معرفی نماییم.

تعریف ۲۵.۱ هر بازه باز مانند $[a, +\infty)$ یا $]-\infty, a]$ یک همسایگی $+\infty$ یا یک همسایگی به مرکز $+\infty$ ، نامیده می‌شود. هر بازه باز مانند $]-\infty, a]$ یا یک همسایگی $-\infty$ یا یک گوی به مرکز $-\infty$ ، نامند.

۲۱.۱ عددهای مختلط

بنابر اصلهای موضوع حاکم بر رابطه $<$ ، مربع يك عدد حقیقی هیچ گاه منفی نیست. از این روی، مثلاً، معادله درجه دوم ساده $x^2 = -1$ جوابی در مجموعه عددهای حقیقی ندارد. برای تأمین جواب این گونه معادلات نوع جدیدی از عددها، به نام عددهای مختلط، ابداع شده است. با ابداع عددهای مختلط، معادلات جبری کلی به شکل

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0,$$

که در آنها ضریبهای a_0, a_1, \dots, a_n عددهای حقیقی دلخواهند، دارای جواب خواهند بود. (این مطلب به نام قضیه اساسی جبر معروف است.)

اینک عددهای مختلط را تعریف نموده آنها را بتفصیل مورد بحث قرار

می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱ منظور از يك عدد مختلط جفت مرتبی است از عددهای حقیقی،

مانند (x_1, x_2) . اولین عضو، یعنی x_1 ، قسمت حقیقی، و دومین عضو، یعنی x_2 ، قسمت موهومی عدد مختلط نامیده می‌شود. دو عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ را وقتی، فقط وقتی، متساوی گوئیم که $x_1 = y_1$ و $x_2 = y_2$.

در این صورت می نویسیم $y = x$ مجموع $x + y$ و حاصل ضرب xy را با رابطه های زیرین تعریف می کنیم:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad xy = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

تصوره. مجموعه همه عددهای مختلط به \mathbb{C} نشان داده خواهد شد.

قضیه ۲۷.۱ عملهای جمع و ضرب، که در بالا تعریف شده اند، در قانونهای تعویض پذیری، شرکت پذیری، و بخش پذیری صدق می کنند.

برهان. فقط قانون بخش پذیری را ثابت می کنیم؛ اثبات قانونهای دیگر آسانتر است. هرگاه $x = (x_1, x_2)$ ، $y = (y_1, y_2)$ ، و $z = (z_1, z_2)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_1 z_1 - x_2 y_2 - x_2 z_2, x_1 y_2 + x_1 z_2 \\ &\quad + x_2 y_1 + x_2 z_1) \\ &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &\quad + (x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

قضیه ۲۸.۱

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2)(0, 0) = (0, 0),$$

$$(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0).$$

برهان. رابطه های بالا و همچنین قضیه های ۲۹.۱، ۳۰.۱، ۳۲.۱ و ۳۳.۱ نتیجه های مستقیم تعریف بالا هستند.

قضیه ۲۹.۱ به ازای دو عدد مختلط مفروض $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ عدد مختلطی مانند z هست بقسمی که $x + z = y$ در حقیقت،

$$z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2).$$

این z را با $x - y$ نشان می دهیم. عدد مختلط $(-x_1, -x_2)$ با $-x$ نشان داده می شود.

قضیه ۳۰.۱ به ازای هر دو عدد مختلط x و y ،

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

تعریف ۳۱.۱ اگر $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ و y دو عدد مختلط باشند، تعریف می کنیم $x^{-1} = [x_1 / (x_1^2 + x_2^2), -x_2 / (x_1^2 + x_2^2)]$ و $y/x = yx^{-1}$.

قضیه ۳۳.۱ اگر x و y دو عدد مختلط باشند و $(0, 0) \neq x$ ، عدد مختلطی مانند z هست که $zx = y$ ، یعنی $z = yx^{-1}$.

عملهائی که بر عددهای مختلط با قسمت موهومی ۰ انجام می گیرند بخصوص جالب توجه هستند.

$$\text{قضیه ۳۳.۱} \quad (x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0)$$

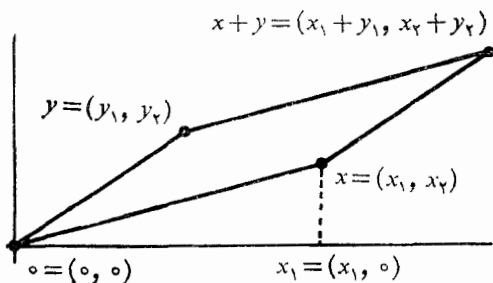
$$(x_1, 0)(y_1, 0) = (x_1 y_1, 0),$$

$$\text{اگر } y_1 \neq 0 \quad (x_1, 0)/(y_1, 0) = (x_1/y_1, 0)$$

تبره. از قضیه ۳۳.۱ معلوم می شود که برای انجام عملهای حسابی بر عددهای مختلطی که قسمت موهومی آنها صفر باشد کافی است این عملها را فقط بر قسمتهای حقیقی آنها انجام داد. بنا بر این، عددهای مختلط به شکل $(x, 0)$ دارای خاصیتهای حسابی عددهای حقیقی هستند. بدین دلیل، روا است که دستگاه عددهای حقیقی را حالت خاصی از دستگاه عددهای مختلط انگاشته، عدد مختلط $(x, 0)$ را همان عدد حقیقی x بگیریم. بنا بر این، می نویسیم $x = (x, 0)$. در حالت خاص، $(0, 0) = 0$ و $(1, 0) = 1$.

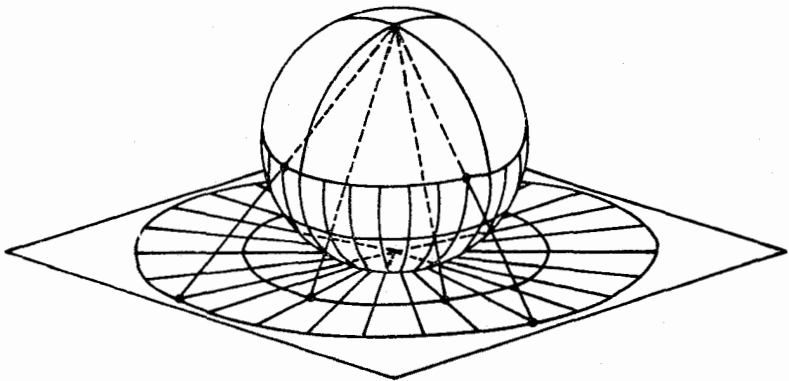
۲۲.۱ نمایش هندسی عددهای مختلط

همانطور که عددهای حقیقی به صورت هندسی به وسیله نقاط بر يك خط نمایش داده می شوند، عددهای مختلط را نیز می توان به وسیله نقاط در يك صفحه نشان داد. عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ را می توان به عنوان «نقطه» ای با مختصات (x_1, x_2) در نظر گرفت. با چنین فرضی، تعریف جمع عددهای مختلط همان قانون متوازی الاضلاع در مورد جمع دو بردار در صفحه خواهد بود. (ر. ک. شکل ۲.۱).



شکل ۲.۱

اندیشهٔ بیان عددهای مختلط به طریق هندسی به وسیلهٔ نقاط بر یک صفحه در سال ۱۷۹۹ توسط گاوس^۱ در رساله‌اش ارائه گردید. همین عمل، مستقلاً، به وسیلهٔ آرگان^۲ در سال ۱۸۰۶ انجام شد. گاوس بعداً اصطلاح تاحدی نامناسب «عدد مختلط» را ابداع کرد. تعبیرهای هندسی دیگری نیز برای عددهای مختلط وجود دارند. مثلاً، به جای بکار بردن نقاط صفحه، می‌توان نقاط سطحهای دیگری را بکار گرفت. ریمان^۳ دریافت که مخصوصاً نقاط کره برای این منظور مفیدند. نقاط کره به مرکز قطب شمال روی صفحهٔ مماس بر کره در قطب جنوب تصویر می‌شوند. بنا بر این، هر نقطهٔ صفحه متناظر است با نقطهٔ معینی از کره. غیر از قطب شمال، هر نقطهٔ دیگر کره فقط متناظر با یک نقطه از صفحه خواهد بود. این تناظر را تصویر جسمینما می‌نامیم. (ر. ک. شکل ۳.۱)



شکل ۳.۱

۲۳.۱ یکة موهومی

اغلب، برای سهولت، عدد مختلط (x_1, x_2) را به‌عنوان برداری دوبعدی بامؤلفه‌های x_1 و x_2 در نظر می‌گیریم. در این صورت، جمع دو عدد مختلط براساس تعریف ۲۶.۱، همان جمع مؤلفه به مؤلفهٔ دو بردار خواهد بود. عدد مختلط $(1, 0) = 1$ نقش بردار یکة در امتداد افقی را دارد. ذیلاً^۱ مشابه این بردار را در امتداد قائم معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۲۴.۱ عدد مختلط $(1, 0)$ را با i نشان داده آن را یکة موهومی می‌نامیم.

1. Gauss

2. Argand

3. Riemann

قضیه ۳۵.۱ هر عدد مختلط $x = (x_1, x_2)$ را می‌توان به شکل $x = x_1 + ix_2$ نمایش داد.

برهان. $x_1 = (x_1, 0)$ ، $x_2 = (0, x_2)$ ، $ix_2 = (0, 1)(x_2, 0) = (0, x_2)$

$$x_1 + ix_2 = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2).$$

قضیه زیرین نشان می‌دهد که عدد مختلط i جواب معادله $x^2 = -1$ می‌باشد.

قضیه ۳۶.۱ $i^2 = -1$

برهان. $i = (0, 1)$ ، $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

۲۴.۱ قدر مطلق يك عدد مختلط

حال مفهوم قدر مطلق را به دستگاه عددهای مختلط وسعت می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱ اگر $x = (x_1, x_2)$ ، کالبد، یا قدر مطلق، x عددی است حقیقی و نامنفی. این عدد با $|x|$ نشان داده شده با رابطه

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۳۸.۱

یکم) $|(0, 0)| = 0$ ، و اگر $x \neq 0$ ، $|x| > 0$

دوم) $|xy| = |x| |y|$

سوم) اگر $y \neq 0$ ، $|x/y| = |x|/|y|$

چهارم) $|(x_1, 0)| = |x_1|$

برهان. گزاره‌های (یکم) و (چهارم) بآسانی ثابت می‌شوند. برای اثبات (دوم)، می‌نویسیم

$$x = x_1 + ix_2 \text{ و } y = y_1 + iy_2$$

پس

$$xy = x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

گزاره (دوم) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2 |y|^2. \end{aligned}$$

معادله (سوم) را از (دوم) با نوشتن عبارت (دوم) به شکل $|x| = |y| |x/y|$ می توان نتیجه گرفت.

از جنبه هندسی، $|x|$ نمایشگر درازای پاره خط واصل بین مبدأ و نقطه x است. به طور کلی، $|x - y|$ مساوی فاصله بین دو نقطه x و y می باشد. با در نظر گرفتن این تعبیر هندسی، قضیه زیر بیان می کند که درازای یک ضلع هر مثلث از مجموع درازاهای دو ضلع دیگر کوچکتر است.

قضیه ۳۹.۱ هرگاه x و y دو عدد مختلط باشند، آنگاه

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{نامساوی مثلثی}).$$

اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

۲۵.۱ ترتیب ناپذیری عددهای مختلط

تاکنون رابطه ای به شکل $x < y$ بین دو عدد مختلط دلخواه x و y تعریف نکرده ایم، به دلیل آن که ممکن نیست که در دستگاه عددهای مختلط برای $<$ تعریفی قائل شد که واجد همه خاصیت های اصول موضوع ۶ تا ۸ باشد. برای مصورساختن این مطلب، فرض کنیم قادر به تعریف رابطه ای مانند $<$ باشیم که در اصل های موضوع ۶، ۷، ۸ و صدق کند. در این صورت، چون $0 \neq i$ ، بنا بر اصل موضوع ۶، باید $0 > i$ یا $0 < i$. اگر $0 > i$ انگاشته شود، با انتخاب $x = y = i$ از اصل موضوع ۸ نتیجه می گیریم که $0 > i^2$ ، یا $0 > -1$. با توجه به اصل موضوع ۷، عدد ۱ را به دو طرف نامساوی اخیر اضافه می کنیم، نتیجه می شود که $1 > 0$. از سوی دیگر، با بکار بردن اصل موضوع ۸ در مورد نامساوی $0 > -1$ ، خواهیم داشت $0 > 1$. بنابراین هم $1 > 0$ و هم $0 > 1$ ، که بنا بر اصل موضوع ۶ چنین وضعی ناممکن است. از این روی، فرض $0 > i$ منجر به تناقض می شود. [چرا نامساوی $0 > -1$ قبلاً یک تناقض نبود؟] با بیانی مشابه می توان نامساوی $0 < i$ را باطل کرد. بنابراین، عددهای مختلط را نمی توان بقسمی مرتب نمود که در اصل های موضوع ۶، ۷، و ۸ صدق کند.

۲۶.۱ عددهای نمائی مختلط

تابع نمائی e^x (x حقیقی) پیشتر ذکر شده است. حال می خواهیم e^z را به ازای z های مختلط بقسمی تعریف کنیم که خاصیت های عمده تابع نمائی حقیقی را حفظ کند. خاصیت های اصلی e^x ، وقتی که x حقیقی باشد، عبارتند از قانون نماها، یعنی $e^x e^y = e^{x+y}$ و رابطه $e^0 = 1$. e^z را به ازای z های مختلط چنان تعریف

می‌کنیم که این خاصیتها را حفظ کند و نیز، وقتی که z حقیقی باشد، e^z تحویل به تابع نمائی معمولی گردد.

هرگاه بنویسیم $z = x + iy$ (x و y حقیقی)، آنگاه برای برقرار بودن قانون نماها لازم می‌آید که $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. بنا بر این، فقط باقی می‌ماند که e^{iy} را تعریف کنیم.

تعریف ۴۰.۱ اگر $z = x + iy$ ، $e^z = e^{x+iy}$ را مساوی با عدد مختلط $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ تعریف می‌کنیم.

بنا بر این تعریف، وقتی که z حقیقی باشد (یعنی، $y = 0$)، همان تابع نمائی حقیقی است. در زیر ثابت می‌شود که قانون نماها برای e^z نیز برقرار است.

قضیه ۴۱.۱ هرگاه $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

پروهان.

$$e^{z_1} = e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1), \quad e^{z_2} = e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2),$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2} [\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)].$$

چون x_1 و x_2 هر دو حقیقی هستند، پس $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$. همچنین

$$\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 = \cos (y_1 + y_2)$$

و

۱. دلایل متعدد برای موجه بودن معادله $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ وجود دارند. مثلاً، فرض کنیم که $e^{iy} = f(y) + ig(y)$ ، و منظور پیدا کردن تابعهای حقیقی f و g باشد بقسمی که قواعد متداول تابعهای نمائی حقیقی در مورد تابعهای نمائی مختلط نیز برقرار باشند. اگر فرض کنیم که $(e^{iy})' = ie^{iy}$ ، با مشتقگیری صوری خواهیم داشت $e^{iy} = g'(y) - if'(y)$. با مقایسهٔ مقدارهای e^{iy} از دو رابطه، ملاحظه می‌شود که f و g باید در معادله‌های $f(y) = g'(y)$ و $f'(y) = -g(y)$ صدق کنند. با حذف g بین این دو معادله نتیجه می‌شود که $f(y) = -f''(y)$. چون می‌خواهیم $e^0 = 1$ ، پس باید $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$. از این جا نتیجه می‌شود که $f(y) = \cos y$ و $f'(y) = -g(y) = \sin y$. البته بحث بالا چیزی را ثابت نمی‌کند، ولی قویاً این فکر را القا می‌کند که تعریف $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ تعریفی است مناسب.

$$\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2 = \sin (y_1 + y_2),$$

پس

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} [\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)] = e^{z_1 + z_2}.$$

۲۷.۱ خاصیت‌های دیگر عددهای نمائی مختلط

در قضیه‌های زیر z ، z_1 ، z_2 عددهای مختلط هستند.

قضیه ۴۲.۱ e^z هیچ‌گاه صفر نیست.

برهان. چون $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ ، پس e^z نمی‌تواند صفر باشد.

قضیه ۴۳.۱ هرگاه x حقیقی باشد، آنگاه $|e^{ix}| = 1$.

برهان. $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ، و $|e^{ix}| > 0$.

قضیه ۴۴.۱ $e^z = 1$ وقتی، و فقط وقتی، که z مضرب صحیحی از $2\pi i$ باشد.

برهان. هرگاه به‌ازای عدد صحیحی مانند n داشته باشیم $z = 2\pi i n$ ، آنگاه

$$e^z = \cos (2\pi n) + i \sin (2\pi n) = 1.$$

برعکس، فرض کنیم که $e^z = 1$. از این فرض نتیجه می‌شود که $e^x \cos y = 1$ و $e^x \sin y = 0$. چون $e^x \neq 0$ ، باید داشته باشیم $\sin y = 0$ ، یعنی به‌ازای عدد صحیحی مانند k ، $y = k\pi$ ، ولی $\cos(k\pi) = (-1)^k$. چون $e^x \cos(k\pi) = 1$ ، پس $e^x = (-1)^k$. از این که $e^x > 0$ معلوم می‌شود که k باید زوج باشد. بنابراین $e^x = 1$ ، و در نتیجه $x = 0$. پس قضیه باثبات می‌رسد.

قضیه ۴۵.۱ $e^{z_1} = e^{z_2}$ وقتی، و فقط وقتی، که به‌ازای عدد صحیحی مانند n داشته

$$z_1 - z_2 = 2\pi i n$$

برهان. $e^{z_1} = e^{z_2}$ وقتی، و فقط وقتی، که $e^{z_1 - z_2} = 1$.

۲۸.۱ شناسهٔ یک عدد مختلط

اگر نقطهٔ $z = (x, y) = x + iy$ با مختصات قطبی r و θ نشان داده شده باشد، می‌توان نوشت $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$. بنا براین

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta = re^{i\theta}.$$

دو عدد r و θ یک z منحصر بفرد مشخص می‌سازند. متقابلاً، عدد مثبت r به‌وسیلهٔ z مشخص می‌شود و منحصر بفرد است؛ درحقیقت، $r = |z|$. اما، z زاویهٔ θ را

بر حسب مضر بی از 2π معین می‌کند. تعدادی نامتناهی مقدار برای θ وجود دارد که همه در معادله‌های $x = |z| \cos \theta$ و $y = |z| \sin \theta$ صدق می‌کنند، و البته تفاضل هر دو مقدار θ مضر بی از 2π است. هر یک از این مقادیر θ شناسه z نامیده می‌شود، ولی یکی از این مقادیر را انتخاب نموده و آن را شناسه عمده z می‌نامیم.

تعریف ۴۶.۱ فرض کنیم که $z = x + iy$ عدد مختلط ناصفری باشد. عدد حقیقی منحصر بفرد θ را که در شرطهای

$$x = |z| \cos \theta, y = |z| \sin \theta, -\pi < \theta \leq +\pi$$

صدق کند شناسه عمده z نامیده با $\theta = \arg(z)$ نشان می‌دهیم.

از بحث بالا قضیه زیر بی‌درنگ نتیجه می‌شود:

قضیه ۴۷.۱ هر عدد مختلط $z \neq 0$ را می‌توان به شکل $z = re^{i\theta}$ نشان داد، که در آن $r = |z|$ و $\theta = \arg(z) + 2\pi n$ (n هر عدد صحیحی می‌تواند باشد).

تبره. این روش نمایش عددهای مختلط، مخصوصاً وقتی که با ضرب و تقسیم این عددها سروکار داشته باشیم، بسیار مفید است، زیرا

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{و} \quad (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

قضیه ۴۸.۱ هرگاه $z_1 z_2 \neq 0$ ، آنگاه

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2),$$

که در آن

$$n(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq +\pi \\ +1 & , \quad -2\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi \\ -1 & , \quad \pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq 2\pi \end{cases}$$

برهان. می‌نویسیم $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ و $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ ، که در آنها

$$\theta_1 = \arg(z_1) \quad \text{و} \quad \theta_2 = \arg(z_2)$$

در این صورت $z_1 z_2 = |z_1 z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ چون

$$-\pi < \theta_1 \leq +\pi \quad \text{و} \quad -\pi < \theta_2 \leq +\pi$$

خواهیم داشت $-2\pi < \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$. بنابراین، عدد صحیحی مانند n هست قسمی که $-\pi < \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n \leq \pi$. این n همان عدد صحیح $n(z_1, z_2)$ مذکور در قضیه است، و به ازای این n ، $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi n$ پس

حکم ثابت است.

۲۹.۱ توانهای صحیح و ریشه‌های اعداد مختلط

تعریف ۲۹.۱ اگر z عددی مختلط و n عدد صحیح مفروضی باشند، توان z^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z^0 = 1, \text{ و اگر } n \geq 0, z^{n+1} = z^n z,$$

$$\text{اگر } z \neq 0 \text{ و } n > 0, z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

قضیه ۲۹.۱.۵۰.۱ را، که بیان‌کننده قانونهای متداول توانهاست، می‌توان به کمک استقرای ریاضی ثابت کرد. اثبات به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۲۹.۱.۵۰.۱ اگر m, n دو عدد صحیح مفروضی باشند، به‌ازای $z \neq 0$

$$z^m z^n = z^{m+n} \text{ و } (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

قضیه ۲۹.۱.۵۱.۱ هرگاه $z \neq 0$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه دست n عدد مختلط متمایز مانند z_0, z_1, \dots, z_{n-1} (به نام ریشه‌های z^n) وجود دارند بقسمی که

$$\text{به‌ازای هر } k = 0, 1, 2, \dots, n-1, z_k^n = z.$$

بعلاوه، این ریشه‌ها از دست‌های زیرین بدست می‌آیند:

$$z_k = Re^{i\phi_k}, \text{ که در آن } R = |z|^{1/n} \text{ و}$$

$$\phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

تبره. n ریشه z^n به فاصله‌های مساوی بر دایره‌ای به شعاع $R = |z|^{1/n}$ و به مرکز مبدأ واقعند.

پروان. n عدد مختلط $Re^{i\phi_k}$ ، $0 \leq k \leq n-1$ ، همه از یکدیگر متمایزند و هر یک ریشه z^n می‌باشد، زیرا

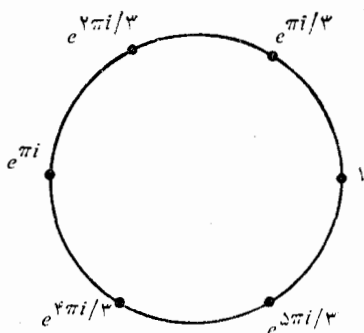
$$(Re^{i\phi_k})^n = R^n e^{in\phi_k} = |z| e^{i[\arg(z) + 2\pi k]} = z.$$

حال باید نشان دهیم که z ریشه n دیگری ندارد. فرض کنیم $w = Ae^{i\alpha}$ عدد مختلطی باشد و به‌ازای آن داشته باشیم $w^n = z$. در این صورت $|w|^n = |z|$ و در نتیجه $A^n = |z|^{1/n}$ ، یعنی $A = |z|^{1/n}$. بنابراین، $w^n = z$ را می‌توان به صورت $e^{in\alpha} = e^{i[\arg(z) + 2\pi k]}$ نوشت، و این امر ایجاب می‌کند که عدد صحیحی مانند

$$k \text{ وجود داشته باشد قسمی که } \arg(z) = 2\pi k/n \text{ بنا براین}$$

$$\alpha = \frac{[\arg(z) + 2\pi k]}{n}$$

اما وقتی که k همه مقادیرهای صحیح را بخود بگیرد، فقط مقادیرهای متمایز z_0, \dots, z_{n-1} را بخود خواهد گرفت. (ر. ک. شکل ۴.۱)



شکل ۴.۱

۳۰.۱ لگاریتمهای مختلط

بنابر قضیه ۴۲.۱، e^z هرگز صفر نیست. حال می‌خواهیم ببینیم که e^z چه مقادیرهای دیگری غیر از ۰ را بخود نمی‌گیرد. قضیه زیرین نشان می‌دهد که e^z مساوی هر عدد جز صفر می‌تواند بود.

قضیه ۵۲.۱ هرگاه z عددی مختلط و جز صفر باشد، آنگاه عدد مختلطی مانند w هست قسمی که $e^w = z$. یکی از این w ها عدد مختلط

$$\log |z| + i \arg(z)$$

است، و هر w دیگری به شکل

$$\log |z| + i \arg(z) + 2n\pi i$$

است، که در آن n عددی صحیح است.

برهان. چون $e^z = |z| e^{i \arg(z)}$ ، پس

$$w = \log |z| + i \arg(z) \text{ مساوی است برای معادله } e^w = z \text{ . اما هرگاه } w_1$$

جواب دیگری برای این معادله باشد، آنگاه $e^{w_1} = e^w$ ، و در نتیجه $w_1 - w = 2n\pi i$.

تعریف ۵۳.۱ فرض کنیم $z \neq 0$ عدد مختلط مفروضی باشد. هرگاه w عدد مختلطی

باشد قسمی که $e^w = z$ ، آنگاه w را یک لگاریتم z می‌نامیم. مقدار بخصوص

$$w = \log |z| + i \arg(z)$$

را لگاریتم عمده z نامیده، برای این w می نویسیم

$$w = \text{Log}z.$$

چند مثال

۱. چون $|i| = 1$ و $\arg(i) = \pi/2$ پس $\text{Log}(i) = i\pi/2$

۲. چون $|-i| = 1$ و $\arg(-i) = -\pi/2$ پس $\text{Log}(-i) = -i\pi/2$

۳. چون $|-1| = 1$ و $\arg(-1) = \pi$ پس $\text{Log}(-1) = i\pi$

۴. اگر $x > 0$ ، $\text{Log}(x) = \log x$ ، زیرا $|x| = x$ و $\arg(x) = 0$

۵. چون $|1+i| = \sqrt{2}$ و $\arg(1+i) = \pi/4$ پس

$$\text{Log}(1+i) = \log\sqrt{2} + i\pi/4.$$

قضیه ۴۰.۱ هرگاه $z_1, z_2 \neq 0$ ، آنگاه

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log} z_1 + \text{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2),$$

که در آن $n(z_1, z_2)$ عدد صحیحی است که در قضیه ۴۸.۱ تعریف شده است.

برهان.

$$\begin{aligned} \text{Log}(z_1 z_2) &= \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2) \\ &= \log |z_1| + \log |z_2| + i [\arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)]. \end{aligned}$$

۳۱.۱ توانهای مختلط

اکنون می توان، با استفاده از لگاریتمهای مختلط، توانهای مختلط عددهای مختلط را تعریف کرد.

تعریف ۵۵.۱ اگر $z \neq 0$ ، به ازای هر عدد مختلط w تعریف می کنیم

$$z^w = e^{w \text{Log} z}.$$

چند مثال

۱. $i^i = e^{i \text{Log} i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$

۲. $(-1)^i = e^{i \text{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$

۳. هرگاه n عددی صحیح باشد، آنگاه

$$z^{n+1} = e^{(n+1) \text{Log} z} = e^n e^{\text{Log} z} = z^n z,$$

از این روی تعریف ۵۵.۱ با تعریف ۴۹.۱ تعارضی نخواهد داشت.

دو قضیه زیرین قواعد محاسبه با توانهای مختلط را بدست می دهند:

قضیه ۵۶.۱ اگر $z^w_1 z^w_2 = z^{w_1 + w_2}$ $z \neq 0$

برهان. $z^{w_1 + w_2} = e^{(w_1 + w_2) \text{Log } z} = e^{w_1 \text{Log } z} e^{w_2 \text{Log } z} = z^{w_1} z^{w_2}$

قضیه ۵۷.۱ هرگاه $z_1, z_2 \neq 0$ آنگاه

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2\pi i w n(z_1, z_2)},$$

که در آن $n(z_1, z_2)$ عدد صحیحی است که در قضیه ۴۸.۱ تعریف شده است.

برهان. $(z_1 z_2)^w = e^{w \text{Log}(z_1 z_2)} = e^{w (\text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2))}$

۳۲.۱ سینوسها و کسینوسهای مختلط

تعریف ۵۸.۱ به ازای هر عدد مختلط مفروض z ، تعریف می کنیم

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

تبره. وقتی که z عدد حقیقی باشد، رابطه های بالا با تعریف ۴۰.۱ تعارضی ندارند.

قضیه ۵۹.۱ هرگاه $z = x + iy$ ، آنگاه

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

برهان.

$$2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz}$$

$$= e^{-y} (\cos x + i \sin x) + e^y (\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos x (e^y + e^{-y}) - i \sin x (e^y - e^{-y})$$

$$= 2 \cos x \cosh y - 2i \sin x \sinh y.$$

برهان را بطة $\sin z$ شبیه به برهان بالا است.

خاصیتهای دیگر سینوسها و کسینوسها در تمرینها داده شده اند.

۳۳.۱ بی نهایت و صفحه مختلط وسعت یافته C^*

اکنون دستگاه عددهای مختلط را با افزودن یک نقطه فرضی وسعت می دهیم. این

نقطه فرضی با علامت ∞ نشان داده می شود.

تعریف ۶۰.۱ منظور از دستگاه عددهای مختلط وسعت یافته C^* یعنی صفحه مختلط

C به انضمام علامت ∞ که دارای خاصیت‌های زیرین باشد:

$$(آ) \text{ هرگاه } z \in C, \text{ آنگاه } z + \infty = z - \infty = \infty \text{ و } z / \infty = 0$$

$$(ب) \text{ هرگاه } z \in C, z \neq 0, \text{ آنگاه } z(\infty) = \infty \text{ و } z/0 = \infty$$

$$(ج) (\infty)(\infty) = \infty \text{ و } \infty + \infty = \infty$$

تعریف ۶۱.۱ هر مجموعه D در C به شکل $\{z \mid |z| \geq r, r \geq 0\}$ را یک همسایگی ∞ یا یک گوی به مرکز ∞ می‌نامند.

در توسیع R دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ به R اضافه شدند حال آن که برای توسیع C فقط یک علامت ∞ بکار رفت. این عمل ممکن است برای خواننده تعجب‌آور باشد. دلیل این امر این است که عددهای حقیقی را می‌توان با رابطه $<$ مرتب کرد ولی عددهای مختلط ترتیب‌پذیر نیستند. برای آن که بعضی از خاصیت‌های اعداد حقیقی که با رابطه $<$ بیان شده‌اند در توسیع این دستگاه بی‌استثنا برقرار باشند، دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ ، که مانند بالا تعریف شوند، ضروری است. مثلاً، در مورد سوپریم، قبلاً گفته شد که هر مجموعهٔ ناتهی R^* سوپریم دارد.

در C مناسب‌تر آن است که فقط یک نقطهٔ فرضی اضافه شود. برای تأیید این مطلب تصویر جسم‌ها را یادآور می‌شویم. این تصویر تناظری یک به یک بین نقاط صفحهٔ مختلط و نقاط روی کره، غیر از قطب شمال، ایجاد می‌کند. برای از بین بردن این استثنا در مورد قطب شمال، این نقطه را به عنوان نمایش هندسی نقطهٔ فرضی ∞ در نظر می‌گیریم. در نتیجه، تناظری یک به یک بین صفحهٔ مختلط وسعت یافته C^* و تمام کره ایجاد خواهد شد. از جنبهٔ هندسی واضح است که چنانچه قطب جنوب را بر مبدأ صفحهٔ مختلط منطبق کنیم، ملاحظه می‌شود که قسمت برون دایره‌ای «بزرگ» در صفحهٔ مختلط در تصویر جسم‌ها متناظر است با عرقچین کروی «کوچکی» حول قطب شمال. این مطلب دلیل تعریف همسایگی بی‌نهایت را با یک نامساوی به شکل $|z| > r$ به‌طور وضوح مصور می‌سازد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

تمرین

عددهای صحیح

۱.۱ ثابت کنید بزرگترین عدد اول وجود ندارد (اقلیدس راه اثباتی از این مسأله را می‌دانت).

۲.۱ اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، اتحاد جبری زیر را ثابت کنید:

۱۵.۱ فرض کنید عدد حقیقی x و عدد صحیح $1 < N$ داده شده باشند. ثابت کنید عددهای صحیحی مانند h و k وجود دارند بقسمی که $0 < k \leq N$ و $|kx - h| < 1/N$. (دانهائی). نشان دهید بین این عددها دو عدد وجود دارند که تفاضل آنها حداکثر $1/N$ است.

۱۶.۱ اگر x گنگ باشد، ثابت کنید تعدادی نامتناهی عدد گویا مانند h/k وجود دارند که $0 < k < \infty$ و $|x - h/k| < 1/k^2$. (دانهائی). فرض کنید تعدادی متناهی از این عددها مانند $h_1/k_1, \dots, h_r/k_r$ وجود داشته باشند. حال اگر δ مینیمم عددهای $|x - h_i/k_i|$ باشد، با فرض $1/\delta < N > 1$ در تمرین ۱۵.۱ تناقضی بدست آورید.

۱۷.۱ فرض کنید x عددی گویا و مثبت به شکل

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k!}$$

باشد، که در آن هر a_k عددی صحیح و نامنفی بوده، به ازای $k \geq 2$ ، $a_k \leq k-1$ ، $a_n > 0$. همچنین $[x]$ بزرگترین عدد صحیح در x باشد. ثابت کنید که $a_1 = [x]$ ، به ازای $n, \dots, 2, k = 2, \dots, n$ ، $a_k = [k!x] - k[(k-1)!x]$ ، $a_n = [n!x] - n[(n-1)!x]$ ، که به ازای آن $n!$ عددی صحیح می باشد. متقابلاً، نشان دهید که هر عدد گویای مثبت مانند x را به یک، و فقط به یک، طریق می توان به شکل بالا نشان داد.

کرنهای بالائی

۱۸.۱ نشان دهید که \sup و \inf یک مجموعه، در صورت وجود، منحصر بفردند.

۱۹.۱ \sup و \inf هر یک از مجموعه های اعداد حقیقی زیرین را بیابید:
 (آ) همه عددها به شکل $2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}$ ، که در آن p, q, r همه عددهای صحیح مثبت را بخود می گیرند.

(ب) $S = \{x \mid 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$

(ج) $S = \{x \mid (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$ ، که در آن $a < b < c < d$

۲۰.۱ خاصیت مقایسه ای برای سوپرهمها (مذکور در قضیه ۱۶.۱) را ثابت کنید.

۲۱.۱ فرض کنید A و B دو مجموعه از عددهای مثبت باشند که از بالا کراندارند، و $a = \sup A$ و $b = \sup B$. همچنین C مجموعه همه حاصل ضربها به شکل xy باشد، که در آن $x \in A$ و $y \in B$. ثابت کنید که $ab = \sup C$.

۲۲.۱ $x > 0$ و عدد صحیح $k \geq 2$ داده شده اند. فرض کنید a_0 بزرگترین عدد صحیح نایشتراز x باشد، و با فرض این که a_0, a_1, \dots, a_{n-1} تعریف شده باشند، a_n را مساوی بزرگترین جواب صحیح نامساوی زیر اختیار کنید:

$$a_0 + \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \dots + \frac{a_n}{k^n} \leq x.$$

(آ) ثابت کنید به ازای هر $i = 1, 2, \dots$ $0 \leq a_i \leq k - 1$ ،
 (ب) فرض کنید $r_n = a_0 + a_1 k^{-1} + a_2 k^{-2} + \dots + a_n k^{-n}$ و نشان دهید که x مساوی سوپریم مجموعه عددهای گویای r_1, r_2, \dots است.
 تبصره. در حالت $k = 10$ ، عددهای صحیح a_0, a_1, a_2, \dots رقمهای نمایش اعشاری x می باشند. در حالت کلی این عددها ارقام یک نمایش x در مقیاس k خواهند بود.

نامساویها

۲۳.۱ اتحاد لاگرانژ^۱ برای عددهای حقیقی را ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

نامساوی کشی - شوارتز را می توان از این اتحاد نتیجه گرفت.

۲۴.۱ ثابت کنید به ازای عددهای حقیقی دلخواه a_k, b_k و c_k ، نامساوی زیر برقرار است:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right).$$

۲۵.۱ نامساوی مینکوفسکی^۲ را ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{1/2}.$$

اگر $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ، ملاحظه می شود که نامساوی بالا همان نامساوی مثلثی $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ برای بردارهای n -بعدی است. در این جا

$$\|\mathbf{a}\| = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}.$$

۲۶.۱ اگر $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ و $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ ثابت کنید که

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

دانهائی. $\sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \geq 0$.

عددهای مختلط

۲۷۰۱ عددهای مختلط زیرین را به شکل $a + bi$ در آورید:

(آ) $(1+i)^3$ ، (ب) $(2+3i)/(3-4i)$

(ج) $i^5 + i^6$ ، (د) $\frac{1}{2}(1+i)(1+i^{-8})$

۲۸۰۱ در هر یک از حالت‌های زیر، همه x و y های حقیقی را که در رابطه داده شده صدق می‌کنند بیابید.

(آ) $x + iy = |x - iy|$ ، (ب) $x + iy = (x - iy)^2$

(ج) $\sum_{k=1}^{100} i^k = x + iy$

۲۹۰۱ بنابر تعریف، مزدوج مختلط $z = x + iy$ (x و y حقیقی) عدد مختلط $\bar{z} = x - iy$ است. ثابت کنید که:

(آ) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ، (ب) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ، (ج) $z \bar{z} = |z|^2$

(د) (دو برابر قسمت حقیقی z) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$

(ه) (دو برابر قسمت موهومی z) $(z - \bar{z})/i = 2 \operatorname{Im} z$

۳۰۰۱ هر یک از مجموعه‌هائی از عددهای مختلط را که در هر یک از شرط‌های زیرین صدق کند به صورت هندسی توصیف کنید:

(آ) $|z| = 1$ ، (ب) $|z| < 1$ ، (ج) $|z| \leq 1$

(د) $z + \bar{z} = 1$ ، (ه) $z - \bar{z} = i$ ، (و) $\bar{z} + z = |z|^2$

۳۱۰۱ z_1 و z_2 سه عدد مختلط مفروض می‌باشند بقسمی که

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ و } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

نشان دهید که این سه عدد رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌باشند که در دایره یک‌به مرکز مبدأ محاط شده است.

۳۲۰۱ اگر a و b عددهای مختلطی باشند، ثابت کنید که

$$|a - b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$$

(ب) هرگاه $a \neq 0$ ، آنگاه وقتی، فقط وقتی، $|a + b| = |a| + |b|$ که b/a حقیقی و نامنفی باشد.

۳۳.۱ اگر a و b عددهائی مختلط باشند، ثابت کنید وقتی، و فقط وقتی، رابطه

$$|a-b| = |1-\bar{a}b|$$

برقرار است که $|a| = 1$ یا $|b| = 1$. برای چه مقادرهائی از a و b نامساوی $|a-b| < |1-\bar{a}b|$ معتبر است؟

۳۴.۱ اگر a و c دو عدد پایای حقیقی باشند و b عددی مختلط باشد، نشان دهید که معادله

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0 \quad (a \neq 0, z = x + iy)$$

نمایشگر دایره‌ای است در صفحه xy .

۳۵.۱ تعریف تانژانت معکوس را یادآوری می‌کنیم: اگر t عدد حقیقی مفروضی باشد، $\tan^{-1}(t)$ عبارت است از عدد حقیقی منحصر بفرد θ که در دو شرط زیر صدق کند:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, \quad \tan \theta = t.$$

اگر $z = x + iy$ ، نشان دهید که

(آ) اگر $x > 0$ ، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ،

(ب) اگر $x < 0$ و $y \geq 0$ ، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ ،

(ج) اگر $x < 0$ و $y < 0$ ، $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ ،

(د) اگر $x = 0$ و $y > 0$ ، $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ،

و اگر $x = 0$ و $y < 0$ ، $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$.

۳۶.۱ رابطه «ترتینمای» $<$ را در عددهای مختلط به صورت زیر تعریف می‌کنیم: گوئیم $z_1 < z_2$ در صورتی که

$$|z_1| < |z_2| \quad (\text{یکم})$$

یا

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{و} \quad \arg(z_1) < \arg(z_2) \quad (\text{دوم})$$

کدام از اصلهای موضوع ۶، ۷، ۸، ۹ در مورد این رابطه صادق است؟

۳۷.۱ کدام از اصلهای موضوع ۶، ۷، ۸، ۹ در مورد ترتینمای $<$ که به صورت

زیرین تعریف شود صادق است؟ می‌گوئیم $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ وقتی که

$$x_1 < x_2 \quad \text{یا} \quad x_1 = x_2 \quad \text{و} \quad y_1 < y_2.$$

۳۸.۱ قضیه‌ای، مشابه قضیه ۴۸.۱، که در آن رابطه‌ای مقدار $\arg(z_1/z_2)$ را بر حسب $\arg(z_1)$ و $\arg(z_2)$ بدست دهد، بیان و ثابت کنید.

۳۹.۱ قضیه‌ای، مشابه قضیه ۴۵.۱، که در آن رابطه‌ای مقدار $\text{Log}(z_1/z_2)$ را بر حسب $\text{Log}(z_1)$ و $\text{Log}(z_2)$ بدست دهد، بیان و ثابت کنید.

۴۰.۱ ثابت کنید که ریشه‌های $z^n = 1$ (که ریشه‌های n م واحد نیز گفته می‌شوند) عبارتند از $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ ، که در آنها $\alpha = e^{2\pi i/n}$. همچنین نشان دهید که هر ریشه n م واحد جز ۱ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = 0.$$

۴۱.۱ (آ) ثابت کنید به ازای هر عدد مختلط $z \neq 0$ ، $|z^n| < e^{\pi}$.
 (ب) ثابت کنید عدد پائینی مانند $M > 0$ وجود ندارد که به ازای هر z

$$|\cos z| < M,$$

۴۲.۱ اگر $w = u + iv$ (که u و v حقیقی)، نشان دهید که

$$z^w = e^{u \log |z| - v \arg(z)} e^{i[v \log |z| + u \arg(z)]}.$$

۴۳.۱ (آ) ثابت کنید به ازای عدد صحیحی مانند n

$$\text{Log}(z^n) = n \text{Log} z + 2\pi i n.$$

(ب) ثابت کنید به ازای عدد صحیحی مانند n

$$(z^n)^\alpha = z^{n\alpha} e^{2\pi i n \alpha}.$$

۴۴.۱ یکم) اگر θ و a عددهائی حقیقی باشند و $-\pi < \theta \leq +\pi$ ، ثابت کنید که

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^a = \cos(a\theta) + i \sin(a\theta).$$

دوم) با فرض $\theta = -\pi$ و $a = 1/2$ در (یکم)، نشان دهید که قید $-\pi < \theta \leq +\pi$ ، در حالت کلی، برای برقراری رابطه مذکور در (یکم) ضروری است.

سوم) اگر a عددی صحیح باشد، نشان دهید که دستور مذکور در (یکم) بدون هیچ قیدی بر θ برقرار است. در این حالت، مطلب مذکور در (یکم) به نام قضیه دموآردا معروف است.

۴۵.۱ با بکار بردن قضیه دموآردا (تمرین ۴۴.۱) اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه

بگیرید: به‌ازای هر عدد حقیقی θ ,

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta,$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta.$$

آیا رابطه‌های بالا به‌ازای θ های مختلط نیز معتبرند؟

۴۶.۱ با تعریف $\tan z = (\sin z)/(\cos z)$ نشان دهید که به‌ازای $z = x + iy$

$$\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

۴۷.۱ فرض کنید w عدد مختلط مفروضی باشد. اگر $w \neq \pm 1$ ، نشان دهید که

دو مقدار برای $z = x + iy$ وجود دارند که در شرطهای $\cos z = w$ و

$-\pi < x \leq \pi$ صدق می‌کنند. این مقادارها را برای حالت‌های $w = 2$ و $w = i$ بیابید.

۴۸.۱ اتحاد لاگرانژ برای عددهای مختلط را ثابت کنید:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^2.$$

با بکار بردن این اتحاد، نامساوی کشی - شوارتز برای عددهای مختلط را نتیجه بگیرید.

۴۹.۱ (آ) با متحد قرار دادن قسمتهای موهومی در دستور دمو‌آور، ثابت کنید که

$$\sin n\theta = \sin^n \theta \left\{ \binom{n}{1} \cot^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \cot^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \cot^{n-5} \theta - + \dots \right\}.$$

(ب) اگر $0 < \theta < \pi/2$ ، ثابت کنید که

$$\sin (2m + 1)\theta = \sin^{2m+1} \theta P_m(\cot^2 \theta),$$

که در آن P_m چند جمله‌ای درجه m زیر است:

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - + \dots$$

با استفاده از این، نشان دهید که صفرهای P_m عبارت از m نقطه متمایز $x_k = \cot^2 \{ \pi k / (2m + 1) \}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) می‌باشند.

ج) نشان دهید که مجموع صفرهای P_m مساوی مقدار زیر است:

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3},$$

و مجموع مربعات صفرهای P_m مساوی مقدار زیر می باشد:

$$\sum_{k=1}^m \cot^4 \frac{\pi k}{2m+1} = \frac{m(2m-1)(2m^2+10m-9)}{45}.$$

تصوه. این اتحادها برای اثبات دستورهای $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$ بکار می روند. (ر. ک. تمرینهای ۴۶.۸ و ۴۷.۸).
 ۵۰.۱ ثابت کنید به ازای هر عدد مختلط z ، $z^n - 1 = \prod_{k=1}^n (z - e^{2\pi i k/n})$ ، با بکار بردن این رابطه، دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n \geq 2 \quad \text{به ازای}$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

- 1.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.
- 1.2 Birkhoff, G., and Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra*, 3rd ed. Macmillan, New York, 1965.
- 1.3 Cohen, L., and Ehrlich, G., *The Structure of the Real-Number System*. Van Nostrand, Princeton, 1963.
- 1.4 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison - Wesley. Reading, 1966.
- 1.5 Hardy, G. H., *A Course of Pure Mathematics*, 10th ed. Cambridge University Press, 1952.
- 1.6 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Vol. 1, 3rd ed. Cambridge University Press, 1927.
- 1.7 Landau, E., *Foundations of Analysis*, 2nd ed. Chelsea, New York, 1960.
- 1.8 Robinson, A., *Non - standard Analysis*. North - Holland, Amsterdam, 1966.
- 1.9 Thurston, H. A., *The Number System*. Blackie, London, 1956.
- 1.10 Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, 2nd ed. Wiley, New York, 1965.

برخی مفهومیهای اساسی نظریه مجموعهها

۱۰۲ مقدمه

در بحث از هر شاخه ریاضیات بکار بردن نمادها و اصطلاحهای نظریه مجموعهها یاری دهنده است. نظریه مجموعهها، که به وسیله بول و کانتور در نیمه دوم قرن نوزدهم توسعه یافته، تأثیری عمیق در گسترش ریاضیات در قرن بیستم داشته است. این نظریه بسیاری از اندیشه‌هایی را که بظاهر با هم مربوط نبودند متحد ساخته، و بسیاری از مفهومیهای ریاضی را با روشی زیبا و اصولی به بنیادهای منطقیشان تحویل کرده است.

ما در این جا نظریه مجموعهها را به روشی اصولی و منظم عرضه نمی‌نمائیم، و فقط به بحث در مفاهیم این نظریه که اساسی‌ترند اکتفا می‌کنیم. برای پژوهش بیشتر، خواننده می‌تواند به کتابهای مرجع که در پایان این فصل از آنها یاد شده است مراجعه کند. به دسته‌ای از چیزها که به صورت موجود واحدی نگریسته شوند عنوان مجموعه می‌دهیم. این چیزها را عنصرها یا عضوهای مجموعه می‌نامیم، و می‌گوئیم که این عضوها متعلق به آن مجموعه‌اند، یا محتوای آن مجموعه‌اند. همچنین می‌گوئیم مجموعه حاوی عنصرهای خود می‌باشد، یا به وسیله عنصرهای خود ساخته شده است. غالباً مجموعه‌هایی از موجودهای ریاضی مورد نظر ما هستند؛ یعنی، مجموعه‌هایی از عددها، نقطه‌ها، تابعها، خمها، و مانند آنها. اما، چون قسمت اعظم نظریه مجموعهها به ماهیت عضوهای مجموعه بستگی ندارد، اگر بحث خود را به

مجموعه‌های کلی اختصاص دهیم، مقدار زیادی از نیروی فکری بهدر نخواهد رفت. و به سبب همین عام بودن است که نظریهٔ مجموعه‌ها چنین تأثیری شگرف در گسترش ریاضی داشته است.

۲.۲ نمادها

مجموعه‌ها را معمولاً با حرفهای بزرگ القبای لاتین

$$A, B, C, \dots, X, Y, Z,$$

و عنصرها را با حرفهای کوچک a, b, c, \dots, x, y, z نمایش می‌دهیم. وقتی می‌نویسیم $x \in S$ یعنی « x یک عنصر S است»، یا « x به S تعلق دارد». اگر x به S تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم $x \notin S$. گاهی مجموعه‌ها را با قرار دادن عنصرهایشان در داخل دو ابرو نمایش می‌دهیم؛ مثلاً، مجموعهٔ عددهای زوج مثبت کوچکتر از ۱۰ با $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ نشان داده می‌شود. اگر S دستهٔ همهٔ چیزهایی چون x باشد که در خاصیت P صدق می‌کنند، این را به‌طور خلاصه با $\{x \mid P \text{ در } x \text{ صدق می‌کند}\} = S$ نشان می‌دهیم.

از یک مجموعهٔ مفروض می‌توان مجموعه‌های جدید، که زیرمجموعه‌های آن نامیده می‌شوند، ساخت. مثلاً، مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح مثبت کوچکتر از ۱۰ و قابل قسمت بر ۴، یعنی $\{۴, ۸\}$ ، زیرمجموعهٔ مجموعهٔ عددهای زوج کوچکتر از ۱۰ است. در حالت کلی، مجموعهٔ A را یک زیرمجموعهٔ B می‌نامیم، و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، در صورتی که هر عنصر A متعلق به B نیز باشد. اگر $A \subseteq B$ ، امکان این که $B \subseteq A$ نیز هست. در حقیقت، وقتی، و فقط وقتی، $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ که عنصرهای A و B یکی باشند. در این حالت می‌گوئیم A و B متساویند، و می‌نویسیم $A = B$. اگر A و B متساوی نباشند، می‌نویسیم $A \neq B$. هرگاه $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ ، آنگاه می‌گوئیم که A یک زیرمجموعهٔ حقیقی B است.

برای تسهیل کار امکان وجود مجموعه‌ای را که هیچ عنصر نداشته باشد می‌پذیریم؛ این مجموعه را مجموعهٔ تهی می‌نامیم، و قبول می‌کنیم که این مجموعه زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای باشد. برای کمک در تصور بهتر مجموعه، خواننده می‌تواند یک مجموعه را به‌عنوان جعبه‌ای تجسم کند که حاوی چیزهایی است که این چیزها عنصرهای آن مجموعه‌اند. در این صورت، مجموعهٔ تهی جعبه‌ای است تهی. مجموعهٔ تهی را با علامت \emptyset نشان می‌دهیم.

۳.۲ جفت‌های مرتب

فرض کنیم مجموعه‌ای مرکب از دو عنصر a و b ؛ یعنی، مجموعهٔ $\{a, b\}$ ، را

داشته باشیم. چون در تعریف تساوی مجموعه‌ها ترتیب عنصرها اهمیت ندارد، این مجموعه مساوی مجموعه $\{a, b\}$ است. اما، گاهی نیز لازم است مجموعه‌هایی با دو عنصر در نظر بگیریم که در آنها ترتیب اهمیت داشته باشد. مثلاً، در هندسهٔ تحلیلی صفحه، مختصات (x, y) یک نقطه نمایشگر جفت مرتبی از عددها است. نقطه $(3, 4)$ غیر از نقطه $(4, 3)$ است، حال آن‌که مجموعه $\{3, 4\}$ همان مجموعه $\{4, 3\}$ می‌باشد. مجموعه‌ای که فقط دارای دو عنصر a و b بوده در آن ترتیب برای ما اهمیت داشته باشد، عنصرهای آن را در کمانکها جای می‌دهیم، یعنی آن را با (a, b) نشان می‌دهیم. در این صورت، a عنصر اول و b عنصر دوم آن نامیده می‌شوند. مفهوم جفت مرتب (a, b) را می‌توان صرفاً به کمک مفهوم مجموعه تعریف کرد. یک چنین تعریف در زیر داده شده است:

$$\text{تعریف ۱.۲} \quad (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

بنا بر این تعریف، (a, b) مجموعه‌ای است حاوی دو عنصر $\{a\}$ و $\{a, b\}$. با بکار بردن این تعریف، می‌توان قضیهٔ زیرین را ثابت کرد:

$$\text{قضیه ۲.۲} \quad (a, b) = (c, d) \text{ وقتی، و فقط وقتی، که } a = c \text{ و } b = d$$

این قضیه نشان می‌دهد که تعریف ۱.۲ تعریفی «معقول» برای جفت مرتب است، معقول از این جهت که در آن چیز a از چیز b متمایز شده است. اثبات قضیهٔ ۲.۲ تمرینی آموزنده برای خواننده می‌باشد. (ر. ک. تمرین ۱.۲)

۴.۲ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

تعریف ۳.۲ اگر A و B دو مجموعه مفروضی باشند، مجموعهٔ همهٔ جفت‌های مرتب مانند (a, b) ، که در آن $a \in A$ و $b \in B$ ، را حاصل ضرب دکارتی A و B می‌نامیم، و با $A \times B$ نشان می‌دهیم.

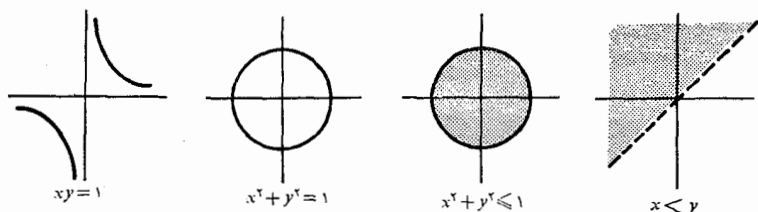
مثال. هرگاه R مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی باشد، آنگاه $R \times R$ مساوی مجموعهٔ همهٔ عددهای مختلط خواهد بود.

۵.۲ رابطه‌ها و تابعها

فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند. جفت مرتب (x, y) را می‌توان به عنوان نمایش مختصات قائم یک نقطه در صفحهٔ xy (یا یک عدد مختلط) تصور کرد. ما مکرر به عبارتهائی نظیر عبارتهای زیر برمی‌خوریم:

$$(A) \quad x < y, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad xy = 1$$

هر یک از عبارتهای بالا مجموعه مشخصی از جفتهای مرتب عددهای حقیقی را معین می‌کند، یعنی مجموعه همه جفتهای مرتبی مانند (x, y) که در آن عبارت صدق می‌نمایند. هر یک از این مجموعه‌ها را یک دایرة مسطح، و مجموعه متناظر آن متشکل از نقطه‌های رسم شده در صفحه xy را نمودار آن رابطه می‌نامیم. در شکل ۱.۲ نمودارهای روابط توصیف شده در (آ) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۲

می‌توان مفهوم رابطه را آنچنان به طور عمومی تنظیم کرد که x و y در جفتهای مرتب آن چیزهای دلخواه بوده لزوماً عدد حقیقی نباشند.

تعریف ۴.۲ هر مجموعه از جفتهای مرتب S یک دایرة می‌نامیم. اگر S یک رابطه باشد، مجموعه همه عنصرهایی چون x که عنصر اول جفتهای مرتب (x, y) در S قرار می‌گیرند قلمرو S نامیده، با $\mathcal{D}(S)$ نشان داده می‌شود. مجموعه عنصرهای دوم مانند y را برد S می‌نامند، و با $\mathcal{R}(S)$ نشان می‌دهند. اولین مثال در شکل ۱.۲ نمونه بخصوصی است از رابطه‌ها که تابع نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۲ یک تابع مانند F مجموعه‌ای است از جفتهای مرتب (x, y) که در آن عنصرهای اول هیچ دو جفت مرتب یکی نیستند، یعنی، هرگاه $(x, y) \in F$ و $(x, z) \in F$ آنگاه $y = z$.

از تعریف تابع نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x در قلمرو F ، فقط یک عنصر مانند y هست بقسمی که $(x, y) \in F$. معمولاً این y را مقدار F در x می‌نامیم، و برای آن که نشان دهیم جفت (x, y) در F است به جای $(x, y) \in F$ می‌نویسیم

$$y = F(x).$$

به جای توصیف تابع F به صورت جفتهای مرتب آن، معمولاً ترجیح می‌دهیم که نخست قلمرو F را مشخص کرده، سپس نشان دهیم که به‌ازای هر x در قلمرو آن،

چگونه مقدار $F(x)$ بدست می‌آید. در این مورد، قضیه‌ای بیان می‌کنیم و اثبات آن را به عنوان تمرین به خواننده وا می‌گذاریم.

قضیه ۶.۲ دو تابع F و G وقتی، و فقط وقتی، متساویند که
 (آ) $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(G)$ و $F(x) = G(x)$ برای هر $x \in \mathcal{D}(F)$ داشته باشیم
 (ب) به ازای هر x در $\mathcal{D}(F)$ داشته باشیم $F(x) = G(x)$.

۶.۲ اصطلاحاتی دیگر دربارهٔ تابعها

وقتی که $\mathcal{D}(F)$ ، یعنی قلمرو F ، زیر مجموعه \mathbb{R} باشد، F یک تابع یک متغیر حقیقی نامیده می‌شود. هرگاه $\mathcal{D}(F)$ زیرمجموعه C ، یعنی دستگاه عددهای مختلط، باشد، آنگاه F را یک تابع یک متغیر مختلط می‌نامیم.

هرگاه $\mathcal{D}(F)$ زیرمجموعه حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ باشد، آنگاه F تابع دو متغیر نامیده می‌شود. در این حالت، به جای $F((a, b))$ می‌نویسیم $F(a, b)$. یک تابع دو متغیر حقیقی تابعی است که قلمرو آن زیرمجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است.

اگر S زیرمجموعه $\mathcal{D}(F)$ باشد، می‌گوئیم F بر S تعریف شده است. در این حالت، مجموعه همه $F(x)$ هائی را، که در آن $x \in S$ ، نقش S با F نامیده به $F(S)$ نشان می‌دهیم. هرگاه T مجموعه‌ای حاوی $F(S)$ باشد، آنگاه F را یک نگاشت از S به T نیز می‌نامند. این مطلب غالباً بدین صورت نشان داده می‌شود:

$$F : S \rightarrow T.$$

اگر $F(S) = T$ ، گوئیم نگاشت F بروی T است. گاهی یک نگاشت از S در خودش را یک تبدیل می‌نامند.

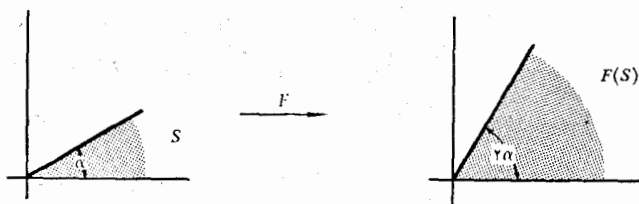
مثلاً، تابع یک متغیر مختلط F را، که با رابطه $F(z) = z^2$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. اگر S مجموعه z هائی باشد که $0 \leq \arg(z) \leq \alpha \leq \pi/2$ ، این تابع قطاع S از صفحه مختلط را بروی قطاع $F(S)$ ، که با نامساویهای $0 \leq \arg[F(z)] \leq 2\alpha$ مشخص می‌شود، می‌نگارد. (ر.ک. شکل ۰۲.۲)

اگر دو تابع F و G در رابطه شمول $G \subseteq F$ صدق کنند، می‌گوئیم G یک تحدید F ، یا F یک توسیع G است. در حالت خاص، هرگاه S یک زیرمجموعه $\mathcal{D}(F)$ باشد و G با معادله زیر تعریف شده باشد:

$$G(x) = F(x), \quad x \in S,$$

آنگاه G را تحدید F به S می‌نامیم. تابع G عبارت است از مجموعه همه جفتهای مرتب مانند $(x, F(x))$ که در آن $x \in S$. قلمرو این تابع S و برد آن $F(S)$

می باشند.



شکل ۲.۲

۷.۲ تابعهای یک به یک و معکوسهای آنها

تعریف ۷.۲ فرض کنیم تابع F بر S تعریف شده باشد. می‌گوییم F بر S یک به یک است وقتی، و فقط وقتی، که به ازای هر x و y در S ,

$$F(x) = F(y) \quad \text{تساوی } x = y \text{ را ایجاب کند.}$$

به عبارت دیگر، یک تابع در صورتی بر S یک به یک است که به ازای هر دو عضو متمایز از S ، مقدارهای این تابع در این دو عضو متمایز باشند. این تابعها را انژکتیو نیز می‌نامند. تابعهای یک به یک به دلیل داشتن معکوس (که هم اکنون خواهیم دید) اهمیت دارند. اما، قبل از تعریف معکوس یک تابع، بهتر است برای آسان کردن کار مفهومی کلیتر، یعنی عکس یک رابطه، را معرفی کنیم.

تعریف ۸.۲ اگر S رابطه مفروضی باشد، رابطه جدید

$$\tilde{S} = \{(a, b) \mid (b, a) \in S\}$$

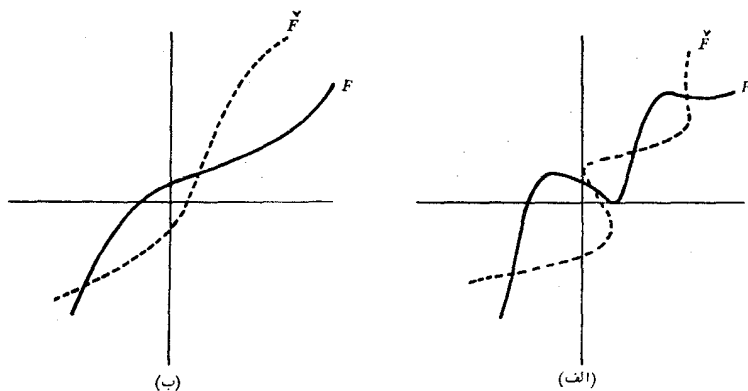
را عکس S می‌نامیم.

بنابراین، جفت مرتب (a, b) وقتی، و فقط وقتی، متعلق به \tilde{S} است که جفت (b, a) در S باشد. در حالتی که S یک رابطه مسطح باشد، به طور ساده می‌توان گفت که نمودار \tilde{S} منعکس نمودار S نسبت به خط $y = x$ است. عکس رابطه تعریف شده با $y < x$ رابطه‌ای است که با $x < y$ تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۲ فرض کنیم رابطه F یک تابع باشد. عکس F ، یعنی \tilde{F} ، را که ممکن است تابع باشد یا نباشد، در نظر می‌گیریم. هرگاه \tilde{F} نیز تابع باشد، آنگاه $\tilde{\tilde{F}}$ را معکوس F می‌نامیم و با نماد F^{-1} نشان می‌دهیم.

شکل ۳.۲ (الف) تابعی مانند F را تصور می‌سازد که عکس آن، یعنی \tilde{F} ، تابع

نیست. در شکل ۳.۲ (ب)، F و عکس آن هر دو تابع می‌باشند. بنا بر قضیه زیرین، هر تابع که بر قلمرو خود یک به یک باشد همواره معکوس دارد.



شکل ۳.۲

قضیه ۱۰.۲ هرگاه تابع F بر قلمرو خود یک به یک باشد، آنگاه \tilde{F} نیز یک تابع است.

برهان. برای آن که نشان دهیم \tilde{F} یک تابع است، باید ثابت کنیم که هرگاه $(x, y) \in \tilde{F}$ و $(x, z) \in \tilde{F}$ ، آنگاه $y = z$. اما از $(x, y) \in \tilde{F}$ داریم $(y, x) \in F$ ؛ یعنی، $x = F(y)$. به همین نحو، $(x, z) \in \tilde{F}$ یعنی که $x = F(z)$. پس $F(y) = F(z)$ و، چون بنا به فرض F یک به یک است، از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که $y = z$. بنا بر این، \tilde{F} یک تابع می‌باشد.

تبره. از بحث بالا معلوم می‌شود که هرگاه F بر یک زیرمجموعه $\mathcal{D}(F)$ مانند S یک به یک باشد، آنگاه تحدید F به S معکوس دارد.

۸.۲ تابعهای مرکب

تعریف ۱۱.۲ اگر دو تابع F و G داده شده باشند قسمی که $\mathcal{R}(F) \subseteq \mathcal{D}(G)$ می‌توان تابع جدید $G \circ F$ ، یعنی ترکیب G و F ، را که به صورت زیر تعریف می‌شود، تشکیل داد: به ازای هر x در قلمرو F ، قراد می‌دهیم

$$(G \circ F)(x) = G[F(x)].$$

چون $\mathcal{R}(F) \subseteq \mathcal{D}(G)$ ، پس عنصر $F(x)$ در قلمرو G است، و در نتیجه $G[F(x)]$ معنی دارد. در حالت کلی، رابطه $G \circ F = F \circ G$ برقرار نیست. در حقیقت، $F \circ G$ ممکن است با معنی نباشد مگر وقتی که برد G محتوا در قلمرو F باشد. در هر حال، قانون شرکتپذیری

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F,$$

به شرط با معنی بودن دو طرف رابطه بالا، همواره برقرار است. (اثبات این قانون تمرین جالبی برای خواننده است. ر. ک. تمرین ۰.۲، ۰.۴).

۹.۲ دنباله‌ها

از جمله مثالهای مهمی از تابعها آنهایی را می توان شمرد که بر زیرمجموعه‌های مجموعه عددهای صحیح تعریف شده‌اند.

تعریف ۱۳.۲ منظور از یک دنباله متناهی n جمله‌ای تابعی مانند F است که قلمرو آن مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ باشد.

برد F عبارت است از مجموعه $\{F(1), F(2), F(3), \dots, F(n)\}$ که معمولاً به صورت $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ نموده می‌شود. عنصرهای برد دنباله را جمله‌های دنباله می‌نامیم، و البته، جمله‌های یک دنباله می‌توانند چیزهای دلخواه باشند.

تعریف ۱۳.۳ منظور از یک دنباله نامتناهی تابعی مانند F است که قلمرو آن مجموعه همه عددهای صحیح مثبت، یعنی $\{1, 2, 3, \dots\}$ ، باشد. برد F ، یعنی مجموعه $\{F(1), F(2), F(3), \dots\}$ ، به صورت $\{F_1, F_2, F_3, \dots\}$ نیز نوشته می‌شود، و مقدار تابع به‌ازای n ، یعنی F_n ، n امین جمله n دنباله می‌نامیم.

برای اختصار، گاهی نماد $\{F_n\}$ را برای نمایش دنباله نامتناهی که جمله n آن F_n است بکار می‌بریم.

فرض کنیم که $s = \{s_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی باشد، و k تابعی باشد که قلمرو آن مجموعه عددهای صحیح مثبت، و برد آن یک زیرمجموعه مجموعه عددهای صحیح مثبت باشد. و نیز فرض می‌کنیم که k «ترتیب را حفظ کند»، یعنی،

$$k(m) < k(n) \quad , \quad m < n$$

در این صورت، تابع مرکب $s \circ k$ به‌ازای همه عددهای صحیح $n \geq 1$ تعریف

شده است، و به ازای هر چنین n ،

$$(s \circ k)(n) = s_{k(n)}.$$

یک چنین تابع مرکبی را یک زیردنباله s می‌نامیم. در این مورد نیز، محض اختصار، غالباً نماد $\{s_{k(n)}\}$ یا $\{s_{k_n}\}$ را برای نمایش زیردنباله (s_n) ، که جمله n م آن $s_{k(n)}$ است، بکار می‌بریم.

مثال. فرض می‌کنیم که $s = \{1/n\}$ ، و k با رابطه $k(n) = 2^n$ تعریف شده باشد. در این صورت $s \circ k = \{1/2^n\}$.

۱۰.۲ مجموعه‌های متشابه (همعدد)

تعریف ۱۴.۲ دو مجموعه A و B را وقتی، فقط وقتی، متشابه، یا همعدد، می‌نامیم که تابعی یک به یک مانند F با قلمرو A و برد B وجود داشته باشد. در این صورت، می‌نویسیم $A \sim B$.

همچنین می‌گوئیم که F تناظری یک به یک بین مجموعه‌های A و B ایجاد می‌کند. واضح است که هر مجموعه مانند A با خودش متشابه است (در این جا F را تابع «همانی» اختیار می‌کنیم، یعنی به ازای هر x در A ، $F(x) = x$). بعلاوه، هرگاه $A \sim B$ ، A ، B ، زیرا هرگاه تابع یک به یک F ، A را متشابه B کند، آنگاه F^{-1} مجموعه B را متشابه A خواهد کرد. همچنین، هرگاه $A \sim B$ و $B \sim C$ ، آنگاه $A \sim C$. (اثبات این مطالب به عهده خواننده است.)

۱۱.۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه S را متناهی نامیم و گوئیم حاوی n عنصر است در صورتی که

$$S \sim \{1, 2, \dots, n\}.$$

عدد صحیح n را عدد اصلی S نامیم. بسادگی می‌توان ثابت کرد که هرگاه $\{1, 2, \dots, m\} \sim \{1, 2, \dots, n\}$ ، آنگاه $m = n$. بنا بر این، عدد اصلی یک مجموعه متناهی عدد معینی است. مجموعه تهی را نیز متناهی در نظر گرفته، عدد اصلی آن را ۰ تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌هائی که متناهی نباشند نامتناهی نامیده می‌شوند. اختلاف اصلی بین این دو دسته از مجموعه‌ها این است که یک مجموعه نامتناهی باید با یکی از زیرمجموعه‌های حقیقی خود متشابه باشد، حال آن که یک مجموعه متناهی نمی‌تواند متشابه هیچ یک از زیرمجموعه‌های حقیقی خود باشد. (ر. ک. تمرین ۰۱۳.۲) مثلاً،

مجموعه Z^+ ، یعنی مجموعه همه عددهای صحیح مثبت، با مجموعه توانهای ۲، یعنی $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ که یک زیرمجموعه حقیقی Z^+ است، مشابه می باشد. تابع یک به یک F که این دو مجموعه را مشابه می کند به صورت زیر است: به ازای هر x در Z^+ ، $F(x) = 2^x$.

۱۲.۲ مجموعه‌های شمارشپذیر و شمارش ناپذیر

مجموعه S را نامتناهی شمارشپذیر نامیم در صورتی که S با مجموعه همه عددهای صحیح مثبت هم‌عدد باشد؛ یعنی، داشته باشیم

$$S \sim \{1, 2, 3, \dots\}.$$

در این حالت تابعی چون f وجود دارد که تناظری یک به یک بین عددهای صحیح مثبت و عنصرهای S ایجاد می نماید؛ از این روی، مجموعه S را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$S = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}.$$

غالباً از زیرنویس استفاده می کنیم و به جای $f(k)$ نماد a_k (یا نمادی مشابه a_k) را بکار برده می نویسیم $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. مطلب مهم در این جا این است که به کمک تناظر f می توان عددهای صحیح مثبت را به عنوان «برچسب» برای عنصرهای S بکار برد. می گوئیم عدد اصلی یک مجموعه نامتناهی شمارشپذیر مساوی \aleph_0 (بخوانید: الف صفر) است.

تعریف ۱۵.۲ مجموعه S را شمارشپذیر نامیم در صورتی که متناهی یا نامتناهی شمارشپذیر باشد. مجموعه‌ای که شمارشپذیر نباشد شمارش ناپذیر نامیده می شود.

گاهی به جای شمارشپذیر و شمارش ناپذیر اصطلاحهای شمارا و ناشمارا بکار می روند.

قضیه ۱۶.۲ هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارشپذیر مجموعه‌ای است شمارشپذیر.

پروهان. فرض کنیم که S مجموعه‌ای شمارشپذیر باشد و $A \subseteq S$. اگر A متناهی باشد، حکم ثابت است، پس A را نامتناهی فرض می کنیم (در نتیجه S نیز نامتناهی خواهد بود). فرض کنیم $S = \{s_n\}$ دنباله‌ای نامتناهی با جمله‌های متمایز باشد قسمی که

$$S = \{s_1, s_2, \dots\}.$$

تابعی چون k را بر عددهای صحیح مثبت به صورت زیر تعریف می کنیم:

$k(1)$ را مساوی کوچکترین عدد صحیح مثبت m می‌گیریم بقسمی که $s_m \in A$. اگر $k(1), k(2), \dots, k(n-1)$ و $k(n-1)$ تعریف شده فرض شوند، $k(n)$ را کوچکترین عدد صحیح مثبت $m > k(n-1)$ می‌انگاریم بقسمی که $s_m \in A$. k ترتیب را حفظ می‌کند، یعنی: $m > n$ ایجاب می‌کند که $k(m) > k(n)$. تابع مرکب $s \circ k$ را تشکیل می‌دهیم. قلمرو $s \circ k$ مجموعه عددهای صحیح مثبت، و برد آن A می‌باشد. بعلاوه، $s \circ k$ یک به یک است، زیرا

$$s[k(n)] = s[k(m)]$$

ایجاب می‌کند که

$$s_{k(n)} = s_{k(m)}$$

که از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $k(n) = k(m)$ ، و این ایجاب می‌کند که $n = m$ و بدین ترتیب قضیه باثبات می‌رسد.

۱۳.۲ شمارش ناپذیری دستگاه عددهای حقیقی

بنابر قضیه زیرین، مجموعه‌هایی نامتناهی وجود دارند که شمارش‌پذیر نیستند.

قضیه ۱۷.۲ مجموعه همه عددهای حقیقی شمارش‌ناپذیر است.

برهان. کافی است نشان دهیم که مجموعه همه عددهای حقیقی مانند x که $0 < x < 1$ شمارش‌ناپذیر است. گوئیم اگر این مجموعه شمارش‌پذیر باشد، باید دنباله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که جمله‌های آن تمام بازه را تشکیل دهند. با ساختن عددی حقیقی در این بازه که غیر از هر یک از جمله‌های دنباله یاد شده باشد، نشان می‌دهیم که وجود چنین دنباله‌ای غیرممکن است. برای این کار هر یک از s_n ها را به صورت بسط اعشاری نامتناهی آن می‌نویسیم:

$$s_n = 0u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\dots$$

که در آن هر $u_{n,i}$ مساوی ۰، ۱، ...، ۹ می‌باشد. عدد حقیقی y را با بسط اعشاری

$$y = 0v_1v_2v_3\dots$$

در نظر می‌گیریم، که در آن

$$v_n = \begin{cases} 1, & u_{n,n} \neq 1 \\ 2, & u_{n,n} = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

چون y با s_1 در اولین رقم بسط اعشاری خود، و با s_2 در دومین رقم، ... و با

S_n در n مین رقم بسط اعشاری خود متفاوت است، پس هیچ یک از جمله‌های دنباله $\{S_n\}$ نمی‌تواند مساوی γ باشد. (v_n ها را طوری اختیار کرده‌ایم که هیچ وقت S_n مثلاً مساوی $0.999\dots$ و γ مساوی $0.2000\dots$ نشود.) چون $0 < \gamma < 1$ ، پس قضیه برقرار است.

قضیه ۱۸.۲ فرض کنیم Z^+ مجموعه همه عددهای صحیح مثبت باشد. در این صورت، حاصل ضرب دکارتی $Z^+ \times Z^+$ شمارشپذیر است.

پروهان. تابع f را بر $Z^+ \times Z^+$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(m, n) = 2^m 3^n, (m, n) \in Z^+ \times Z^+ \text{ اگر}$$

در این صورت، f بر $Z^+ \times Z^+$ یک به یک است و برد آن یک زیرمجموعه Z^+ می‌باشد.

۱۴.۲ جبر مجموعه‌ای

اگر A_1 و A_2 دو مجموعه مفروضی باشند، اجتماع A_1 و A_2 را با نماد $A_1 \cup A_2$ نشان داده به صورت زیرین تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۹.۲ $A_1 \cup A_2$ مجموعه آن عنصرهایی است که یا متعلق به A_1 یا متعلق به A_2 و یا متعلق به هر دو باشند.

به عبارت دیگر، $A_1 \cup A_2$ مجموعه همه عنصرهایی است که دست کم به یکی از دو مجموعه A_1 و A_2 تعلق دارند. چون در این تعریف ترتیب اعضا اهمیت ندارد، پس $A_1 \cup A_2$ مساوی $A_2 \cup A_1$ است؛ یعنی، جمع مجموعه‌ای تعویضپذیر است. همچنین این تعریف به صورتی است که جمع مجموعه‌ای شرکتپذیر نیز هست:

$$A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

تعریف اجتماع دو مجموعه را می‌توان به هر دسته متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌ها وسعت داد:

تعریف ۲۰.۲ هرگاه F دسته دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، آنگاه اجتماع همه مجموعه‌های موجود در F عبارت است از مجموعه همه عنصرهایی که دست کم به یکی از مجموعه‌های در F تعلق دارد. این مجموعه را با نماد

$$\bigcup_{A \in F} A$$

نشان می‌دهیم.

اگر F دسته‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، یعنی $F = \{A_1, \dots, A_n\}$ می‌نویسیم

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

در صورتی که F دسته‌ای شمارشپذیر باشد، یعنی $F = \{A_1, A_2, \dots\}$ می‌نویسیم

$$\bigcup_{A \in F} A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

تعریف ۲۱.۲ اگر F دسته دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، اشتراک همه مجموعه‌های موجود در F عبارت است از مجموعه همه عنصرهایی که متعلق به هر یک از مجموعه‌های F می‌باشند. این مجموعه را با نماد

$$\bigcap_{A \in F} A$$

نشان می‌دهیم.

اشتراک دو مجموعه A_1 و A_2 با نماد $A_1 \cap A_2$ نشان داده می‌شود، و عبارت است از مجموعه همه عنصرهایی که به هر دو مجموعه تعلق دارند. هرگاه A_1 و A_2 عنصر مشترکی نداشته باشند، آنگاه $A_1 \cap A_2$ مجموعه تهی است. در این صورت گوئیم A_1 و A_2 از هم جدا می‌باشند. اگر F دسته‌ای متناهی (مانند بالا) باشد، می‌نویسیم

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

و اگر F دسته‌ای شمارشپذیر باشد، می‌نویسیم

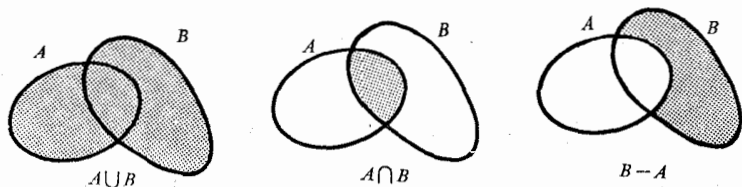
$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

اگر مجموعه‌های موجود در دسته F عنصر مشترک نداشته باشند، اشتراک آنها مجموعه تهی است. البته باید توجه داشت که، اجتماع و اشتراک مجموعه‌های عضو F وقتی هم که F شمارشپذیر نیست معنی دارند. با توجه به نحوه تعریف اجتماع و اشتراک، ملاحظه می‌شود که قانونهای تعویضپذیری و شرکتپذیری در مورد آنها بخودی خود برقرارند.

تعریف ۲۲.۲ متمم A نسبت به B با $B - A$ نشان داده می‌شود، و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$B - A = \{x \mid x \notin A \text{ اما } x \in B\}.$$

دیده می شود که وقتی $A \subseteq B$ ، $A - (B - A) = A$ ، همچنین، اگر $B \cap A$ تهی باشد، $B - A = B$.
 مفهومیهای اجتماع، اشتراک، و متمم در شکل ۴.۲ مصور شده اند.



شکل ۴.۲

قضیه ۲۳.۲ فرض کنیم F دسته ای از مجموعه ها باشد. در این صورت، به ازای هر مجموعه مانند B

$$B - \bigcup_{A \in F} A = \bigcap_{A \in F} (B - A),$$

و

$$B - \bigcap_{A \in F} A = \bigcup_{A \in F} (B - A).$$

برهان. قرار می دهیم $S = \bigcup_{A \in F} A$ و $T = \bigcap_{A \in F} (B - A)$. هرگاه $x \in B - S$ ، آنگاه $x \in B$ ، ولی $x \notin S$. از این روی، x در هیچ یک از مجموعه های عضو F مانند A نیست؛ پس، به ازای هر A در F ، $x \in B - A$. از این نتیجه می شود که $x \in T$ ، بنابراین $B - S \subseteq T$. با تکرار استدلال بالا در جهت عکس، رابطه $T \subseteq B - S$ بدست می آید. پس $B - S = T$. با برهانی مشابه استدلال بالا می توان عبارت دوم قضیه را ثابت کرد.

۱۵.۲ دسته های شمارش پذیر از مجموعه های شمارش پذیر

تعریف ۲۴.۲ هرگاه F دسته ای از مجموعه ها باشد قسمتی که هر دو مجموعه متمایز در F از هم جدا باشند، آنگاه گوئیم F دسته ای است از مجموعه های از هم جدا.

قضیه ۲۵.۲ هرگاه F دسته ای شمارش پذیر از مجموعه های از هم جدا باشد، مثلاً، $F = \{A_1, A_2, \dots\}$ ، قسمتی که هر مجموعه A_n شمارش پذیر باشد، آنگاه اجتماع $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ نیز شمارش پذیر است.

برهان. فرض کنیم $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n}, \dots\}$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، و $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ در این صورت، هر عنصر x مانند x دست کم به یکی از

مجموعهها در F تعلق دارد. پس، به ازای جفت مرتبی از عددهای صحیح مانند (m, n) ، $x = a_{m,n}$. چون F دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است، جفت (m, n) به وسیله x به طور منحصر بفردی مشخص می‌شود. از این روی تابع f ، که به صورت زیر تعریف شده است: اگر $x \in S$ و $x = a_{m,n}$ ، $f(x) = (m, n)$ ، دارای قلمرو S است. چون برد $f(S)$ زیرمجموعه $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ می‌باشد (\mathbb{Z}^+ مجموعه عددهای صحیح مثبت است)، پس $f(S)$ شمارشپذیر است. اما f یک به یک است، و در نتیجه $f(S) \sim S$ ، یعنی S نیز شمارشپذیر است.

قضیه ۲۶.۲ هرگاه $F = \{A_1, A_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعهها باشد، و هرگاه $G = \{B_1, B_2, \dots\}$ انگاشته شود که در آن $B_1 = A_1$ ، و به ازای $n > 1$

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,$$

آنگاه G دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است، و

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

برهان. هر B_n طوری ساخته شده است که عنصر مشترکی با B های پیش از آن، یعنی B_1, B_2, \dots, B_{n-1} ، ندارد. پس G دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا است. فرض کنیم $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ و $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. نشان خواهیم داد که $A = B$. برای این کار، ابتدا می‌گوئیم هرگاه $x \in A$ ، آنگاه به ازای مقداری از k ، $x \in A_k$. هرگاه n کوچکترین این مقادیر k باشد، آنگاه $x \in A_n$ ولی $x \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ ، یعنی $x \in B_n$ ، در نتیجه $x \in B$. پس $A \subseteq B$. برعکس، هرگاه $x \in B$ ، آنگاه به ازای یک مقدار n ، $x \in B_n$. بنابراین، به ازای این مقدار n ، $x \in A_n$. پس $x \in A$ و از این نتیجه می‌شود که $B \subseteq A$.

با استفاده از قضیه‌های ۲۵.۲ و ۲۶.۲ بی‌درنگ قضیه زیر نتیجه می‌شود:

قضیه ۲۷.۲ هرگاه F دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های شمارشپذیر باشد، آنگاه اجتماع همه مجموعه‌های موجود در F نیز مجموعه‌ای شمارشپذیر است.

مثال ۱ مجموعه همه عددهای گویا، یعنی \mathbb{Q} ، شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم A_n مجموعه همه عددهای گویای مثبتی باشد که مخرج آنها n است. در این صورت، مجموعه همه عددهای گویای مثبت مساوی $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ خواهد

بود. از این مطلب نتیجه می‌شود که Q شمارشپذیر است، زیرا هر A_n شمارشپذیر است.

مثال ۲ هرگاه S مجموعه همه بازه‌ها با نقطه‌های انتهائی گویا باشد، آنگاه S شمارشپذیر است.

پرهان. فرض کنیم که $\{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعه عددهای گویا، و A_n مجموعه همه بازه‌های x_n باشد که نقطه انتهائی چپ آنها x_n و نقطه انتهائی راست آنها عددهائی گویا باشند. در این صورت، A_n شمارشپذیر است و $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

تمرین

۱.۲ قضیه ۲.۲ را ثابت کنید. دهنمائی. $(a, b) = (c, d)$

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \quad \text{یعنی}$$

حال به تعریف تساوی مجموعه‌ها متوسل شوید.

۲.۲ فرض کنیم S رابطه‌ای و $\mathcal{D}(S)$ قلمرو آن باشد. رابطه S را

یکم) انعکاسی نامیم در صورتی که $a \in \mathcal{D}(S)$ ایجاب کند که $(a, a) \in S$ ؛
دوم) تقارنی نامیم در صورتی که $(a, b) \in S$ ایجاب کند که $(b, a) \in S$ ؛
سوم) متعددی نامیم در صورتی که $(a, b) \in S$ و $(b, c) \in S$ ایجاب کنند که $(a, c) \in S$.

رابطه‌ای که تقارنی، انعکاسی، و متعددی باشد یک رابطه هم‌ادزی نامیده می‌شود. فرض کنید S مجموعه همه جفت‌های از عددهای حقیقی مانند (x, y) باشد که در یکی از رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$x < y$	(ب)	$x \leq y$	(آ)
$x^2 + y^2 = 1$	(د)	$x < y $	(ج)
$x^2 + x = y^2 + y$	(و)	$x^2 + y^2 < 0$	(ه)

معین کنید هر S کدام یک از خاصیت‌های بالا را دارا است.

۳.۲ تابعهای F و G زیرین به‌ازای هر عدد حقیقی x ، با معادله‌هایی داده شده‌اند. در هر حالت که تابع مرکب $G \circ F$ را بتوان تشکیل داد، قلمرو $G \circ F$ و دستور (یا دستورهائی) برای $(G \circ F)(x)$ را معین کنید.

$$.G(x) = x^2 + 2x, \quad F(x) = 1 - x \quad (\text{آ})$$

$$.G(0) = 1, \quad F(x) = x + 5 \quad (\text{ب})$$

$$.G(x) = |x|/x, \quad x \neq 0 \quad \text{و اگر}$$

$$.F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \text{ اگر} \\ 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\text{ج})$$

$$.G(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ اگر} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $G(x)$ و $G[F(x)]$ به صورتهای زیر داده شده باشند، $F(x)$ را بیابید:

$$.G[F(x)] = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad G(x) = x^3 \quad (\text{د})$$

$$.G[F(x)] = x^2 - 3x + 5, \quad G(x) = 3 + x + x^2 \quad (\text{ه})$$

۴۰۲ سه تابع F, G, H داده شده‌اند. چه قیدهائی را باید بر قلمروهای این تابعها گذارد تا چهار تابع مرکب زیرین معنی داشته باشند؟

$$G \circ F, \quad H \circ G, \quad H \circ (G \circ F), \quad (H \circ G) \circ F.$$

اگر فرض کنیم که $H \circ (G \circ F)$ و $(H \circ G) \circ F$ را بتوان تعریف کرد، قانون شرکتپذیری را ثابت کنید:

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

۵۰۲ اتحادهای نظریه مجموعه‌ای زیرین را در مورد اجتماع و اشتراک ثابت کنید:

$$.A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (\text{آ})$$

$$.A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

$$.A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{ب})$$

$$.(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C) \quad (\text{ج})$$

$$.(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \quad (\text{د})$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

$$.A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \quad (\text{ه})$$

$$.(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C \quad (\text{و})$$

$$.B \subseteq A \quad \text{ز) } (A - B) \cup B = A \quad \text{وقتی، و فقط وقتی، که}$$

۶۰۲ فرض کنید که $f: S \rightarrow T$ یک تابع باشد. اگر A و B دو زیرمجموعه دلخواه S باشند، ثابت کنید که

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \text{ و } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

این رابطه‌ها را برای اجتماع و اشتراک تعدادی دلخواه مجموعه تعمیم دهید.
۷.۲ فرض کنید که $f: S \rightarrow T$ یک تابع باشد. اگر $Y \subseteq T$ بزرگترین زیرمجموعه S را که با f در Y نگاشته می‌شود به $f^{-1}(Y)$ نشان می‌دهیم. یعنی،

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y \text{ و } x \in S\}.$$

مجموعه $f^{-1}(Y)$ را نقش معکوس Y با f می‌نامیم. رابطه‌های زیرین را برای زیرمجموعه‌های دلخواه S مانند X و دلخواه T مانند Y ثابت کنید.

$$f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y \quad (\text{آ}) \quad X \subseteq f^{-1}[f(X)] \quad (\text{ب})$$

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \quad (\text{ج})$$

$$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \quad (\text{د})$$

$$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y) \quad (\text{ه})$$

(و) قسمتهای (ج) و (د) را در مورد اجتماع و اشتراک تعداد دلخواهی مجموعه تعمیم دهید.

۸.۲ با مراجعه به تمرین ۷.۲، ثابت کنید که به‌ازای هر زیرمجموعه T مانند Y ،

$$\text{رابطه } Y = f[f^{-1}(Y)] \text{ وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که } T = f(S).$$

۹.۲ فرض کنید $f: S \rightarrow T$ یک تابع باشد. ثابت کنید که گزاره‌های زیرین با یکدیگر هم‌ارزند.

(آ) f بر S یک به یک است.

(ب) به‌ازای هر دو زیرمجموعه S مانند A و B ،

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

(ج) به‌ازای هر زیرمجموعه S مانند A ، $f^{-1}[f(A)] = A$.

(د) به‌ازای هر دو زیرمجموعه از هم‌جدای S مانند A و B ، نقشهای $f(A)$ و $f(B)$ از هم جدا می‌باشند.

(ه) به‌ازای هر دو زیرمجموعه S مانند A و B که $B \subseteq A$ ، این رابطه برقرار است:

$$f(A - B) = f(A) - f(B).$$

۱۰.۲ ثابت کنید هرگاه $A \sim B$ و $A \sim C$ ، آنگاه $B \sim C$.

۱۱.۲ اگر $\{1, 2, \dots, m\} \sim \{1, 2, \dots, n\}$ ، ثابت کنید که $m = n$.

۱۲.۲ اگر S مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ثابت کنید که S حاوی یک زیرمجموعه

نامتناهی شمارشپذیر است. (دانهائی). عنصری مانند a_1 در S اختیار کنید و سپس $S - \{a_1\}$ را در نظر بگیرید.

۱۳.۲ ثابت کنید هر مجموعه نامتناهی مانند S حاوی زیرمجموعه‌ای حقیقی و متشابه با خود آن است.

۱۴.۲ اگر A مجموعه‌ای شمارشپذیر، و B مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر باشد، ثابت کنید که $A - B$ با B متشابه است.

۱۵.۲ یک عدد حقیقی را جبری نامیم وقتی که این عدد عبارت باشد از ریشه معادله‌ای جبری مانند $f(x) = 0$ ، که در آن $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با ضریبهای صحیح است. ثابت کنید که مجموعه همه چند جمله‌ایها با ضریبهای صحیح شمارشپذیر است، و نتیجه بگیرید که مجموعه عددهای جبری نیز شمارشپذیر است.

۱۶.۲ فرض کنید S مجموعه‌ای متناهی مرکب از n عنصر، و T دسته همه زیرمجموعه‌های S باشد. نشان دهید که T مجموعه‌ای متناهی است و تعداد عنصرهای آن را بیابید.

۱۷.۲ فرض کنید R مجموعه عددهای حقیقی، و S مجموعه همه تابعهای حقیقی با قلمرو R باشد. نشان دهید که S و R هم‌عدد نیستند. (دانهائی). فرض کنید که $S \sim R$ و f تابعی یک به یک باشد بقسمی که $f(R) = S$. اگر $a \in R$ فرض کنید $g_a = f(a)$ آن تابع حقیقی در S باشد که متناظر با عدد حقیقی a است. حال تابع h را با معادله $h(x) = 1 + g_x(x)$ ، $x \in R$ ، تعریف کرده، نشان دهید که $h \notin S$.
۱۸.۲ فرض کنید S دسته همه دنباله‌های 0 و 1 باشد که جمله‌های آنها منحصرأ عددهای 0 و 1 باشند. نشان دهید که S شمارش‌ناپذیر است.

۱۹.۲ نشان دهید که مجموعه‌های زیر شمارشپذیر هستند:
(آ) مجموعه دایره‌ها در صفحه مختلط که شعاع آنها و مختصات مرکز آنها گویا باشند.

(ب) هر دسته از بازه‌های از هم‌جدا با درازای مثبت.

۲۰.۲ فرض کنید f تابعی حقیقی که به ازای هر x در بازه $0 \leq x \leq 1$ تعریف شده باشد. همچنین عددی مثبت مانند M با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به ازای هر تعداد متناهی از نقطه‌ها مانند x_1, x_2, \dots, x_n در بازه $0 \leq x \leq 1$ ، داشته باشیم

$$|f(x_1) + \dots + f(x_n)| \leq M.$$

فرض کنید S مجموعه همه x هائی در $0 \leq x \leq 1$ باشد که به ازای آنها

$f(x) \neq 0$. ثابت کنید که S شمارشپذیر است.

۲۱.۲ در زیر «ثابت» شده است که مجموعه همه بازه‌ها با درازای مثبت شمارشپذیر است. ایراد این «اثبات» را پیدا کنید.

فرض می‌کنیم $\{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعه شمارشپذیر عددهای گویا باشد، و I بازه‌ای با درازای مثبت باشد. در این صورت، I حاوی تعدادی نامتناهی از نقطه‌های گویای x_n است، اما در بین این عددهای گویا یکی وجود دارد که زیرنویس آن از همه کوچکتر است. تابع F را چنین تعریف می‌کنیم: اگر در بازه I ، n کوچکترین زیرنویسی باشد که $x_n \in I$ ، قرار می‌دهیم $F(I) = n$. این تابع تناظری یک به یک بین مجموعه همه بازه‌ها و یک زیرمجموعه عددهای صحیح مثبت ایجاد خواهد کرد. بنابراین، مجموعه همه بازه‌ها شمارشپذیر است.

۲۲.۲ فرض کنید S دسته همه زیرمجموعه‌های مجموعه مفروض T باشد. همچنین $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد که بر S تعریف شده است. تابع f را یک تابع جمعپذیر نامیم در صورتی که به ازای هر دو زیرمجموعه از هم جدای T مانند A و B ، داشته باشیم $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. اگر f جمعپذیر باشد، ثابت کنید به ازای هر دو زیرمجموعه T مانند A و B ، این رابطه‌ها برقرارند:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B - A)$$

و

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

۲۳.۲ در مراجعه به تمرین ۲۲.۲، فرض کنید که f جمعپذیر بوده و همچنین، به ازای دو زیرمجموعه بخصوص T مانند A و B ، رابطه‌های زیرین برقرار باشند:

$$f(A \cup B) = f(A') + f(B') - f(A')f(B'),$$

$$f(A \cap B) = f(A)f(B), \quad f(A) + f(B) \neq f(T),$$

که در آنها $A' = T - A$ و $B' = T - B$. ثابت کنید که این رابطه‌ها $f(T)$ را مشخص می‌کنند، و مقدار $f(T)$ را محاسبه کنید.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 2.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.
- 2.2 Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*, 3rd ed. North - Holland, Amsterdam, 1965.

- 2.3 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison – Wesley, Reading, 1966.
- 2.4 Halmos, P. R., *Naive Set Theory*. Van Nostrand, New York, 1960.
- 2.5 Kamke, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1950.
- 2.6 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.
- 2.7 Rotman, B., and Kneebone, G. T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*. Elsevier, New York, 1968.

مبانی توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای

۱.۳ مقدمه

در قسمت بزرگی از فصل پیشین با مجموعه‌های «مجرد» سروکار داشتیم؛ یعنی، مجموعه‌هایی که عضوهایشان چیزهای دلخواه بودند. در این فصل مجموعه‌های خاص عددهای حقیقی، عددهای مختلط و، به طور کلیتر، مجموعه‌هایی در فضاها با بعد بالاتر مورد نظرمان خواهد بود.

برای مطالعه در چنین زمینه‌ای بکار بردن اصطلاحات هندسی مناسب و مشکل‌گشا است. بدین ترتیب، از مجموعه‌های نقاط بر خط حقیقی، مجموعه‌های نقاط در صفحه، یا مجموعه‌های نقاط در فضاها با بعد بالاتر سخن خواهیم گفت. بعداً در این کتاب به بررسی تابعه‌هایی خواهیم پرداخت که بر مجموعه‌هایی از نقاط تعریف شده‌اند، و لازم می‌بینیم که قبل از آغاز مطالعه تابعه با بعضی از مجموعه‌های نقطه‌ای اساسی، مانند مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، و مجموعه‌های فشرده آشنا شویم. مبحثی که در باره این چنین مجموعه‌ها مطالعه می‌کند توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای نامیده می‌شود.

۲.۳ فضای اقلیدسی R^n

یک نقطه در فضای دو بعدی عبارت است از جفت مرتبی از عددهای حقیقی مانند (x_1, x_2) . بهمین نحو، یک نقطه در فضای سه بعدی سه تایی مرتبی از عددهای حقیقی است مانند (x_1, x_2, x_3) . بنابراین، می‌توان n تایی مرتبی از عددهای

حقیقی مانند (x_1, x_2, \dots, x_n) را به‌عنوان نقطه‌ای در فضای n بعدی در نظر گرفت.

تعریف ۱.۳ فرض کنیم $n > 0$ عددی صحیح باشد. مجموعه مرتبی از n عدد حقیقی مانند (x_1, x_2, \dots, x_n) را یک نقطه n بعدی یا یک بردار با n مؤلفه می‌نامیم. در چاپ، نقطه‌ها یا بردارها معمولاً با حروف سیاه نشان داده می‌شوند؛ مثلاً،

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{یا} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

عدد x_k را مختص k ام نقطه x ، یا مؤلفه k ام بردار x می‌نامیم. مجموعه همه نقطه‌های n بعدی را فضای اقلیدسی n بعدی یا فقط فضای n بعدی نامیده، با نماد R^n نشان می‌دهیم.

ممکن است برای خواننده این سؤال مطرح شود که آیا اصولاً برای بحث در باره فضاها با بعد بیشتر از ۳ مزیتی می‌توان قائل شد؟ در عمل دیده شده است که بسیاری از موارد پیچیده را می‌توان به‌کمک فضاها n بعدی ساده‌تر فهمید. شاید خواننده کتاب آن‌قدر با آنالیز برداری سه بعدی آشنا باشد که بتواند مزیت نشان دادن معادله‌های حرکت یک دستگاه با سه درجه آزادی به‌صورت یک معادله برداری را بر ارائه آنها به‌صورت سه معادله اسکالر تشخیص دهد. این‌گونه مزیت برای دستگاهی که n درجه آزادی داشته باشد متصور است.

برتری دیگر مطالعه فضاها n بعدی، با n به‌معنی اعم، این است که ما یکجا با بسیاری از خاصیت‌های مشترک فضاها n بعدی، دو بعدی، سه بعدی، و یا بعدها n بیشتر، یعنی خاصیت‌هایی که از بعدپذیری فضا مستقل باشند، سروکار خواهیم داشت.

فضاهای با بعد بالاتر به‌طور طبیعی در زمینه‌هایی مانند نسبیت و مکانیک آماری و مکانیک کوانتمی مورد استعمال دارند. در واقع، در مکانیک کوانتمی حتی فضاهای با بعد نامتناهی نیز بکار گرفته می‌شوند.

عملهای جبری بر نقطه‌های n بعدی بدین‌صورت تعریف می‌شوند:

تعریف ۲.۳ فرض کنیم که $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ در R^n باشند. تعریف می‌کنیم:

(آ) تساوی:

$$x = y \quad \text{و فقط وقتی، که} \quad x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

(ب) مجموع:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

(ج) ضرب در عددهای حقیقی (اسکالرها):

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \dots, ax_n) \quad (a \text{ عددی است حقیقی}).$$

(د) تفاضل:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$$

(ه) بردار صفر یا مبدأ:

$$\mathbf{0} = (0, \dots, 0).$$

(و) حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه‌ای:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

(ز) هنج یا دازا:

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

هنج $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ را فاصله بین \mathbf{x} و \mathbf{y} می‌نامیم.

تبره. به اصطلاح جبر خطی، \mathbb{R}^n مثالی است از یک فضای خطی.

قضیه ۲.۳ فرض کنیم که \mathbf{x} و \mathbf{y} نقطه‌هایی در \mathbb{R}^n باشند. در این صورت:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ وقتی، و فقط وقتی، که } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (\text{آ})$$

$$\|a\mathbf{x}\| = |a| \|\mathbf{x}\|, \quad a \text{، به‌ازای هر عدد حقیقی مانند } a, \quad (\text{ب})$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad (\text{ج})$$

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{د})$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{ه})$$

برهان. گزاره‌های (آ)، (ب)، و (ج) بی‌فصله از تعریف نتیجه می‌شوند، و

نامساوی کوشی-شوارتز نیز در قضیه ۲.۳.۱ ثابت شده است. گزاره (ه) از (د) نتیجه

می‌شود زیرا

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2)$$

$$= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$$

$$= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

تیسره. گاهی نامساوی مثلثی به شکل زیرین نوشته می‌شود:

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|.$$

این رابطه از (ه) این‌طور بدست می‌آید که در آن به جای x ، $x - y$ و به جای y ، $y - z$ قرار دهیم. و نیز داریم

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

تعریف ۴.۳ بردار مختصات یک‌گانه u_k در R^n برداری است که مؤلفه k ام آن ۱ و بقیه مؤلفه‌های آن صفر باشند. بنابراین،

$$u_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, u_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

هرگاه $x = (x_1, \dots, x_n)$

آنگاه $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ و $x_i = x \cdot u_i$ ، $x_j = x \cdot u_j$ ، \dots ، $x_n = x \cdot u_n$ بردارهای u_1, \dots, u_n بردارهای پایه نیز نامیده می‌شوند.

۳.۳ گویهای باز و مجموعه‌های باز در R^n

فرض کنیم که a نقطه‌ای در R^n ، و r عدد مثبت مفروضی باشد. مجموعه همه نقطه‌هایی مانند x در R^n که

$$\|x - a\| < r$$

را یک گوی n بعدی باز به شعاع r و به مرکز a می‌نامیم. این مجموعه را با نماد $B(a)$ یا $B(a; r)$ نشان می‌دهیم.

گوی $B(a; r)$ عبارت است از مجموعه همه نقطه‌هایی که فاصله آنها تا a از r کمتر است. این در R^1 صرفاً بازه‌ی بازی است به مرکز a . این گوی در R^2 یک گرده مستدیر است، و در R^3 کره جامدی است که مرکز آن a و شعاع آن r هستند.

۵.۳ تعریف نقطه درونی. فرض کنیم S یک زیرمجموعه R^n باشد، و $a \in S$ ، a را یک نقطه درونی S می‌نامیم در صورتی که یک گوی n بعدی باز به مرکز a وجود داشته باشد قسمی که هر نقطه این گوی عضو S باشد.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، هر نقطه درونی S مانند a را می‌توان با یک گوی n بعدی مانند $B(a) \subseteq S$ احاطه کرد. مجموعه همه نقطه‌های درونی S را درون S نامیده با نماد $\text{int } S$ نشان می‌دهیم. گاهی هر مجموعه را که حاوی گویی به

مرکز a باشد یک همسایگی a می‌نامیم.

۹.۳ تعریف مجموعه باز. مجموعه S در \mathbb{R}^n باز می‌نامیم در صورتی که هر نقطه S یک نقطه درونی باشد.

تبصره. مجموعه S وقتی، و فقط وقتی، باز است که $S = \text{int } S$. (ر. ک. تمرین ۰.۹.۳)

چند مثال. در \mathbb{R}^1 ساده‌ترین نوع مجموعه باز ناتهی بازه باز است. اجتماع دو یا چند بازه باز نیز مجموعه‌ای است باز. بازه بسته $[a, b]$ مجموعه‌ای باز نیست، زیرا نقطه‌های انتهائی a و b نقطه‌های درونی بازه نیستند.

مثالهایی از مجموعه‌های باز در صفحه عبارتند از: درون یک گره؛ حاصل ضرب دکارتی دو بازه باز یک بعدی. باید توجه داشت که، اگر یک بازه باز در \mathbb{R}^1 به‌عنوان یک زیرمجموعه صفحه در نظر گرفته شود، دیگر باز نخواهد بود. در حقیقت، هیچ زیرمجموعه \mathbb{R}^1 (بجز مجموعه تهی) در \mathbb{R}^2 باز نیست، زیرا یک چنین مجموعه‌ای نمی‌تواند حاوی یک گوی \bar{y} بعدی باشد.

در \mathbb{R}^n مجموعه تهی باز است (چرا؟)، همچنین تمام فضا، یعنی \mathbb{R}^n ، نیز باز می‌باشد. هر گوی n بعدی باز مجموعه بازی است در \mathbb{R}^n . حاصل ضرب دکارتی n بازه باز یک بعدی $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ ، یعنی

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

مجموعه بازی در \mathbb{R}^n است. این مجموعه را یک بازه باز n بعدی می‌نامیم. با فرض $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ، بازه باز n بعدی بالا را به‌صورت $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ نشان می‌دهیم.

دو قضیه زیرین نشان می‌دهند که چگونه با تعدادی مجموعه باز مفروض در \mathbb{R}^n می‌توان مجموعه‌های باز دیگری ساخت.

قضیه ۷.۳ اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای است باز.

پروهان. فرض کنیم F دسته‌ای از مجموعه‌های باز، و S اجتماع آنها باشد، یعنی $S = \bigcup_{A \in F} A$. همچنین $\mathbf{x} \in S$ در این صورت، دست‌کم باید به یکی از مجموعه‌ها در F تعلق داشته باشد، مثلاً $\mathbf{x} \in A$. چون A باز است، یک گوی n -بعدی باز مانند $B(\mathbf{x})$ هست بقسمی که $B(\mathbf{x}) \subseteq A$ اما $A \subseteq S$ ، پس $B(\mathbf{x}) \subseteq S$ ، و در نتیجه \mathbf{x} یک نقطه درونی S است. چون هر نقطه S یک نقطه درونی است، پس S باز خواهد بود.

ضیه ۸.۳ اشتراك دسته‌ای متناهی از مجموعه‌های باز مجموعه‌ای است باز.

برهان. قرار می‌دهیم $S = \bigcap_{k=1}^m A_k$ ، که در آن هر A_k باز باشد. فرض کنیم که $x \in S$ (اگر S تهی باشد، چیزی برای اثبات نداریم). در این صورت، به ازای هر $x \in A_k$ ، $k = 1, 2, \dots, m$ ، در نتیجه گویسی باز n بعدی مانند $B(x; r_k) \subseteq A_k$ هست که فرض کنیم که r مینیمم عددهای مثبت r_1, r_2, \dots, r_m باشد. در این صورت $x \in B(x; r) \subseteq S$ ، یعنی، x یک نقطه درونی است، پس S باز می‌باشد.

بنابراین، دیده می‌شود که با تعدادی مجموعه‌های باز داده شده می‌توان، با اجتماع تعدادی دلخواه یا اشتراک تعدادی متناهی از آنها، مجموعه‌های باز جدیدی ساخت. از سوی دیگر، باید توجه داشت که اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز همیشه باز نیست. مثلاً، اشتراک همه بازه‌های باز به شکل $[1/n, 1/n]$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots, m$ ، مجموعه‌ای است که فقط از 0 تشکیل شده است.

۴.۳ نهاد مجموعه‌های باز در \mathbb{R}^1

در \mathbb{R}^1 ، اجتماع دسته‌ای شمارش‌پذیر از بازه‌های باز از هم جدا مجموعه‌ای است باز، و شایان توجه است که هر مجموعه باز ناتهی در \mathbb{R}^1 را می‌توان از این راه بدست آورد. این بخش به برهانی از این مطلب اختصاص دارد. ابتدا مفهوم بازه مؤلف را معرفی می‌کنیم.

۹.۳ تعریف بازه مؤلف. فرض کنیم S یک زیرمجموعه باز \mathbb{R}^1 باشد. بازه باز I (که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد) را یک بازه مؤلف S نامیم در صورتی که $I \subseteq S$ ، و بازه باز دیگری مانند $J \neq I$ وجود نداشته باشد که $I \subseteq J \subseteq S$.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک بازه مؤلف S زیرمجموعه حقیقی هیچ بازه باز دیگری که محتوا در S باشد نیست.

قضیه ۱۰.۳ هر نقطه از مجموعه باز ناتهی S به یکی، و فقط به یکی، از بازه‌های مؤلف S تعلق دارد.

برهان. فرض کنیم که $x \in S$. در این صورت، x در بازه بازی مانند I است که $I \subseteq S$. بازه‌هایی از این‌گونه بسیارند. اما «بزرگترین» آنها بازه مؤلف مطلوب است. می‌توان ثابت کرد که هرگاه $a(x)$ و $b(x)$ بزرگترین این بازه‌ها باشد، آنگاه

$$a(x) = \inf \{a \mid a, x \subseteq S\}, \quad b(x) = \sup \{b \mid x, b \subseteq S\}.$$

در این‌جا ممکن است $a(x)$ مساوی $-\infty$ ، و $b(x)$ مساوی $+\infty$ باشد. واضح

است که بازهٔ بازی مانند J با خاصیت $J \subseteq I_x \subseteq S$ وجود ندارد، پس I_x یک بازهٔ مؤلف S است که حاوی نقطهٔ x می باشد. هرگاه J_x بازهٔ مؤلف دیگر S حاوی x باشد، آنگاه اجتماع $J_x \cup I_x$ بازه‌ای است باز که محتوا در S و حاوی هر دو I_x و J_x می باشد. در نتیجه، از تعریف بازهٔ مؤلف معلوم می شود که

$$I_x = J_x \cup I_x = J_x \cup I_x = I_x$$

قضیهٔ ۱۱.۳ (قضیهٔ نمایش برای مجموعه‌های باز بر خط حقیقی). هر مجموعهٔ بازناهایی مانند S در \mathbb{R}^1 مساوی اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های مؤلف از هم جدای S می باشد.

پرهان. اگر $x \in S$ ، فرض می کنیم که I_x آن بازهٔ مؤلف S باشد که حاوی x است. واضح است که اجتماع همهٔ I_x ها مساوی S است. هرگاه دو تا از این بازه‌ها، مثلاً I_x و I_y ، نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آنگاه اجتماع $I_x \cup I_y$ بازهٔ بازی است محتوا در S و حاوی I_x و I_y است. پس $I_x \cup I_y = I_x$ و $I_x \cup I_y = I_y$ ، در نتیجه $I_x = I_y$. بنابراین، I_x ها یک دستهٔ از هم جدا تشکیل می دهند.

حال باقی می ماند ثابت کنیم که آنها تشکیل یک دستهٔ شمارشپذیر می دهند. برای این منظور، فرض کنیم که $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ مجموعهٔ شمارشپذیر عددهای گویا باشد. در هر بازهٔ مؤلف مانند I_x تعدادی نامتناهی x_n وجود دارد، اما بین این x_n ها فقط یکی زیرنویسش از همه کوچکتر است. اکنون تابع F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

اگر n کوچکترین زیرنویسی باشد که $x_n \in I_x$ ، قرار می دهیم $F(I_x) = n$. این تابع یک به یک است، زیرا تساوی $F(I_x) = F(I_y) = n$ ایجاب می کند که x_n در I_x و I_y باشد، و از این نتیجه می شود که $I_x = I_y$. بنابراین، F تناظری یک به یک بین بازه‌های I_x و یک زیرمجموعهٔ عددهای صحیح مثبت ایجاد می کند، و پرهان قضیه تمام خواهد بود.

تبره. نمایش S به صورت بالا منحصر بفرد است. در حقیقت، هرگاه S به صورت اجتماع تعدادی بازهٔ باز از هم جدا باشد، آنگاه این بازه‌ها باید بازه‌های مؤلف S باشند. این مطلب بی درنگ از قضیهٔ ۱۰.۳ نتیجه می شود.

هرگاه S یک بازهٔ باز باشد، آنگاه نمایش S فقط حاوی یک بازهٔ مؤلف، یعنی خود S ، خواهد بود. بنابراین، یک بازهٔ باز در \mathbb{R}^1 را نمی توان به صورت اجتماع دو مجموعهٔ بازناهایی و از هم جدا نشان داد. این خاصیت را به این صورت نیز توصیف می کنند که یک بازهٔ باز هیچند است. در بخش ۱۶.۴، مفهوم همبندی

مجموعه‌ها در \mathbb{R}^n بیشتر موزد بحث واقع خواهد شد.

۵.۳ مجموعه‌های بسته

۱۲.۴ تعریف مجموعه بسته. مجموعه S در \mathbb{R}^n را بسته می‌گوئیم در صورتی که متمم آن، یعنی $S - \mathbb{R}^n$ باز باشد.

چند مثال. بازه بسته $[a, b]$ در \mathbb{R}^1 مجموعه‌ای است بسته. حاصل ضرب دکارتی n بازه بسته یک بعدی، یعنی

$$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

مجموعه‌ای است بسته در \mathbb{R}^n ، که آن را یک بازه بسته n بعدی $[a, b]$ می‌نامیم.

قضیه زیرین، که نتیجه‌ای است از قضیه‌های ۷.۳ و ۸.۳، نشان می‌دهد که چگونه از تعدادی مجموعه بسته مفروض می‌توان مجموعه‌های بسته دیگری ساخت.

قضیه ۱۳.۳ اجتماع دسته‌ای متناهی از مجموعه‌های بسته مجموعه‌ای است بسته، و اشتراک هر دسته دلخواه از مجموعه‌های بسته هم مجموعه‌ای است بسته.

رابطه دیگری بین مجموعه‌های باز و بسته در قضیه آتی توصیف شده است.

قضیه ۱۴.۳ هرگاه A باز، B بسته باشد، آنگاه $A - B$ باز، $B - A$ بسته است.

برهان. تنها کافی است توجه کنیم که $A - B = A \cap (\mathbb{R}^n - B)$ ، یعنی $A - B$ به صورت اشتراک دو مجموعه باز است. همچنین $B - A = B \cap (\mathbb{R}^n - A)$ ، یعنی $B - A$ به صورت اشتراک دو مجموعه بسته می‌باشد.

۶.۳ نقطه‌های چسبیده. نقطه‌های انباشتی

مجموعه‌های بسته را نیز می‌توان برحسب نقطه‌های چسبیده و نقطه‌های انباشتی توصیف کرد.

۱۵.۳ تعریف نقطه چسبیده. فرض کنیم S یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n ، و x نقطه‌ای در \mathbb{R}^n باشد، و x لزوماً در S نباشد. در این صورت، x را چسبیده به S نامیم در صورتی که هر گوی n بعدی مانند $B(x)$ دست کم حاوی یک نقطه از S باشد.

چند مثال

۱. هرگاه $x \in S$ ، آنگاه چون هر گوی n بعدی مانند $B(x)$ حاوی x است، پس x چسبیده به S خواهد بود.

۲. هرگاه S یک زیرمجموعه R باشد که از بالا کراندار است، آنگاه $\sup S$ چسبیده به S خواهد بود.

برخی نقاط چسبیده به S اند زیرا هرگویی مانند $B(x)$ حاوی نقطه‌هایی در S است که متمایز از x هستند. این چنین نقطه‌ها را نقطه‌های انباشتگی می‌نامیم.

۱۶.۴ تعریف نقطه انباشتگی. هرگاه $S \subseteq R^n$ و $x \in R^n$ ، آنگاه x را یک نقطه انباشتگی S می‌نامیم در صورتی که هرگویی n بعدی مانند $B(x)$ حاوی دست‌کم یک نقطه S متمایز از x باشد.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، x وقتی، و فقط وقتی، یک نقطه انباشتگی S است که x چسبیده به $S - \{x\}$ باشد. هرگاه $x \in S$ ولی x نقطه انباشتگی S نباشد، آنگاه x را یک نقطه تنهای S می‌نامیم.

چند مثال

۱. یک نقطه انباشتگی مجموعه عددهائی به شکل $1/n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) است.
۲. هر عدد حقیقی نقطه انباشتگی مجموعه عددهای گویا است.
۳. هر نقطه بازه بسته $[a, b]$ نقطه انباشتگی بازه باز $]a, b[$ است.

قضیه ۱۷.۳ هرگاه x یک نقطه انباشتگی S باشد، آنگاه هرگویی n بعدی مانند $B(x)$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S خواهد بود.

برهان. فرض کنیم که چنین نباشد؛ یعنی، یک گویی n بعدی مانند $B(x)$ وجود داشته باشد بقسمی که حاوی تنها تعدادی متناهی نقطه S متمایز از x ، مانند a_1, a_2, \dots, a_m ، باشد. هرگاه r مینیمم عددهای مثبت

$$\|x - a_1\|, \quad \|x - a_2\|, \quad \dots, \quad \|x - a_m\|$$

باشد، آنگاه $B(x; r/2)$ گویی است n بعدی حول x که حاوی هیچ نقطه S متمایز از x نیست، و این خلاف فرض قضیه است.

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که، خصوصاً، یک مجموعه نمی‌تواند دارای نقطه انباشتگی باشد مگر آن که اول حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد. اما، عکس این مطلب عموماً درست نیست. مثلاً، مجموعه عددهای صحیح مثبت، یعنی $\{1, 2, 3, \dots\}$ ، مجموعه‌ای است نامتناهی بدون نقطه انباشتگی. در یکی از بخشهای آتی نشان خواهیم داد که مجموعه‌های نامتناهی محتوا در یک گویی n بعدی همواره نقطه انباشتگی دارند. این مطلب نتیجه مهمی است که به نام قضیه بولتزانو - وایراشتراس^۱

1. Bolzano-Weierstrass

معروف است.

۷.۳ مجموعه‌های بسته و نقطه‌های چسبیده

متمم یک مجموعه باز را بنا بر تعریف مجموعه‌ای بسته نامیدیم. قضیه زیر مجموعه‌های بسته را بطریقی دیگر توصیف می‌کند.

قضیه ۱۸.۳ مجموعه S در R^n وقتی، و فقط وقتی، بسته است که حاوی همه نقطه‌های چسبیده خود باشد.

پرهان. فرض کنیم که S بسته، و x چسبیده به S باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $x \in S$. فرض می‌کنیم $x \notin S$ و تناقضی بدست می‌آوریم. هرگاه $x \notin S$ ، آنگاه $x \in R^n - S$ و، چون $R^n - S$ باز است، گویی n بعدی مانند $B(x)$ جزء S وجود دارد. پس $B(x)$ حاوی نقطه‌ای از S نیست، و این متناقض این است که x چسبیده به S می‌باشد.

برای اثبات عکس مطلب بالا، فرض می‌کنیم S حاوی همه نقطه‌های چسبیده خود باشد، و نشان می‌دهیم که S بسته است. فرض می‌کنیم که $x \in R^n - S$ در این صورت $x \notin S$ ، پس x چسبیده به S نیست. از این روی، گویی مانند $B(x)$ هست که اشتراکش با S تهی است، پس $B(x) \subseteq R^n - S$. بنا بر این $R^n - S$ باز است، و در نتیجه S بسته خواهد بود.

۱۹.۳ تعریف بست. مجموعه همه نقطه‌های چسبیده مجموعه S را بست S نامیم و با نماد \bar{S} نشان می‌دهیم.

چون هر نقطه S چسبیده به S است، پس همواره $S \subseteq \bar{S}$. از قضیه ۱۸.۳ برمی‌آید که رابطه شمول مخالف آن، یعنی $S \subseteq \bar{S}$ ، وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که S بسته باشد. بنا بر این:

قضیه ۲۰.۳ مجموعه S وقتی، و فقط وقتی، بسته است که $\bar{S} = S$.

۲۱.۳ تعریف مجموعه مشتق. مجموعه همه نقطه‌های انباشتگی مجموعه S را مجموعه مشتق S' نامیده با نماد S' نشان می‌دهیم.

واضح است که به ازای هر مجموعه مانند S ، $S' = S \cup S'$. از این روی، بنا بر قضیه ۲۰.۳، S' وقتی، و فقط وقتی، بسته است که $S' \subseteq S$. این مطلب با بیان دیگر به صورت قضیه زیر در می‌آید:

قضیه ۲۲.۳ مجموعه S در R^n وقتی، و فقط وقتی، بسته است که حاوی همه نقطه‌های انباشتگی خود باشد.

۸.۳ قضیه بولتزانو - وایراشتراس

۲۳.۳ تعریف مجموعه کراندار. مجموعه S در \mathbb{R}^n را کراندار گوئیم در صورتی که به ازای عددی مانند $0 < r$ و نقطه‌ای مانند $a \in \mathbb{R}^n$ ، این مجموعه کاملاً در گوی n بعدی $B(a; r)$ قرار گیرد.

قضیه ۲۴.۳ (بولتزانو - وایراشتراس). هرگاه مجموعه کراندار S در \mathbb{R}^n حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد، آنگاه S دست کم یک نقطه انباشتگی در \mathbb{R}^n دارد.

برهان. برای آماده کردن زمینه‌ای برای اثبات، ابتدا قضیه را برای \mathbb{R}^1 ثابت می‌کنیم. گوئیم چون S کراندار است، پس S جزء بازه‌ای مانند $[a, -a]$ است. دست کم یکی از دو زیر بازه $[0, a]$ یا $[a, 0]$ حاوی یک زیرمجموعه نامتناهی S است. یک چنین زیر بازه را $[a_1, b_1]$ می‌نامیم. $[a_1, b_1]$ را به دو بازه متساوی تقسیم نموده، بازه‌ای مانند $[a_2, b_2]$ بدست می‌آوریم که حاوی یک زیرمجموعه نامتناهی S باشد، و عمل را همچنان ادامه می‌دهیم. در نتیجه، دسته‌ای شمارشپذیر بازه بدست خواهد آمد که درازای n مین آنها، یعنی $[a_n, b_n]$ ، مساوی $a/2^{n-1}$ است. واضح است که \sup نقطه‌های انتهایی چپ بازه‌ها، یعنی a_n ها، باید مساوی \inf نقطه‌های انتهایی راست، یعنی b_n ها، باشد. [چرا این دو متساویند؟] فرض کنیم این مقدار مشترک x باشد. x یک نقطه انباشتگی S است، زیرا اگر r عدد مثبتی باشد، بمجردی که n به قدر کافی بزرگ شود که $b_n - a_n < r/2$ ، بازه $[a_n, b_n]$ محتوا در $B(x; r)$ خواهد بود. بازه $B(x; r)$ حاوی نقطه‌ای از S متمایز با x است، و در نتیجه x نقطه انباشتگی S می‌باشد. پس، قضیه در مورد \mathbb{R}^1 برقرار است. (توجه کنید که نقطه انباشتگی x ممکن است متعلق به S باشد یا نباشد.)

اکنون اندیشه‌هایی را که در مورد \mathbb{R}^1 بکار بردیم وسعت می‌دهیم تا قضیه را در مورد \mathbb{R}^n ($n > 1$) ثابت کنیم. (می‌توان با مراجعه به شکل ۱۰.۳ نحوه اثبات قضیه را در \mathbb{R}^2 تجسم نمود.)

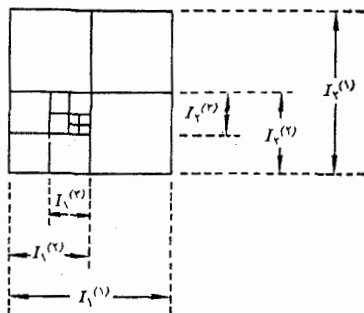
چون S کراندار است، S در یک گوی n بعدی مانند $B(0; a)$ ($a > 0$) واقع است، بنابراین جزء بازه n بعدی J_1 ، که با نامساویهای زیرین تعریف می‌شود

$$-a \leq x_k \leq a \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

نیز هست. در این جا J_1 عبارت است از حاصل ضرب دکارتی

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \dots \times I_n^{(1)};$$

یعنی، مجموعه نقطه‌هایی مانند (x_1, \dots, x_n) است، که در آن $x_k \in I_k^{(1)}$ و



شکل ۱.۳

هر بازه $I_k^{(1)}$ بازه یک بعدی $-a \leq x_k \leq a$ می‌باشد. هر بازه $I_k^{(1)}$ را می‌توان به دو زیربازه $I_{k,\gamma}^{(1)}$ و $I_{k,\delta}^{(1)}$ تقسیم کرد، که با نامساویهای زیرین تعریف شوند:

$$I_{k,\delta}^{(1)} : -a \leq x_k \leq 0 ; I_{k,\gamma}^{(1)} : 0 \leq x_k \leq a .$$

حال، همه حاصل ضربهای دکارتی ممکن به شکل

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \dots \times I_{n,k_n}^{(1)} \quad (\bar{A})$$

را، که در آن هر k_i مساوی ۱ یا ۲ باشد، در نظر می‌گیریم. تعداد این نوع حاصل-ضربها دقیقاً 2^n تا می‌باشد. البته هر یک از این حاصل ضربها بازه‌ای n بعدی است. اجتماع این 2^n بازه همان بازه اولی J_1 است که حاوی S بود. از این روی، دستکم یکی از این 2^n بازه در (\bar{A}) باید حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S باشد. یکی از این گونه بازه‌ها را J_p می‌نامیم. J_p را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$J_p = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \dots \times I_n^{(2)},$$

که در آن هر $I_k^{(2)}$ یکی از زیربازه‌های $I_k^{(1)}$ است که درازایش مساوی a است. اکنون عملی را که در مورد J_1 انجام دادیم برای J_p تکرار می‌کنیم، یعنی با تقسیم هر بازه $I_k^{(2)}$ به دو قسمت متساوی، به بازه‌ای n بعدی مانند J_p دست می‌یابیم که حاوی یک زیرمجموعه نامتناهی S است. اگر این عمل را به همین نحو تکرار کنیم، دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند J_1, J_p, J_q, \dots بدست خواهد آمد، که در آن بازه m ، یعنی J_m ، حاوی یک زیرمجموعه نامتناهی S است، و می‌توان آن را به شکل زیرین نشان داد:

$$I_k^{(m)} \subseteq I_k^{(1)} \quad \text{که در آن } J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \dots \times I_n^{(m)}$$

اگر بنویسیم

$$I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],$$

داریم

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{\nu^{m-\nu}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

بنابراین، به ازای هر مقدار ثابت k ، \sup همه نقطه‌های انتهائی چپ، یعنی $a_k^{(m)}$ ها ($m = 1, 2, \dots$)، باید مساوی \inf همه نقطه‌های انتهائی راست، یعنی $b_k^{(m)}$ ها ($m = 1, 2, \dots$) باشد. فرض می‌کنیم t_k مقدار مشترک این دو باشد. حال ثابت می‌کنیم که $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ یک نقطه انباشتگی S است. برای پی بردن به این مطلب، بازه‌ای n بعدی مانند $B(\mathbf{t}; r)$ را اختیار می‌کنیم. البته، نقطه \mathbf{t} به همه بازه‌های J_1, J_2, \dots ، که در بالا ساخته شدند، تعلق دارد، و وقتی m چنان باشد که $r/2 < a/\nu^{m-\nu}$ ، این همسایگی شامل J_m است. اما چون J_m حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S است، پس $B(\mathbf{t}; r)$ نیز حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S خواهد بود. یعنی \mathbf{t} نقطه انباشتگی S می‌باشد.

۹.۳ قضیه اشتراکی کانتور

به عنوان کاربردی از قضیه بولترانو - وایراشتراس، قضیه اشتراکی کانتور را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲۵.۳ فرض کنیم که $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های ناتهی در R^n باشد بقسمی که:

$$Q_{k+1} \subseteq Q_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

دوم) هر Q_k بسته، و Q_1 کراندار باشد.

در این صورت اشتراك $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ بسته و ناتهی است.

پرهان. قرار می‌دهیم $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. در این صورت، بنا بر قضیه ۱۳.۳، S بسته است. برای آن که نشان دهیم S ناتهی است، نقطه‌ای را مانند \mathbf{x} در S نشان می‌دهیم. می‌توان فرض کرد که هر Q_k حاوی تعدادی نامتناهی نقطه باشد؛ زیرا که جز در این صورت اثبات قضیه واضح است. حال دسته نقطه‌های متمایز

$$A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\},$$

که در آن $\mathbf{x}_k \in Q_k$ را تشکیل می‌دهیم. چون A مجموعه‌ای است نامتناهی و محتوا

در مجموعه کراندار Q_1 ، پس A نقطه انباشتگی مانند x دارد. با اثبات این که به ازای هر k ، $x \in Q_k$ ، نشان می‌دهیم که $x \in S$. چون هر Q_k بسته است، کافی است نشان دهیم که x نقطه انباشتگی هر Q_k است. چون هر همسایگی x حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از A است، و چون همه نقطه‌های A جز (احتمالاً) تعدادی متناهی از آنها متعلق به Q_k هستند، پس هر همسایگی x نیز حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از Q_k خواهد بود. بنا براین، x یک نقطه انباشتگی Q_k است و حکم برقرار است.

۱۰.۳ قضیه پوششی لیندلف

در این بخش مفهوم پوشش یک مجموعه را معرفی، و قضیه پوششی لیندلف را ثابت می‌کنیم. فایده این مفهوم بعداً معلوم خواهد شد.

۲۶.۳ تعریف پوشش. دسته‌ای از مجموعه‌ها مانند F را یک پوشش مجموعه مفروض S نامیم در صورتی که $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. همچنین می‌گوئیم که دسته F مجموعه S را می‌پوشاند. هرگاه F دسته‌ای از مجموعه‌های باز باشد، آنگاه F یک پوشش باز S نامیده می‌شود.

چند مثال

۱. دسته همه بازه‌ها به شکل $1/n < x < 2/n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) یک پوشش باز بازه $0 < x < 1$ است. این مثالی است از یک پوشش شمارشپذیر.

۲. خط حقیقی \mathbb{R}^1 با دسته همه بازه‌های باز $[a, b]$ پوشیده می‌شود. این پوشش شمارشپذیر نیست. ولی، حاوی یک پوشش شمارشپذیر \mathbb{R}^1 است؛ یعنی، همه بازه‌ها به شکل $[n, n+2]$ ، که در آن همه عددهای صحیح را بخود بگیرد، یک پوشش شمارشپذیر \mathbb{R}^1 خواهد بود.

۳. فرض می‌کنیم که $S = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$. دسته F مرکب از همه گرده‌های مستدیر به مرکز (x, x) و شعاع x ، که در آن $x > 0$ ، یک پوشش S است. این پوشش شمارشپذیر نیست. ولی، حاوی یک پوشش شمارشپذیر S می‌باشد؛ یعنی، دسته همه گرده‌های عضو F که به ازای x های گویا حاصل می‌شوند یک پوشش شمارشپذیر S خواهد بود. (ر. ک. تمرین ۱۰.۳)

بنا بر قضیه پوششی لیندلف، هر پوشش باز مجموعه S در \mathbb{R}^n حاوی یک زیر دسته شمارشپذیری است که آن نیز S را می‌پوشاند. برای اثبات این قضیه از نتیجه مقدماتی زیر استفاده خواهیم کرد:

قضیه ۲۷.۳ فرض کنیم که $G = \{A_1, A_2, \dots\}$ عبارت باشد از دسته شمارشپذیر همه گویهای n بعدی که شعاعشان و نیز مختصات مرکزشان گویا باشند. همچنین $x \in \mathbb{R}^n$ و S مجموعه بازی در \mathbb{R}^n حاوی x باشد. در این صورت، دست کم یکی از گویهای n بعدی در G حاوی x است و محتوای S می باشد. یعنی،

$$\cdot x \in A_k \subseteq S, G \text{ در } A_k \text{ ها}$$

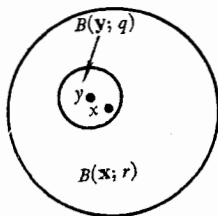
برهان. بنا بر قضیه ۲۷.۲، دسته G شمارشپذیر است. هرگاه $x \in \mathbb{R}^n$ و S مجموعه بازی حاوی x باشد، آنگاه گویی n بعدی مانند $S \subseteq B(x; r)$ وجود دارد. نقطه ای مانند y در S «نزدیک» x بقسمی خواهیم یافت که مختصات y همه گویا باشند. سپس با استفاده از این نقطه به عنوان مرکز، یک همسایگی در G جزء $B(x; r)$ را بقسمی می یابیم که حاوی x باشد. برای این منظور می نویسیم

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

و فرض می کنیم به ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ عدد گویائی باشد بقسمی که $|y_k - x_k| < r/(4n)$ در این صورت،

$$\|y - x\| \leq |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

حال، فرض کنیم q عدد گویائی باشد بقسمی که $r/4 < q < r/2$ در این صورت، $x \in B(y; q)$ و $B(y; q) \subseteq B(x; r) \subseteq S$ اما $B(y; q) \in G$ و در نتیجه حکم ثابت است. (برای حالت \mathbb{R}^2 ، ر. ک. شکل ۲.۳.)



شکل ۲.۳

قضیه ۲۸.۳ (قضیه پوششی لیندلف). فرض کنیم که $A \subseteq \mathbb{R}^n$ و F یک پوشش باز A باشد. در این صورت، یک زیردسته شمارشپذیر F هست که آن نیز A را می پوشاند.

برهان. فرض کنیم که $G = \{A_1, A_2, \dots\}$ دسته شمارشپذیر همه گویهای n -بعدی باشد که مختصات مرکز و شعاعشان گویا می‌باشند. به کمک G یک زیردسته شمارشپذیر F را بقسمی استخراج می‌کنیم که A را بپوشاند.

بدین منظور، فرض می‌کنیم که $x \in A$. در این صورت، مجموعه بازی مانند S در F هست بقسمی که $x \in S$. با توجه به قضیه ۲۷.۳ معلوم می‌شود که یک گوی n -بعدی مانند A_k در G هست بقسمی که $x \in A_k \subseteq S$. البته، متناظر هر S تعدادی نامتناهی از این A_k ها وجود دارند. اما، ما فقط یکی از اینها، مثلاً آن که زیرنویس از همه کوچکتر است، انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم این کوچکترین زیرنویس $m = m(x)$ باشد. در این صورت داریم $x \in A_{m(x)} \subseteq S$. وقتی x روی همه عنصرهای A تغییر کند، مجموعه همه گویهای n بعدی $A_{m(x)}$ دسته‌ای است شمارشپذیر از مجموعه‌های باز که A را می‌پوشاند. برای بدست آوردن یک زیردسته شمارشپذیر F که آن نیز A را بپوشاند، کافی است به هر مجموعه $A_{k(x)}$ یکی از مجموعه‌های در F مانند S را که حاوی $A_{k(x)}$ است مربوط کنیم. با این، برهان قضیه تمام می‌شود.

۱۱.۳ قضیه پوششی هاینه - بورل

بنابر قضیه پوششی لیندلف، از هر پوشش باز مجموعه دلخواه A در \mathbb{R}^n می‌توان پوششی شمارشپذیر برای A استخراج کرد. قضیه هاینه - بورل می‌گوید که اگر، علاوه بر این، بدانیم که A بسته و کراندار است، می‌توان این پوشش استخراج شده را به یک پوشش متناهی تحویل کرد. در اثبات قضیه هاینه - بورل از قضیه اشتراکی کانتور استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲۹.۳ (هاینه - بورل). فرض کنیم F یک پوشش باز مجموعه بسته و کراندار A در \mathbb{R}^n باشد. در این صورت، یک زیردسته متناهی F نیز A را می‌پوشاند. برهان. بنا بر قضیه ۲۸.۳، یک زیردسته شمارشپذیر F ، مانند $\{I_1, I_2, \dots\}$ ، A را می‌پوشاند. به ازای $m \geq 1$ ، اجتماع متناهی

$$S_m = \bigcup_{k=1}^m I_k$$

را در نظر می‌گیریم. چون هر S_m اجتماع تعدادی مجموعه باز است، خود نیز باز خواهد بود. نشان می‌دهیم که به ازای مقداری از m ، S_m مجموعه A را می‌پوشاند. برای این منظور، مجموعه $\mathbb{R}^n - S_m$ را، که بسته است، در نظر می‌گیریم. دسته

شمارشپذیر $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ از مجموعه‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q_m = A \text{ و به‌ازای } m > 1$$

$$Q_m = A \cap (\mathbb{R}^n - S_m).$$

یعنی، Q_m عبارت است از مجموعه آن نقطه‌هایی از A که در خارج S_m قرار دارند. هرگاه بتوانیم نشان دهیم که به‌ازای مقداری از m مجموعه Q_m تهی است، آنگاه ثابت کرده‌ایم که به‌ازای این مقدار m هیچ نقطه A خارج S_m نیست؛ با بیان دیگر می‌توان گفت که، نشان داده‌ایم که یکی از S_m ها مجموعه A را می‌پوشاند.

Q_m ها دارای خاصیت‌های زیرند: چون Q_m اشتراک مجموعه بسته A و مجموعه بسته $\mathbb{R}^n - S_m$ است، پس هر Q_m بسته است. چون S_m ها صعودی‌اند، پس Q_m ها نزولی می‌باشند؛ یعنی $Q_{m+1} \subseteq Q_m$. از این که هر Q_m زیرمجموعه A است معلوم می‌شود که همه Q_m ها کراندارند. بنابراین، اگر هیچ یک از Q_m ها تهی نباشد، می‌توان قضیه اشتراکی کانتور را بکار برده نتیجه گرفت که اشتراک $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ نیز تهی نیست. یعنی، نقطه‌ای در A وجود دارد که در همه Q_m ها، و در نتیجه در خارج همه S_m ها است. اما چنین وضعی ممکن نیست، زیرا $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. بنا براین، بعضی از Q_m ها باید تهی باشند، و برهان تمام است.

۱۲.۳ فشردگی در \mathbb{R}^n

هم‌اکنون ملاحظه شد که هرگاه مجموعه S در \mathbb{R}^n بسته و کراندار باشد، آنگاه هرپوشش باز S را می‌توان به یک پوشش متناهی تحویل کرد. طبیعی است جستجو کنیم که آیا، غیر از مجموعه‌هایی که بسته و کراندارند، مجموعه‌های دیگری وجود دارند که دارای خاصیت یاد شده باشند؟ یک چنین مجموعه‌هایی را فشرده خواهیم نامید.

۳۰.۳ تعریف مجموعه فشرده. مجموعه S در \mathbb{R}^n را وقتی، فقط وقتی، فشرده نامیم که هرپوشش باز S حاوی یک زیرپوشش متناهی باشد؛ یعنی، زیردسته‌ای متناهی که آن نیز S را بپوشاند.

بنا بر قضیه هاینه - بورل، هر مجموعه بسته و کراندار در \mathbb{R}^n فشرده است. اکنون عکس این نتیجه را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳۱.۳ فرض کنیم S یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n باشد. در این صورت سه گزاره زیرین هم‌اذا یکدیگرند:

(آ) S فشرده است؛

(ب) S بسته و کراندار است؛

(ج) هر زیرمجموعه نامتناهی S دارای نقطه انباشتگی در S می‌باشد.

پرهان. همان طور که در بالا اشاره شد، (\bar{A}) از (ب) نتیجه می‌شود. اگر ثابت کنیم که (ب) از (\bar{A}) ، (ج) از (ب)، و (ب) از (ج) نتیجه می‌شوند، هر سه گزاره بالا هم‌ارز خواهند بود.

فرض کنیم (\bar{A}) برقرار باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که S کراندار است. نقطه‌ای مانند p در S اختیار می‌کنیم. دسته گویهای n بدلی $B(p; k)$ ، $k = 1, 2, \dots$ یک پوشش باز S است. چون S فشرده است، پس یک زیردسته متناهی آن نیز S را می‌پوشاند و در نتیجه S کراندار است.

اکنون ثابت می‌کنیم که S بسته است. فرض کنیم S بسته نباشد. در این صورت، S یک نقطه انباشتگی مانند y دارد بقسمی که $y \notin S$. اگر $x \in S$ قرار می‌دهیم $r_x = \|x - y\|/2$. چون $y \notin S$ ، پس هر r_x مثبت است و دسته

$$\{B(x; r_x) \mid x \in S\}$$

یک پوشش باز S خواهد بود. با توجه به فشرده‌گی S ، معلوم می‌شود که تعدادی متناهی از این همسایگیها S را می‌پوشانند، مثلاً

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^p B(x_k; r_k).$$

فرض کنیم که r مینیمم شعاعهای r_1, r_2, \dots, r_p باشد. در این صورت، بسادگی ثابت می‌شود که گوی $B(y; r)$ نقطه مشترکی با هیچ یک از گویهای $B(x_k; r_k)$ ندارد. در واقع، هرگاه $x \in B(y; r)$ ، آنگاه $r < \|x - y\| < r_k$ ، و با توجه به نامساوی مثلثی، داریم $\|y - x_k\| \leq \|y - x\| + \|x - x_k\|$ ، پس

$$\|x - x_k\| \geq \|y - x_k\| - \|x - y\| = r_k - \|x - y\| > r_k.$$

از این روی $x \notin B(x_k; r_k)$. بنا بر این $S \cap B(y; r)$ تهی است، و این ناقض آن است که y نقطه انباشتگی S باشد. این تناقض نشان می‌دهد که S بسته است، و در نتیجه (ب) از (\bar{A}) نتیجه می‌شود.

فرض کنیم (ب) برقرار باشد. در این حالت (ج) را می‌توان بی‌درنگ نتیجه گرفت، زیرا هرگاه T یک زیرمجموعه نامتناهی S باشد، آنگاه T کراندار است (چون S کراندار است)، و در نتیجه، با توجه به قضیه بولتزانو-وایراشتراس، T یک نقطه انباشتگی مانند x دارد. نقطه انباشتگی S نیز هست. چون S بسته است، پس $x \in S$. بنا بر این، (ب) حکم (ج) را ایجاب می‌کند.

فرض کنیم (ج) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که (ب) نیز برقرار است. گوئیم هرگاه S بی‌کران باشد، آنگاه به‌ازای هر $m > 0$ ، نقطه‌ای مانند x_m در S هست قسمی که $\|x_m\| > m$. دسته $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ یک زیرمجموعه نامتناهی S می‌باشد. پس T ، بنا بر (ج)، دارای یک نقطه انباشتگی مانند y در S خواهد بود. اما به‌ازای $\|y\| + 1 > m$ داریم

$$\|x_m - y\| \geq \|x_m\| - \|y\| > m - \|y\| > 1,$$

و این ناقض آن است که y نقطه انباشتگی T باشد. این ثابت می‌کند که S کراندار است.

برای اتمام برهان باید نشان داد که S بسته است. فرض کنیم که x یک نقطه انباشتگی S باشد. چون هر همسایگی x حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از S است، می‌توان با در نظر گرفتن همسایگیهای $B(x; 1/k)$ ($k = 1, 2, \dots$) مجموعه‌ای شمارشپذیر از نقطه‌های متمایز، مانند $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ ، محتوا در S بدست آورد، قسمی که $x_k \in B(x; 1/k)$. نقطه x نقطه انباشتگی T نیز هست. چون T یک زیرمجموعه نامتناهی S است، بنا بر قسمت (ج)، T باید یک نقطه انباشتگی در S داشته باشد. پس اگر نشان دهیم که x تنها نقطه انباشتگی T است، قضیه اثبات شده است.

برای این کار، فرض می‌کنیم که $x \neq y$. در این صورت، بنا بر نامساوی مثلثی،

$$\|y - x\| \leq \|y - x_k\| + \|x_k - x\| < \|y - x_k\| + 1/k, \quad x_k \in T$$

اگر k را آن قدر بزرگ اختیار کنیم که به‌ازای هر $k \geq k_0$ ، $1/k < \frac{1}{4}\|y - x\|$ ، آخرین نامساوی بالا به‌صورت $\|y - x_k\| < \frac{3}{4}\|y - x\|$ درمی‌آید. این نشان می‌دهد که اگر $r = \frac{1}{4}\|y - x\|$ ، به‌ازای $k \geq k_0$ ، $x_k \notin B(y; r)$. از این روی، y نمی‌تواند یک نقطه انباشتگی T باشد. پس برهان این که (ب) از (ج) نتیجه می‌شود تمام است.

۱۳.۳ فضاهای متری

برهانهایی بعضی از قضیه‌های این فصل فقط به‌چند خاصیت فاصله بین نقاط بستگی دارند نه به این که نقطه‌ها در \mathbb{R}^n هستند. با مطالعه این خاصیت‌های فاصله به‌طور مجرد می‌توان به‌مفهوم فضای متری دست یافت.

۳۲.۳ تعریف فضای متری. یک فضای متری عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی از

چیزها (به نام نقطه‌ها) مانند M به انضمام تابعی مانند d از $M \times M$ به \mathbb{R} (به نام متر فضا)، که در چهار خاصیت زیرین به‌ازای هر x, y و z در M صدق کند:

$$1. \quad d(x, x) = 0.$$

$$2. \quad \text{اگر } x \neq y, \quad d(x, y) > 0.$$

$$3. \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$4. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

عدد نامفی $d(x, y)$ را فاصله از x تا y می‌توان انگاشت. با این اصطلاح، معانی شهودی خاصیت‌های ۱ تا ۴ روشن می‌شوند. خاصیت ۴ نامسادی مثلثی نام دارد.

در تعریف فضای متری، M و d هر دو نقشی دارند. برای تأکید این مطلب گاهی یک فضای متری را با نماد (M, d) نشان می‌دهیم.

چند مثال

۱. $M = \mathbb{R}^n$ ؛ $d(x, y) = \|x - y\|$. این متر را متر اقلیدسی نامند. فرض بر این است که در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n ، متر همواره متر اقلیدسی است مگر آن‌که صریحاً متر دیگری را برای آن یاد کرده باشیم.

۲. $M = \mathbb{C}$ (صفحه مختلط)؛ $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. به‌عنوان یک فضای متری، همان فضای اقلیدسی \mathbb{R}^2 است، زیرا نقاط هردو و نیز متر هردو یکی است.

۳. فرض می‌کنیم M مجموعه‌ای باشد ناتهی و دلخواه؛ در آن اگر $y = x$ ، $d(x, y) = 0$ ، و اگر $x \neq y$ ، $d(x, y) = 1$. این متر را متر همجزا، و (M, d) را یک فضای متری همجزا می‌نامند.

۴. هرگاه (M, d) یک فضای متری، و S یک زیرمجموعه ناتهی M باشد، آنگاه (S, d) نیز فضایی است متری با همان متر یا، با یانسی دقیقتر، متر فضای اخیر تحدید d به $S \times S$ می‌باشد. این متر را گاهی متر نسبی القاسده به‌وسیله d بر S ، و S را یک زیر فضای متری M می‌نامند. مثلاً، مجموعه عددهای گویا، یعنی \mathbb{Q} ، با متر $d(x, y) = |x - y|$ تشکیل یک زیر فضای متری \mathbb{R} را می‌دهد.

۵. $M = \mathbb{R}^2$ ؛ $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2}$ ؛ که در آن $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$. فضای متری (M, d) یک زیر فضای

متری فضای اقلیدسی \mathbb{R}^2 نیست، زیرا متر آن با متر اقلیدسی تفاوت دارد.

۶. $d(x, y)$ ؛ \mathbb{R}^2 یعنی دایره یکه در $M = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ مساوی درازای کمان کوچکتری است که بر دایره یکه دو نقطه x و y را به هم وصل می‌کند.

۷. $d(x, y)$ ؛ \mathbb{R}^3 یعنی کره یکه در $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ مساوی درازای کمان کوچکتری است که در امتداد دایره عظیمه برای کره دو نقطه x و y را به هم وصل می‌کند.

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|; M = \mathbb{R}^n \quad ۸$$

$$d(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}; M = \mathbb{R}^n \quad ۹$$

۱۴.۳ توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای در فضاهای متری

مفهومهای اساسی توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای را می‌توان به یک فضای متری دلخواه (M, d) وسعت داد.

اگر $a \in M$ بنا بر تعریف، گوی $B(a; r)$ به مرکز a و به شعاع $r > 0$ عبارت است از مجموعه همه x هایی در M که

$$d(x, a) < r.$$

گاهی برای تأکید این که نقطه‌های این گوی در M هستند آن را با نماد $B_M(a; r)$ نشان می‌دهیم. اگر S یک زیرفضای متری M باشد، گوی $B_S(a; r)$ عبارت است از اشتراک S با گوی $B_M(a; r)$.

چند مثال. در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^1 ، گوی $B(0; 1)$ مساوی بازه $]-1, 1[$ است. در زیرفضای متری $S =]0, 1[$ ، گوی $B_S(0; 1)$ بازه نیمباز $]0, 1[$ خواهد بود. تبصره. اگر متر اقلیدسی نباشد، شکل هندسی یک گوی در \mathbb{R}^n لزوماً «کروی» نخواهد بود. (ر. ک. تمرین ۰۲۷.۳)

فرض کنیم که $S \subseteq M$. نقطه a در S را یک نقطه درونی S نامیم در صورتی که گویی مانند $B_M(a; r)$ جزء S وجود داشته باشد. مجموعه نقطه‌های درونی S را $\text{int} S$ نامیده با نماد $\text{int} S$ نشان می‌دهیم. مجموعه S را در M باز نامیم در صورتی که همه نقطه‌های آن نقطه‌های درونی باشند؛ S را در M بسته نامیم در صورتی که $M - S$ باز باشد.

چند مثال

۱. هر گوی مانند $B_M(a; r)$ در فضای متری M در M باز است.
۲. در یک فضای متری مجزا مانند M هر زیرمجموعه آن مانند S باز است. در واقع، اگر $x \in S$ ، گوی $B(x; 1/2)$ فقط از نقطه‌های S تشکیل می‌شود (زیرا فقط حاوی x می‌باشد)، پس S باز است. بنابراین، هر زیرمجموعه M بسته هم هست!
۳. در زیر فضای متری $S = [0, 1]$ از فضای اقلیدسی \mathbb{R}^1 ، هر بازه به شکل $[x, 1]$ یا $[0, x]$ ، که در آن $0 < x < 1$ ، مجموعه بازی در S است. این مجموعه‌ها در \mathbb{R}^1 باز نخواهند بود.

مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر S یک زیر فضای متری M باشد، مجموعه‌های باز در S لزوماً در M باز نیستند. قضیه زیر رابطه بین مجموعه‌های باز در M و در S را توصیف می‌کند.

قضیه ۳۳.۳ فرض کنیم (S, d) یک زیر فضای متری (M, d) ، و X یک زیرمجموعه S باشد. در این صورت، مجموعه X در S وقتی، و فقط وقتی، باز است که به ازای مجموعه بازی در M مانند A داشته باشیم

$$X = A \cap S.$$

پروهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای باز در M باشد. قرار می‌دهیم $X = A \cap S$. هرگاه $x \in X$ ، آنگاه $x \in A$ ، پس به ازای عددی مانند $r > 0$ ، $B_M(x; r) \subseteq A$. از این روی $B_S(x; r) = B_M(x; r) \cap S \subseteq A \cap S = X$ ، یعنی X در S باز است. برعکس، فرض کنیم که X در S باز باشد. نشان می‌دهیم که به ازای مجموعه بازی مانند A در M ، $X = A \cap S$. برای این کار گوئیم به ازای هر x در X ، گویی مانند $B_S(x; r_x) = B_M(x; r_x) \cap S$ وجود دارد. چون X در S باز است، پس هرگاه قرار دهیم

$$A = \bigcup_{x \in X} B_M(x; r_x),$$

آنگاه A در M باز است، و بسادگی معلوم می‌شود که $A \cap S = X$.

قضیه ۳۴.۳ فرض کنیم (S, d) یک زیر فضای متری (M, d) ، و Y یک زیرمجموعه S باشد. در این صورت، Y در S وقتی، و فقط وقتی، بسته است که به ازای مجموعه بسته‌ای در M مانند B ، $Y = B \cap S$.

برهان. هرگاه به ازای مجموعه بسته ای در M مانند B ، $Y = B \cap S$ ، آنگاه $B = M - A$ که در آن A در M باز خواهد بود، پس

$$Y = S \cap B = S \cap (M - A) = S - A;$$

یعنی Y در S بسته است.

برعکس، اگر Y در S بسته باشد، قرار می دهیم $X = S - Y$. در این صورت X در S باز می باشد، پس مجموعه بازی مانند A در M هست که $X = A \cap S$ و

$$Y = S - X = S - (A \cap S) = S - A$$

$$= S \cap (M - A) = S \cap B,$$

که در آن $B = M - A$ در M بسته می باشد. پس برهان تمام است.

فرض کنیم که $S \subseteq M$. نقطه ای مانند x در M را یک نقطه چسبیده به S نامیم در صورتی که هرگویی مانند $B_M(x; r)$ دست کم حاوی یک نقطه S باشد. هرگاه x چسبیده به $S - \{x\}$ باشد، آنگاه x را نقطه انباشتگی S می نامیم. بست S ، یعنی \bar{S} ، عبارت است از مجموعه همه نقطه های چسبیده به S . همچنین مجموعه مشتق S' ، یعنی S' ، عبارت است از مجموعه همه نقطه های انباشتگی S . بنا براین، $\bar{S} = S \cup S'$. قضیه های زیرین در هر فضای متر (M, d) معتبرند، و اثبات آنها درست مانند اثباتشان در فضای اقلیدسی R^n است. کافی است در برهانها فقط به جای فاصله اقلیدسی $\|x - y\|$ متر $d(x, y)$ را قرار دهیم.

قضیه ۳۵.۳ (آ) اجتماع هر دسته از مجموعه های باز مجموعه ای است باز، و اشتراک دسته ای متناهی از مجموعه های باز باز است.

(ب) اجتماع هر دسته متناهی از مجموعه های بسته مجموعه ای است بسته، و اشتراک هر دسته از مجموعه های بسته مجموعه ای بسته خواهد بود.

قضیه ۳۶.۳ هرگاه A باز، و B بسته باشد، آنگاه $A - B$ باز و $B - A$ بسته است.

قضیه ۳۷.۳ به ازای هر زیرمجموعه M مانند S ، گزاره های زیرین هم از یکدیگرند:

(آ) S در M بسته است.

(ب) S حاوی همه نقطه های چسبیده خود است.

(ج) S حاوی همه نقطه های انباشتگی خود است.

(د) $\bar{S} = S$.

مثال. فرض می کنیم که $M = Q$ ، یعنی مجموعه عددهای گویا، با متر اقلیدسی R^1

باشد. دو عدد گنگ مانند a و b اختیار می‌کنیم. هرگاه S مجموعه همه عددهای گویای موجود در بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه S یک زیرمجموعه بسته Q می‌باشد.

در برهانهای قضیه بولتزانو - وایراشتراس، قضیه اشتراکی کانتور، و قضیه‌های پوششی لیندلف و هاینه - بورل، علاوه بر خاصیت‌های متری فضای اقلیدسی R^n ، از خاصیت‌های مخصوص R^n که معمولاً در یک فضای متری دلخواه (M, d) معتبر نیستند نیز استفاده کردیم. برای توسیع این قضیه‌ها به فضاهاى متری لازم است برای M محدودیت‌های بیشتری قائل شد. توسیع یکی از این قضیه‌ها در تمرین ۳۴.۳ مختصراً شرح داده شده است.

در بخش آینده فشرده‌گی در فضاهاى متری دلخواه توصیف خواهد شد.

۱۵.۳ زیرمجموعه‌های فشرده یک فضای متری

فرض کنیم (M, d) یک فضای متری، و S یک زیرمجموعه M باشد. دسته F از زیرمجموعه‌های باز M را یک پوشش باز S نامیم در صورتی که

$$S \subseteq \bigcup_{A \in F} A.$$

یک زیرمجموعه M مانند S را فشرده نامیم در صورتی که هر پوشش باز S حاوی یک زیرپوشش متناهی باشد. اگر عددی مانند $r > 0$ و نقطه‌ای مانند a در M باشند بقسمی که $S \subseteq B(a; r)$ ، گوئیم S کراندار است.

قضیه ۳۸.۳ فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعه فشرده فضای متری M باشد. در این صورت:

(یکم) S بسته و کراندار است.

(دوم) هر زیرمجموعه نامتناهی S یک نقطه انباشتگی در S دارد.

برهان. برای اثبات (یکم) به برهان قضیه ۳۱.۳ باز می‌گردیم، و از آن قسمت از برهان که (ب) از (آ) نتیجه می‌شود استفاده می‌کنیم. تنها تغییر مورد نیاز این است که در سراسر این قسمت به جای فاصله اقلیدسی $\|x - y\|$ متر $d(x, y)$ را قرار دهیم.

برای اثبات (دوم) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم T یک زیرمجموعه نامتناهی S باشد، و هیچ نقطه‌ای از S نقطه انباشتگی T نباشد. در این صورت، به ازای هر $x \in T$ ، گویی مانند $B(x)$ هست که حاوی هیچ نقطه T نیست (اگر $x \notin T$)، یا فقط حاوی یک نقطه T ، یعنی خود x ، است (اگر $x \in T$). اگر همه عضوهای

S را بخورد بگیرد، مجموعه گویهای $B(x)$ یک پوشش باز S خواهد بود. چون S فشرده است، یک زیردسته متناهی آن S ، و در نتیجه T ، را می پوشاند. این مطلب ناقص فرض ماست، زیرا T مجموعه ای نامتناهی است و هر گوی حداکثر حاوی یک نقطه T است.

تبره. در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n ، هر یک از خاصیت های (یکم) و (دوم) هم ارز است با فشردگی (قضیه ۳۱.۳). در یک فضای متریک کلی، خاصیت (دوم) هم ارز فشردگی است (برای اثباتی از آن ر. ک. کتاب مرجع ۴.۳)، ولی خاصیت (یکم) هم ارز فشردگی نیست. در تمرین ۲۲.۳ مثالی از یک فضای متریک M داده شده است که در آن زیرمجموعه هائی بسته و کراندارند ولی فشرده نیستند.

قضیه ۳۹.۳ فرض کنیم X یک زیرمجموعه بسته فضای متریک فشرده M باشد. در این صورت، X فشرده خواهد بود.

برهان. فرض کنیم F یک پوشش باز X باشد، یعنی $X \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. نشان می دهیم که تعدادی متناهی از A ها X را می پوشانند. چون X بسته است، $M - X$ باز می باشد، پس $\{(M - X)\} \cup F$ یک پوشش باز M خواهد بود. چون M فشرده است، این پوشش حاوی یک زیرپوشش متناهی است، که می توان فرض کرد که شامل $M - X$ نیز باشد. بنابراین،

$$M \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_p \cup (M - X).$$

این زیرپوشش X را نیز می پوشاند و، چون $M - X$ حاوی نقطه ای از X نیست، می توان مجموعه $M - X$ را از زیر پوشش حذف کرد، آنچه می ماند باز هم X را می پوشاند. پس $X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_p$ ، یعنی X فشرده است.

۱۶.۳ کرانه یک مجموعه

تعریف ۴۰.۳ فرض کنیم S یک زیرمجموعه فضای متریک M باشد. نقطه x در M را یک نقطه کرانه ای S نامیم در صورتی که هر گوی مانند $B_M(x; r)$ دست کم حاوی یک نقطه از S و یک نقطه از $M - S$ باشد. مجموعه همه نقطه های کرانه ای S را کرانه S نامیده با نماد ∂S نشان می دهیم.

خواننده می تواند باسانی تحقیق کند که

$$\partial S = \overline{S} \cap \overline{M - S}.$$

این دستور نشان می دهد که ∂S در M بسته است.

مثال. در \mathbb{R}^n ، کرانه گوی $B(a; r)$ عبارت است از مجموعه همه x هائی که $\|x - a\| = r$ در \mathbb{R}^1 ، کرانه مجموعه عددهای گویا تمام \mathbb{R}^1 می‌باشد. خاصیت‌های دیگر فضا‌های متری در تمرینها و همچنین در فصل ۴ خواهند آمد.

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین

www.riazisara.ir

مجموعه‌های باز و بسته در \mathbb{R}^1 و \mathbb{R}^2

۱.۳ ثابت کنید که یک بازه باز در \mathbb{R}^1 مجموعه‌ای باز است، و یک بازه بسته مجموعه‌ای است بسته.

۲.۳ همه نقطه‌های انباشتگی مجموعه‌های زیر در \mathbb{R}^1 را مشخص نمائید، و در هر مورد تعیین کنید که مجموعه باز است یا بسته (یا هیچ یک).

(آ) همه عددهای صحیح.

(ب) بازه $[a, b]$.

(ج) همه عددهای به شکل $1/n$.

$(n = 1, 2, 3, \dots)$.

(د) همه عددهای گویا.

(ه) همه عددهای به شکل $2^{-n} + 5^{-m}$ ، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

(و) همه عددهای به شکل $(-1)^n + (1/m)$ ، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

(ز) همه عددهای به شکل $(1/n) + (1/m)$ ، $(m, n = 1, 2, \dots)$.

(ح) همه عددهای به شکل $(-1)^n / [1 + (1/n)]$ ، $(n = 1, 2, \dots)$.

۳.۳ حکم مذکور در تمرین ۲.۳ را در مورد مجموعه‌های زیرین در \mathbb{R}^2

تحقیق کنید:

(آ) همه عددهای مختلط z که $|z| > 1$.

(ب) همه عددهای مختلط z که $|z| \geq 1$.

(ج) همه عددهای مختلط به شکل

$(m, n = 1, 2, \dots)$ ، $(1/n) + (i/m)$

(د) همه نقطه‌های (x, y) که $x^2 - y^2 < 1$.

(ه) همه نقطه‌های (x, y) که $x > 0$.

(و) همه نقطه‌های (x, y) که $x \geq 0$.

۴.۳ ثابت کنید که هر مجموعه باز ناتمامی مانند S در \mathbb{R}^1 هم حاوی عددهائی

گویاست هم حاوی عددهائی گنگ.

۵.۳ ثابت کنید تنها مجموعه‌های هم باز و هم بسته در \mathbb{R}^1 مجموعه تهی و خود \mathbb{R}^1 می‌باشند. آیا گزاره‌ای مشابه این برای \mathbb{R}^2 نیز درست است؟

۶.۳ ثابت کنید هر مجموعه بسته در \mathbb{R}^1 اشتراک دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های باز می‌باشد.

۷.۳ ثابت کنید که یک مجموعه بسته کراندار و ناتهی مانند S در \mathbb{R}^1 یا بازه‌ای است بسته، یا S را می‌توان از بازه‌ای بسته با حذف دسته‌ای از هم جدا و شمارشپذیر از بازه‌های باز، که نقطه‌های انتهائی آنها متعلق به S می‌باشند، بدست آورد.

مجموعه‌های باز و بسته در \mathbb{R}^n

۸.۳ ثابت کنید که گویهای n بعدی باز و بازه‌های باز n بعدی مجموعه‌های باز در \mathbb{R}^n می‌باشند.

۹.۳ ثابت کنید که درون یک مجموعه در \mathbb{R}^n مجموعه‌ای باز در \mathbb{R}^n می‌باشد.

۱۰.۳ اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ، ثابت کنید که $\text{int } S$ مساوی اجتماع همه زیرمجموعه‌های باز \mathbb{R}^n است که محتوا در S باشند. این مطلب را این گونه توصیف می‌کنند که می‌گویند $\text{int } S$ بزرگترین زیرمجموعه باز S می‌باشد.

۱۱.۳ اگر S و T زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^n باشند، ثابت کنید که

$$(\text{int } S) \cap (\text{int } T) = \text{int } (S \cap T)$$

و

$$(\text{int } S) \cup (\text{int } T) \subseteq \text{int } (S \cup T).$$

۱۲.۳ فرض کنید که S' مجموعه مشتق و \bar{S} بست مجموعه S در \mathbb{R}^n باشند. ثابت کنید:

(آ) S' در \mathbb{R}^n بسته است؛ یعنی، $(S')' \subseteq S'$.

(ب) هرگاه $S \subseteq T$ ، آنگاه $S' \subseteq T'$.

(ج) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.

(د) $(\bar{S})' = S'$ (ه) \bar{S} در \mathbb{R}^n بسته است.

(و) \bar{S} مساوی اشتراک همه زیرمجموعه‌های بسته \mathbb{R}^n است که حاوی S باشند. یعنی، \bar{S} عبارت از کوچکترین مجموعه بسته‌ای است که حاوی S باشد.

۱۳.۳ فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های R^n باشند. ثابت کنید که

$$\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}, \text{ و اگر } S \text{ باز باشد, } \overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$$

تبصره. گزاره‌های مذکور در تمرینهای ۹.۳ تا ۱۳.۳ در هر فضای متریک درستند.

۱۴.۳ مجموعه S در R^n را کوژ نامیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه مانند x و y در S و هر عدد حقیقی θ که $0 < \theta < 1$ داشته باشیم

$$\theta x + (1 - \theta)y \in S.$$

این گزاره را در R^2 و R^3 تعبیر هندسی نمائید، و ثابت کنید که:

(آ) هر گوی n بعدی در R^n کوژ است.

(ب) هر بازه n بعدی کوژ است.

(ج) درون یک مجموعه کوژ مجموعه‌ای است کوژ.

(د) بست یک مجموعه کوژ مجموعه‌ای است کوژ.

۱۵.۳ فرض کنید F دسته‌ای از مجموعه‌ها در R^n باشد، و قرار دهید

$$T = \bigcap_{A \in F} A \quad \text{و} \quad S = \bigcup_{A \in F} A$$

برای هر یک از گزاره‌های زیر یا برهانی ارائه دهید یا مثالی برای نقض بیان کنید.

(آ) هرگاه x یک نقطه انباشتگی T باشد، آنگاه x یک نقطه انباشتگی هر یک از مجموعه‌های A در F است.

(ب) هرگاه x یک نقطه انباشتگی S باشد، آنگاه x یک نقطه انباشتگی دست کم یک مجموعه مانند A در F خواهد بود.

۱۶.۳ اگر S مجموعه عددهای گویای موجود در بازه $[1, \infty)$ باشد، ثابت کنید که S را نمی‌توان به صورت اشتراک دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های باز در R آورد. (داهنمائی. بنویسید $\{x_1, x_2, \dots\}$ ، $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ، فرض کنید که $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ ، که در آن هر S_k باز باشد، و دنباله $\{Q_n\}$ از بازه‌های بسته را بقسمی بسازید که $Q_{n+1} \subseteq Q_n \subseteq S_n$ و $x_n \notin Q_n$ سپس با استفاده از قضیه اشتراکی کانتور تناقضی بدست آورید.

قضیه‌های پوششی در R^n

۱۷.۳ اگر $S \subseteq R^n$ ، ثابت کنید که دسته نقطه‌های تنهای S شمارشپذیر است.

۱۸.۳ ثابت کنید مجموعه گردهای باز در صفحه xy به مرکز (x, x) و شعاع

$x > 0$ (x گویا)، یک پوشش شمارشپذیر مجموعه $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ می باشد.

۱۹.۳ دسته F مرکب از بازه‌های باز به شکل

$$[1/n, 2/n], \text{ که در آن } n = 2, 3, \dots$$

یک پوشش باز بازه باز $[1, 2]$ می باشد. بدون استفاده از قضیه ۳۱.۳، ثابت کنید که هیچ زیردسته متناهی F بازه $[1, 2]$ را نمی پوشاند.

۲۰.۳ مجموعه‌ای مانند S مثال بزنید که بسته باشد ولی کراندار نباشد، و یک پوشش باز و شمارشپذیر مانند F یابید که هیچ زیرمجموعه متناهی آن S را نپوشاند.

۲۱.۳ مجموعه S در \mathbb{R}^n با این خاصیت داده شده است که به ازای هر x در S ، گویی n بعدی مانند $B(x)$ هست بقسمی که $B(x) \cap S$ شمارشپذیر است. ثابت کنید که S شمارشپذیر است.

۲۲.۳ ثابت کنید هر دسته از مجموعه‌های باز از هم جدا در \mathbb{R}^n لزوماً شمارشپذیر است. دسته‌ای از مجموعه‌های بسته از هم جدا مثال بزنید که شمارشپذیر نباشد.

۲۳.۳ فرض کنیم که $S \subseteq \mathbb{R}^n$. نقطه x در \mathbb{R}^n را یک نقطه تراکم S نامیم در صورتی که به ازای هر گوی n بعدی مانند $B(x)$ ، $B(x) \cap S$ شمارشپذیر نباشد. ثابت کنید هرگاه S شمارشپذیر نباشد، آنگاه S نقطه تراکمی مانند x در خود دارد.

۲۴.۳ فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ و S شمارشپذیر نباشد. همچنین T مجموعه نقطه‌های تراکم S باشد. ثابت کنید:

- (آ) $T - S$ شمارشپذیر است، (ب) $S \cap T$ شمارشپذیر نیست،
 (ج) T مجموعه‌ای است بسته، (د) T حاوی هیچ نقطه تنها نیست.

توجه کنید که تمرین ۲۳.۳ حالت خاصی از قسمت (ب) این تمرین است.

۲۵.۳ مجموعه S در \mathbb{R}^n را کامل گوئیم در صورتی که $S = S'$ ، یعنی اگر S بسته بوده حاوی هیچ نقطه تنهایی نباشد. ثابت کنید هر مجموعه بسته شمارش ناپذیر مانند F در \mathbb{R}^n را می توان به شکل $F = A \cup B$ درآورد، که در آن A کامل، و B شمارشپذیر باشد (قضیه کانتور - بندیکسون) ۱. راهنمایی. از تمرین ۲۴.۳ استفاده کنید.

فضاهای متری

۲۶.۳ در فضای متری (M, d) ، ثابت کنید که مجموعهٔ تهی \emptyset و تمام فضای M هم باز و هم بسته‌اند.

۲۷.۳ در \mathbb{R}^n دو متر زیر را در نظر بگیرید:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

در هر یک از فضاهای متری زیرین، ثابت کنید که گوی $B(\mathbf{a}; r)$ دارای این شکلهای هندسی است:

(آ) در (\mathbb{R}^2, d_1) مربعی است که ضلعهای موازی محورهای مختصات می‌باشند.

(ب) در (\mathbb{R}^2, d_2) مربعی است که قطرهای موازی محورها هستند.

(ج) در (\mathbb{R}^3, d_1) یک مکعب است.

(د) در (\mathbb{R}^3, d_2) یک هشت وجهی است.

۲۸.۳ فرض کنید d_1 و d_2 مترهای مذکور در تمرین ۲۷.۳ باشند و $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ متر اقلیدسی متداول باشد. نامساویهای زیرین را به‌ازای هر \mathbf{x} و \mathbf{y} در \mathbb{R}^n ثابت کنید:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq n d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{و}$$

۲۹.۳ اگر (M, d) یک فضای متری باشد، تعریف کنید

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

ثابت کنید که d' نیز یک متر برای M می‌باشد. توجه کنید که به‌ازای هر x و y در M ، $0 \leq d'(x, y) < 1$.

۳۰.۳ ثابت کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی یک فضای متری بسته است.

۳۱.۳ در فضای متری (M, d) ، گوی بسته به شعاع $r > 0$ حول نقطهٔ a در M عبارت است از مجموعهٔ $\bar{B}(a; r) = \{x \mid d(x, a) \leq r\}$.

(آ) ثابت کنید که $\bar{B}(a; r)$ مجموعه‌ای بسته است.

(ب) یک فضای متری بقسمی بیابید که در آن $\bar{B}(a; r)$ بست گوی باز $B(a; r)$ نباشد.

۳۲.۳ در فضای متری M ، هرگاه $A \subseteq S \subseteq \bar{A}$ ، که در آن \bar{A} بست A است، آنگاه گوئیم A در S چگال است. مثلاً، مجموعه عددهای گویا، یعنی Q ، در R چگال است. اگر A در S ، و S در T چگال باشد، ثابت کنید که A در T چگال است.

۳۳.۳ به تمرین ۳۲.۳ باز می‌گردیم. فضای متری M را جدائی پذیر نامیم در صورتی که M زیرمجموعهٔ شمارشپذیری چون A داشته باشد که در M چگال باشد. مثلاً، R جدائی پذیر است زیرا مجموعهٔ عددهای گویای Q یک زیرمجموعهٔ چگال و شمارشپذیر R می‌باشد. ثابت کنید هر فضای اقلیدسی R^k جدائی پذیر است.

۳۴.۳ به تمرین ۳۳.۳ باز می‌گردیم. ثابت کنید قضیهٔ پوششی لیندلف (قضیهٔ ۲۸.۳) در هر فضای متری جدائی پذیر معتبر است.

۳۵.۳ به تمرین ۳۲.۳ بازمی‌گردیم. اگر A در S چگال، و B در S باز باشد، ثابت کنید که $B \subseteq A \cap B$. (دانهمانی). از تمرین ۱۳.۳ استفاده کنید.

۳۶.۳ به تمرین ۳۲.۳ باز می‌گردیم. اگر A و B هر دو در S چگال باشند و B در S باز باشد، ثابت کنید که $A \cap B$ در S چگال است.

۳۷.۳ (S_1, d_1) و (S_2, d_2) دو فضای متری مفروضی می‌باشند. به وسیلهٔ d_1 و d_2 می‌توان به راههای مختلف برای حاصل ضرب دکارتی $S_1 \times S_2$ متری مانند ρ ساخت. مثلاً اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در $S_1 \times S_2$ باشند، قرار می‌دهیم $\rho(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. ثابت کنید که ρ متری برای $S_1 \times S_2$ است. مثالهای دیگری از این نوع بسازید.

زیرمجموعه‌های فشردهٔ يك فضای متری

هر یک از گزاره‌های زیر را برای فضای متری دلخواه (M, d) و زیرمجموعه‌های M مانند S و T ثابت کنید:

۳۸.۳ فرض کنید که $S \subseteq T \subseteq M$. در این صورت، S در (M, d) وقتی، و فقط وقتی، فشرده است که S در زیرفضای متری (T, d) فشرده باشد.

۳۹.۳ هرگاه S بسته، و T فشرده باشد، آنگاه $S \cap T$ فشرده است.

۴۰.۳ اشتراک هر دستهٔ دلخواه از زیرمجموعه‌های فشردهٔ M مجموعه‌ای است فشرده.

۴۱.۳ اجتماع تعدادی متناهی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ M فشرده است.

۴۲.۳ فضای متری Q (عددهای گویا) را با متر اقلیدسی R در نظر بگیرید. فرض

کنید که S عبارت باشد از عددهای گویای بازه باز $[a, b]$ ، که در آن a و b گنگ باشند. در این صورت، S یک زیرمجموعه بسته کسراندار Q است که فشرده نیست.

خاصیتهای گوناگون درون و کرانه مجموعه‌ها

اگر A و B دو زیرمجموعه دلخواه فضای متری M باشند، ثابت کنید که:

$$\text{int } A = M - \overline{M - A} \quad ۴۳.۳$$

$$\text{int } (M - A) = M - \bar{A} \quad ۴۴.۳$$

$$\text{int } (\text{int } A) = \text{int } A \quad ۴۵.۳$$

۴۶.۳ (آ) $\text{int } (\bigcap_{i=1}^n A_i) = \bigcap_{i=1}^n (\text{int } A_i)$ ، که در آن هر $A_i \subseteq M$.
(ب) اگر F دسته‌ای نامتناهی از زیرمجموعه‌های M باشد،

$$\text{int } \left(\bigcap_{A \in F} A \right) \subseteq \bigcap_{A \in F} (\text{int } A).$$

(ج) مثالی بزنید که به‌ازای آن در (ب) تساوی برقرار نباشد.

$$\bigcup_{A \in F} (\text{int } A) \subseteq \text{int } \left(\bigcup_{A \in F} A \right) \quad ۴۷.۳ \quad (\text{آ})$$

(ب) دسته F را طوری بسازید که متناهی بوده به‌ازای آن در (آ) تساوی برقرار نباشد.

$$\text{int } (\partial A) = \emptyset \quad ۴۸.۳ \quad (\text{آ})$$

اگر A در M باز یا بسته باشد،
(ب) مثالی بزنید که به‌ازای آن $\text{int } (\partial A) = M$

$$\text{int } A = \text{int } B = \emptyset \quad ۴۹.۳$$

هرگاه A و B در M بسته باشد، آنگاه

$$\text{int } (A \cup B) = \emptyset.$$

$$\text{int } (A \cup B) = M \quad ۵۰.۳$$

مثالی بزنید که در آن $\text{int } A = \text{int } B = \emptyset$ ولی

$$\partial A = \partial(M - A) \quad ۵۱.۳$$

و $\partial A = \bar{A} \cap M - A$

$$\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B, \quad \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \quad ۵۲.۳$$

هرگاه $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ ، آنگاه

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 3.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1966.
- 3.3 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.
- 3.4 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963.

حدها و پیوستگی

۱.۴ مقدمه

خواننده پیشتر در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با مفهوم حد آشنا شده است. در حقیقت، معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال نوعهای متفاوتی از حد عرضه می‌شوند. مثلاً، حد دنباله‌ای از عددهای حقیقی مانند $\{x_n\}$ ، که به صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A,$$

نشان داده می‌شود، یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که

$$\text{هرگاه } n \geq N \text{، آنگاه } |x_n - A| < \varepsilon.$$

عمل تعیین حد در بالا این معنی شهودی را تداعی می‌کند که، اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، x_n را می‌توان به قدر کافی به A نزدیک کرد. نوع دیگری از حد عبارت است از حد تابع. این حد را با نماد

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$$

نشان می‌دهیم، و منظور از آن این است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی دیگر مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

$$\text{هرگاه } 0 < |x - p| < \delta \text{، آنگاه } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

حد بالا این فکر را القا می‌کند که، اگر x به قدر کافی نزدیک p اختیار شود، $f(x)$

به قدر کافی نزدیک A خواهد بود.

کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال در مسأله‌های هندسی و فیزیکی در فضای ۳ بعدی، و همچنین در تابعهای چند متغیره، ضرورت توسیع این مفهوما به \mathbf{R}^n را ایجاد می‌کنند. از این مرحله می‌توان گامی فراتر نهاد و مفهوم حد را در محدوده فضاهاى مترى، که کلیتر است، تعریف کرد. این کار، با زدودن قیدهای غیر لازم، نظریه حدها را ساده‌تر می‌کند و در عین حال تقریباً همه مظاهر مهم مورد نیاز آنالیز ریاضی را فرا می‌گیرد.

نخست حدود دنباله‌هایی از نقطه‌ها در یک فضای مترى، و سپس حدود تابعها و مفهوم پیوستگی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲.۴ دنباله‌های همگرا در يك فضای مترى

تعریف ۱.۴ دنباله $\{x_n\}$ از نقطه‌ها در فضای مترى (S, d) را همگرا نامیم در صورتی که نقطه‌ای مانند p در S با خاصیت زیرین وجود داشته باشد: به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N باشد بقسمی که هرگاه $n \geq N$ آنگاه $d(x_n, p) < \varepsilon$.

همچنین گوئیم که $\{x_n\}$ همگرا به p است و می‌نویسیم وقتی که $x_n \rightarrow p, n \rightarrow \infty$ یا فقط می‌نویسیم $x_n \rightarrow p$. اگر چنین p ای در S نباشد، دنباله $\{x_n\}$ را واگرا نامیم. تبصره. از تعریف همگرایی نتیجه می‌شود که

$$\text{وقتی، و فقط وقتی، } x_n \rightarrow p \text{ که } d(x_n, p) \rightarrow 0$$

همگرایی دنباله $\{d(x_n, p)\}$ به ۰ در فضای مترى اقلیدسی \mathbf{R}^1 صورت می‌گیرد.

چند مثال

۱. در فضای اقلیدسی \mathbf{R}^1 ، دنباله $\{x_n\}$ را صعودی نامیم در صورتی که به ازای هر $n, x_n \leq x_{n+1}$. هرگاه دنباله‌ای صعودی از بالا کراندار باشد (یعنی، عددی مانند $M > 0$ باشد بقسمی که به ازای هر $n, x_n \leq M$)، آنگاه $\{x_n\}$ به سوپریم برد خود، یعنی $\sup \{x_1, x_2, \dots\}$ همگرا است. بهین نحو، $\{x_n\}$ را نزولی نامیم در صورتی که به ازای هر $n, x_{n+1} \leq x_n$. هر دنباله نزولی که از پائین کراندار باشد به اینفیمم برد خود همگرا است. مثلاً، $\{1/n\}$ به ۰ همگرا است.

۲. هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی حقیقی و همگرا به ۰ باشند، آنگاه

$\{a_n + b_n\}$ نیز به 0 همگرا است. هرگاه به ازای هر n ، $0 \leq c_n \leq a_n$ و $\{a_n\}$ به 0 همگرا باشد، آنگاه $\{c_n\}$ نیز به 0 همگرا خواهد بود. این خاصیت‌های ابتدائی دنباله‌ها در \mathbb{R}^1 برای ساده کردن برهان بعضی از قضیه‌های مربوط به حدها در فضاهای متریک کلی بکار می‌روند.

۳. در صفحه مختلط C ، قرار می‌دهیم $z_n = 1 + n^{-2} + (2 - 1/n)i$ در این صورت، $\{z_n\}$ به $1 + 2i$ همگرا است زیرا وقتی که $n \rightarrow \infty$

$$d(z_n, 1 + 2i)^2 = |z_n - (1 + 2i)|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

پس $d(z_n, 1 + 2i) \rightarrow 0$.

قضیه ۲.۴ دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (S, d) حداکثر می‌تواند به یک نقطه در S همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم که $x_n \rightarrow p$ و $x_n \rightarrow q$. ثابت می‌کنیم که $p = q$. از نامساوی مثلثی داریم

$$0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q).$$

چون $d(p, x_n) \rightarrow 0$ و $d(x_n, q) \rightarrow 0$ ، پس $d(p, q) = 0$ ، یعنی $p = q$.

اگر دنباله $\{x_n\}$ همگرا باشد، نقطه منحصر بفردی را که این دنباله به آن همگرا است حد دنباله نامیده با نماد $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ نشان می‌دهیم.

مثال. در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^1 داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. همین دنباله در زیر فضای متریک $[0, 1]$ همگرا نیست زیرا تنها نقطه‌ای که می‌تواند حد این دنباله باشد $0 \notin T$ است و $0 \notin T$. این مثال نشان می‌دهد که همگرایی یا واگرایی یک دنباله در یک فضا نه تنها به متر آن بلکه به مجموعه زمینه فضا نیز بستگی خواهد داشت.

قضیه ۳.۴ در فضای متریک (S, d) ، فرض می‌کنیم که $x_n \rightarrow p$ و $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ برد $\{x_n\}$ باشد. در این صورت:

(آ) T کراندار است.

(ب) p یک نقطه چسبیده T است.

برهان. (آ) فرض کنیم که N عدد صحیح متناظر $\varepsilon = 1$ در تعریف همگرایی باشد. در این صورت به ازای هر $n \geq N$ ، x_n در گوی $B(p; 1)$ قرار دارد. پس هرگاه

$$r = 1 + \max \{d(p, x_1), \dots, d(p, x_{N-1})\},$$

آنگاه هر نقطه در T در گوی $B(p; r)$ قرار دارد. بنا براین T کراندار خواهد بود.

ب) چون هر گوی مانند $B(p; \varepsilon)$ حاوی نقطه‌ای از T است، پس p یک نقطه چسبیده T می‌باشد.

تبره. اگر T نامتناهی باشد، هر گوی مانند $B(p; \varepsilon)$ حاوی تعدادی نامتناهی نقطه از T است، پس p یک نقطه انباشتگی T خواهد بود.

قضیه زیر عکس قسمت (ب) در قضیه بالا است.

قضیه ۴.۴ (S, d) یک فضای متری و زیرمجموعه $S \subseteq T$ مفروضند. هرگاه نقطه p در S یک نقطه چسبیده T باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌های T هست که به p همگرا است.

پرهان. به ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ ، نقطه‌ای مانند x_n در T هست بقسمی که $d(p, x_n) \leq 1/n$. پس $d(p, x_n) \rightarrow 0$ ، در نتیجه $x_n \rightarrow p$.

قضیه ۵.۴ در فضای متری (S, d) ، دنباله $\{x_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، به p همگرا است که هر زیردنباله آن مانند $\{x_{k(n)}\}$ به p همگرا باشد.

پرهان. فرض کنیم که $x_n \rightarrow p$. یک زیردنباله دلخواه آن مانند $\{x_{k(n)}\}$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که به ازای هر $n \geq N$ ، داریم $d(x_n, p) < \varepsilon$. چون $\{x_{k(n)}\}$ یک زیردنباله است، پس عددی صحیح مانند M هست بقسمی که به ازای هر $n \geq M$ ، $k(n) \geq N$. از این روی، از $n \geq M$ نتیجه می‌شود که $d(x_{k(n)}, p) < \varepsilon$ ، یعنی $x_{k(n)} \rightarrow p$. برقراری عکس گزاره بالا واضح است زیرا $\{x_n\}$ یک زیردنباله خود می‌باشد.

۳.۴ دنباله‌های کشی

اگر دنباله $\{x_n\}$ به‌حدی چون p همگرا باشد، جمله‌های آن باید سرانجام به p ، و در نتیجه به یکدیگر، نزدیک شوند. این خاصیت به‌طور صورتی‌تر در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۶.۴ فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا در فضای متری (S, d) باشد. در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی صحیح مانند N هست بقسمی که

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{هرگاه } n \geq N \text{ و } m \geq N \quad \text{آنگاه}$$

برهان. قرار می‌دهیم $p = \lim x_n$. به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، فرض کنیم N قسمی باشد که به‌ازای هر $n \geq N$ ، $d(x_n, p) < \varepsilon/2$. در این صورت، هرگاه $m \geq N$ ، آنگاه $d(x_m, p) < \varepsilon/2$. حال اگر $n \geq N$ و $m \geq N$ ، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

۷.۴ تعریف دنباله‌کشی. دنباله‌ $\{x_n\}$ در فضای متری (S, d) را یک دنباله‌کشی نامیم در صورتی که این دنباله در شرط زیرین (به نام شرط کشی) صدق کند:

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی صحیح مانند N باشد قسمی که

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad m \geq N \text{ و } n \geq N$$

بنابر قضیه ۶.۴، هر دنباله همگرا یک دنباله‌کشی است. عکس این مطلب در هرفضای متری درست نیست. مثلاً، دنباله $\{1/n\}$ یک دنباله‌کشی در فضای $T =]0, 1]$ (زیرفضای اقلیدسی \mathbb{R}^1) می‌باشد، ولی این دنباله در T همگرا نیست. اما، عکس قضیه ۶.۴ در هرفضای اقلیدسی \mathbb{R}^k درست است.

قضیه ۸.۴ در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^k هر دنباله‌کشی همگرا است.

برهان. فرض کنیم که $\{x_n\}$ یک دنباله‌کشی در \mathbb{R}^k ، و $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ برد این دنباله باشد. هرگاه T متناهی باشد، آنگاه همه جمله‌های $\{x_n\}$ ، بجز تعدادی متناهی، با هم متساویند، و در نتیجه $\{x_n\}$ به این مقدار مشترک همگرا است.

حال فرض کنیم T نامتناهی باشد. با استفاده از قضیه بولتزانو - وایراشتراس، نشان می‌دهیم که T یک نقطه انباشتگی مانند p دارد، و سپس ثابت می‌کنیم که $\{x_n\}$ به p همگرا است. ابتدا لازم است بدانیم که T کراندار است. این مطلب از شرط کشی نتیجه می‌شود. در حقیقت، وقتی که $\varepsilon = 1$ ، عددی مانند N وجود دارد قسمی که اگر $n \geq N$ ، $\|x_n - x_N\| < 1$. یعنی، به‌ازای هر $n \geq N$ ، نقطه x_n درگویی به شعاع ۱ و به مرکز x_N قرار دارد. از این روی، اگر M ماکزیمم عددهای $\|x_1\|, \dots, \|x_N\|$ باشد، T جزءگویی به شعاع $M + 1$ حول 0 خواهد بود. بنابراین، چون T مجموعه‌ای نامتناهی و کراندار است، (بنابر قضیه بولتزانو - وایراشتراس) یک نقطه انباشتگی مانند p در \mathbb{R}^k دارد. حال نشان می‌دهیم که $\{x_n\}$ به p همگرا است.

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، عددی مانند N هست قسمی که هرگاه $n \geq N$ و $m \geq N$ ، آنگاه $\|x_n - x_m\| < \varepsilon/2$. گوی $B(p; \varepsilon/2)$ حاوی نقطه‌ای مانند

x_m است، که در آن $m \geq N$. از این روی اگر $n \geq N$

$$\|x_n - p\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_m - p\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

یعنی $\lim x_n = p$ ، و برهان تمام است.

چند مثال

۱. قضیه ۸.۴ غالباً برای اثبات همگرایی دنباله‌ای که حد آن از پیش دانسته نیست بکار می‌رود، مثلاً، دنباله زیرین را در \mathbb{R}^1 در نظر می‌گیریم:

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

اگر $m > n \geq N$ ، (با گرفتن جمله‌های متوالی x_m و x_n با هم) نتیجه می‌شود که

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots \pm \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N},$$

پس اگر $N > 1/\varepsilon$ ، خواهیم داشت $|x_m - x_n| < \varepsilon$. بنا بر این، $\{x_n\}$ یک دنباله‌کشی است، و در نتیجه به‌حدی همگرا خواهد بود. می‌توان نشان داد (ر. ک. تمرین ۱۸.۸) که این حد مساوی $\log 2$ است، و این چیزی است که خیلی آسان بدست نمی‌آید.

۲. $\{a_n\}$ دنباله‌ای است حقیقی بقسمی که به‌ازای هر $n \geq 1$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n|.$$

بی‌دانشند حد $\{a_n\}$ ، می‌توانیم ثابت کنیم که $\{a_n\}$ همگراست. برای این کار قرار می‌دهیم $b_n = |a_{n+1} - a_n|$. در این صورت $0 \leq b_{n+1} \leq b_n/2$ ، پس به‌استقرا داریم $b_{n+1} \leq b_1/2^n$. بنا بر این $b_n \rightarrow 0$. همچنین اگر $m > n$ ، خواهیم داشت

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k);$$

پس

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} b_k \leq b_n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1-n}} \right) < 2b_n.$$

از این نتیجه می‌شود که $\{a_n\}$ یک دنباله کشی است، و در نتیجه همگرا است.

۴.۴ فضاهای متری تام

تعریف ۹.۴ فضای متری (S, d) را تام گوئیم در صورتی که هر دنباله کشی در S در این فضا همگرا باشد. یک زیرمجموعه S مانند T را تام نامیم در صورتی که زیرفضای متری (T, d) تام باشد.

مثال ۱ هر فضای اقلیدسی \mathbf{R}^k تام است (قضیه ۸.۴). خصوصاً، \mathbf{R}^1 تام است، ولی زیرفضای $[0, 1]$ تام نیست.

مثال ۲ فضای \mathbf{R}^n با متر $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ تام است.

قضیه زیرین مفهومهای تام بودن و فشرده بودن را بهم مربوط می‌کند.

قضیه ۱۰.۴ هر زیرمجموعه فشرده فضای متری (S, d) مانند T تام است.

پرهان. فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کشی در T ، و $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ برد $\{x_n\}$ باشد. هرگاه A متناهی باشد، آنگاه $\{x_n\}$ به یکی از عناصرهای A همگرا است، در نتیجه $\{x_n\}$ در T همگرا است.

اگر A نامتناهی باشد، چون T فشرده است، بنا بر قضیه ۳۸.۳، A یک نقطه انباشتی مانند p در T دارد. اینک نشان می‌دهیم که $x_n \rightarrow p$. برای این کار، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، N را طوری اختیار می‌کنیم که به ازای $n \geq N$ و $m \geq N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. گوی $B(p; \varepsilon/2)$ حاوی نقطه‌ای مانند x_m است، که در آن $m \geq N$. بنابراین، اگر $n \geq N$ ، از نامساوی مثلثی داریم

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

پس $x_n \rightarrow p$. بنابراین، هر دنباله کشی در T دارای حدی در T است، یعنی T تام است.

۵.۴ حد يك تابع

در این بخش دو فضای متری (S, d_S) و (T, d_T) را در نظر می‌گیریم، که در آنها d_T و d_S ، بترتیب، مترهای آن دو می‌باشند. فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه S ، و $f: A \rightarrow T$ تابعی از A به T باشد.

تعریف ۱۱.۴ اگر p یک نقطه انباشتگی A باشد و $b \in T$ منظور از نماد

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

این است که:

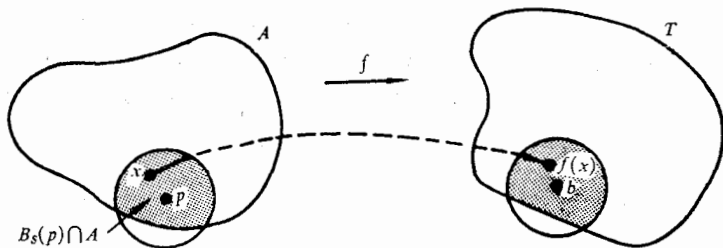
به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

هرگاه $x \in A$ ، $x \neq p$ و $d_S(x, p) < \delta$ آنگاه $d_T(f(x), b) < \varepsilon$.

علامت موجود در (۱) را این طور می خوانیم «حد $f(x)$ وقتی که x به p بگراید، مساوی b است» یا «وقتی که x به p نزدیک شود، $f(x)$ به b نزدیک می شود.» گاهی این مطلب را به این صورت می نویسیم: وقتی که

$$x \rightarrow p, f(x) \rightarrow b.$$

تعریف بالا این مفهوم شهودی را بخاطر می آورد که «اگر x به قدر کافی نزدیک به p اختیار شود، $f(x)$ به اندازه کافی به b نزدیک خواهد شد» (ر. ک. شکل ۱۰.۴). برای آن که مطمئن باشیم که نقطه هائی مانند x ، غیر از p ، در A وجود دارند که به قدر کافی نزدیک p باشند، لازم است p نقطه انباشتگی A باشد. اما لزومی ندارد که p در قلمرو f باشد، همچنین لازم نیست که b در برد f واقع گردد.



شکل ۱۰.۴

تیسر... تعریف بالا را می توان بر حسب گویها نیز تنظیم کرد. به این صورت که گوئیم (۱) وقتی، فقط وقتی، برقرار است که به ازای هر گوی مانند $B_T(b)$ ، گویی مانند $B_S(p)$ وجود داشته باشد بقسمی که $B_S(p) \cap A$ تهی نباشد، و

هرگاه $x \in B_S(p) \cap A$ و $x \neq p$ آنگاه $f(x) \in B_T(b)$.

اگر تعریف حد تابع را به این صورت تنظیم کنیم، این تعریف وقتی که p یا b (یا هر دو) در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته \mathbf{R}^* ، یا در دستگاه عددهای مختلط وسعت یافته \mathbf{C}^* باشند نیز معنی دارد. اما، در آنچه در زیر می‌آید، فرض این است که p و b متناهی هستند مگر آن که صریحاً نامتناهی بودن آنها را قید نمائیم.

قضیه زیر حدود تابعها را به حدود دنباله‌های همگرا مربوط می‌کند.

قضیه ۱۲.۴ فرض کنیم p یک نقطه انباشتنگی A باشد، $b \in T$. در این صورت وقتی، و فقط وقتی،

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌ها در $A - \{p\}$ که به p همگرا باشد،

$$(۳) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

برهان. هرگاه (۲) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ هست قسمی که

هرگاه $x \in A$ و $0 < d_S(x, p) < \delta$ ، آنگاه $d_T(f(x), b) < \varepsilon$ (۴) حال دنباله دلخواهی مانند $\{x_n\}$ را در $A - \{p\}$ همگرا به p اختیار می‌کنیم. به ازای δ موجود در (۴)، عدد صحیحی مانند N هست قسمی که اگر $n \geq N$ ، $d_S(x_n, p) < \delta$ بنا براین، از (۴) نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \geq N$ ، $d_T(f(x_n), b) < \varepsilon$ ، و در نتیجه $\{f(x_n)\}$ به b همگرا خواهد بود. بنا براین، (۳) از (۲) نتیجه می‌شود.

برای اثبات عکس مطلب بالا، فرض می‌کنیم که (۳) برقرار باشد و (۲) درست نباشد. با این فرض به تناقضی می‌رسیم. هرگاه (۲) درست نباشد، آنگاه باید ε مثبتی وجود داشته باشد قسمی که به ازای هر $\delta > 0$ ، نقطه‌ای مانند x در A (که x ممکن است به δ بستگی داشته باشد) وجود داشته باشد قسمی که

$$(۵) \quad d_T(f(x), b) \geq \varepsilon \quad \text{اما} \quad 0 < d_S(x, p) < \delta$$

با انتخاب $\delta = 1/n$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ ، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از نقطه‌های $A - \{p\}$ با خاصیت زیرین بدست می‌آید:

$$d_T(f(x_n), b) \geq \varepsilon \quad \text{ولی} \quad 0 < d_S(x_n, p) < 1/n$$

واضح است که دنباله $\{x_n\}$ به p همگراست ولی دنباله $\{f(x_n)\}$ به b همگرا نیست،

و این با (۳) متناقض است.

تصوره. قضیه‌های ۱۲.۴ و ۲۰.۴ باهم این مطلب را نشان می‌دهند که، وقتی که $x \rightarrow p$ یک تابع نمی‌تواند دارای دو حد متفاوت باشد.

۶.۴ حدود تابعهای مختلط

فرض کنیم (S, d) یک فضای متریک، و A زیرمجموعه S باشد. دو تابع مختلط f و g را که بر A تعریف شده‌اند:

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}, \quad g: A \rightarrow \mathbb{C}$$

در نظر می‌گیریم. مجموع $f + g$ عبارت است از تابعی که مقدار آن در هر نقطه A مانند x عدد مختلط $f(x) + g(x)$ می‌باشد. تفاضل $f - g$ ، حاصل ضرب $f \cdot g$ ، و خارج قسمت f/g به طریق مشابه تعریف می‌شوند. باید توجه داشت که خارج قسمت f/g فقط در نقطه‌هایی چون x که $g(x) \neq 0$ تعریف می‌شود. قاعده‌های متداول برای محاسبه با حدها در قضیه زیر داده شده‌اند.

قضیه ۱۳.۴ فرض کنیم f و g تابعهایی مختلط باشند که بر یک زیرمجموعه فضای متریک (S, d) مانند A تعریف شده باشند، همچنین p یک نقطه انباشتگی A باشد، و

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b.$$

در این صورت نیز داریم:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = ab \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x) = a/b, \quad b \neq 0 \quad \text{اگر} \quad (\text{ج})$$

پرهان. تنها (ب) را ثابت نموده، فسمتهای دیگر را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. به‌ازای ε داده شده بین ۰ و ۱، فرض می‌کنیم که ε' نیز عددی بین ۰ و ۱ بوده که به ε بستگی دارد. نوع این بستگی بعداً توصیف خواهد شد. عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که هرگاه $x \in A$ و $d(x, p) < \delta$ ، آنگاه

$$|f(x) - a| < \varepsilon' \quad \text{و} \quad |g(x) - b| < \varepsilon'$$

پس

$$|f(x)| = |a + (f(x) - a)| < |a| + \varepsilon' < |a| + 1.$$

اگر بنویسیم $f(x)g(x) - ab = f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab$ داریم

$$|f(x)g(x) - ab| \leq |f(x)| |g(x) - b| + |b| |f(x) - a|$$

$$< (|a| + 1)\epsilon' + |b|\epsilon' = \epsilon'(|a| + |b| + 1).$$

اگر ϵ' را مساوی $\epsilon/(|a| + |b| + 1)$ اختیار کنیم، ملاحظه می شود که هرگاه $x \in A$ و $d(x, p) < \delta$ ، آنگاه $|f(x)g(x) - ab| < \epsilon$ ، یعنی (ب) برقرار است.

۷.۴ حدود تابعهای برداری

بار دیگر، فرض می کنیم که (S, d) فضائی مترى، و A یک زیرمجموعه S باشد. دو تابع برداری f و g را که بر A تعريف شده اند و مقدارهای آنها در \mathbb{R}^k می باشند، یعنی

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$$

را در نظر می گیریم. خارج قسمتهای توابع برداری به ازای $k > 2$ تعريف نشده اند، ولی می توان مجموع $f + g$ و حاصل ضرب λf (اگر λ عددی حقیقی باشد) و حاصل ضرب داخلی $f \cdot g$ را، بترتیب، با دستورهایی زیرین تعريف کرد: به ازای هر x در A ،

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

در این صورت، قاعده های زیرین را برای محاسبه با حدود تابعهای برداری خواهیم داشت:

قضیه ۱۴.۴ فرض کنیم p يك نقطه انباشتگی A باشد و

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = b.$$

در این صورت نیز داریم:

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = a + b \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \lambda f(x) = \lambda a \quad (\text{ب}) \text{ به ازای هر اسکالر } \lambda,$$

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \|f(x)\| = \|a\| \quad (\text{د})$$

پرهان. تنها قسمتهای (ج) و (د) را ثابت می کنیم. برای اثبات (ج) می نویسیم

$$\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{a} \cdot [\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{b} \cdot [\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}].$$

با استفاده از نامساویهای مثلثی و کشی -- شوارتز، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} 0 &\leq | \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} | \\ &\leq \| \mathbf{f}(x) - \mathbf{a} \| \| \mathbf{g}(x) - \mathbf{b} \| \\ &\quad + \| \mathbf{a} \| \| \mathbf{g}(x) - \mathbf{b} \| + \| \mathbf{b} \| \| \mathbf{f}(x) - \mathbf{a} \|. \end{aligned}$$

وقتی که $x \rightarrow p$ ، هر جمله طرف راست نامساوی بالا به 0 می گراید، پس

$$\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{g}(x) \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

یعنی (ج) برقرار است. برای اثبات (د) به نامساوی

$$| \| \mathbf{f}(x) \| - \| \mathbf{a} \| | \leq \| \mathbf{f}(x) - \mathbf{a} \|$$

توجه کنید.

تصوه. فرض می کنیم f_1, \dots, f_n تابع حقیقی باشند که بر A تعریف شده اند، و $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbf{R}^n$ تابع برداری باشد که با معادله زیرین تعریف شده باشد:

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in A$$

در این صورت، f_1, \dots, f_n را مؤلفه های \mathbf{f} می نامیم، و \mathbf{f} را به صورت $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ نیز می نویسیم.

هرگاه $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ، آنگاه به ازای هر $r = 1, 2, \dots, n$

$$| f_r(x) - a_r | \leq \| \mathbf{f}(x) - \mathbf{a} \| \leq \sum_{r=1}^n | f_r(x) - a_r |.$$

این نامساویها نشان می دهند که $\lim_{x \rightarrow p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}$ وقتی، و فقط وقتی، که به ازای هر r ، $\lim_{x \rightarrow p} f_r(x) = a_r$.

۸.۴ تابعهای پیوسته

تعریف پیوستگی را، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آمده است، می توان برای تابعهایی از یک فضای متریک به دیگری وسعت داد.

تعریف ۱۵.۴ فرض کنیم (S, d_S) و (T, d_T) فضاهای متریک و $f: S \rightarrow T$ تابعی از S به T باشند. تابع f را در نقطه p در S پیوسته می نامیم در صورتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ باشد قسمی که

هرگاه $d_S(x, p) < \delta$ و آنگاه $d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

اگر f در هر نقطه از یک زیرمجموعه S مانند A پیوسته باشد، می‌گوئیم f بر A پیوسته است.

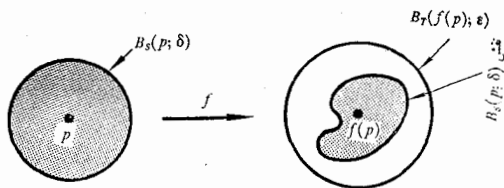
تعریف بالا این مفهوم شهودی را که «نقطه‌های نزدیک p به وسیله f به نقطه‌های نزدیک $f(p)$ نگاشته می‌شوند» منعکس می‌سازد. این تعریف را نیز می‌توان بر حسب گویها بیان کرد: تابع f در نقطه p وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ باشد بقسمی که

$$f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(f(p); \varepsilon).$$

در این جا $B_S(p; \delta)$ گویسی است در S ؛ نقش آن با f باید محتوا در گوی $B_T(f(p); \varepsilon)$ در T باشد. (ر. ک. شکل ۲.۴).

اگر p یک نقطه انباشتگی S باشد، از تعریف پیوستگی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$



شکل ۲.۴

هرگاه p یک نقطه تنهای S باشد (نقطه‌ای از S که نقطه انباشتگی S نیست)، آنگاه هر تابع مانند f که در p تعریف شده باشد در این نقطه پیوسته است، زیرا به ازای δ ی به قدر کافی کوچک، فقط یک نقطه مانند x هست که در $d_S(x, p) < \delta$ صدق می‌کند (این x همان p است)، و $d_T(f(p), f(p)) = 0$.

قضیه ۱۶.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) بوده، و $p \in S$ در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، در p پیوسته است که به ازای هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در S که به p همگرا باشد، دنباله $\{f(x_n)\}$ در T به $f(p)$ همگرا گردد؛ یا، به صورت علامتی، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

برهان این قضیه شبیه به برهان قضیه ۱۲.۴ است، و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود. (این قضیه را نیز می توان از قضیه ۱۲.۴ نتیجه گرفت، ولی باید توجه داشت که چون بعضی از جمله های دنباله $\{x_n\}$ می توانند مساوی p باشند، در استدلال پیچیدگی مختصری ظاهر خواهد شد.)

قضیه بالا معمولاً این طور توضیح می شود که در مورد تابعهای پیوسته می توان جای علامت حد را با علامت تابع عوض کرد. در تعویض این دو علامت باید احتیاط نمود، زیرا گاهی دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا است در حالی که $\{x_n\}$ واگرا می باشد.

مثال. هرگاه در فضای متری (S, d) ، $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ ، آنگاه

$$d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$$

(تمرین ۷.۴). اگر ρ متر مذکور در تمرین ۳۷.۳ با $S_1 = S_\rho = S$ باشد، می توان تحقیق کرد که تابع d بر فضای متری $(S \times S, \rho)$ پیوسته است.

تصوره. پیوستگی تابع f در نقطه p را یک خاصیت موضعی f نامیم، زیرا این خاصیت فقط به رفتار f در نزدیکی p بستگی دارد. هر خاصیت f که مربوط به تمام قلمرو f باشد یک خاصیت کلی نامیده می شود. بنا بر این، پیوستگی f بر قلمرو خود یک خاصیت کلی است.

۹.۴ پیوستگی تابعهای مرکب

قضیه ۱۷.۴ فرض کنیم (S, d_S) ، (T, d_T) ، و (U, d_U) فضاهایی متری باشند. همچنین $f: S \rightarrow T$ و $g: f(S) \rightarrow U$ تابعهای باشند، و h تابع مرکب این دو باشد که بر S با معادله زیرین تعریف می شود:

$$h(x) = g(f(x)) \quad x \in S$$

هرگاه f در p و g در $f(p)$ پیوسته باشند، آنگاه h در p پیوسته است.

برهان. قرار می دهیم $b = f(p)$. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که

$$\text{هرگاه } d_T(y, b) < \delta, \text{ آنگاه } d_U(g(y), g(b)) < \varepsilon$$

به ازای این δ ، δ' هست بقسمی که

$$\text{هرگاه } d_S(x, p) < \delta', \text{ آنگاه } d_T(f(x), f(p)) < \delta$$

از تلفیق دو گزاره بالا با فرض $y = f(x)$ ، نتیجه می شود که
 هرگاه $d_s(x, p) < \delta'$ ، آنگاه $d_u(h(x), h(p)) < \varepsilon$
 پس h در p پیوسته است.

۱۰.۴ تابعهای مختلط و تابعهای برداری پیوسته

قضیه ۱۰.۴ فرض کنیم تابعهای مختلط f و g در نقطه p در فضای متریک (S, d) پیوسته باشند. در این صورت $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ هر یک در p پیوسته خواهد بود. اگر $g(p) \neq 0$ ، خارج قسمت f/g نیز در p پیوسته است.

برهان. اگر p یک نقطه تنهای S باشد، قضیه واضح است. درحالتی که p نقطه انباشتگی S باشد، این قضیه را می توان از قضیه ۱۳.۴ نتیجه گرفت.

البته، قضیه ای نظیر این قضیه برای تابعهای برداری وجود دارد، و می توان آن را هم با همین روش و با استفاده از قضیه ۱۳.۴ ثابت کرد.

قضیه ۱۹.۴ فرض کنیم تابعهای f و g در نقطه p در فضای متریک (S, d) پیوسته، و مقادیرهای f و g در \mathbf{R}^n باشند. در این صورت، هر یک از تابعهای زیر در p پیوسته است: مجموع $f + g$ ، حاصل ضرب λf (به ازای هر عدد حقیقی λ)، حاصل ضرب داخلی $f \cdot g$ ، و هنج $\|f\|$.

قضیه ۲۰.۴ فرض کنیم n تابع حقیقی f_1, \dots, f_n بر یک زیرمجموعه فضای متریک (S, d_s) مانند A تعریف شده باشند، و $f = (f_1, \dots, f_n)$ در این صورت، f در یک نقطه A مانند p وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که هر یک از تابعهای f_1, \dots, f_n در p پیوسته باشد.

برهان. اگر p نقطه تنهای A باشد، قضیه واضح است. اگر p نقطه انباشتگی A باشد، می بینیم وقتی که $x \rightarrow p$ ، $f(x) \rightarrow f(p)$ ، و فقط وقتی، که به ازای هر

$$f_k(x) \rightarrow f_k(p) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

۱۱.۴ مثالهایی از تابعهای پیوسته

فرض می کنیم S مسازی C ، یعنی صفحه مختلط، باشد. باسانی می توان نشان داد که تابعهای مختلط زیرین بر C پیوسته اند:

(T) تابعهای پایا، که به ازای هر $z \in C$ با $f(z) = c$ تعریف می شوند؛
 (B) تابع همانی، که به ازای هر $z \in C$ با $f(z) = z$ تعریف می شود.

با بکار بردن مکرر قضیه ۱۸.۴ معلوم می شود که هر چند جمله ای مانند

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n,$$

که در آن a_i ها عددهائی مختلط باشند، پیوسته است.

هرگاه S یک زیرمجموعه C باشد که بر آن چند جمله ای f صفر نشود، آنگاه $1/f$ بر S پیوسته خواهد بود. بنا براین، تابع گویای g/f ، که در آن g و f چند جمله ای هستند، در نقطه هائی از C که مخرج صفر نشود، پیوسته است. تابعهای حقیقی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، نظیر تابعهای نمائی، تابعهای مثلثاتی، و تابعهای لگاریتمی، همه در هر نقطه که تعریف شده باشند پیوسته اند. در نتیجه پیوستگی این تابعهای مقدماتی است که برای ارزیابی بعضی از حدها می توان حد متغیر را به جای گذاشتن «متغیر مستقل» در تابع گذاشت، مانند

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$$

پیوستگی تابعهای نمائی و تابعهای مثلثاتی مختلط نتیجه ای است از پیوستگی تابعهای حقیقی متناظر با آنها و قضیه ۲۰.۴.

۱۲.۴ پیوستگی و نقشهای معکوس مجموعه های باز یا بسته

با استفاده از مفهوم نقش معکوس می توان تابعهای پیوسته را به دو صورت کلی مهم توصیف کرد.

۲۱.۴ تعریف نقش معکوس. فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از مجموعه S به مجموعه T . اگر Y یک زیرمجموعه T باشد، نقش معکوس Y با f ، که با $f^{-1}(Y)$ نشان داده می شود، عبارت است از بزرگترین زیرمجموعه S که f آن را در Y می نگارد؛ یعنی،

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y \text{ و } x \in S\}.$$

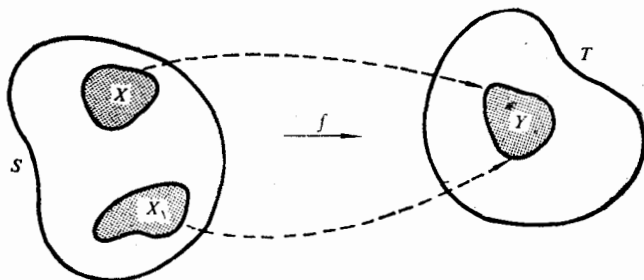
تبره. اگر f تابع معکوس f^{-1} داشته باشد، نقش معکوس Y با f همان نقش Y با f^{-1} است، و در این حالت ابهامی در نماد $f^{-1}(Y)$ وجود ندارند. همچنین توجه داشته باشید که اگر $A \subseteq B \subseteq T$ داریم $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

قضیه ۲۲.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی از S به T باشد. هرگاه $X \subseteq S$ و $Y \subseteq T$ آنگاه:

$$(A) \quad f(X) \subseteq Y \text{ از } X = f^{-1}(Y) \text{ نتیجه می شود که}$$

(ب) از $Y = f(X)$ نتیجه می‌شود که $X \subseteq f^{-1}(Y)$.

اثبات قضیه ۲۲.۴ تعبیر مستقیم تعریف علامتهای $f^{-1}(Y)$ و $f(X)$ است، و به خواننده واگذار می‌شود. باید توجه داشت که، در حالت کلی، نمی‌توان از $Y = f(X)$ رابطه $X = f^{-1}(Y)$ را نتیجه گرفت. (ر. ک. مثال شکل ۰.۳.۴)



شکل ۳.۴

خاطر نشان می‌شود که گزاره‌های قضیه ۲۲.۴ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y, \quad X \subseteq f^{-1}[f(X)].$$

همچنین باید توجه داشت که به ازای هر دو زیرمجموعه T مانند A و B ,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

قضیه ۲۳.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) باشد. در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، بر S پیوسته است که به ازای هر مجموعه باز T مانند Y ، نقش معکوس $f^{-1}(Y)$ در S باز باشد.

پروان. فرض کنیم f بر S پیوسته، و Y در T باز باشد. نقطه‌ای مانند p در $f^{-1}(Y)$ اختیار می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که p یک نقطه درونی $f^{-1}(Y)$ است. قرار می‌دهیم $y = f(p)$. چون Y باز است، $\epsilon > 0$ وجود دارد قسمی که $B_T(y; \epsilon) \subseteq Y$. چون f در p پیوسته است، δ مثبتی وجود دارد قسمی که $f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(y; \epsilon)$ از این روی،

$$B_S(p; \delta) \subseteq f^{-1}[f(B_S(p; \delta))] \subseteq f^{-1}[B_T(y; \epsilon)] \subseteq f^{-1}(Y),$$

پس p یک نقطه درونی $f^{-1}(Y)$ است.

برعکس، فرض می‌کنیم به‌ازای هر زیرمجموعه باز در T مانند Y ، $f^{-1}(Y)$ در S باز باشد. نقطه‌ای در S مانند p اختیار نموده قرار می‌دهیم $y = f(p)$. ثابت می‌کنیم که f در p پیوسته است. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، گوی $B_T(y; \varepsilon)$ در T باز است، بنابراین $f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$ در S باز خواهد بود. چون $p \in f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$ ، پس عددی مانند $\delta > 0$ هست بقسمی که $B_S(p; \delta) \subseteq f^{-1}(B_T(y; \varepsilon))$. بنابراین، $f(B_S(p; \delta)) \subseteq B_T(y; \varepsilon)$. از این روی، f در p پیوسته خواهد بود.

قضیه ۲۴.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) . در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، بر S پیوسته است که به‌ازای هر مجموعه بسته در T مانند Y ، نقش معکوس $f^{-1}(Y)$ در S بسته باشد.

برهان. هرگاه Y در T بسته باشد، آنگاه $T - Y$ در T باز است و

$$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y).$$

حال قضیه ۲۳.۴ را می‌توان بکار برد.

چند مثال. نقش یک مجموعه باز با یک نگاشت پیوسته لزوماً باز نیست. مثال ناقص ساده برای این مطلب تابع پایا است که تمام S را روی یک نقطه در \mathbb{R}^1 می‌نگارد. همچنین، نقش یک مجموعه بسته با نگاشتی پیوسته لزوماً بسته نمی‌باشد. مثلاً، تابع حقیقی $f(x) = \arctan x$ ، \mathbb{R}^1 را روی بازه $]-\pi/2, \pi/2[$ می‌نگارد.

۱۳.۴ تابعهای پیوسته بر مجموعه‌های فشرده

قضیه زیر نشان می‌دهد که نقش پیوسته یک مجموعه فشرده مجموعه‌ای است فشرده. این خاصیت کلی دیگری از تابعهای پیوسته می‌باشد.

قضیه ۲۵.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) . هرگاه f بر یک زیرمجموعه فشرده S مانند X پیوسته باشد، آنگاه نقش $f(X)$ یک زیرمجموعه فشرده T است؛ خصوصاً، $f(X)$ در T بسته و کراندار است.

برهان. فرض کنیم F یک پوشش باز $f(X)$ باشد، پس $f(X) \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. نشان می‌دهیم که تعدادی متناهی از A ها مجموعه $f(X)$ را می‌پوشانند. چون f بر زیرفضای متری (X, d_S) پیوسته است، می‌توان قضیه ۲۳.۴ را بکار برده نتیجه گرفت که هر $f^{-1}(A)$ در (X, d_S) باز است. $f^{-1}(A)$ ها تشکیل یک پوشش باز

X را می دهند. چون X فشرده است، تعدادی متناهی از آنها X را می پوشانند، مثلاً

$$X \subseteq f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)$$

از این روی

$$\begin{aligned} f(X) &\subseteq f[f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)] \\ &= f[f^{-1}(A_1)] \cup \dots \cup f[f^{-1}(A_p)] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_p, \end{aligned}$$

پس $f(X)$ فشرده است. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۳۸.۳، می بینیم که $f(X)$ بسته و کراندار است.

تعریف ۲۶.۴ تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ را بر S کراندار نامیم در صورتی که عددی مثبت مانند M باشد بقسمی که به ازای هر x در S ، $\|f(x)\| \leq M$.

چون f وقتی، و فقط وقتی، بر S کراندار است که $f(S)$ یک زیرمجموعه کراندار \mathbb{R}^k باشد، پس می توان قضیه زیر را از قضیه ۲۵.۴ نتیجه گرفت.

قضیه ۲۷.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}^k$ تابعی باشد از فضای متریک S به فضای اقلیدسی \mathbb{R}^k . هرگاه f بر یک زیرمجموعه فشرده S مانند X پیوسته باشد، آنگاه f بر X کراندار است.

این قضیه در مورد تابعهای حقیقی نتیجه‌های مهمی را در بر دارد. هرگاه f تابعی حقیقی، و بر X کراندار باشد، آنگاه $f(X)$ یک زیرمجموعه کراندار \mathbb{R} است. بنا براین، $f(X)$ دارای سوپرم و اینفیم خواهد بود. بعلاوه،

$$\inf f(X) \leq f(x) \leq \sup f(X), \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } X,$$

قضیه زیر نشان می دهد که اگر X فشرده باشد، تابع پیوسته f عملاً مقدارهای $\inf f(X)$ و $\sup f(X)$ را خواهد گرفت.

قضیه ۲۸.۴ فرض کنیم که $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد حقیقی از فضای متریک S به فضای اقلیدسی \mathbb{R} . همچنین f بر یک زیرمجموعه فشرده S مانند X پیوسته باشد. در این صورت، نقطه‌هایی مانند p و q در X وجود دارند بقسمی که

$$f(p) = \inf f(X) \quad \text{و} \quad f(q) = \sup f(X)$$

تبره. چون به ازای هر x در X ، $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ ، بنا براین عددهای $f(p)$ و $f(q)$ را، بترتیب، مقدارهای مینیمم و ماکزیمم مطلق یا کلی f بر X می نامیم.

برهان. بنا بر قضیه ۲۵.۴، $f(X)$ یک زیرمجموعه بسته و کراندار \mathbb{R} است. قرار می دهیم $m = \inf f(X)$. در این صورت، m چسبیده به $f(X)$ است و، چون

$f(X)$ بسته است، $m \in f(X)$. بنابراین، به ازای نقطه‌ای مانند p در X ، $m = f(p)$.
 بهمین نحو، معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند q در X هست که $f(q) = \sup f(X)$.
 قضیه ۲۹.۴ فرض کنیم که $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) . همچنین f بر S یک به یک باشد، یعنی f^{-1} وجود داشته باشد. هرگاه S فشرده، و f بر S پیوسته باشد، آنگاه f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته خواهد بود.

برهان. با توجه به قضیه ۲۴.۴ (در مورد f^{-1})، کافی است نشان دهیم که به ازای هر مجموعه بسته مانند X در S ، نقش $f(X)$ در T بسته است. (توجه داشته باشید که $f(X)$ نقش معکوس X با f^{-1} می‌باشد.) چون X بسته، و S فشرده است، پس X (بنا بر قضیه ۳۹.۳) فشرده است. بنابراین، $f(X)$ (بنا بر قضیه ۲۵.۴) فشرده خواهد بود، و در نتیجه $f(X)$ (بنا بر قضیه ۳۸.۳) بسته است، و اثبات بدین ترتیب تمام می‌شود.

مثال. این مثال نشان می‌دهد که فشردگی S در قضیه ۲۹.۴ فرضی لازم است. فرض کنیم که $[0, 1] = S$ با متر متداول \mathbb{R}^1 باشد، و تابع مختلط f را در نظر می‌گیریم که با رابطه زیرین تعریف می‌شود:

$$f(x) = e^{2\pi iz} \quad , \quad 0 \leq x < 1$$

f نگاشت پیوسته‌ای است یک به یک از بازه نیمباز $[0, 1]$ روی دایره یک $|z| = 1$ در صفحه مختلط. اما، f^{-1} در نقطه $f(0)$ پیوسته نیست. مثلاً، اگر $x_n = 1 - 1/n$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ به $f(0)$ همگرا است ولی $\{x_n\}$ در S همگرا نیست.

۱۴.۴ نگاشتهای توپولوژیک (همانسانیا)

تعریف ۳۰.۴ فرض کنیم که $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) . همچنین f بر S یک به یک باشد، پس تابع معکوس f^{-1} وجود دارد. هرگاه f بر S و f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته باشند، آنگاه f را یک نگاشت توپولوژیک یا یک همانسانی می‌نامیم، و می‌گوییم که فضاهای متریک (S, d_S) و $(f(S), d_T)$ همانسان هستند.

هرگاه f یک همانسانی باشد، آنگاه f^{-1} نیز چنین است. قضیه ۲۳.۴ نشان می‌دهد که یک همانسانی زیرمجموعه‌های باز S را روی زیرمجموعه‌های باز $f(S)$ می‌نگارد. همچنین زیرمجموعه‌های بسته S را نیز زیرمجموعه‌های بسته

$f(S)$ می نگارد.

هر خاصیت یک مجموعه که با هر نگاشت توپولوژیک محفوظ بماند یک خاصیت توپولوژیک نامیده می شود. بنا بر این، خاصیت های باز، بسته، یا فشرده بودن خاصیت های توپولوژیک می باشند.

نوع مهمی از همانسانی یکمتری است. یکمتری تابعی است مانند $f: S \rightarrow T$ که بر S یک به یک است و متر را حفظ می کند؛ یعنی،

$$d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y), \quad x, y \text{ در } S$$

اگر یک یکمتری از (S, d_S) به $(f(S), d_T)$ وجود داشته باشد، این دو فضای متری را یکمتر نامند.

نگاشت های توپولوژیک مخصوصاً در نظریهٔ خم های فضائی اهمیت دارند. مثلاً، یک کمان ساده نقش توپولوژیک یک بازه است، و یک خم بستهٔ ساده نقش توپولوژیک یک دایره می باشد.

۱۵.۴ قضیه بولتزانو

این بخش به قضیهٔ مشهوری از بولتزانو اختصاص داده شده است. این قضیه دربارهٔ یک خاصیت کلی تابع های پیوستهٔ حقیقی بر بازه های فشرده مانند $[a, b]$ در \mathbb{R} می باشد. اگر نمودار f در a در بالای محور x و در b در پایین این محور قرار گیرد، بنا به قضیهٔ بولتزانو، نمودار f باید در جایی بین این دو نقطه از محور x بگذرد. اثبات ما برای این قضیه مبتنی است بر یک خاصیت موضعی از تابع های پیوسته به نام خاصیت محفوظ ماندن علامت.

قضیهٔ ۳۱.۴ فرض کنیم f بر بازه ای مانند S در \mathbb{R} تعریف شده باشد. همچنین f در نقطهٔ c در S پیوسته باشد و $f(c) \neq 0$. در این صورت، یک گوی یک بعدی مانند $B(c; \delta)$ هست قسمی که $f(x)$ در $S \cap B(c; \delta)$ دارای علامت $f(c)$ می باشد.

برهان. فرض کنیم که $f(c) > 0$. به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ مثبتی هست قسمی که هرگاه $x \in S \cap B(c; \delta)$ ، آنگاه $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$. δ متناظر $\varepsilon = f(c)/2$ (این ε مثبت است) را اختیار می کنیم. در این صورت،

$$\frac{1}{4} f(c) < f(x) < \frac{3}{4} f(c) \quad \text{هرگاه } x \in S \cap B(c; \delta)$$

پس در $S \cap B(c; \delta)$ ، همان علامت $f(c)$ را دارد. اثبات برای حالت $f(c) < 0$ به همین گونه است، جز آن که در این حالت ε را مساوی $-\frac{1}{4} f(c)$ اختیار می کنیم.

قضیه ۳۳.۴ (بولتزانو). فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازه فشرده $[a, b]$ در \mathbb{R} پیوسته باشد. همچنین $f(a)$ و $f(b)$ ناهمعلامت باشند؛ یعنی،

$$f(a)f(b) < 0.$$

در این صورت، دست کم یک نقطه مانند c در بازه باز $]a, b[$ هست بقسمی که

$$f(c) = 0.$$

برهان. برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم که $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \mid f(x) \geq 0 \text{ و } x \in [a, b]\}.$$

در این صورت، A ناتهی است زیرا که $a \in A$ و A از بالا به b کراندار می‌باشد. فرض کنیم که $c = \sup A$. در این صورت $a < c < b$. ثابت می‌کنیم که

$$f(c) = 0.$$

اگر $f(c) \neq 0$ گویی یک بعدی مانند $B(c; \delta)$ وجود دارد که در آن f همان علامت $f(c)$ را دارد. اگر $f(c) > 0$ ، نقطه‌هایی مانند $x > c$ وجود دارند که در آنها $f(x) > 0$ و این با تعریف c متناقض است. هرگاه $f(c) < 0$ ، آنگاه $c - \delta/2$ یک کران بالایی برای A است، و این نیز با تعریف c متناقض می‌باشد. بنابراین باید $f(c) = 0$.

از قضیه بولتزانو بسادگی می‌توان قضیه مقدار میانی برای تابعهای پیوسته را نتیجه گرفت.

قضیه ۳۳.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازه فشرده S در \mathbb{R} پیوسته باشد. همچنین فرض می‌کنیم دو نقطه مانند α و β ($\alpha < \beta$) در S وجود داشته باشند بقسمی که $f(\alpha) \neq f(\beta)$. در این صورت، f هر مقدار بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را در بازه $]\alpha, \beta[$ بخود می‌گیرد.

برهان. فرض می‌کنیم k عددی بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ باشد. تابع g را بر $[\alpha, \beta]$ با معادله $g(x) = f(x) - k$ تعریف نموده، سپس قضیه بولتزانو را در مورد g بکار می‌بریم.

از قضیه مقدار میانی و قضیه ۲۸.۴ نتیجه می‌شود که، نقش پیوسته یک بازه فشرده مانند S با تابعی حقیقی بازه‌ای است فشرده، یعنی، این نقش همان

$$[\inf f(S), \sup f(S)]$$

است. (اگر f بر S تابع پایائی باشد، بازه بالا یک بازه تبه شده می‌باشد.) در بخش

آینده این خاصیت به محدودهٔ کلیتر فضاهای متری وسعت داده خواهد شد.

۱۶.۴ همبندی

در این بخش مفهوم همبندی و رابطهٔ آن با پیوستگی توصیف می‌شود.

تعریف ۳۴.۴ فضای متری S را ناهمبند نامیم در صورتی که $S = A \cup B$ که در آن A و B دو مجموعهٔ ناتهی باز و از هم جدا در S باشند. اگر S ناهمبند نباشد، گوئیم که S همبند است.

تصور. یک زیرمجموعهٔ فضای متری S مانند X را همبند نامیم در صورتی که، وقتی آن را به عنوان زیر فضای متری S در نظر بگیریم، یک فضای متری همبند باشد.

چند مثال

۱. فضای متری $S = \mathbb{R} - \{0\}$ با متر اقلیدسی متداول ناهمبند است، زیرا این فضا عبارت است از اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی و باز و از هم جدا. این دو مجموعه عبارتند از مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت و مجموعهٔ عددهای حقیقی منفی.

۲. هر بازهٔ باز در \mathbb{R} همبند است. این مطلب در بخش ۴.۳ به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۱.۳ ثابت شد.

۳. مجموعهٔ عددهای گویا، یعنی \mathbb{Q} ، اگر به عنوان زیر فضای متری فضای اقلیدسی \mathbb{R}^1 در نظر گرفته شود، ناهمبند خواهد بود. در حقیقت، $\mathbb{Q} = A \cup B$ ، که در آن A عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای کوچکتر از $\sqrt{2}$ ، و B مجموعهٔ همهٔ عددهای گویای بزرگتر از $\sqrt{2}$ می‌باشد. بهمین طریق، معلوم می‌شود که هر گوی در \mathbb{Q} ناهمبند است.

۴. هر فضای متری S حاوی زیرمجموعه‌های همبند ناتهی است. در واقع، به ازای هر نقطه مانند p در S ، مجموعهٔ $\{p\}$ همبند است.

برای آن که مفهوم همبندی را با پیوستگی مربوط کنیم مفهوم تابع دو مقداری را معرفی می‌نمائیم.

تعریف ۳۵.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر فضای متری S پیوسته باشد. f را بر S یک تابع دو مقداری نامیم در صورتی که $f(S) \subseteq \{0, 1\}$.

با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک تابع دو مقداری تابعی است پیوسته که تنها مقدارهای ممکن آن ۰ و ۱ می‌باشند. اگر فضای متری $T = \{0, 1\}$ دارای متر

مجزا باشد، می توان تابع دو مقداری f را به عنوان تابعی پیوسته از فضای متری S به فضای متری T در نظر گرفت. یادآوری می کنیم که هر زیر مجموعه یک فضای متری مجزا مانند T در T هم باز است و هم بسته.

قضیه ۳۶.۴ فضای متری S وقتی، فقط وقتی، همبند است که هر تابع دو مقداری بر S تابعی پایا باشد.

برهان. فرض می کنیم S همبند، و f تابعی دو مقداری بر S باشد. باید نشان دهیم که f تابع پایایی است. قرار می دهیم $A = f^{-1}(\{0\})$ و $B = f^{-1}(\{1\})$ ، یعنی نقشهای معکوس زیر مجموعه های $\{0\}$ و $\{1\}$. چون $\{0\}$ و $\{1\}$ زیر مجموعه های باز فضای متری مجزای $\{0, 1\}$ هستند، پس A و B هر دو در S بازند. از این روی، $S = A \cup B$ ، که در آن A و B مجموعه های باز از هم جدا می باشند. اما چون S همبند است، یا A تهی است و $B = S$ ، یا B تهی است و $A = S$. در هر حالت، f بر S تابع پایایی است.

بر عکس، فرض می کنیم که S ناهمبند باشد. پس $S = A \cup B$ ، که در آن A و B دو زیر مجموعه باز ناتهی و از هم جدای S می باشند. تابعی دو مقداری بر S را نشان می دهیم که پایا نباشد. فرض می کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$$

چون A و B ناتهی هستند، f هر دو مقدار ۰ و ۱ را می گیرد، پس f پایا نیست. همچنین، f بر S پیوسته است، زیرا نقش معکوس هر زیر مجموعه باز $\{0, 1\}$ در S باز است.

در زیر نشان می دهیم که نقش پیوسته یک مجموعه همبند مجموعه ای است همبند.

قضیه ۳۷.۴ فرض کنیم $f: S \rightarrow M$ تابعی باشد از فضای متری S به فضای متری دیگر M . همچنین X یک زیر مجموعه همبند S باشد. هرگاه f بر X پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ یک زیر مجموعه همبند M خواهد بود.

برهان. فرض کنیم g تابعی دو مقداری بر $f(X)$ باشد. نشان می دهیم که g پایا است. تابع مرکب h را، که بر X با معادله $h(x) = g(f(x))$ تعریف می شود، در نظر می گیریم. در این صورت، h بر X پیوسته است، و تنها می تواند مقدارهای ۰ و ۱ را بگیرد، پس h تابعی است دو مقداری بر X . چون X همبند است، h بر X تابع پایایی است، و از این نتیجه می شود که g بر $f(X)$ پایا می باشد. بنا بر این،

$f(X)$ همبند خواهد بود.

مثال. چون هر بازه مانند X در \mathbb{R}^1 همبند است، پس هر نقش پیوسته $f(X)$ همبند می باشد. اگر f تابعی حقیقی باشد، نقش $f(X)$ بازه دیگری خواهد بود. اگر مقادیر f در \mathbb{R}^n باشند، نقش $f(X)$ را یک خم در \mathbb{R}^n می نامیم. بنا بر این، هر خم در \mathbb{R}^n همبند است.

قضیه زیرین، که توسیع قضیه بولتزانو است، نتیجه ای است از قضیه ۳۷.۴.

قضیه ۳۸.۴ (قضیه مقدار میانی برای تابعهای پیوسته حقیقی). فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یک زیر مجموعه همبند \mathbb{R}^n مانند S پیوسته باشد. هرگاه f دو مقدار مختلف، مثلاً a و b ، در S را بگیرد، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی مانند c بین a و b ، نقطه ای مانند x در S هست بقسمی که $f(x) = c$.

برهان. نقش $f(S)$ یک زیر مجموعه همبند \mathbb{R}^1 است. از این روی، $f(S)$ بازه ای است حاوی a و b (ر. ک. تمرین ۳۸.۴). هرگاه مقداری مانند c بین a و b در $f(S)$ نباشد، آنگاه $f(S)$ ناهمبند خواهد بود.

۱۷.۴ مؤلفه های یک فضای متری

در این بخش نشان می دهیم که هر فضای متری S را می توان به طور منحصر بفرد به صورت اجتماع «قطعات» همبندی به نام مؤلفه بیان کرد. ابتدا قضیه زیر را ثابت می کنیم:

قضیه ۳۹.۴ فرض کنیم F دسته ای از زیر مجموعه های همبند فضای متری S باشد بقسمی که اشتراک $T = \bigcap_{A \in F} A$ تهی نباشد. در این صورت، اجتماع $U = \bigcup_{A \in F} A$ همبند است.

برهان. چون $T \neq \emptyset$ ، نقطه ای مانند t در T وجود دارد. فرض می کنیم f تابعی دو مقداری بر U باشد. با اثبات این که به ازای هر x در U ، $f(x) = f(t)$ ، نشان می دهیم که f بر U تابعی پایا است. هرگاه $x \in U$ ، آنگاه به ازای A ای در F ، $x \in A$ ، چون A همبند است، f بر A پایاست و، چون $t \in A$ ، پس

$$f(x) = f(t).$$

هر نقطه در فضای متری S مانند x دست کم به یکی از زیر مجموعه های همبند S مثلاً $\{x\}$ ، تعلق دارد. بنا بر قضیه ۳۹.۴، اجتماع همه زیر مجموعه های همبند حاوی x نیز همبند است. این اجتماع را یک مؤلفه S می نامیم، و به $U(x)$ نشان می دهیم.

بنا بر این، $U(x)$ بزرگترین زیرمجموعه همبند S است که حاوی x می باشد.

قضیه ۴۰.۴ هر نقطه از فضای متریک فقط به یکی از مؤلفه‌های S تعلق دارد. با بیان دیگر می توان گفت که، مؤلفه‌های S دسته‌ای را تشکیل می دهند از مجموعه‌هایی از هم جدا که اجتماعشان مساوی S است.

پرهان. دو مؤلفه متمایز نمی توانند حاوی نقطه‌ای مانند x باشند؛ زیرا در غیر این صورت (بنا بر قضیه ۳۹.۴) اجتماع آنها مجموعه‌ای همبند و حاوی x است و از آن دو مؤلفه بزرگتر می باشد.

۱۸.۴ همبندی کمانوار

در این بخش به توصیف خاصیت خاصی به نام همبندی کمانوار می پردازیم. بعضی از مجموعه‌های همبند (نه همه آنها) در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n دارای این خاصیت می باشند.

تعریف ۴۱.۴ مجموعه S در \mathbb{R}^n را همبند کمانوار نامیم در صورتی که، به ازای هر دو نقطه مانند a و b در S ، تابعی پیوسته مانند $f: [0, 1] \rightarrow S$ وجود داشته باشد قسمی که

$$f(0) = a \quad \text{و} \quad f(1) = b$$

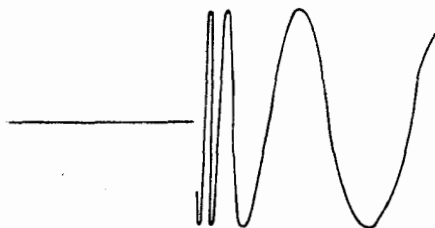
تبره. یک چنین تابع را یک گذر از a به b می نامیم. اگر $f(0) \neq f(1)$ ، گوییم نقش f با f کمانی است که a و b را به هم وصل می کند. بنا بر این، S همبند کمانوار است در صورتی که هر دو نقطه متمایز در S را بتوان با کمانی در S به هم وصل کرد. مجموعه‌های همبند کمانوار را همبند گذروراد نیز می نامند. اگر به ازای $0 \leq t \leq 1$ ، $f(t) = tb + (1-t)a$ ، خمی که a را به b وصل می کند یک پاره خط نامیده می شود.

چند مثال

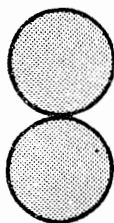
۱. هر مجموعه کوژ در \mathbb{R}^n همبند کمانوار است، زیرا هر پاره خطی که دو نقطه یک چنین مجموعه‌ای را به هم وصل کند در آن قرار دارد. مخصوصاً، هر گوی n بعدی همبند کمانوار است.

۲. مجموعه‌ای که در شکل ۴.۴ نشان داده شده است (یعنی اجتماع دو گرده بسته مماس برهم) همبند کمانوار است.

۳. مجموعه‌ای که در شکل ۵.۴ می بینید عبارت است از آن نقطه‌هایی که بر خم



شکل ۵.۴



شکل ۶.۴

توصیف شده با $y = \sin(1/x)$ ، $0 < x \leq 1$ ، قرار دارند، به انضمام نقاط پاره خط افقی $0 \leq x \leq 1$. این مجموعه همبند است ولی همبند کمانوار نیست (تمرین ۴۶.۴).

قضیه زیرین مفهوم همبندی کمانوار را با همبندی مربوط می‌سازد.

قضیه ۴۲.۴ هر مجموعه همبند کمانوار مانند S در \mathbb{R}^n مجموعه‌ای همبند است.

برهان. فرض می‌کنیم g تابعی دو مقداری بر S باشد. ثابت می‌کنیم که g بر S تابعی است پایا. نقطه‌ای مانند a در S اختیار می‌کنیم. اگر $a, x \in S$ را به x با کمائی مانند Γ در S وصل می‌نمائیم. چون Γ همبند است، g بر Γ پایا می‌باشد، پس $g(x) = g(a)$. ولی، چون x یک نقطه دلخواه S است، پس g بر S تابع پایائی است. بنابراین، S همبند می‌باشد.

قبلاً دیدیم که مجموعه‌های همبندی هستند که همبند کمانوار نمی‌باشند. اما، این دو مفهوم برای مجموعه‌های باز هم ارز یکدیگرند.

قضیه ۴۳.۴ هر مجموعه همبند باز در \mathbb{R}^n همبند کمانوار است.

برهان. فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای همبند و باز در \mathbb{R}^n باشد، و $x \in S$. نشان می‌دهیم که x را می‌توان به هر نقطه در S مانند y به وسیله کمائی در S وصل نمود. فرض می‌کنیم A زیرمجموعه نقطه‌هایی از S باشد که می‌توان آنها را به x وصل نمود، و قرار می‌دهیم $B = S - A$. در این صورت، $S = A \cup B$ ، و A و B از هم جدا هستند. نشان می‌دهیم که A و B هر دو در \mathbb{R}^n بازند.

فرض کنیم که $a \in A$ را با کمائی مانند Γ در S به x وصل می‌کنیم. چون $a \in S$ و S باز است، گویی n بعدی مانند $B(a)$ جزء S وجود دارد. هر نقطه مانند y در $B(a)$ را می‌توان با پاره خطی (در S) به a ، و سپس به x با Γ وصل نمود.

بنابراین، اگر $y \in A, y \in B(\mathbf{a})$ ، یعنی، $B(\mathbf{a}) \subseteq A$ ، و در نتیجه A باز است. برای این که ببینیم B نیز باز است، فرض می‌کنیم که $\mathbf{b} \in B$. در این صورت، چون S باز است، گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{b})$ جزء S وجود دارد. اما اگر نقطه‌ای مانند \mathbf{y} در $B(\mathbf{b})$ را بتوان با کمائی، مثلاً Γ' ، در S به \mathbf{x} وصل کرد، خود \mathbf{b} را نیز می‌توان با کمائی به \mathbf{x} وصل نمود (نخست \mathbf{b} را با پاره خطی در $B(\mathbf{b})$ به \mathbf{y} وصل می‌کنیم و سپس از کمان Γ' استفاده می‌نمائیم). اما چون $\mathbf{b} \notin A$ ، هیچ نقطه $B(\mathbf{b})$ نمی‌تواند در A باشد. یعنی، $B(\mathbf{b}) \subseteq B$ ، پس B باز است.

بنابراین، تجزیه $S = A \cup B$ وجود دارد، که در آن A و B در \mathbb{R}^n مجموعه‌هائی باز و از هم جدا هستند. بعلاوه، چون $\mathbf{x} \in A$ ، A تهی نیست. چون S همبند است، پس B باید تهی باشد، یعنی $S = A$. اکنون همبند کمانوار بودن A واضح است، زیرا هر دو نقطه آن را می‌توان براحتی با کمائی به هم وصل نمود. برای این کار کافی است هر یک را با کمائی به \mathbf{x} وصل کرد. بنا براین، S همبند کمانوار است، و برهان تمام است.

تبصره. گذر S از $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را چند ضلعی نامیم اگر نقش $[0, 1]$ با f عبارت باشد از اجتماع تعدادی متناهی پاره خط. همان استدلالی که برای اثبات قضیه ۴۳.۴ بکار رفت نیز نشان می‌دهد که هر مجموعه همبند باز در \mathbb{R}^n چند ضلعی‌وادی همبند است. یعنی، هر دو نقطه از این مجموعه را می‌توان با یک کمان چند ضلعی در داخل مجموعه به هم وصل نمود.

قضیه ۴۴.۴ هر مجموعه باز در \mathbb{R}^n مانند S را می‌توان به یک، و فقط به یک، طریق به صورت اجتماع تعدادی شمارشپذیر از مجموعه‌های همبند باز و از هم جدا بیان کرد.

برهان. از قضیه ۴۰.۴ معلوم می‌شود که، مؤلفه‌های S تشکیل دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا می‌دهند که اجتماع آن مساوی S است. هر مؤلفه S مانند T باز است، زیرا هرگاه $\mathbf{x} \in T$ ، آنگاه گویی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ محتوا در S وجود دارد. چون $B(\mathbf{x})$ همبند است، پس $B(\mathbf{x}) \subseteq T$ ، یعنی T باز خواهد بود. با توجه به قضیه لیندلف (قضیه ۲۸.۳)، نتیجه می‌شود که مؤلفه‌های S تشکیل دسته‌ای شمارشپذیر می‌دهند، و بنا بر قضیه ۴۰.۴، تجزیه S به مؤلفه‌هایش منحصر بفرد می‌باشد.

تعریف ۴۵.۴ یک مجموعه در \mathbb{R}^n را یک ناحیه نامیم در صورتی که مساوی اجتماع مجموعه‌ای همبند و باز با بعضی، یا هیچ، یا همه نقطه‌های کرانه‌ای آن باشد.

یک ناحیه را باز نامیم در صورتی که شامل هیچ نقطه کرانه‌ای نباشد. اگر ناحیه‌ای همه نقطه‌های کرانه‌ای خود را دربر داشته باشد، آن را بسته می‌خوانیم. تبصره. بعضی از نویسندگان، مخصوصاً در صفحهٔ مختلط، به جای اصطلاح ناحیه باز اصطلاح قلمرو را بکار می‌برند.

۱۹.۴ پیوستگی یکشکل

فرض می‌کنیم f تابعی باشد بر فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) ، و نیز فرض می‌کنیم که f بر یک زیرمجموعهٔ S مانند A پیوسته باشد. در این صورت، به ازای نقطهٔ p داده شده در A و هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ (وابسته به ε و p) هست بقسمی که هرگاه $x \in A$ و

$$d_S(x, p) < \delta, \quad \text{آنگاه} \quad d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

عموماً نمی‌توان انتظار داشت که به ازای ε ثابتی، مقدارهای δ برای همهٔ نقاط p در A یکی باشند. ممکن است در حالتی این خاصیت برقرار باشد. اگر چنین باشد، می‌گوئیم که f بر A پیوستهٔ یکشکل است.

تعریف ۴۶.۴ فرض کنیم که $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متری (S, d_S) به فضای متری دیگر (T, d_T) . در این صورت، می‌گوئیم که f بر یک زیرمجموعهٔ S مانند A پیوستهٔ یکشکل است در صورتی که شرط زیرین برقرار باشد:

به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک مقدار مثبت δ (فقط تابع ε) وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه $x \in A, p \in A$ و

$$(۶) \quad d_S(x, p) < \delta, \quad \text{آنگاه} \quad d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

برای تأکید در تفاوت بین پیوستگی بر A و پیوستگی یکشکل بر A ، مثالهای زیرین از تابعهای حقیقی را در نظر می‌گیریم.

چند مثال

۱. به ازای $x > 0$ ، قرار می‌دهیم $f(x) = 1/x$ ، و فرض می‌کنیم که $A =]0, 1]$. این تابع بر A پیوسته است ولی بر این مجموعه پیوستهٔ یکشکل نیست. برای اثبات این مطلب، ε را مساوی $1/2$ اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم متناظر آن بتوان δ ای بین 0 و 1 اختیار کرد که در شرط تعریف پیوستگی یکشکل صدق کند. با انتخاب $x = \delta$ و $p = \delta/11$ داریم $|x - p| < \delta$ و

$$|f(x) - f(p)| = \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{10}{\delta} > 10.$$

از این روی، به ازای این دو نقطه، همواره $|f(x) - f(p)| > 10$ ، و این با تعریف پیوستگی یکشکل تناقض دارد.

۲. اگر $x \in \mathbb{R}^1$ ، قرار می‌دهیم $f(x) = x^2$ ، و مانند بالا فرض می‌کنیم که $]0, 1[= A$. این تابع بر A پیوسته یکشکل است. برای اثبات آن، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |f(x) - f(p)| &= |x^2 - p^2| \\ &= |(x - p)(x + p)| < 2|x - p|. \end{aligned}$$

هرگاه $|x - p| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - f(p)| < 2\delta$. از این روی، چنانچه ε داده شده باشد، کافی است δ را مساوی $\varepsilon/2$ اختیار کنیم. با این انتخاب، به ازای هر x و p که $|x - p| < \delta$ ، خواهیم داشت

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

این مطلب نشان می‌دهد که f بر A پیوسته یکشکل است.

تابع مثال ۲ بر \mathbb{R}^1 پیوسته یکشکل نیست. اثبات این مطلب تمرین آموزنده‌ای خواهد بود.

۲۰.۴ پیوستگی یکشکل و مجموعه‌های فشرده

از پیوستگی یکشکل بر A پیوستگی بر A نتیجه می‌شود. (تحقیق این مطلب به خواننده واگذار می‌شود.) اگر A فشرده باشد، عکس این مطلب نیز درست است.

قضیه ۴۷.۴ (هاینه). فرض کنیم $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) . همچنین A یک زیرمجموعه فشرده S و f بر A پیوسته باشد. در این صورت، f بر A پیوسته یکشکل است.

برهان. فرض کنیم که $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت، به ازای هر نقطه مانند a در A ، گویی مانند $B_S(a; r)$ هست که شعاع آن r به a بستگی داشته، و همچنین،

$$d_T(f(x), f(a)) < \varepsilon/2, \quad x \in B_S(a; r) \cap A$$

دسته همه گویهائی مانند $B_S(a; r/2)$ با شعاع $r/2$ را در نظر می‌گیریم. این گویه‌ها

A را می پوشانند و چون A فشرده است، تعدادی متناهی از آنها نیز A را می پوشانند، مثلاً

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_S(a_k; \frac{r_k}{2}).$$

در هر یک از گویهای $B(a_k; r_k)$ ، که شعاعشان دو برابر شعاع گویهای قبلی است، داریم

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \varepsilon/2 \quad x \in B_S(a_k; r_k) \cap A$$

فرض می کنیم که δ مینیمم عددهای $r_m/2, \dots, r_1/2$ باشد. نشان می دهیم که این δ متناظر است با ε در تعریف پیوستگی یکشکل.

برای این منظور، دو نقطه مانند x و p را در A بقسمی اختیار می کنیم که $d_S(x, p) < \delta$. بنا بر بحث بالا، گویی مانند $B_S(a_k; r_k/2)$ وجود دارد که حاوی نقطه x باشد، پس

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} d_S(p, a_k) &\leq d_S(p, x) + d_S(x, a_k) < \delta \\ &+ \frac{r_k}{2} \leq \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k. \end{aligned}$$

بنابراین، $p \in B_S(a_k; r_k) \cap S$ پس نامساوی $d_T(f(p), f(a_k)) < \varepsilon/2$ نیز برقرار است. چون بار دیگر از نامساوی مثلثی استفاده کنیم، حاصل می شود

$$\begin{aligned} d_T(f(x), f(p)) &\leq d_T(f(x), f(a_k)) \\ &+ d_T(f(a_k), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات تمام می شود.

۲۱.۴ قضیه نقطه ثابت برای انقباضها

فرض کنیم $f: S \rightarrow S$ تابعی باشد از فضای متریک (S, d) در خودش. نقطه p در S را یک نقطه ثابت f می نامیم در صورتی که $f(p) = p$. تابع f را یک انقباض S نامیم در صورتی که عددی مثبت مانند $\alpha < 1$ (به نام پایای انقباض) وجود داشته باشد بقسمی که

(۷) $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ ، S در x و y در S ،
 واضح است که یک انقباض هر فضای متریک S بر این فضا پیوسته یکشکل می باشد.
 قضیه ۴۸.۴ (قضیه نقطه ثابت). هر انقباض فضای متریک تام S مانند f دارای نقطه
 ثابت منحصر بفردی مانند p است.

برهان. اگر p و p' دو نقطه ثابت f باشند، از (۷) نتیجه می گیریم که
 $d(p, p') \leq \alpha d(p, p')$ پس $d(p, p') = 0$ و $p = p'$
 بنا براین، f حداکثر یک نقطه ثابت دارد.

برای اثبات این که f چنین نقطه ای دارد، یک نقطه دلخواه مانند x را در S
 اختیار نموده، دنباله زیر را در نظر می گیریم:

$$x, f(x), f(f(x)), \dots$$

یعنی، به استقرا دنباله $\{p_n\}$ را به صورت زیرین تعریف می کنیم:

$$p_0 = x, p_{n+1} = f(p_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

ثابت می کنیم که $\{p_n\}$ به یک نقطه ثابت f همگرا است. ابتدا نشان می دهیم که
 $\{p_n\}$ یک دنباله کشی است. از (۷) بر می آید که

$$d(p_{n+1}, p_n) = d(f(p_n), f(p_{n-1})) \leq \alpha d(p_n, p_{n-1}),$$

پس، به استقرا، خواهیم داشت

$$d(p_{n+1}, p_n) \leq \alpha^n d(p_1, p_0) = c \alpha^n,$$

که در آن $c = d(p_1, p_0)$. با استفاده از نامساوی مثلثی، به ازای $m > n$ داریم

$$d(p_m, p_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(p_{k+1}, p_k) \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^k = c \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1 - \alpha} < \frac{c}{1 - \alpha} \alpha^n.$$

چون وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\alpha^n \rightarrow 0$ ، نامساوی بالا نشان می دهد که $\{p_n\}$ یک
 دنباله کشی است. اما S تام است، پس نقطه ای مانند p در S هست بقسمی که
 $p_n \rightarrow p$ ، حال، با توجه به پیوستگی f ، نتیجه می گیریم که

$$f(p) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1} = p,$$

پس p یک نقطه ثابت f است، و برهان قضیه تمام خواهد بود.

بسیاری از قضیه های وجودی مهم در آنالیز نتیجه های ساده ای از قضیه نقطه ثابت

می باشند. در این مورد مثالهایی در تمرینهای ۳۶.۷ و ۳۷.۷ داده شده اند. کتاب مرجع ۴.۴ کاربردهائی از قضیه نقطه ثابت را در آنالیز عددی نشان می دهد.

۲۲.۴ ناپیوستگیهای توابع حقیقی

تا پایان این فصل به خاصیتهای مخصوص تابعهای حقیقی که بر زیر بازه های R تعریف شده اند اختصاص دارد.

فرض می کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، و $c \in [a, b]$. اگر وقتی که با مقدارهای بزرگتر از c ، $x \rightarrow c$ داشته باشیم $f(x) \rightarrow A$ می گوئیم A حد دست راستی f در c است، و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A.$$

حد دست راستی A را با نماد $f(c+)$ نیز نشان می دهیم. این مطلب با اصطلاحهای ε و δ بدین معنی است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبتی مانند δ هست بقسمی که هرگاه $c < x < c + \delta < b$ ، آنگاه $|f(x) - f(c+)| < \varepsilon$. توجه داشته باشید که لازم نیست f در خود c تعریف شده باشد. اگر f در c تعریف شده باشد و $f(c+) = f(c)$ می گوئیم که f از دست د c پیوسته است.

اگر $c \in]a, b]$ ، حدهای دست چپی و پیوستگی از چپ در c را می توان به همین نحو تعریف کرد.

هرگاه $a < c < b$ ، آنگاه f در c وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

اگر f در c پیوسته نباشد، گوئیم c یک ناپیوستگی f است. در این حالت یکی از شرطهای زیرین برقرار است:

(آ) $f(c+)$ یا $f(c-)$ وجود ندارد؛

(ب) $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند ولی با یکدیگر متساوی نیستند؛

(ج) $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند و

$$f(c+) = f(c-) \neq f(c).$$

در حالت (ج)، نقطه c یک ناپیوستگی (فج شدنی نامیده می شود، زیرا با تعریف مجدد f در c و انتخاب مقدار $f(c+) = f(c-)$ در c برای f می توان این ناپیوستگی را از بین برد. در حالتهای (آ) و (ب)، c را یک ناپیوستگی (فج-)

ناشدنی می‌نامند زیرا این ناپیوستگی با تعریف مجدد f در c رفع شدنی نیست.

تعریف ۴۹.۴ فرض کنیم f بر بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد. هرگاه c یک نقطه ددونی $[a, b]$ باشد و $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود داشته باشند، آنگاه

- (آ) $f(c) - f(c-)$ را جهش دست چپ f در c
 (ب) $f(c+) - f(c)$ را جهش دست راستی f در c
 (ج) $f(c+) - f(c-)$ را جهش f در c می‌نامیم.

هرگاه یکی از سه عدد بالا صفر نباشد، آنگاه می‌گوئیم که c یک ناپیوستگی جهشی f است.

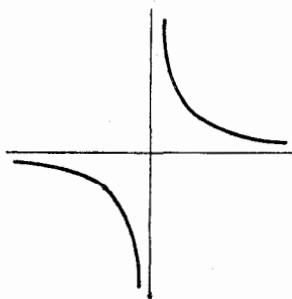
در مورد نقطه‌های انتهایی a و b ، تنها جهشهای یکطرفی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی جهش دست راستی در a ، $f(a+) - f(a)$ و جهش دست چپ در b ، $f(b) - f(b-)$.

چند مثال

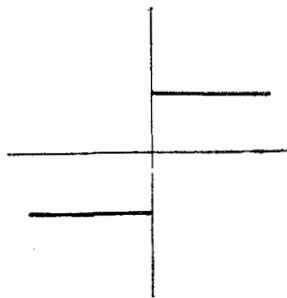
۱. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = A$ ، و اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = x/|x|$. بدون توجه به مقدار A ، f در 0 یک ناپیوستگی جهشی دارد. در این جا $f(0+) = 1$ و $f(0-) = -1$. (ر. ک. شکل ۶.۴).

۲. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = 0$ ، و اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = 1$. در 0 یک ناپیوستگی جهشی رفع شدنی دارد. در این حالت $f(0+) = f(0-) = 1$.

۳. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = A$ ، و اگر $x \neq 0$ ،



شکل ۷.۴

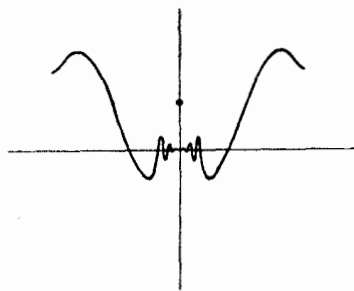


شکل ۶.۴

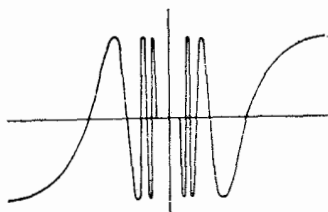
$f \cdot f(x) = 1/x$ یک ناپیوستگی رفع ناشدنی در ۰ دارد. در این حالت نه $f(0+)$ وجود دارد نه $f(0-)$. (ر. ک. شکل ۰.۷.۴)

۴. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = A$ ، و اگر $x \neq 0$ ، $f \cdot f(x) = \sin(1/x)$ یک ناپیوستگی رفع ناشدنی در ۰ دارد، زیرا نه $f(0+)$ وجود دارد و نه $f(0-)$. (ر. ک. شکل ۰.۸.۴)

۵. تابع f چنین تعریف شده است که $f(0) = 1$ ، و اگر $x \neq 0$ ، $f \cdot f(x) = x \sin(1/x)$ یک ناپیوستگی جهشی رفع شدنی در ۰ دارد، زیرا $f(0+) = f(0-) = 0$. (ر. ک. شکل ۰.۹.۴)



شکل ۹.۴



شکل ۸.۴

۲۳.۴ تابعهای یکنوا

تعریف ۵۰.۴ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یک زیر مجموعه R مانند S تعریف شده باشد. f را بر S صعودی (یا نازل) نامیم در صورتی که به ازای هر دو نقطه مانند x و y در S ،

$$x < y \text{ دابطة } f(x) \leq f(y) \text{ را ایجاب کند.}$$

هرگاه از $x < y$ دابطة $f(x) < f(y)$ نتیجه شود، آنگاه می‌گوئیم که f بر S صعودی اکید است. (تابعهای نزولی به همین نحو تعریف می‌شوند.) اگر تابعی بر مجموعه S صعودی یا نزولی باشد، گوئیم این تابع بر S یکنوا است.

هرگاه f تابعی صعودی باشد، آنگاه f - نزولی است. به دلیل این واقعیت ساده، در بسیاری از مواقع که با تابعهای یکنوا سروکار داریم، کافی است فقط فرض کنیم که تابعها صعودینند.

ثابت می‌کنیم که هر تابع یکنوا بر یک بازه فشرده، همواره بر این بازه حد دست راستی و حد دست چپی متناهی دارد. از این روی، باید ناپوستگیهای آن (در صورت وجود) از نوع ناپوستگی جهشی باشند.

قضیه ۵۱.۴ هرگاه f بر $[a, b]$ صعودی باشد، آنگاه به ازای هر c در $]a, b[$ ، $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو وجود دارند و

$$f(c-) \leq f(c) \leq f(c+).$$

در نقطه‌های انتهایی

$$f(b-) \leq f(b) \text{ و } f(a) \leq f(a+)$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = \{f(x) \mid a < x < c\}$. چون f صعودی است، این مجموعه از بالا به $f(c)$ کراندار می‌باشد. فرض می‌کنیم که $\alpha = \sup A$. در این صورت، $\alpha \leq f(c)$ و ثابت می‌کنیم که $f(c-)$ وجود دارد و مساوی α است.

برای این کار باید نشان داد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مثبت مانند δ هست بقسمی که

$$\text{هرگاه } c - \delta < x < c \text{، آنگاه } \varepsilon > |f(x) - \alpha|.$$

اما چون $\alpha = \sup A$ ، عنصری مانند $f(x_1)$ در A هست بقسمی که

$$\alpha - \varepsilon < f(x_1) \leq \alpha.$$

چون f صعودی است، به ازای هر x در $]x_1, c[$ ، نیز داریم $\alpha - \varepsilon < f(x) \leq \alpha$ و در نتیجه $\varepsilon > |f(x) - \alpha|$. بنابراین، عدد $\delta = c - x_1$ را می‌توان به عنوان δ ی متناظر ε اختیار کرد. (بهمین نحو، می‌توان نشان داد که $f(c+)$ وجود دارد و از $f(c)$ کمتر نیست، و برای نقطه‌های انتهایی لازم است در اثبات بالا تغییرات مختصری داده شود.)

البته، قضیه‌ای نظیر قضیه بالا برای تابعهای نزولی وجود دارد، که خواننده می‌تواند آن را برای خویش تنظیم نماید.

قضیه ۵۲.۴ فرض کنیم که f بر مجموعه S در \mathbb{R} صعودی اکید باشد. در این صورت، f^{-1} وجود دارد و آن نیز بر $f(S)$ صعودی اکید است.

برهان. چون f صعودی اکید است، پس f بر S یک به یک است، بنابراین f^{-1} وجود دارد. برای مشاهده این که f^{-1} صعودی اکید است، فرض می‌کنیم که y_1 و y_2 دو نقطه در $f(S)$ باشند و $y_1 < y_2$. قرار می‌دهیم $x_1 = f^{-1}(y_1)$ و

$x_2 = f^{-1}(y_2)$. نامساوی $x_1 \geq x_2$ نمی تواند برقرار باشد، زیرا اگر چنین باشد، نامساوی $y_1 \geq y_2$ نیز برقرار خواهد بود. پس تنها حالت ممکن

$$x_1 < x_2,$$

و این یعنی که f^{-1} صعودی اکید است.

حال، بنا بر قضیه های ۵۲.۴ و ۲۹.۴، داریم:

قضیه ۵۳.۴ فرض کنیم f بر بازه فشرده $[a, b]$ صعودی اکید و پیوسته باشد. در این صورت، f^{-1} نیز بر بازه $[f(a), f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید خواهد بود.
 تفسیر. از قضیه ۵۳.۴ معلوم می شود که هر تابع پیوسته و صعودی اکید یک نگاشت توپولوژیک است. برعکس، هر نگاشت توپولوژیک بازه $[a, b]$ روی بازه $[c, d]$ باید یک تابع یکنوای اکید باشد. تحقیق این مطلب تمرینی آموزنده برای خواننده خواهد بود (تمرین ۶۲.۴).

دانلود از سایت ریاضی سرا

تمرین

www.riazisara.ir

حدود دنباله ها

۱.۴ هر یک از گزاره های زیرین را درباره دنباله ها در C ثابت کنید.

(آ) اگر $|z| < 1$ ، $z^n \rightarrow 0$ ؛ و اگر $|z| > 1$ ، $\{z^n\}$ واگرا خواهد بود.

(ب) هرگاه $z_n \rightarrow 0$ و $\{c_n\}$ کراندار باشد، آنگاه $c_n z_n \rightarrow 0$.

(ج) به ازای هر عدد مختلط مانند z ، $z^n/n! \rightarrow 0$.

(د) هرگاه $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$ ، آنگاه $a_n \rightarrow 0$.

۲.۴ اگر به ازای هر $n \geq 1$ ، $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ ، نشان دهید که

$$a_n \rightarrow (a_1 + 2a_2)/3.$$

$$\text{دانهائی. } a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{4} (a_n - a_{n+1}).$$

۳.۴ اگر $0 < x_1 < 1$ ، و به ازای هر $n \geq 1$ ، $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ ،

ثابت کنید که $\{x_n\}$ دنباله ای نزولی است و دارای حد صفر است. همچنین ثابت

$$\text{کنید که } x_{n+1}/x_n \rightarrow 1/2.$$

۴.۴ دو دنباله از عددهای صحیح مثبت مانند $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به طور بازگشتی به

صورت زیر تعریف کنید: قرار دهید $a_1 = b_1 = 1$ ، و به ازای $n \geq 2$ ، a_n و b_n

را از متحد قرار دادن قسمتهای گویا و گنگ معادله زیرین بدست آورید:

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2.$$

ثابت کنید که به ازای $n \geq 2$ ، $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$. از این نتیجه بگیرید که با مقادیر بزرگتر از $\sqrt{2}$ ، $a_n/b_n \rightarrow \sqrt{2}$ و با مقادیر کوچکتر از $\sqrt{2}$ ، $2b_n/a_n \rightarrow \sqrt{2}$.

۵.۴ به ازای $n \geq 1$ ، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ در معادله $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 6$ صدق می‌کند. اگر $x_1 = 1/2$ ، ثابت کنید که این دنباله صعودی است و حد آن را بیابید. اگر $x_1 = 3/2$ یا $x_1 = 5/2$ ، چه خواهد شد؟

۶.۴ اگر به ازای هر $n \geq 1$ ، $|a_n| < 2$ و

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{8} |a_{n+1}^2 - a_n^2|,$$

ثابت کنید که دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

۷.۴ در فضای متری (S, d) ، فرض کنید که $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$. ثابت کنید که $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

۸.۴ ثابت کنید که در فضای متری فشرده (S, d) ، هر دنباله در S دارای زیر-دنباله‌ای است که در S همگرا است. از این خاصیت فشرده‌گی S نیز نتیجه می‌شود ولی لازم نیست آن را ثابت کنید. (برای اثباتی از این مطلب، ر. ک. به کتاب مرجع ۲.۴ یا ۳.۴).

۹.۴ فرض کنید A زیرمجموعه فضای متری S باشد. اگر A تام باشد، ثابت کنید A بسته است. در حالتی که S تام باشد، ثابت کنید که عکس مطلب بالا نیز برقرار خواهد بود.

حدود تابعها

بصره. از تمرین ۱۰.۴ تا ۲۸.۴ همه تابعها حقیقی هستند.

۱۰.۴ فرض کنید f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، و $[a, b] \subset \mathbb{R}$. دو گزاره زیرین را در نظر بگیرید:

$$(\text{آ}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x)| = 0$$

$$(\text{ب}) \quad \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0$$

ثابت کنید که همواره می‌توان (ب) را از (آ) نتیجه گرفت، و مثالی بیابید که به ازای آن (ب) برقرار باشد ولی (آ) نباشد.

۱۱.۴ فرض کنید f بر \mathbf{R}^2 تعریف شده باشد. اگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

و حدهای یک بعدی $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ و $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ هر دو وجود داشته باشند، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)] = L.$$

حال تابعهای f تعریف شده بر \mathbf{R}^2 را به صورتهای زیر در نظر می‌گیریم:

(آ) اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ و $f(0, 0) = 0$

(ب) اگر $(x, y) \neq (0, 0)$

(ج) اگر $x \neq 0$ ، $f(x, y) = \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}$ و $f(0, 0) = 0$

(د) اگر $x \neq 0$ ، $f(x, y) = \frac{1}{x} \sin(xy)$ و $f(0, y) = y$

اگر $x \neq 0$ و $y \neq 0$ ، $f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin(1/x) \sin(1/y) \\ 0 \end{cases}$ اگر $x = 0$ یا $y = 0$

(ه) اگر $\tan x \neq \tan y$ ، $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{\tan x - \tan y}$ اگر $\tan x = \tan y$

در هر یک از مثالهای بالا، معین کنید کدام یک از حدهای زیرین وجود دارد، و مقدار هر یک از این حدها را که وجود دارد ارزیابی کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)]; \quad \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)]; \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

۱۲.۴ اگر $x \in [0, 1]$ ، ثابت کنید که حد زیرین،

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2^n}(m! \pi x)],$$

وجود دارد، و مقدار آن، بر حسب آن که x گنگ یا گویا باشد، مساوی ۰ یا ۱ خواهد بود.

پیوستگی تابعهای حقیقی

۱۳.۴ فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و به ازای هر x گویا، $f(x) = 0$. ثابت کنید به ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) = 0$.

۱۴.۴ فرض کنید تابع f در نقطه $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ در \mathbb{R}^n پیوسته باشد. a_1, a_2, \dots, a_n را ثابت نگهداشته، تابع جدید یک متغیر حقیقی g را با معادله زیرین تعریف کنید:

$$g(x) = f(x, a_2, \dots, a_n).$$

ثابت کنید g در نقطه $x = a_1$ پیوسته است. (این مطلب گاهی به این صورت بیان می شود که می گویند: یک تابع پیوسته n متغیره، بر حسب هر یک از متغیرها، جداگانه، پیوسته است.)

۱۵.۴ با ذکر مثالی، نشان دهید که عکس گزاره مذکور در تمرین ۱۴.۴ در حالت کلی درست نیست.

۱۶.۴ فرض کنید f, g ، و h بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\begin{aligned} \text{اگر } x \text{ گنگ باشد,} & \quad f(x) = g(x) = h(x) = 0 \\ \text{اگر } x \text{ گویا باشد,} & \quad f(x) = 1 \text{ و } g(x) = x \end{aligned}$$

اگر x گویا، و به صورت m/n (m و n نسبت به هم اولند) باشد، $h(x) = 1/n$ و $h(0) = 1$.

ثابت کنید که f در هیچ نقطه $[0, 1]$ پیوسته نیست، g فقط در $x = 0$ ، و h فقط در نقطه های گنگ در $[0, 1]$ پیوسته است.

۱۷.۴ به ازای هر x در $[0, 1]$ ، اگر x گویا باشد، قرار دهید $f(x) = x$ ، و اگر x گنگ باشد، قرار دهید $f(x) = 1 - x$. ثابت کنید که:

(آ) به ازای هر x در $[0, 1]$ ، $f(f(x)) = x$.

(ب) به ازای هر x در $[0, 1]$ ، $f(x) + f(1 - x) = 1$.

(ج) فقط در نقطه $x = 1/2$ پیوسته است.

(د) f هر مقدار بین ۰ و ۱ را می گیرد.

(ه) به ازای هر x و y در $[0, 1]$ ، $f(x + y) - f(x) - f(y)$ گویا است.

۱۸.۴ فرض کنید f تابعی باشد که بر \mathbf{R} تعریف شده باشد، و دست کم در یک نقطه \mathbf{R} مانند x پیوسته باشد. همچنین به ازای هر x و y در \mathbf{R} ، f در معادله زیرین صدق کند:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

ثابت کنید عدد پائینی مانند a هست بقسمی که به ازای هر x ، $f(x) = ax$.

۱۹.۴ فرض کنید که f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و تابع g را به صورت زیرین تعریف کنید: $g(a) = f(a)$ ، و به ازای هر x که $a < x \leq b$ ، $g(x)$ مساوی مقدار ماکزیم f در زیر بازه $[a, x]$ باشد. نشان دهید که g بر $[a, b]$ پیوسته است.

۲۰.۴ فرض کنید که f_1, \dots, f_m تابع حقیقی باشند که بر مجموعه S در \mathbf{R}^n تعریف شده اند. همچنین هر f_k در نقطه a در S پیوسته باشد. تابع جدید f را به صورت زیر تعریف کنید: به ازای هر x در S ، $f(x)$ مساوی ماکزیم m عدد $f_1(x), \dots, f_m(x)$ باشد. در پیوستگی f در نقطه a بحث کنید.

۲۱.۴ فرض کنید تابع $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ بر مجموعه S باز در \mathbf{R}^n پیوسته باشد. همچنین $p \in S$ ، و $f(p) > 0$. ثابت کنید که گویی n بعدی مانند $B(p; r)$ هست بقسمی که به ازای هر x در این گوی، $f(x) > 0$.

۲۲.۴ فرض کنید تابع f بر مجموعه بسته S در \mathbf{R} تعریف شده و پیوسته باشد. قرار دهید

$$A = \{x \mid f(x) = 0 \text{ و } x \in S\}.$$

ثابت کنید که A یک زیرمجموعه بسته \mathbf{R} می باشد.

۲۳.۴ به ازای تابع مفروض $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، دو مجموعه A و B را در \mathbf{R}^2 به صورت زیر تعریف کنید:

$$A = \{(x, y) \mid y < f(x)\}, \quad B = \{(x, y) \mid y > f(x)\}.$$

ثابت کنید f بر \mathbf{R} وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که A و B هر دو زیر-مجموعه های باز \mathbf{R}^2 باشند.

۲۴.۴ فرض کنید f بر بازه فشرده S در \mathbf{R} تعریف شده و بر آن کراندار باشد. اگر $T \subseteq S$ ، عدد

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x \in T, y \in T\}$$

۱) نوسان (یا پیما)ی f بر T می نامند. اگر $x \in S$ ، بنا بر تعریف، نوسان f در x مساوی عدد زیرین است:

$$\omega_f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \Omega_f(B(x; h) \cap S).$$

ثابت کنید این حد همواره وجود دارد، و $\omega_f(x) = 0$ وقتی، و فقط وقتی، که f در x پیوسته باشد.

۲۵.۴ فرض کنید f بر بازه فشرده $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین f در x_1 و x_2 ماکزیم موضعی داشته باشد. نشان دهید که باید نقطهٔ سومی بین x_1 و x_2 باشد که f در این نقطه دارای مینیم موضعی باشد.

تبره. منظور از این که f در x_1 ماکزیم موضعی دارد این است که گویی یک بعدی مانند $B(x_1)$ هست قسمی که به ازای هر x در $[a, b] \cap B(x_1)$ ، $f(x) \leq f(x_1)$ مینیم موضعی به نحو مشابه تعریف می شود.

۲۶.۴ فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه $[0, 1]$ پیوسته، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هر عدد حقیقی مانند y ، یا این که نقطه‌ای مانند x در $[0, 1]$ نباشد که به ازای آن $f(x) = y$ ، یا فقط یک x در $[0, 1]$ با این خاصیت وجود داشته باشد. ثابت کنید که f بر $[0, 1]$ یکنوای اکید است.

۲۷.۴ فرض کنید تابع f بر $[0, 1]$ تعریف شده، و دارای خاصیت زیرین باشد: به ازای هر عدد حقیقی مانند y ، یا نقطه‌ای مانند x در $[0, 1]$ نباشد که به ازای آن $f(x) = y$ ، یا فقط دو مقدار برای x در $[0, 1]$ باشد که به ازای آنها $f(x) = y$.

(آ) ثابت کنید که f نمی تواند بر $[0, 1]$ پیوسته باشد.

(ب) تابع f را قسمی بسازید که دارای خاصیت یاد شده باشد.

(ج) ثابت کنید هر تابع دارای خاصیت یاد شده تعدادی نامتناهی ناپیوستگی بر $[0, 1]$ دارد.

۲۸.۴ در هر یک از حالت‌های زیرین، تابعی مانند f ارائه دهید که بر S پیوسته باشد و $f(S) = T$ ، یا توضیح دهید چرا یک چنین تابعی نمی تواند وجود داشته باشد:

$$(آ) \quad T =]0, 1[\quad , \quad S =]0, 1[$$

$$(ب) \quad T =]0, 1[\cup]1, 2[\quad , \quad S =]0, 1[$$

$T = \mathbb{R}^1$	مجموعه عددهای گویا	$S = \mathbb{R}^1$	(ج)
$T = \{0, 1\}$		$S = [0, 1] \cup [2, 3]$	(د)
$T = \mathbb{R}^2$		$S = [0, 1] \times [0, 1]$	(ه)
$T =]0, 1[\times]0, 1[$		$S = [0, 1] \times [0, 1]$	(و)
$T = \mathbb{R}^2$		$S =]0, 1[\times]0, 1[$	(ز)

پیوستگی در فضاهای متر

از تمرین ۲۹.۴ تا ۳۳.۴، فرض بر این است که $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متر (S, d_S) به فضای متر دیگر (T, d_T) .

۲۹.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر زیر-مجموعه T مانند B ،
 $f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int } f^{-1}(B)$

۳۰.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که به ازای هر زیر-مجموعه S مانند A ،
 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

۳۱.۴ ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته است که بر هر زیرمجموعه فشرده S پیوسته باشد. (اهنمائی. اگر $x_n \rightarrow p$ در S ، مجموعه $\{p, x_1, x_2, \dots\}$ فشرده خواهد بود.)

۳۲.۴ تابع $f: S \rightarrow T$ را یک نگاشت بسته بر S نامند در صورتی که به ازای هر زیرمجموعه بسته S مانند A ، نقش $f(A)$ در T بسته باشد. ثابت کنید f بر S وقتی، و فقط وقتی، پیوسته و بسته است که به ازای هر زیرمجموعه S مانند A ،
 $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

۳۳.۴ تابعی پیوسته مانند f و دنباله‌ای کشی مانند $\{x_n\}$ در فضائی متر S چون S بقسمی بیاید که $\{f(x_n)\}$ یک دنباله کشی در T نباشد.

۳۴.۴ ثابت کنید بازه $]0, 1[$ در \mathbb{R}^1 با \mathbb{R}^1 همانسان است. این مطلب نشان می‌دهد که نه کراندار بودن و نه تام بودن، هیچ یک، خاصیت توپولوژیک نیست.

۳۵.۴ در بخش ۷.۹، تابعی مانند f ذکر شده است که بر $]0, 1[$ پیوسته است و $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$. ثابت کنید که یک چنین تابعی نمی‌تواند بر $]0, 1[$ یک به یک باشند.

همنندی

۳۶.۴ ثابت کنید فضای متر S وقتی، و فقط وقتی، ناهمبند است که S زیر-

مجموعه‌ای ناتهی مانند A داشته باشد با این خاصیت که $A \neq S$ ، و A در S هم باز و هم بسته باشد.

۳۷.۴ ثابت کنید فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، همبند است که تنها زیر-مجموعه‌های S که در S هم باز و هم بسته‌اند مجموعه تهی و خود S باشند.

۳۸.۴ ثابت کنید تنها زیرمجموعه‌های همبند R عبارتند از (\bar{A}) مجموعه تهی، (B) مجموعه‌های مرکب از یک نقطه، و (C) بازها (باز، بسته، نیمباز، یا نامتناهی).

۳۹.۴ فرض کنید X یک زیر مجموعه همبند فضای متری S باشد. همچنین Y یک زیرمجموعه S باشد بقسمی که $X \subseteq Y \subseteq \bar{X}$ ، که در آن \bar{X} بست X می‌باشد. ثابت کنید که Y نیز همبند است. با توجه به حالت خاصی از این مطلب، معلوم می‌شود که اگر X همبند باشد، \bar{X} نیز همبند خواهد بود.

۴۰.۴ اگر x نقطه‌ای در فضای متری S ، و $U(x)$ مؤلفه‌ای از S حاوی x باشد، ثابت کنید که $U(x)$ در S بسته است.

۴۱.۴ فرض کنید S یک زیرمجموعه باز R باشد. بنا بر قضیه ۱۱.۳، S مساوی اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های باز از هم جدا در R خواهد بود. ثابت کنید که هر یک از این بازه‌های باز یک مؤلفه زیرفضای متری S است. توضیح دهید که چرا این مطلب با تمرین ۴۰.۴ متناقض نیست.

۴۲.۴ مجموعه فشردۀ S در R^n با خاصیت زیرین داده شده است: به ازای هر دو نقطه مانند a و b در S و هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه‌ای متناهی از نقطه‌ها در S مانند $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ وجود دارد بقسمی که $x_0 = a$ و $x_n = b$ ، و به ازای

$$\|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

همبندی S را اثبات یا رد کنید.

۴۳.۴ ثابت کنید که فضای متری S وقتی، و فقط وقتی، همبند است که هر زیر-مجموعه ناتهی و حقیقی S کرانه ناتهی داشته باشد.

۴۴.۴ ثابت کنید که هر زیرمجموعه کوز R^n همبند است.

۴۵.۴ فرض کنید تابع $f: R^n \rightarrow R^m$ یک به یک، و بر R^n پیوسته باشد. اگر A در R^n باز و ناهمبند باشد، ثابت کنید که $f(A)$ در $f(R^n)$ باز و ناهمبند نخواهد بود.

۴۶.۴ فرض کنید که

$$A = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, y = \sin 1/x\},$$

$$S = A \cup B \text{ و } B = \{(x, y) \mid y = 0, -1 \leq x \leq 0\}$$

ثابت کنید که S همبند است ولی همبند کمانوار نیست. (ر. ک. شکل ۵.۴، بخش ۰۱۸.۴)

۴۷.۴ فرض کنید $F = \{F_1, F_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های فشرده و همبند در \mathbb{R}^n باشد بقسمی که به ازای هر $k \geq 1$ $F_{k+1} \subseteq F_k$ ثابت کنید که اشتراک $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ همبند و بسته است.

۴۸.۴ فرض کنید S مجموعه‌ای همبند و باز در \mathbb{R}^n باشد. همچنین T یک مؤلفه $S - \mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید که $\mathbb{R}^n - T$ همبند است.

۴۹.۴ فرض کنید (S, d) یک فضای متری همبند باشد ولی کراندار نباشد. ثابت کنید به ازای هر a در S و هر $r > 0$ ، مجموعه $\{x \mid d(x, a) = r\}$ ناتهی است.

پیوستگی یکشکل

۵۰.۴ ثابت کنید تابعی که بر S پیوسته یکشکل باشد، بر این مجموعه پیوسته نیز هست.

۵۱.۴ اگر به ازای هر x در \mathbb{R} ، $f(x) = x^2$ ، ثابت کنید f بر \mathbb{R} پیوسته یکشکل نیست.

۵۲.۴ فرض کنید f بر مجموعه کراندار S در \mathbb{R}^n پیوسته یکشکل باشد. ثابت کنید که f بر S باید کراندار باشد.

۵۳.۴ فرض کنید f تابعی باشد که بر مجموعه S در \mathbb{R}^n تعریف شده باشد، و $f(S) \subseteq \mathbb{R}^m$. همچنین g بر $f(S)$ تعریف شده، مقدارهای آن در \mathbb{R}^k باشند. تابع مرکب h را این طور تعریف کنید: اگر $\mathbf{x} \in S$ ، $h(\mathbf{x}) = g[f(\mathbf{x})]$. اگر f بر S و g بر $f(S)$ پیوسته یکشکل باشند، ثابت کنید که h نیز بر S پیوسته یکشکل است.

۵۴.۴ فرض کنید $f: S \rightarrow T$ بر S پیوسته یکشکل باشد، که در آن S و T فضاهای متری می‌باشند. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی در S باشد، ثابت کنید که $\{f(x_n)\}$ در T دنباله‌ای کشی خواهد بود. (این مطلب را با تمرین ۳۳.۴ مقایسه کنید.)

۵۵.۴ فرض کنید $f: S \rightarrow T$ تابعی باشد از فضای متری S به فضای متری

دیگر T . همچنین f بر یک زیر مجموعه S مانند A پیوسته یکشکل، و T نام باشد. ثابت کنید که f دارای توسیع منحصر بفردی به \bar{A} است که بر این مجموعه پیوسته یکشکل است.

۵۶.۴ فرض کنید در فضای متریک (S, d) ، A یک زیرمجموعه ناتهی S باشد. $f_A: S \rightarrow \mathbb{R}$ را با معادله زیرین تعریف می‌کنیم: به ازای هر x در S ،

$$f_A(x) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

عدد $f_A(x)$ را فاصله از x تا A می‌نامیم.

(آ) ثابت کنید که f_A بر S پیوسته یکشکل است.

(ب) ثابت کنید که $\bar{A} = \{x \mid f_A(x) = 0 \text{ و } x \in S\}$.

۵۷.۴ در فضای متریک (S, d) ، فرض کنید که A و B دو زیرمجموعه بسته و از هم جدای S باشند. ثابت کنید که دو زیرمجموعه باز از هم جدای S مانند U و V وجود دارند بقسمی که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. دانهائی. فرض کنید

$$g(x) = f_A(x) - f_B(x),$$

که در آن $f_A(x)$ در تمرین ۵۶.۴ تعریف شده است. حال دو مجموعه

$$g^{-1}(]0, +\infty[) \text{ و } g^{-1}(]-\infty, 0])$$

را در نظر بگیرید.

نایبوستگیها

۵۸.۴ تابعهای f بر \mathbb{R}^1 با معادله‌های زیرین تعریف شده‌اند. در هر مورد نایبوستگیها و نوع آنها را مشخص کنید.

(آ) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = (\sin x)/x$ و $f(0) = 0$

(ب) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{1/x}$ و $f(0) = 0$

(ج) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{1/x} + \sin(1/x)$ و $f(0) = 0$

(د) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = 1/(1 - e^{1/x})$ و $f(0) = 0$

۵۹.۴ نقاطی در \mathbb{R}^2 را مشخص کنید که هر یک از تابعهای تمرین ۱۱.۴ در آنها پیوسته نباشد.

تابعهای یکنوا

۶۰.۴ فرض کنید f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، و به ازای هر نقطه

درونی $[a, b]$ مانند x ، گویی یک بعدی مانند $B(x)$ باشد که در آن f صعودی باشد. ثابت کنید که f در سراسر $[a, b]$ صعودی است.

۶۱.۴ فرض کنید f بر بازه فشرده $[a, b]$ پیوسته باشد، و همچنین f در هیچ یک از نقطه‌های درونی این بازه ماکزیم یا مینیم موضعی نداشته باشد. (ر. ک. تبصره بعد از تمرین ۰۲۵۰۴) ثابت کنید که f باید بر $[a, b]$ یکنوا باشد.

۶۲.۴ اگر f بر بازه $[a, b]$ یک به یک و پیوسته باشد، ثابت کنید که f باید بر $[a, b]$ یکنوای اکید باشد. یعنی، ثابت کنید که هرنگاشت توپولوژیک از $[a, b]$ روی بازه $[c, d]$ باید یکنوای اکید باشد.

۶۳.۴ فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ صعودی باشد. همچنین n نقطه x_1, \dots, x_n در درون این بازه $[a, b]$ بقسمی باشند که

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b.$$

(آ) نشان دهید که

$$\sum_{k=1}^n [f(x_k +) - f(x_k -)] \leq f(b -) - f(a +).$$

(ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که مجموعه ناپیوستگیهای f شمارشپذیر است.

(ج) ثابت کنید که f در هر زیر بازه باز $[a, b]$ دارای نقطه پیوستگی است.

۶۴.۴ تابع f را بقسمی بیابید که بر مجموعه‌ای مانند S در \mathbf{R} تعریف شده و صعودی اکید باشد، ولی f^{-1} بر $f(S)$ پیوسته نباشد.

۶۵.۴ فرض کنید f بر یک زیرمجموعه \mathbf{R} مانند S صعودی اکید باشد. همچنین نقش $f(S)$ یکی از خاصیت‌های زیرین را داشته باشد: (آ) $f(S)$ باز باشد؛ (ب) $f(S)$ همبند باشد؛ (ج) $f(S)$ بسته باشد. در این صورت، ثابت کنید که f باید بر S پیوسته باشد.

فضاهای متریک و نقطه‌های ثابت

۶۶.۴ فرض کنیم $B(S)$ مجموعه همه تابعهای حقیقی باشد که بر مجموعه ناتهی S تعریف شده و کراندار باشند. اگر $f \in B(S)$ ، قرار می‌دهیم

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

عدد $\|f\|$ را «هنج سوپرمم» f می‌نامیم.

آ) ثابت کنید دستور $d(f, g) = \|f - g\|$ متر d را بر $B(S)$ تعریف می‌کند.

ب) ثابت کنید فضای متری $(B(S), d)$ تام است. دهنمائی. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کشی در $B(S)$ باشد، نشان دهید که $\{f_n(x)\}$ به ازای هر x در S ، دنباله‌ای کشی از عددهای حقیقی است.

۶۷.۴ به تمرین ۶۶.۴ باز می‌گردیم. فرض کنید که $C(S)$ آن زیرمجموعه $B(S)$ باشد که مرکب است از همه تابعهائی که بر S پیوسته و کراندارند. (اینک S یک فضای متری است.)

آ) ثابت کنید که $C(S)$ یک زیرمجموعه بسته $B(S)$ است.
 ب) ثابت کنید که زیرفضای متری $C(S)$ تام است.

۶۸.۴ در این تمرین نمادهای مذکور در برهان قضیه نقطه ثابت (قضیه ۴۸.۴) را بکار می‌بریم.

آ) ثابت کنید که $d(p, p_n) \leq d(x, f(x))\alpha^n / (1 - \alpha)$ این نامساوی، که در کارهای عددی مفید است، فاصله از p_n تا نقطه ثابت p را تخمین می‌زند. مثالی برای آن در قسمت (ب) داده شده است.

ب) فرض کنید که $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2/x)$ و $S = [1, \infty[$. ثابت کنید که f یک انقباض S است با پایای انقباض $\alpha = 1/2$ و نقطه ثابت $p = \sqrt{2}$. دنباله $\{p_n\}$ را، که از $p_0 = 1 = x$ شروع می‌شود، تشکیل دهید و نشان دهید که

$$|p_n - \sqrt{2}| \leq 2^{-n}.$$

۶۹.۴ با ذکر مثالهایی ناقص، نشان دهید که قضیه نقطه ثابت برای انقباضها در هر یک از دو مورد زیر لزوماً برقرار نیست: (آ) فضای متری زمینه تام نباشد، یا (ب) اگر پایای انقباض باشد، $\alpha \geq 1$.

۷۰.۴ فرض کنید $f: S \rightarrow S$ تابعی باشد از فضای متری تام (S, d) در خودش. همچنین دنباله‌ای حقیقی مانند $\{\alpha_n\}$ همگرا به 0 وجود داشته باشد، بقسمی که به ازای هر $n \geq 1$ و هر x و y در S ، $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha_n d(x, y)$ ، که در آن f^n مساوی تکرار n م f باشد؛ یعنی،

$$f^{n+1}(x) = f(f^n(x)), n \geq 1 \text{ و به ازای } 1, f^1(x) = f(x)$$

ثابت کنید که f دارای نقطه ثابت منحصر بفردی است. دهنمائی. به ازای m

مناسبتی، قضیه نقطه ثابت را برای f^m بکار برید.

۷۱.۴ فرض کنید $f: S \rightarrow S$ تابعی باشد از فضای متری (S, d) در خودش بقسمی که هرگاه $x \neq y$ ، آنگاه

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

(آ) ثابت کنید f حداکثر دارای یک نقطه ثابت است، و مثالی بزنید که در آن یک چنین f نقطه ثابت نداشته باشد.

(ب) اگر S فشرده باشد، ثابت کنید که f درست یک نقطه ثابت دارد. راهنمایی: نشان دهید که $g(x) = d(x, f(x))$ بر S به مینیمم خود پی‌رسد.

(ج) مثالی بزنید که در آن S فشرده باشد و f یک انقباض نباشد.

۷۲.۴ فرض کنید که f در شرط تمرین ۷۱.۴ صدق کند. اگر $x \in S$ ، قرار دهید $p_0 = x$ ، $p_{n+1} = f(p_n)$ ، و به ازای $n \geq 0$ ، $c_n = d(p_n, p_{n+1})$.

(آ) ثابت کنید که $\{c_n\}$ دنباله‌ای نزولی است، و فرض کنید که $c = \lim c_n$.

(ب) فرض کنید یک زیردنباله مانند $\{p_{k(n)}\}$ وجود داشته باشد که به نقطه q در S همگرا باشد. ثابت کنید که

$$c = d(q, f(q)) = d(f(q), f[f(q)]).$$

از این جا نتیجه بگیرید که q یک نقطه ثابت f است و $p_n \rightarrow q$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 4.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.
- 4.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison - Wesley, Reading, 1966.
- 4.3 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- 4.4 Todd, J., *Survey of Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1962.



مشتقها

۱۰۵ مقدمه

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

در این فصل بحث ما درباره مشتق است که مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل شمرده می‌شود. دو مسأله متفاوت، یکی مسأله فیزیکی پیدا کردن سرعت لحظه‌ای یک جسم متحرک، و دیگری مسأله هندسی تعیین خط مماس بر یک خم در یک نقطه داده شده، هر دو به‌طور کاملاً طبیعی به مفهوم مشتق منجر می‌شوند. در اینجا، ما به کاربردهای مشتق در مکانیک و هندسه توجهی نداریم، و به‌جای آن فقط به بررسی خاصیت‌های عمومی مشتقها می‌پردازیم.

در این فصل ما اساساً مشتق تابعهای یک متغیر حقیقی، مخصوصاً تابعهای حقیقی تعریف شده بر بازه‌هایی در \mathbb{R} ، را مطالعه می‌کنیم. همچنین باختصار درباره مشتق تابعهای برداری از یک متغیر حقیقی و مشتقهای جزئی بحث می‌نمائیم، زیرا برای مطالعه این مطالب احتیاجی به مفهومی جدید نیست. خواننده لزوماً با قسمت بزرگی از این مطالب در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آشنا شده است. بحث مفصلتری از نظریه مشتق برای تابعهای چند متغیره مستلزم تغییرات مهمی است و در فصل ۱۲ به آن پرداخته خواهد شد.

در قسمت آخر این فصل بحثی است درباره مشتق تابعهای مختلط از یک متغیر مختلط.

۲۰۵ تعریف مشتق

هرگاه f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه می‌توان به‌ازای هر دو نقطه

متمايز x و c در $[a, b]$ خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

را تشکیل داد. c را ثابت نگه می‌داریم و سپس وقتی که $c \rightarrow x$ ، رفتار این کسر را مطالعه می‌کنیم.

تعریف ۱.۵ فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، و $c \in [a, b]$. در این صورت، اگر حد

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

وجود داشته باشد، گوئیم f در نقطه c مشتقپذیر است. حد بالا را با $f'(c)$ نشان می‌دهیم و آن را مشتق f در c می‌نامیم.

این عمل حدگیری تابع جدیدی مانند f' را بوجود می‌آورد. قلمرو این تابع مجموعه نقطه‌هایی در $[a, b]$ است که در آنها f مشتقپذیر باشد. f' مشتق اول f نامیده می‌شود. بهمین طریق، به‌ازای $n = 2, 3, \dots$ مشتق n م f را با $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم و آن را مساوی مشتق اول $f^{(n-1)}$ تعریف می‌کنیم. (بنا بر این تعریف، ما در صورتی $f^{(n)}$ را در نظر می‌گیریم که قبلاً $f^{(n-1)}$ بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد.) خواننده احتمالاً با نمادهای دیگر مذکور در زیر، یا مشابه آنها، آشنا هست:

$$[y = f(x) \text{ در تساوی آخر}] \quad f'(c) = Df(c) = \frac{df}{dx}(c) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c}$$

گاهی خود تابع f را با $f^{(0)}$ نشان می‌دهیم. عملی که با آن f' از f بدست می‌آید به نام مشتقگیری معروف است.

۳.۵ مشتقها و پیوستگی

به کمک قضیه زیرین بعضی از قضیه‌های درباره مشتقها را می‌توان به قضیه‌هایی دربار پیوستگی تحویل کرد.

قضیه ۲.۵ هرگاه f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد و در نقطه c در این بازه مشتقپذیر باشد، آنگاه تابعی مانند f^* (وابسته به f و c) وجود دارد بقسمی که در c پیوسته است و در معادله زیرین صدق می‌کند: به‌ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$(1) \quad f(x) - f(c) = (x - c) f^*(x),$$

که در آن $f'(c) = f^*(c)$ برعکس، هرگاه تابعی چون f^* باشد، که در c پیوسته بوده، در (۱) صدق کند، آنگاه f در c مشتقپذیر است و $f'(c) = f^*(c)$.
 برهان. اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، تابع f^* را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(c) = f'(c) \text{ و } f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad x \neq c$$

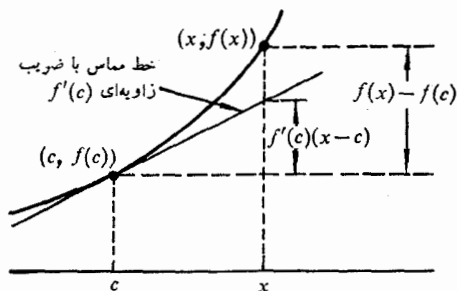
در این صورت، f^* در c پیوسته است، و معادله (۱) به ازای هر x در $[a, b]$ برقرار خواهد بود.

برعکس، هرگاه به ازای تابعی چون f^* که در c پیوسته است معادله (۱) برقرار باشد، آنگاه، با تقسیم دو طرف معادله (۱) بر $x - c$ ، و فرض این که $c \rightarrow x$ ، ملاحظه می‌کنیم که $f'(c)$ وجود دارد و مساوی است با $f^*(c)$.
 از معادله (۱) بی‌درنگ نتیجه زیر بدست می‌آید:

قضیه ۳.۵ هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در c پیوسته است.
 برهان. در معادله (۱)، فرض کنید که $c \rightarrow x$.

تیسره. معادله (۱) دارای تعبیری هندسی است. به کمک این تعبیر می‌توان معنی آن را دریافت. چون f^* در c پیوسته است، پس وقتی که x نزدیک c باشد، $f^*(x)$ تقریباً مساوی $f'(c) = f^*(c)$ خواهد بود. حال اگر در (۱) به جای $f^*(x)$ مقدار $f'(c)$ را قرار دهیم، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c),$$



شکل ۱.۵

که وقتی $c - x$ کوچک است، به طور تقریبی درست خواهد بود. با بیان دیگر می توان گفت که، هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در نزدیکی c تابعی است تقریباً خطی. (ر. ک. شکل ۰.۱۰۵). این خاصیت هندسی تابعها مکرر در حساب دیفرانسیل مورد استفاده قرار می گیرد.

۴.۵ جبر مشتقا

قضیه زیرین دستورهای متداول برای مشتقگیری از مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت دو تابع را بدست می دهد.

قضیه ۴.۵ فرض کنیم f و g بر $[a, b]$ تعریف شده باشند و در نقطه c از این بازه مشتقپذیر باشند. در این صورت، $f + g$ ، $f - g$ ، $f \cdot g$ و f/g نیز در c مشتقپذیرند. اگر $g(c) \neq 0$ نیز در c مشتقپذیر است.

مشتقهای توابع بالا در c با دستورهای زیرین مشخص می شوند:

$$(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c) \quad (\text{آ})$$

$$(f \cdot g)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c) \quad (\text{ب})$$

$$(f/g)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}, \quad g(c) \neq 0 \quad (\text{ج})$$

برهان. (ب) را ثابت می کنیم. با استفاده از قضیه ۲.۵، می نویسیم

$$f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x), \quad g(x) = g(c) + (x - c)g^*(x).$$

بنابراین،

$$f(x)g(x) - f(c)g(c) = (x - c)[f(c)g^*(x) + f^*(x)g(c)] + (x - c)^2 f^*(x)g^*(x).$$

با تقسیم دو طرف رابطه بالا بر $x - c$ و فرض این که $x \rightarrow c$ ، قسمت (ب) نتیجه می شود. اثبات گزاره های دیگر مشابه اثبات بالا است.

از تعریف مشتق بی درنگ نتیجه می شود که هرگاه f بر $[a, b]$ پایا باشد، آنگاه $f' = 0$ بر $[a, b]$ است. همچنین، هرگاه $f(x) = x$ ، آنگاه به ازای هر x ، $f'(x) = 1$. هرگاه به ازای عدد صحیح مثبتی مانند n قرار دهیم $f(x) = x^n$ ، آنگاه با بکار بردن مکرر قضیه ۴.۵ معلوم می شود که به ازای هر x ، $f'(x) = nx^{n-1}$. حال اگر بار دیگر قضیه ۴.۵ را بکار ببریم، ملاحظه می شود که هر چند جمله ای

همه جا در \mathbb{R} مشتق دارد، همچنین هر تابع گویا در هر نقطه که تعریف شده باشد دارای مشتق خواهد بود.

۵.۵ قاعده زنجیره‌ای

نتیجه‌ای عمیقتر از نتیجه‌های بالا قاعده باصطلاح زنجیره‌ای است که برای مشتقگیری از تابعهای مرکب بکار می‌رود.

قضیه ۵.۵ (قاعده زنجیره‌ای). فرض کنیم f بر بازه S ، و g بر $f(S)$ تعریف شده باشد. تابع مرکب $f \circ g$ را بر S که با معادله زیرین تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

همچنین فرض می‌کنیم نقطه‌ای در S مانند c وجود داشته باشد بقسمی که $f(c)$ یک نقطه درونی $f(S)$ باشد. هرگاه f در c و g در $f(c)$ مشتقپذیر باشند، آنگاه $f \circ g$ نیز در c مشتقپذیر است و

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)] f'(c).$$

برهان. با استفاده از قضیه ۲.۵، می‌توان نوشت:

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \quad x \text{ در } S$$

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c)$. به همین طریق، معلوم می‌شود که به ازای هر y در یک زیر بازه باز $f(S)$ مانند T حاوی $f(c)$ ، داریم

$$g(y) - g[f(c)] = [y - f(c)]g^*(y).$$

در این جا g^* در $f(c)$ پیوسته است و $g^*[f(c)] = g'[f(c)]$.

حال اگر x در S بقسمی اختیار شود که $y = f(x) \in T$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (۲) \quad g[f(x)] - g[f(c)] &= [f(x) - f(c)]g^*[f(x)] \\ &= (x - c)f^*(x)g^*[f(x)]. \end{aligned}$$

با توجه به قضیه پیوستگی در مورد تابعهای مرکب، معلوم می‌شود که

$$g^*[f(x)] \rightarrow g^*[f(c)] = g'[f(c)], \quad x \rightarrow c$$

بنابراین، اگر دو طرف رابطه (۲) را بر $x - c$ تقسیم کنیم و سپس فرض کنیم که $x \rightarrow c$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g[f(x)] - g[f(c)]}{x - c} = g'[f(c)]f'(c),$$

و این همان رابطه مطلوب می باشد.

۶.۵ مشتقهای یکطرفی و مشتقهای نامتناهی

تاکنون، منظور از این که f در c مشتق دارد این بود که c درون بازه‌ای بود که f بر آن تعریف شده بود، و حدی که $f'(c)$ مساوی آن تعریف می شد متناهی بود. برای راحتی می توان مفهوم مشتق را بقسمی وسعت داد که در نقطه‌های انتهایی بازه‌ها نیز با معنی باشد. همچنین ما یلیم مشتقهای نامتناهی داشته باشیم، و آن را بقسمی تعریف کنیم که تعبیر هندسی متداول مشتق به عنوان ضریب زاویه‌ای خط مماس وقتی که خط مماس به صورت عمودی است نیز معتبر باشد. در چنین حالت، نمی توان ثابت کرد که f در c پیوسته است. از این جهت، ما پیوستگی f در c را به طور صریح می پذیریم.

تعریف ۶.۵ فرض کنیم f بر بازه بسته K تعریف شده باشد، و در نقطه c در K پیوسته باشد. اگر حد دست راستی

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

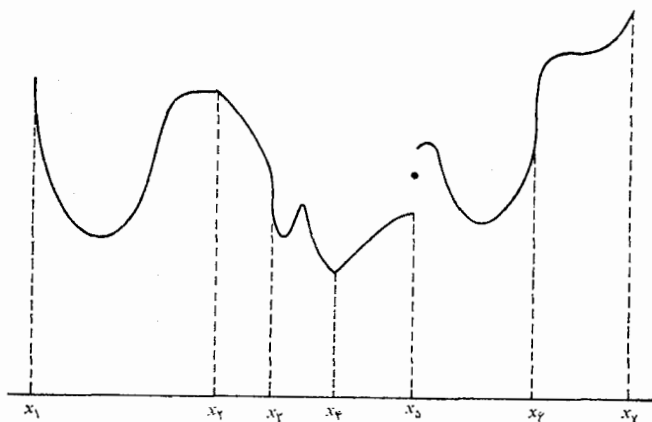
وجود داشته باشد، می گوئیم که f در c مشتق دست راستی دارد. این حد ممکن است متناهی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. حد بالا را با $f'_+(c)$ نشان می دهیم. مشتق دست چپی f در c را با $f'_-(c)$ نشان می دهیم و به طریقی مشابه تعریف می کنیم. بعلاوه، هرگاه c یک نقطه درونی K باشد، و مشتقهای دست راستی و چپی f در c هر دو مساوی $+\infty$ باشند، آنگاه گوئیم که f در c مشتق $+\infty$ دارد. ($f'(c) = -\infty$ به نحو مشابه تعریف می شود.)

واضح است که f در نقطه درونی c وقتی، و فقط وقتی، مشتق (متناهی یا نامتناهی) دارد که $f'_+(c) = f'_-(c)$ ، که در این صورت

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c).$$

شکل ۲.۵ بعضی از این مفهوما را تصور می سازد. در نقطه x_1 داریم $f'_+(x_1) = -\infty$ در x_2 مشتق دست چپی مساوی 0 ، و مشتق دست راستی 1 - است. همچنین،

$f'(x_3) = -\infty$ ، $f'_-(x_4) = -1$ ، $f'_+(x_4) = +1$ ، $f'(x_5) = +\infty$ ، $f'_-(x_6) = 2$ در x_6 هیچ یک از انواع مشتقهای یاد شده را ندارد، زیرا f در این نقطه پیوسته نیست.



شکل ۲.۵

۷.۵ توابع با مشتقهای ناصفر

قضیه ۲.۵ فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. همچنین به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ، داشته باشیم $f'(c) > 0$ یا $f'(c) = +\infty$. در این صورت، یک گوی یک بعدی مانند $B(c) \subseteq [a, b]$ هست قسمی که در آن

$$\text{اگر } x > c, f(x) > f(c) \text{ و اگر } x < c, f(x) < f(c)$$

برهان. اگر $f'(c)$ متناهی و مثبت باشد، می‌توان نوشت

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x),$$

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c) > 0$. بنا بر خاصیت محفوظ ماندن علامت تابعهای پیوسته، گویی یک بعدی مانند $B(c) \subseteq [a, b]$ هست که در آن $f^*(x)$ همان علامت $f^*(c)$ را دارد، و این بدان معنی است که $f(x) - f(c)$ همان علامت $x - c$ را در این گوی خواهد داشت.

اگر $f'(c) = +\infty$ ، گویی یک بعدی مانند $B(c)$ هست که در آن

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 1 \text{ آنگاه } x \neq c$$

در این گوی دوباره خارج قسمت مثبت است و نتیجه مانند قبل بدست می‌آید.

البته قضیه‌ای شبیه به قضیه ۷.۵ برای حالت $f'(c) < 0$ یا

$f'(c) = -\infty$ ، که در آن c یک نقطه درونی $[a, b]$ است، برقرار می باشد.

۸.۵ مشتقهای صفر و اکسترمهای موضعی

تعریف ۸.۵ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر یک زیرمجموعه فضای متریک M مانند S تعریف شده باشد، و $a \in S$. در این صورت، گوئیم f در a ماکزیم موضعی دارد در صورتی که گویی مانند $B(a)$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in B(a) \cap S$$

هرگاه به ازای هر $x \in B(a) \cap S$ داشته باشیم $f(x) \geq f(a)$ ، آنگاه گوئیم که f در a مینیم موضعی دارد.

تبره. ماکزیم موضعی f در a همان ماکزیم مطلق f بر زیرمجموعه $B(a) \cap S$ است. هرگاه f در a ماکزیم مطلق داشته باشد، آنگاه a ماکزیم موضعی نیز هست. اما، f ممکن است در چند نقطه از S ماکزیم موضعی داشته باشد ولی بر تمام مجموعه S دارای ماکزیم مطلق نباشد.

قضیه زیرین رابطه بین مشتقهای صفر و اکسترمها (ماکزیمها یا مینیمها) موضعی در نقطه‌های درونی را نشان می دهد.

قضیه ۹.۵ فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، و در یک نقطه درونی $[a, b]$ مانند c دارای ماکزیم یا مینیم موضعی باشد. هرگاه f در c مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد، آنگاه $f'(c)$ باید مساوی صفر باشد.

برهان. هرگاه $f'(c)$ مثبت یا $+\infty$ باشد، آنگاه، بنا بر قضیه ۷.۵، f نمی تواند در c اکسترم موضعی داشته باشد. با استدلالی مشابه، معلوم می شود که $f'(c)$ نمی تواند منفی یا $-\infty$ باشد. اما، چون مشتق f در c وجود دارد، پس باید

$$f'(c) = 0.$$

عکس قضیه ۹.۵ درست نیست، یعنی، در حالت کلی، فقط شرط $f'(c) = 0$ کافی برای اکسترم داشتن f در c نیست. در حقیقت، ممکن است ماکزیم یا مینیم هیچ یک وجود نداشته باشد. این مطلب را می توان با مثال $f(x) = x^3$ و $c = 0$ تحقیق کرد. در این حالت، $f'(0) = 0$ اما f در هر همسایگی 0 صعودی است. بعلاوه، لازم است تأکید کنیم که ممکن است $f'(c)$ صفر نباشد ولی f در c اکسترم موضعی داشته باشد. مثلاً $f(x) = |x|$ در $x = 0$ مینیم دارد ولی اصولاً این تابع در 0 دارای مشتق نیست. در قضیه ۹.۵ فرض شده است که f در c

دارای مشتق (متناهی یا نامتناهی) باشد. همچنین در این قضیه فرض شده است که c یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ باشد. در مثال $f(x) = x$ ، که در آن $a \leq x \leq b$ ، f ماکزیم و مینیم خود را در نقطه‌های انتهائی بازه می‌گیرد ولی $f'(x)$ در $[a, b]$ هرگز صفر نیست.

۹.۵ قضیهٔ رول

از نظر هندسی واضح است که اگر یک خم به قدر کافی «هموار» باشد و در دو نقطهٔ انتهائی بازهٔ $[a, b]$ از محور x بگذرد، این خم باید «نقطهٔ برگشتی» بین a و b داشته باشد. بیان دقیق این مطلب به نام قضیهٔ رول معروف است.

قضیهٔ ۱۰.۵ (رول). فرض کنیم f در هر نقطهٔ بازهٔ $[a, b]$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین f در هر دو نقطهٔ انتهائی a و b پیوسته باشد. اگر $f(a) = f(b)$ ، دست کم یک نقطهٔ درونی مانند c هست که در آن $f'(c) = 0$.

برهان. فرض می‌کنیم که f' در هیچ نقطهٔ $[a, b]$ صفر نباشد. از این فرض به تناقضی می‌رسیم. چون f بر مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ پیوسته است، پس f جایی در $[a, b]$ به ماکزیم خود، یعنی M ، و جایی به مینیم خود، یعنی m می‌رسد. f در نقطه‌ای درونی اکسترم ندارد (زیرا در صورت داشتن، f در آن نقطه صفر خواهد بود)، پس f هم ماکزیم و هم مینیم خود را در نقطه‌های انتهائی $[a, b]$ احراز خواهد کرد. چون $f(a) = f(b)$ ، پس $m = M$ ، و در نتیجه f بر $[a, b]$ تابع پایائی است. این نتیجه ناقض آن فرض است که f' در هیچ نقطهٔ $[a, b]$ صفر نباشد. بنا بر این نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست که در آن $f'(c) = 0$.

۱۰.۵ قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقها

قضیهٔ ۱۱.۵ (قضیهٔ مقدار میانگین). فرض کنیم f تابعی باشد که در هر نقطهٔ بازهٔ باز $[a, b]$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین f در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته نیز باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست که به ازای آن

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

تعبیر هندسی قضیهٔ بالا این است که یک خم به قدر کافی هموار بین دو نقطهٔ A و B دارای مماسی است که ضریب زاویه‌ای آن مساوی ضریب زاویه‌ای وتر AB

می باشد. قضیه ۱۰.۵ را از یک قضیه کلیتری بدست می آوریم، که مستلزم دو تابع f و g است و نسبت به آنها حالت تقارن دارد.

قضیه ۱۲.۵ (قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته). فرض کنیم دو تابع f و g در هر نقطه بازه $[a, b]$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشند. بعلاوه، این دو تابع در نقطه های انتهائی a و b پیوسته باشند. همچنین در هیچ نقطه درونی $[a, b]$ مانند x ، $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهی نباشند. در این صورت، نقطه ای درونی مانند c وجود دارد که به ازای آن

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

تبره. در این قضیه اگر $g(x)$ را مساوی x فرض کنیم، قضیه ۱۰.۵ بدست می آید. برهان. قرار می دهیم

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

در این صورت، ملاحظه می شود که اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو متناهی باشند، $h'(x)$ نیز متناهی است، و اگر فقط یکی از دو مشتق $f'(x)$ و $g'(x)$ نامتناهی باشد، $h'(x)$ نامتناهی خواهد بود. بنا بر فرض قضیه، هیچ گاه $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهی نیستند. همچنین، h در نقطه های انتهائی بازه پیوسته است، و

$$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b).$$

پس، بنا بر قضیه رن، نقطه ای درونی مانند c هست که به ازای آن $h'(c) = 0$ و از این حکم ثابت می شود.

تبره. مقتضی است که خواننده با در نظر گرفتن خمی در صفحه xy که معادله های پرمائی آن عبارت باشند از $x = g(t)$ ، $y = f(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، قضیه ۱۲.۵ را تعبیر هندسی کند.

می توان قضیه مقدار میانگین را بقسمی وسعت داد که لزومی به پیوستگی f و g در نقطه های انتهائی بازه نباشد.

قضیه ۱۲.۵ فرض کنیم دو تابع f و g در هر نقطه $[a, b]$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشند. همچنین حدهای $f(a+)$ ، $f(a+)$ ، $g(a+)$ ، $f(b-)$ و $g(b-)$ وجود داشته باشند و متناهی باشند. بعلاوه، در هر نقطه درونی مانند x ، $f'(x)$ و $g'(x)$ هر دو نامتناهی نباشند. در این صورت، نقطه ای درونی مانند c هست که به ازای آن

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

برهان. تابعهای جدید F و G را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{اگر } G(x) = g(x) \text{ و } F(x) = f(x), x \in]a, b[$$

$$F(a) = f(a+), G(a) = g(a+), F(b) = f(b-), G(b) = g(b-).$$

در این صورت، F و G بر $[a, b]$ پیوسته‌اند، و برای اثبات قضیه می‌توان قضیه ۱۲.۵ را در مورد F و G بکار برد.

قضیه زیرین بی‌درنگ از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۴.۵ فرض کنیم f در هر نقطه بازه $]a, b[$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین f در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته باشد.

(آ) هرگاه f' در بازه $]a, b[$ فقط مقادیر مثبت (متناهی یا نامتناهی) را بگیرد، آنگاه f بر $[a, b]$ صعودی اکید است؛

(ب) هرگاه f' در بازه $]a, b[$ فقط مقادیر منفی (متناهی یا نامتناهی) را بگیرد، آنگاه f بر $[a, b]$ نزولی اکید است؛

(ج) هرگاه f' همه جا در $]a, b[$ صفر باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ تابعی است پایا.

برهان. فرض می‌کنیم x و y در $[a, b]$ باشند و $x < y$. اگر قضیه مقدار میانگین را برای زیر بازه $[x, y]$ بکار ببریم، خواهیم داشت

$$c \in]x, y[, \text{ که در آن } f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

هر سه گزاره قضیه بی‌درنگ از معادله بالا نتیجه می‌شوند.

با بکار بردن قسمت (ج) قضیه ۱۴.۵ در مورد تفاضل $f - g$ خواهیم داشت:

نتیجه ۱۵.۵ هرگاه f و g بر $[a, b]$ پیوسته باشند، و در هر نقطه $]a, b[$ مشتقهای متناهی متساوی داشته باشند، آنگاه $f - g$ بر $[a, b]$ تابعی است پایا.

۱۱.۵ قضیه مقدار میانی برای مشتقها

در قضیه ۳۳.۴ ثابت شد که تابع پیوسته f بر بازه فشرده $[a, b]$ هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد. خصوصاً، f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را خواهد پذیرفت. حال مشابه این نتیجه را برای تابعهایی که به صورت مشتق هستند

ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱۶.۵ قضیه مقدار میانی برای مشتقها). فرض کنیم f بر بازه فشرده $[a, b]$ تعریف شده باشد، و در هر نقطهٔ درونی این بازه مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد. همچنین، در نقطه‌های انتهایی، مشتقهای یکطرفی $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته و متناهی باشند، و $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. در این صورت، اگر c عددی حقیقی بین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ باشد، دست‌کم یک نقطهٔ درونی مانند x هست که به ازای آن

$$f'(x) = c.$$

پرهان. تابع جدید g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \neq a \quad \text{و} \quad g(a) = f'_+(a).$$

تابع g بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است. بنا بر قضیه مقدار میانی برای تابعی پیوسته، g هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ را در درون بازه $[a, b]$ می‌گیرد. هرگاه $x \in]a, b[$ ، آنگاه، بنا بر قضیه مقدار میانگین، k ای در بازه $]a, x[$ هست که به ازای آن $g(x) = f'(k)$. بنا بر این، f' هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ را در درون بازه $]a, b[$ خواهد گرفت. به همین نحو، اگر تابع h را به صورت زیرین تعریف کنیم:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, \quad x \neq b \quad \text{و} \quad h(b) = f'_-(b)$$

با استدلالی مشابه بالا در مورد h ، نتیجه می‌شود که f' هر مقدار بین

$$[f(b) - f(a)]/(b - a) \quad \text{و} \quad f'_-(b)$$

را در درون بازه $]a, b[$ نیز خواهد گرفت. با تلفیق این نتایج ملاحظه می‌شود که، f' هر مقدار بین $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ را در درون بازه $]a, b[$ می‌گیرد، و از این قضیه به اثبات می‌رسد.

بصورت. قضیه ۱۶.۵ برای حالتی که یکی یا هر دو مشتق یکطرفی $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ نامتناهی باشند نیز معتبر است. برای اثبات قضیه در این حالت می‌توان از تابع کمکی $g(x) = f(x) - cx$ ، $x \in]a, b[$ ، استفاده نمود. جزئیات اثبات به خواننده واگذار می‌شود.

قضیه مقدار میانی نشان می‌دهد که، اگر مشتق یک تابع در بازه‌ای تغییر علامت دهد، این مشتق در نقطه‌ای از این بازه مساوی صفر خواهد بود. بنا بر این، دو قسمت

(آ) و (ب) قضیه ۱۴.۵ را می‌توان به صورت وسعت یافته زیر بیان کرد:

قضیه ۱۷.۵ فرض کنیم f بر $[a, b]$ مشتق (متناهی یا نامتناهی) داشته باشد، و در نقطه‌های انتهائی a و b پیوسته باشد. هرگاه به ازای هر $x \in [a, b]$ $f'(x) \neq 0$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ یکنوای اکید خواهد بود.

همچنین، قضیه مقدار میانی نشان می‌دهد که مشتقهای یکنوا لزوماً پیوسته‌اند.

قضیه ۱۸.۵ فرض کنیم f' وجود داشته باشد، و بر بازه باز $[a, b]$ یکنوا باشد. در این صورت، f' بر $[a, b]$ پیوسته است.

برهان. فرض می‌کنیم f' در نقطه c در $[a, b]$ ناپیوسته باشد. از این فرض به تناقض می‌رسیم. یک زیر بازه بسته $[a, b]$ مانند $[\alpha, \beta]$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که c یک نقطه درونی آن باشد. چون f' بر $[\alpha, \beta]$ یکنوا است، پس، بنا بر قضیه ۵.۱.۴، ناپیوستگی f' در c باید از نوع ناپیوستگی جهشی باشد. از این روی، f' نمی‌تواند هر مقدار بین $f'(\alpha)$ و $f'(\beta)$ را بپذیرد، و این با قضیه مقدار میانی متناقض است.

۱۲.۵ دستور تیلور با باقیمانده

همان طور که پیشتر ذکر شد، هرگاه f در نقطه c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در مجاورت c تقریباً تابعی است خطی. یعنی، وقتی که $x - c$ کوچک باشد، معادله

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$$

تقریباً درست است. قضیه تیلور اطلاعات بیشتری بدست می‌دهد. بنا بر این قضیه، اگر f مشتق مرتبه n داشته باشد، f را می‌توان به یک چند جمله‌ای از درجه $n - 1$ نزدیک نمود. همچنین، قضیه تیلور عبارت مفیدی برای محاسبه خطای حاصل از این تقریب بدست می‌دهد.

قضیه ۱۹.۵ (تیلور). فرض کنیم f تابعی باشد که همه جا در بازه باز $[a, b]$ مشتق n متناهی داشته باشد. همچنین $f^{(n-1)}$ بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. بعلاوه $c \in [a, b]$. در این صورت، به ازای هر x در $[a, b]$ غیر از c ، نقطه‌ای مانند x_1 بین x و c هست که به ازای آن

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - c)^n.$$

قضیه تیلور حالت خاصی است از نتیجه‌ای کلیتر از آن. این نتیجه در حقیقت توسعه مستقیمی است از قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته.

قضیه ۲۰.۵ فرض کنیم دو تابع f و g در هر نقطه بازه $[a, b]$ مشتق n مرتبه متناهی داشته باشند. همچنین مشتقهای $(n-1)$ م آنها بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند. بعلاوه $c \in [a, b]$ در این صورت، به ازای هر x در $[a, b]$ غیر از c ، نقطه‌ای مانند x_1 بین x و c هست بقسمی که

$$\begin{aligned} & \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \right] g^{(n)}(x_1) \\ &= f^{(n)}(x_1) \left[g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \right]. \end{aligned}$$

تبرسه. برای حالت خاصی که $g(x) = (x-c)^n$ ، به ازای $0 \leq k \leq n-1$ داریم $g^{(k)}(c) = 0$ و $g^{(n)}(x) = n!$. پس قضیه بالا در این حالت به قضیه تیلور تحویل می‌شود.

برهان. برای سادگی، فرض می‌کنیم که $c < b$ و $c < x$ را ثابت نگهداریم، تابعهای جدید F و G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر t در $[c, x]$ ، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \\ G(t) &= g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k. \end{aligned}$$

در این صورت، F و G بر بازه بسته $[c, x]$ پیوسته‌اند و در بازه باز (c, x) مشتقهای متناهی دارند. بنا بر قضیه ۱۲.۵، می‌توان نوشت $F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)]$ چون $G(x) = g(x)$ و $F(x) = f(x)$ ، پس معادله بالا به معادله زیر تحویل می‌شود:

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)]. \quad (\text{I})$$

حال اگر از مجموعی که $F(t)$ به وسیله آن تعریف شده است مشتق بگیریم، با توجه به این مطلب که هر جمله مجموع به صورت حاصل ضرب است، همه جمله‌ها، بجز یکی، حذف می‌شوند، و آنچه باقی می‌ماند به صورت زیرین است:

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

بهمین نحو، خواهیم داشت

$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t).$$

حال اگر در رابطه اخیر t را مساوی x اختیار کنیم و حاصل را در رابطه (آ) بگذاریم، دستوری را که در قضیه بیان شده است بدست خواهیم آورد.

۱۳.۵ مشتقهای توابع برداری

$\mathbf{f}:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}^n$ را تابعی برداری می‌انگاریم که بر بازه $]a, b[$ در \mathbf{R} تعریف شده باشد. در این صورت، $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ، که در آن هر مؤلفه f_k تابعی است حقیقی که بر $]a, b[$ تعریف شده است. چنانچه هر مؤلفه f_k در نقطه c در $]a, b[$ مشتقپذیر باشد، می‌گوئیم که \mathbf{f} در c مشتقپذیر است و مشتق \mathbf{f} را در c با رابطه زیرین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{f}'(c) = (f_1'(c), \dots, f_n'(c)).$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، $\mathbf{f}'(c)$ در نتیجه مشتقگیری از هر یک از مؤلفه‌های \mathbf{f} در c حاصل می‌شود. بنابراین تعریف، بسیاری از قضیه‌های مشتقگیری برای تابعی برداری نیز معتبرند. مثلاً، هرگاه تابعی برداری \mathbf{f} و تابع حقیقی λ همه در c مشتقپذیر باشند، آنگاه مجموع $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ، حاصل ضرب $\lambda\mathbf{f}$ ، و حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ نیز در c مشتقپذیر هستند و داریم

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(c) = \mathbf{f}'(c) + \mathbf{g}'(c),$$

$$(\lambda\mathbf{f})'(c) = \lambda'(c)\mathbf{f}(c) + \lambda(c)\mathbf{f}'(c),$$

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(c) = \mathbf{f}'(c) \cdot \mathbf{g}(c) + \mathbf{f}(c) \cdot \mathbf{g}'(c).$$

رابطه‌های بالا با توجه به مؤلفه‌های توابع مورد نظر باسانی ثابت می‌شوند. در مورد تابعی برداری، یک قاعده زنجیره‌ای برای مشتقگیری از تابعی مرکب نیز وجود دارد، که آن نیز به همین نحو ثابت می‌شود. هرگاه \mathbf{f} تابعی برداری و u تابعی حقیقی باشند، آنگاه تابع مرکب \mathbf{g} ، که با رابطه $\mathbf{g}(x) = \mathbf{f}[u(x)]$ تعریف شود، تابعی است برداری. اگر قلمرو \mathbf{f} حاوی یکی از همسایگی‌های $u(c)$ باشد، و $u'(c)$ و $\mathbf{f}'[u(c)]$ هر دو وجود داشته باشند، بنا بر قاعده زنجیره‌ای، داریم

$$\mathbf{g}'(c) = \mathbf{f}'[u(c)]u'(c).$$

قضیه مقدار میانگین (قضیه ۱۱.۵) برای تابعهای برداری برقرار نیست. مثلاً، هرگاه به ازای هر عدد حقیقی t ، $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ، آنگاه

$$f(2\pi) - f(0) = 0,$$

ولی $f'(t)$ هرگز صفر نیست. در واقع به ازای هر مقدار t ، $\|f'(t)\| = 1$. در فصل ۱۲ (قضیه ۸.۱۲) شکل اصلاح شده‌ای از قضیه مقدار میانگین برای تابعهای برداری داده می‌شود.

۱۴.۵ مشتقهای جزئی

فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد که بر مجموعه S در فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n تعریف شده باشد. هرگاه دو نقطه $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ در S چنان باشند که همه مختصات آنها، بجز مختص k ام، با هم متساوی باشند، یعنی، هرگاه به ازای $i \neq k$ ، $x_i = c_i$ و $x_k \neq c_k$ ، آنگاه می‌توان حد زیر را در نظر گرفت:

$$\lim_{x_k \rightarrow c_k} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})}{x_k - c_k}.$$

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق جزئی f بر حسب مختص k ام می‌نامند، و با یکی از نمادهای زیرین یا نمادی مشابه آنها نشان می‌دهند:

$$D_k f(\mathbf{c}), \quad f_k(\mathbf{c}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{c}).$$

ما نماد $D_k f(\mathbf{c})$ را بکار خواهیم برد.

این طرز عمل n تابع دیگر $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$ ، و $D_n f$ را بوجود می‌آورد، که در نقطه‌هایی از S تعریف می‌شوند که در آنها حدهای متناظر وجود داشته باشند. مشتقگیری جزئی حقیقتاً مفهوم تازه‌ای نیست، زیرا برای تعریف آن $f(x_1, \dots, x_n)$ را تنها به عنوان تابعی از یک متغیر در نظر گرفته، متغیرهای دیگر را ثابت فرض کرده‌ایم. یعنی، هرگاه تابع g را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$g(x_k) = f(c_1, \dots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \dots, c_n),$$

آنگاه $D_k f(\mathbf{c})$ همان مشتق معمولی g در c_k ، یعنی $g'(c_k)$ ، خواهد بود. این را معمولاً به این صورت توصیف می‌کنیم که می‌گوئیم ما از f بر حسب مختص k ام مشتق می‌گیریم، در حالی که مختصات دیگر را ثابت فرض کرده‌ایم.

برای تعمیم یک خاصیت R^1 به R^n ، خواستار آنیم که خاصیت‌های مهم حالت یک بعدی محفوظ بمانند. مثلاً، در حالت یک بعدی، اگر تابعی در نقطه c مشتق داشته باشد، در این نقطه پیوسته هم هست. بنا براین، مفهوم مشتق برای تابع‌های چند متغیره باید بقسمی تعمیم یابد که پیوستگی آنها را ایجاب کند. مشتق‌های جزئی این کار را انجام نمی‌دهند. یک تابع n متغیره ممکن است در نقطه‌ای دارای مشتق‌های جزئی بر حسب هر متغیر باشد ولی در این نقطه پیوسته نباشد. این مطلب را با مثالی از یک تابع دو متغیره مصور می‌سازیم:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & , y = 0 \text{ یا } x = 0 \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مشتق‌های جزئی $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ هر دو وجود دارند. در واقع، داریم

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

و، بهمین نحو، معلوم می‌شود که $D_2 f(0, 0) = 1$. اما بسادگی معلوم می‌شود که این تابع در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

وجود مشتق‌های جزئی بر حسب هر متغیر، پیوستگی جداگانه در هر متغیر را ایجاب می‌کند؛ اما، همچنان که دیدیم، موجب پیوستگی تابع بر حسب همه متغیرها باهم نیست. اشکال کار مشتق‌های جزئی در این است که، همان طور که از تعریف آنها برمی‌آید، ما مجبوریم که در هر زمان فقط یک متغیر را در نظر بگیریم. مشتق‌های جزئی درجه تغییر یک تابع را در امتداد هر یک از محورهای مختصات بدست می‌دهند. مشتق مفهوم کلیتری دارد که توجه ما را به امتدادهای خاص محورهای مختصات محدود نمی‌سازد. این مفهوم در فصل ۱۲ بتفصیل مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

هدف این بخش صرفاً معرفی نمادهایی برای مشتق‌های جزئی است، زیرا قبل از رسیدن به فصل ۱۲ گاهی آنها را بکار خواهیم برد.

هرگاه f بر مجموعه K دارای مشتق‌های جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ باشد، آنگاه می‌توان مشتق‌های جزئی این تابعها را نیز در نظر گرفت. مشتق‌های جزئی این تابعها را مشتق‌های جزئی مرتبه دوم f می‌نامیم. مشتق جزئی $D_k f$ بر حسب متغیر x_k را با نماد $D_{r,k} f$ نشان می‌دهیم. بنا براین،

$$D_{r,k} f = D_r(D_k f).$$

بهمین نحو، می‌توان مشتق‌های جزئی مرتبه‌های بالاتر را تعریف نمود. نمادهای

دیگری که برای مشتقهای جزئی بکار می‌روند عبارتند از

$$D_{r,k}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_k}, \quad D_{p,q,r}f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r}$$

۱۵.۵ مشتگیری از تابعهای يك متغیر مختلط

در این بخش باختصار دربارهٔ مشتقهای توابع مختلط، که بر زیرمجموعه‌های صفحهٔ مختلط تعریف شده‌اند، بحث می‌نمائیم. البته، یک چنین تابعها، تابعهای برداری می‌باشند که قلمرو و برد آنها زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^2 خواهند بود. همهٔ ملاحظات مذکور در فصل ۴ دربارهٔ حدود و پیوستگی تابعهای برداری، بخصوص، در مورد تابعهای مختلط نیز صادقند. اما، در هر حال، تفاوتی اساسی بین مجموعهٔ عددهای مختلط \mathbb{C} و مجموعهٔ بردارهای \mathbb{R}^n ($n > 2$) وجود دارد. این تفاوت در این جا نقش مهمی را بعهدده دارد. در دستگاه عددهای مختلط چهار عمل جبری جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم وجود دارند، و این عملها در اکثر قانونهای «متداول» جبر که برای دستگاه عددهای حقیقی برقرارند صدق می‌کنند. مخصوصاً این عددها در پنج اصل اول مذکور در فصل ۱ صدق می‌کنند. (اصل ۶ تا ۱۰ مربوط به رابطهٔ ترتیبی $<$ است، که نمی‌تواند میان عددهای مختلط وجود داشته باشد.) هر دستگاه جبری که در اصلهای موضوع ۱ تا ۵ صدق کند میدان نامیده می‌شود. (برای بحث مستوفی دربارهٔ میدانها، ر. ک. کتاب مرجع ۰۴.۱) در \mathbb{R}^n ($n > 2$) نمی‌توان ضرب و تقسیم را بقسمی تعریف کرد که \mathbb{R}^n میدانی شامل \mathbb{C} گردد. اما، چون در \mathbb{C} تقسیم امکان‌پذیر است، می‌توان خارج قسمت تفاضلی اساسی $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ را، که در تعریف مشتق در \mathbb{R} از آن استفاده کردیم، تشکیل داد، و آنگاه واضح می‌شود که چگونه باید مشتق را در \mathbb{C} تعریف نمود.

تعریف ۲۱.۵ فرض کنیم تابع مختلط f بر مجموعهٔ باز S در \mathbb{C} تعریف شده باشد،

۱. مثلاً، اگر ممکن بود در \mathbb{R}^3 ضرب چنان تعریف شود که \mathbb{R}^3 به صورت میدانی شامل \mathbb{C} درآید، چنین استدلال می‌کردیم که به ازای هر \mathbf{x} در \mathbb{R}^3 ، بردارهای $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ نامستقل خطی می‌باشند (ر. ک. کتاب مرجع ۱.۵، صفحهٔ ۵۵۸). از این روی، به ازای هر \mathbf{x} در \mathbb{R}^3 ، عددهائی حقیقی مانند a_0, a_1, a_2, a_3 وجود دارند که به ازای آنها $a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3 = 0$ اما می‌دانیم که هر چند جمله‌ای درجهٔ ۳ با ضریبهای حقیقی مساوی حاصل ضرب يك چند جمله‌ای خطی و يك چند جمله‌ای درجهٔ دوم با ضریبهای حقیقی است. پس يك چند جمله‌ای درجهٔ ۳ با ضریبهای حقیقی تنها می‌تواند ریشه‌های حقیقی یا مختلط داشته باشد، و این ناقض فرض اولیه است.

$c \in S$ در این صورت، اگر حد

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = f'(c)$$

وجود داشته باشد، می‌گوئیم f در نقطه c مشتقپذیر است.

با عمل حدگیری بالا، تابع مختلط جدید f' بوجود می‌آید. این تابع در نقطه‌هایی از S مانند z تعریف شده است که در آنها $f'(z)$ وجود داشته باشد. البته، به روشی مشابه، مشتقهای مرتبه‌های بالا، یعنی f'' ، f''' ، ...، تعریف می‌شوند. حال گزاره‌های زیر را می‌توان برای تابعهای مختلط تعریف شده بر مجموعه‌ی S مانند S درست مثل حالت حقیقی ثابت نمود.

(آ) f در c مشتقپذیر است وقتی، و فقط وقتی، که تابعی مانند f^* وجود داشته باشد که در c پیوسته باشد، و به ازای هر $z \in S$

$$f(z) - f(c) = (z - c)f^*(z),$$

که در آن $f^*(c) = f'(c)$.

تیسر. با فرض $g(z) = f^*(z) - f'(c)$ ، معادله‌ی مذکور در قسمت (آ) به شکل زیر در می‌آید

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + g(z)(z - c),$$

که در آن وقتی که $z \rightarrow c$ ، $g(z) \rightarrow 0$. رابطه‌ی بالا را دستود تیلور مرتبه اول برای f می‌نامند.

ب) هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در این نقطه پیوسته است.

ج) هرگاه دو تابع f و g در نقطه c مشتق داشته باشند، آنگاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت آنها نیز در c مشتق دارند، و این مشتقها با دستورهایی متداول (مانند دستورهایی مذکور در قضیه ۴۰۵) بدست می‌آیند. در حالت f/g ، فرض $g(c) \neq 0$ ضروری است.

د) قاعده‌ی زنجیره‌ای برای تابعهای مختلط معتبر است؛ یعنی، اگر قلمرو g حادی یکی از همسایگیهای $f(c)$ باشد، و $f'(c)$ و $g'[f(c)]$ هر دو وجود داشته باشند،

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c).$$

هرگاه $f(z) = z$ ، آنگاه به ازای هر z در C ، $f'(z) = 1$ در صورتی که (ج) را مکرر بکار ببریم، می بینیم که اگر $f(z) = z^n$ (n عددی است صحیح و مثبت)، $f'(z) = nz^{n-1}$ این حکم در صورت منفی بودن n نیز برقرار است، به شرط آن که $z \neq 0$. بنابراین، می توان مشتق چند جمله ایهای مختلط و تابعهای گویای مختلط را با همان روشهای متداول در حساب دیفرانسیل مقدماتی محاسبه کرد.

۱۶.۵ معادله های کشی-ریمان

اگر f تابعی مختلط از یک متغیر مختلط باشد، مقدار f را در هر نقطه می توان به شکل زیر نوشت:

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

که در آن u و v تابعهای حقیقی از یک متغیر مختلط می باشند. البته، می توان u و v را به عنوان تابعهای حقیقی از دو متغیر حقیقی انگاشته f را بدین صورت نیز نشان داد:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

در هر یک از این دو حالت، می نویسیم $f = u + iv$ و u و v را قسمتهای حقیقی و موهومی f می نامیم. مثلاً، تابع نمائی مختلط f ، که به صورت

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

تعریف می شود، دارای این قسمتهای حقیقی و موهومی است:

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

همچنین، هرگاه $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$ ، آنگاه

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

در قضیه زیرین خواهیم دید که وجود f' محدودیتهای بنسبت زیادی برای قسمتهای حقیقی و موهومی f ایجاد می کند.

قضیه ۲۲.۵ فرض کنیم $f = u + iv$ بر مجموعه S باز در C تعریف شده باشد. هرگاه در نقطه ای مانند c در S ، $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه مشتقهای جزئی $D_1 u(c)$ ، $D_1 v(c)$ ، $D_2 u(c)$ ، $D_2 v(c)$ نیز وجود دارند و داریم

$$(۳) \quad f'(c) = D_1 u(c) + i D_1 v(c),$$

$$(۴) \quad f'(c) = D_{\nu}v(c) - i D_{\nu}u(c).$$

از رابطه‌های (۳) و (۴)، بخصوص، نتیجه می‌شود که

$$D_{\nu}v(c) = -D_{\nu}u(c) \text{ و } D_{\nu}u(c) = D_{\nu}v(c)$$

تیسره. دو معادلهٔ اخیر به نام معادله‌های کشی-دیمان معروفند. این معادله‌ها معمولاً به شکل زیرین نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

برهان. چون $f'(c)$ وجود دارد، پس بر S تابعی مانند f^* وجود دارد بقسمی که

$$(۵) \quad f(z) - f(c) = (z - c)f^*(z),$$

که در آن f^* در c پیوسته است و $f^*(c) = f'(c)$. چنین می‌نویسیم:
 $z = x + iy$, $c = a + ib$, و $f^*(z) = A(z) + iB(z)$, که در آن $A(z)$ و $B(z)$ حقیقی هستند. توجه کنید که وقتی که $z \rightarrow c$, $A(z) \rightarrow A(c)$ و $B(z) \rightarrow B(c)$. حال اگر فقط در S , زهائی را اختیار کنیم که در آنها $y = b$ و قسمتهای حقیقی و موهومی (۵) را در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$u(x, b) - u(a, b) = (x - a)A(x + ib), \\ v(x, b) - v(a, b) = (x - a)B(x + ib).$$

با تقسیم رابطه‌های بالا بر $x - a$ و فرض $x \rightarrow a$, نتیجه می‌گیریم که

$$D_{\nu}v(c) = B(c) \quad \text{و} \quad D_{\nu}u(c) = A(c)$$

چون $f'(c) = A(c) + iB(c)$, پس رابطه (۳) برقرار است. بهمین طریق، با انتخاب زهائی در S که در آنها $x = a$, خواهیم داشت

$$D_{\nu}u(c) = -B(c) \quad \text{و} \quad D_{\nu}v(c) = A(c)$$

یعنی رابطه (۴) نیز صحیح است.

در قضیهٔ زیرکار بردهائی از معادله‌های کشی-دیمان مراعات شده‌اند.

قضیهٔ ۳۳.۵ فرض کنیم $f = u + iv$ تابعی باشد که همه جا در گردهٔ باز D به مرکز (a, b) مشتق داشته باشد. هرگاه یکی از دو تابع u و v یا تابع $|f|$ بر D پایا باشد، آنگاه f بر D تابعی پایا خواهد بود. همچنین، اگر به ازای هر z در

۱. در این جا مراد از $|f|$ تابعی است که مقدارش در z مساوی $|f(z)|$ است.

$$D, f'(z) = 0, f \text{ تابعی است پایا.}$$

برهان. فرض می‌کنیم u بر D تابع پایائی باشد. در این صورت، بنا بر معادله‌های کشی - ریمان، $D_1 v$ و $D_2 v$ هر دو بر D مساوی صفرند. حال اگر قضیه مقدار میانگین در حالت یک بعدی را دوبار بکار ببریم، نتیجه می‌گیریم که به ازای y' بین b و y ،

$$v(x, y) - v(x, b) = (y - b)D_2 v(x, y') = 0,$$

و به ازای x' بین a و x ،

$$v(x, b) - v(a, b) = (x - a)D_1 v(x', b) = 0.$$

بنابراین، به ازای هر (x, y) در D ، $v(x, y) = v(a, b)$ ، پس v بر D تابعی است پایا. با بیانی مشابه نشان داده می‌شود که هرگاه v بر D پایا باشد، u نیز پایا است.

اکنون فرض می‌کنیم $|f|$ بر D پایا باشد. در این صورت،

$$|f|^2 = u^2 + v^2 \text{ بر } D \text{ پایا است. با مشتقگیری جزئی از آن خواهیم داشت}$$

$$uD_1 u + vD_1 v = 0, \quad uD_2 u + vD_2 v = 0.$$

با توجه به معادله‌های کشی - ریمان، معادله دوم بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$vD_1 u - uD_1 v = 0.$$

از این رابطه و معادله اول بالا پس از حذف $D_1 v$ بدست می‌آوریم که $(u^2 + v^2)D_1 u = 0$. هرگاه $u^2 + v^2 = 0$ ، آنگاه $u = v = 0$ ، یعنی $f = 0$. هرگاه $u^2 + v^2 \neq 0$ ، آنگاه $D_1 u = 0$ ؛ پس u تابعی است پایا، بنابراین f پایا است.

بالاخره، اگر f' بر D مساوی 0 باشد، هر دو مشتق جزئی $D_1 v$ و $D_2 v$ بر D صفر خواهند بود. حال، مانند قسمت اول برهان، می‌توان نتیجه گرفت که f بر D تابع پایائی است.

بنابر قضیه ۲۲.۵، شرط لازم برای آن که تابع $f = u + iv$ در نقطه c مشتق داشته باشد آن است که چهار مشتق جزئی $D_1 u$ ، $D_2 u$ ، $D_1 v$ و $D_2 v$ در c وجود داشته باشند و در معادله‌های کشی - ریمان صدق کنند. ولی مثال زیرین نشان می‌دهد که این شرط کافی نیست.

مثال. فرض می‌کنیم u و v به صورت زیر تعریف شده باشند:

اگر $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ و $u(0, 0) = 0$

اگر $v(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ و $v(0, 0) = 0$

بآسانی معلوم می‌شود که

$$D_x u(0, 0) = D_x v(0, 0) = 1 \text{ و } D_y u(0, 0) = -D_y v(0, 0) = -1$$

بنابراین، معادله‌های کشی - ریمان در نقطه $(0, 0)$ برقرارند. با وجود این، تابع $f = u + iv$ در نقطه $z = 0$ مشتق ندارد. در حقیقت، به ازای $x = 0$ داریم

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i,$$

حال آن که به ازای $x = y$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2},$$

و در نتیجه $f'(0)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

در فصل ۱۲ ثابت خواهیم کرد که برقراری معادله‌های کشی - ریمان در نقطه c توأم با پیوسته بودن مشتقات جزئی u و v در یکی از همسایگیهای c کافی برای وجود داشتن مشتق تابع $f = u + iv$ در c می‌باشد. برای آن که مصور سازیم که این نتیجه در عمل چگونه بکار می‌رود، مشتق تابع نمائی مختلط را بدست می‌آوریم. فرض کنیم که $f(z) = e^z = u + iv$ در این صورت،

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

و در نتیجه

$$D_x u(x, y) = e^x \cos y = D_x v(x, y), \\ D_y u(x, y) = -e^x \sin y = -D_y v(x, y).$$

چون این مشتقات جزئی همه جا در \mathbb{R}^2 پیوسته‌اند و در معادله‌های کشی - ریمان صدق می‌کنند، پس z هر چه باشد $f'(z)$ وجود دارد. برای محاسبه آن از قضیه ۲۲.۵ استفاده می‌کنیم، داریم

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

بنابراین، مانند حالت حقیقی، مشتق تابع نمائی مختلط مساوی خود آن است.

تمرین

تابعهای حقیقی

در تمرینهای زیر، هر جا که لازم باشد، دستورهای مشتقگیری از توابع ساده مثلثاتی، نمائی، و لگاریتمی دانسته فرض می‌شوند.

۱۰۵ گوئیم تابع f در شرط لیب شیتس^۱ از مرتبه α در نقطه c صدق می‌کند وقتی که عددی مثبت مانند M (M ممکن است بستگی به c داشته باشد) و گویی یک بعدی چون $B(c)$ وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه $x \in B(c)$ و $x \neq c$ ، آنگاه

$$|f(x) - f(c)| < M |x - c|^\alpha.$$

(آ) فرض کنید f تابعی باشد که در شرط لیب شیتس از مرتبه α در نقطه c صدق می‌کند. نشان دهید که اگر $\alpha > 0$ ، f در c پیوسته است، و اگر $\alpha > 1$ ، f در c مشتق دارد.

(ب) تابعی را مثال بزنید که در نقطه‌ای مانند c در شرط لیب شیتس از مرتبه یک صدق کند ولی $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

۲۰۵ در مورد هریک از حالت‌های زیرین، بازه‌هایی را که f در آنها صعودی یا نزولی است معین کنید، و همچنین ماکزیممها و مینیممهای آن را (در صورت وجود) در مجموعه‌ای که f بر آن تعریف شده باشد بیابید.

(آ) اگر $f(x) = x^3 + ax + b$ ، $x \in \mathbf{R}$

(ب) اگر $f(x) = \log(x^2 - 9)$ ، $|x| > 3$

(ج) اگر $f(x) = x^{2/3}(x-1)^4$ ، $0 \leq x \leq 1$

(د) اگر $0 \leq x \leq \pi/2$ و $x \neq 0$

$$f(0) = 1, f(x) = (\sin x)/x$$

۳۰۵ چند جمله‌ای f را با کوچکترین درجه ممکن بقسمی بیابید که به ازای عددهای حقیقی مفروض $x_1 \neq x_2$ و a_1, a_2, b_1, b_2 ، داشته باشیم

$$f(x_1) = a_1, f(x_2) = a_2, f'(x_1) = b_1, f'(x_2) = b_2.$$

۴۰۵ f را به صورت زیرین تعریف کنید: اگر $x \neq 0$ و $f(x) = e^{-1/x^2}$ و $f(0) = 0$ نشان دهید که

(آ) f به ازای هر x پیوسته است.

۵.۵ (ب) $f^{(n)}$ به ازای هر x پیوسته است، و $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)
 f, g, h را به صورت زیرین تعریف کنید: $f(0) = g(0) = h(0) = 0$

و اگر $f(x) = \sin(1/x), x \neq 0$
 $g(x) = x \sin(1/x)$ و $h(x) = x^2 \sin(1/x)$

نشان دهید که

(آ) اگر $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x), x \neq 0$ و $f'(0)$ وجود ندارد.

(ب) اگر $g'(x) = \sin(1/x) - 1/x \cos(1/x), x \neq 0$ و $g'(0)$ وجود ندارد.

(ج) اگر $h'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), x \neq 0$ و $h'(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x)$ وجود ندارد.

۶.۵ ثابت کنید اگر h مساوی حاصل ضرب دو تابع f و g باشد، مشتق n م آن از رابطه زیرین بدست می آید:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{که در آن } h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

این رابطه به دستور لایب نیتزا معروف است.

۷.۵ فرض کنید مشتقهای مرتبه سوم تابعهای f و g به ازای هر x در \mathbb{R} وجود داشته باشند. اگر به ازای هر $x, f(x)g(x) = 1$ ، برقراری رابطههای (آ)، (ب)، (ج)، و (د) مذکور در زیر را در نقطههایی که مخرجها ناصفرند ثابت کنید:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - 2 \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g''(x)}{g'(x)} = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - 3 \frac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3 \frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g'''(x)}{g'(x)} = 0 \quad (\text{ج})$$

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3(f''(x))^2}{2(f'(x))^2} = \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3(g''(x))^2}{2(g'(x))^2} \quad (\text{د})$$

نمبره. عبارت طرف چپ رابطه (د) مشتق شوارتزی f در x می نامند.
 ه) نشان دهید که هرگاه

$ad - bc \neq 0$ که در آن $g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d]$
 آنگاه f و g دارای مشتقهای شوارتزی مساوی می باشند. (اهنمائی. اگر
 $c \neq 0$ بنویسید

$$\frac{(af + b)}{(cf + d)} = \left(\frac{a}{c}\right) + \frac{(bc - ad)}{[c(cf + d)]}$$

و سپس قسمت (د) را بکار برید.

۸.۵ فرض کنید چهار تابع f_1, f_2, g_1, g_2 در $[a, b]$ مشتق داشته باشند.
 تابع F را با دترمینان زیر تعریف کنید:

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} \quad \text{اگر } x \in]a, b[$$

(ا) نشان دهید که به ازای هر x در $]a, b[$ ، $F'(x)$ وجود دارد و

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

(ب) نتیجه کلیتری را برای دترمینانهای مرتبه n بیان و اثبات کنید.

۹.۵ فرض کنیم f_1, \dots, f_n و g_1, \dots, g_n تابع معلوم باشند که هر یک در $]a, b[$ مشتق
 n داشته باشد. تابع W را، که تابع وودنسکی f_1, \dots, f_n و g_1, \dots, g_n خوانده می شود،
 بدین صورت تعریف می کنیم: به ازای هر x در $]a, b[$ ، $W(x)$ مساوی مقدار
 دترمینان مرتبه n است که در سطر k ام و ستون m آن $f_m^{(k-1)}(x)$ قرار دارد،
 که در آن $n, \dots, 2, 1$ و $k = 1, 2, \dots, n$ و $m = 1, 2, \dots, n$ به جای $f_m(x)$
 نوشته شده است.

(ا) نشان دهید اگر در دترمینانی که $W(x)$ با آن تعریف می شود به جای
 آخرین سطر آن مشتقهای $f_1^{(n)}, \dots, f_n^{(n)}$ یعنی $f_1^{(n)}(x), \dots, f_n^{(n)}(x)$ را قرار
 دهیم، مقدار دترمینان حاصل مساوی $W'(x)$ می شود.

(ب) اگر n عدد پایای c_1, \dots, c_n وجود داشته باشند بقسمی که همه صفر
 نباشند، و به ازای هر x در $]a, b[$ داشته باشیم

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

نشان دهید که به ازای هر x در $]a, b[$ ، $W(x) = 0$.

تبره. اگر مجموعه‌ای از تابعها در رابطه بالا صدق کند، گوییم این مجموعه بر $]a, b[$ نامستقل خطی است.

ج) صفر شدن تابع ورونسکی در سراسر $]a, b[$ شرط لازم برای نامستقل خطی بودن f_1, \dots, f_n هست، ولی این شرط کافی نیست. نشان دهید که هرگاه ورونسکی دو تابع در سراسر $]a, b[$ صفر شود و یکی از این دو تابع در $]a, b[$ صفر نشود، آنگاه مجموعه متشکل از این دو تابع بر $]a, b[$ نامستقل خطی خواهد بود.

قضیه مقدار میانگین

۱۰.۵ فرض کنید f تابع مفروضی باشد که در هر نقطه از بازه $]a, b[$ مشتق متناهی داشته باشد، و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$. ثابت کنید که $f'(x)$ یا وجود ندارد یا نامتناهی است.

۱۱.۵ نشان دهید که دستور موجود در قضیه مقدار میانگین را می‌توان به صورت زیرین نوشت:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h) \quad \text{به ازای } \theta \text{ ای بین } 0 \text{ و } 1,$$

در هر یک از حالت‌های زیرین θ را به‌عنوان تابعی از x و h بدست آورید.

(آ) $f(x) = x^2$ ، (ب) $f(x) = x^3$

(ج) $f(x) = e^x$ ، (د) اگر $x > 0$ ، $f(x) = \log(x)$

در هر مورد، با فرض $x \neq 0$ و ثابت نگهداشتن x ، $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ را بدست آورید.

۱۲.۵ با فرض

$$g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x \quad \text{و} \quad f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$$

در قضیه ۲۰.۵، نشان دهید که اگر $0 < x \leq 1$ ، $f'(x)/g'(x)$ هرگز مساوی خارج قسمت $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ نخواهد بود. چگونه این نتیجه را با معادله

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \quad a < x_1 < b,$$

که از قضیهٔ ۲۰.۵ به ازای $n = 1$ بدست می‌آید، سازش می‌دهید؟

۱۳.۵ در هر یک از حالت‌های خاص زیرین از قضیهٔ ۲۰.۵، فرض کنید که $n = 1$ ،

$$c = a, x = b, \text{ و نشان دهید که } x_1 = (a + b)/2.$$

$$\text{آ) } g(x) = \cos x, f(x) = \sin x$$

$$\text{ب) } g(x) = e^{-x}, f(x) = e^x$$

آیا می‌توان رده‌ای کلی از جفت‌های (f, g) بقسمی یافت که همواره به ازای هر عضو این مجموعه، x_1 مساوی $(a + b)/2$ باشد، و چنین جفت‌های (f, g) مذکور در (آ) و (ب) عضو آن باشند؟

۱۴.۵ فرض کنید f تابع مفروضی باشد که در بازهٔ نیم‌باز $0 < x \leq 1$ تعریف

شده و مشتق متناهی داشته باشد. همچنین به ازای هر x از این بازه، $|f'(x)| < 1$. به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، تعریف کنید $a_n = f(1/n)$ ، و نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود دارد. دانهائی. از شرط کشی استفاده کنید.

۱۵.۵ فرض کنید f در هر نقطهٔ بازهٔ باز $[a, b]$ مشتق متناهی داشته باشد. همچنین

در یک نقطهٔ درونی مانند c ، $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ وجود داشته و متناهی باشد. ثابت کنید که مقدار این حد باید مساوی $f'(c)$ باشد.

۱۶.۵ فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و f' ، احتمالاً جز در c ، همه‌جا در

$[a, b]$ متناهی باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow c} f'(x) = A$ ، نشان دهید که $f'(c)$ نیز باید وجود داشته باشد و مساوی A باشد.

۱۷.۵ فرض کنید f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، و $f(0) = 0$. همچنین به ازای

هر x در $[0, 1]$ ، $f'(x)$ متناهی باشد. تابع g را بر $[0, 1]$ با معادلهٔ $g(x) = f(x)/x$ تعریف کنید. ثابت کنید هرگاه f' بر $[0, 1]$ صعودی باشد، آنگاه g نیز بر این بازه صعودی خواهد بود.

۱۸.۵ فرض کنید f در $[a, b]$ مشتق متناهی داشته، و بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

همچنین $f(a) = f(b) = 0$. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی λ ، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست بقسمی که $f'(c) = \lambda f(c)$. دانهائی. به ازای g ی مناسبی که

به λ بستگی دارد، قضیه دل را در مورد $g(x)f(x)$ بکار برید.

۱۹.۵ فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و در بازه $[a, b]$ مشتق دوم متناهی داشته باشد. همچنین پاره خطی که دو نقطه $A = (a, f(a))$ و $B = (b, f(b))$ را به هم وصل می‌کند نمودار f را در نقطه‌ای مانند P متمایز از A و B قطع نماید. ثابت کنید به ازای c ای در $]a, b[$ ، $f'''(c) = 0$.

۲۰.۵ اگر مشتق سوم f ، یعنی f''' ، در $[a, b]$ وجود داشته باشد، f''' در این بازه متناهی باشد، و

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

ثابت کنید به ازای c ای در $]a, b[$ ، $f'''(c) = 0$.

۲۱.۵ فرض کنید f نامنفی، و f''' در بازه $[1, \infty[$ ، $f'''(x) = 0$ ، متناهی باشد. اگر به ازای دست‌کم دو مقدار برای x در $]0, \infty[$ ، $f(x) = 0$ ، ثابت کنید نقطه‌ای مانند c در $]1, \infty[$ هست که به ازای آن $f'''(c) = 0$.

۲۲.۵ فرض کنید f در بازه $[\infty, +\infty[$ مشتق متناهی داشته باشد.

(آ) اگر وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x) \rightarrow 1$ و $f'(x) \rightarrow c$ ، ثابت کنید که $c = 0$.

(ب) اگر وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، $f'(x) \rightarrow 1$ ، ثابت کنید وقتی که

$$f(x)/x \rightarrow 1, x \rightarrow +\infty$$

(ج) اگر وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، $f'(x) \rightarrow 0$ ، ثابت کنید وقتی که

$$f(x)/x \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$$

۲۳.۵ فرض کنید h عدد ثابت مثبتی باشد. نشان دهید که تابعی مانند f نمی‌توان یافت که در هر سه شرط زیرین صدق کند: به ازای $x \geq 0$ ، $f'(x)$ وجود داشته باشد؛ $f'(0) = 0$ ؛ و به ازای $x > 0$ ، $f'(x) \geq h$.

۲۴.۵ اگر $h > 0$ ، $f'(x)$ به ازای هر x در $[a-h, a+h]$ وجود داشته باشد و متناهی باشد، و f بر $[a-h, a+h]$ پیوسته باشد، نشان دهید که:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h) \quad (\Gamma)$$

$$0 < \theta < 1;$$

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} \quad (\text{ب})$$

$$= f'(a+\lambda h) - f'(a-\lambda h), \quad 0 < \lambda < 1.$$

(ج) اگر $f''(a)$ وجود داشته باشد، نشان دهید که

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

(د) مثالی بیاورید که در آن حد خارج قسمت مذکور در (ج) وجود داشته باشد ولی $f''(a)$ وجود پیدا نکند.

۲۵.۵ فرض کنید f در $[a, b]$ مشتق متناهی داشته باشد، و $c \in]a, b[$ شرط ذیل را در نظر بگیرید: به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، گویی یک بعدی مانند $B(c; \delta)$ هست که شعاع آن δ فقط بستگی به ε دارد نه به c ، بقسمی که هرگاه $x \in B(c; \delta)$ و $x \neq c$ ، آنگاه

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

نشان دهید که اگر شرط بالا در سراسر $[a, b]$ برقرار باشد، f' بر این بازه پیوسته است.

۲۶.۵ فرض کنید f در $[a, b]$ مشتق متناهی داشته باشد، و بر $[a, b]$ پیوسته باشد، و به ازای هر x در $[a, b]$ ، $a \leq f(x) \leq b$ ، و به ازای هر x در $]a, b[$ ، $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. ثابت کنید که f در $[a, b]$ فقط یک نقطه ثابت دارد.

۲۷.۵ دو تابع مانند f و g مثال بزنید که در $]a, b[$ دارای مشتقهای متناهی باشند و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

و چنان اختیار شده باشد که $g'(x)$ هرگز صفر نشود و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x)$ وجود نداشته باشد.

۲۸.۵ قضیه زیر را ثابت کنید:

فرض کنید f و g دو تابع باشند که در $]a, b[$ مشتق m متناهی داشته باشند. و نیز فرض کنید به ازای نقطه‌ای درونی در $]a, b[$ مانند c

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0,$$

$$g(c) = g'(c) = \dots = g^{(n-1)}(c) = 0$$

دلی $g^{(n)}(x)$ در $[a, b]$ هرگز صفر نباشد. نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

تصوه. در این قضیه $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ در c پیوسته فرض نشده‌اند. راهنمایی. تابع F را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F(x) = f(x) - \frac{(x-c)^{n-1} f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},$$

تابع G را نیز مشابه F تعریف کرده، سپس قضیه ۲۰.۵ را در مورد تابع F و G بکار برید.

۲۹.۵ نشان دهید که دستور مذکور در قضیه تیلور را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{(x-c)(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_1),$$

که در آن x_1 بین x و c می‌باشد. فرض کنید که $(x-x_1)/(x-c) = 1-\theta$. نشان دهید که $0 < \theta < 1$ و برای جمله باقیمانده، شکل

$$\frac{(1-\theta)^{n-1} (x-c)^n}{(n-1)!} f^{(n)}[\theta x + (1-\theta)c]$$

را، که به کشی منسوب است، نتیجه بگیرید.

راهنمایی. در برهان قضیه ۲۰.۵ فرض کنید $G(t) = g(t) = t$.

تابعهای برداری

۳۰.۵ اگر تابع برداری f در نقطه c مشتقپذیر باشد، ثابت کنید که

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(c+h) - f(c)].$$

برعکس، اگر این حد وجود داشته باشد، ثابت کنید که f در c مشتقپذیر است.

۳۱.۵ تابع برداری f در هر نقطه $[a, b]$ مشتقپذیر است، و دارای هنج پایای

$\|f\|$ می باشد. ثابت کنید که $f(t) \cdot f'(t) = 0$ بر $[a, b]$ است.

۳۲.۵ تابع برداری f هرگز بر \mathbb{R} صفر نمی شود، و مشتق آن بر \mathbb{R} وجود داشته و پیوسته است، اگر تابعی حقیقی مانند λ وجود داشته باشد قسمی که به ازای هر t ، $f'(t) = \lambda(t)f(t)$ ، ثابت کنید تابعی حقیقی و مثبت مانند u و برداری پایا چون c وجود دارند با این خاصیت که به ازای هر t ، $f(t) = u(t)c$.

مشتقهای جزئی

۳۳.۵ تابع f را که بر \mathbb{R}^2 با دستورهای زیر تعریف شده باشد در نظر بگیرید:

$$f(0, 0) = 0 \text{ و } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

ثابت کنید به ازای هر (x, y) در \mathbb{R}^2 ، مشتقهای جزئی $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ وجود دارند، و مقدارهای این مشتقها را به صورت رابطه‌هایی صریح از x و y ارزیابی کنید. همچنین، نشان دهید که f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۳۴.۵ فرض کنید تابع f بر \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(0, 0) = 0 \text{ و } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

مشتقهای جزئی مرتبه اول و دوم f را در مبدأ (در صورت وجود) محاسبه کنید.

تابعهای مختلط

۳۵.۵ فرض کنید S یک مجموعه باز در \mathbb{C} ، و S^* مجموعه همه مزدوجهای مختلط نقطه‌های S باشد. اگر f بر S تعریف شده باشد، g را بر S^* با رابطه زیر تعریف کنید: $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ ، که در آن $\overline{f(z)}$ مزدوج مختلط $f(z)$ است. اگر f در c مشتقپذیر باشد، ثابت کنید که g در \bar{c} مشتقپذیر است و $g'(\bar{c}) = \overline{f'(c)}$.

۳۶.۵ یکم) در هر یک از مثالهای زیر بنویسید $f = u + iv$ ، و $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را با دستورهای صریح بیابید:

- | | | | |
|-----------------------------------|-----|-----------------------------|-----|
| $f(z) = \cos z$ | (ب) | $f(z) = \sin z$ | (آ) |
| $f(z) = \bar{z}$ | (د) | $f(z) = z $ | (ج) |
| $f(z) = \text{Log } z (z \neq 0)$ | (و) | $f(z) = \arg(z) (z \neq 0)$ | (ه) |

(ز) $f(z) = e^{z^2}$ ، (ح) $f(z) = z^\alpha$ (α مختلط است و $z \neq 0$)

(این تابعها را باید چنان تعریف کرد که در فصل ۱ تعریف شده‌اند.)

دوم) نشان دهید که u و v به ازای این مقادیرهای z در معادله‌های کشی - ریمان صدق می‌کنند: در (آ)، (ب)، (ز) به ازای هر z ؛ در (ج)، (د)، (ه) به ازای هیچ z ؛ در (و)، (ح) به ازای هر z جز z هایی که قسمتهای حقیقی آنها نامثبت می‌باشند (در قسمت (ح)، اگر α عدد صحیح نامنفی باشد، معادله‌های کشی - ریمان به ازای هر z ، و اگر α عدد صحیح منفی باشد، این معادله‌ها به ازای هر $z \neq 0$ برقرار خواهند بود.)

سوم) $f'(z)$ را در قسمتهای (آ)، (ب)، (ه)، (ز)، (ح)، با فرض وجود داشتن، محاسبه کنید.

۳۷.۵ بنویسید $f = u + iv$ و فرض کنید f در هر نقطه‌گرده بازی چون D به مرکز $(0, 0)$ مشتق داشته باشد. اگر به ازای عددهائی حقیقی مانند a و b ، که هر دو صفر نباشند، $au^2 + bv^2$ بر D پایا باشد، ثابت کنید که f بر D تابعی است پایا.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

5.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.

5.2 Chaundy, T. W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.

تابعهای با تغییر کراندار و خمهای با درازای متناهی

۱.۶ مقدمه

در فصل ۴ بعضی از خاصیت‌های اساسی تابعهای یکنوا بدست آمد. در این فصل کوتاه بحث ما دربارهٔ تابعهای با تغییر کراندار یا رده‌ای از تابعها است که بسیار به تابعهای یکنوا مربوطند. خواهیم دید که این تابعها با خمهایی که درازی کمان آنها متناهی است (خمهای با درازای متناهی) رابطهٔ بسیار نزدیک دارند. در فصل بعد ملاحظه خواهیم کرد که تابعهای با تغییر کراندار در نظریهٔ انتگرالگیری ریمان-اشتیل‌یس^۱ نیز نقشی برعهده دارند.

۲.۶ خاصیت‌های توابع یکنوا

قضیهٔ ۱.۶ فرض کنیم f بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده، بر این بازه صعودی باشد. همچنین فرض کنیم $1 + n$ نقطهٔ x_0, x_1, \dots, x_n به صورت زیر اختیار شده باشند:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

در این صورت، نامساوی زیرین برقرار است:

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k +) - f(x_k -)] \leq f(b) - f(a).$$

برهان. نقطه y_k را در بازه $[x_k, x_{k+1}]$ اختیار می‌کنیم. به ازای $1 \leq k \leq n-1$ ، داریم $f(x_k +) \leq f(y_k) \leq f(x_k -)$ و $f(y_{k-1}) \leq f(x_k -)$ پس با هم جمع کنیم، مجموع طرف راست نامساوی حاصل توی هم می‌رود و مساوی $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$ می‌گردد. چون $f(y_{n-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$ پس حکم قضیه ثابت است.

تفاضل $f(x_k +) - f(x_k -)$ بی‌تردید، جهش f در x_k است. بنا بر قضیه پیش، به ازای هر دسته متناهی نقطه مانند x_k در $[a, b]$ ، مجموع جهشهای f در این نقطه‌ها همواره به $f(b) - f(a)$ کراندار می‌باشد. این نتیجه را می‌توان برای اثبات قضیه زیرین بکار برد.

قضیه ۲.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا باشد، آنگاه مجموعه ناپیوستگیهای f شمارشپذیر است.

برهان. فرض کنیم f صعودی باشد، و S_m مجموعه نقطه‌هایی در $[a, b]$ باشد که در آنها جهش f از $1/m$ ($m > 0$) کمتر نباشد. اگر نقطه‌های

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$$

در S_m اختیار شوند، بنا بر قضیه ۱.۶،

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a).$$

یعنی S_m باید مجموعه‌ای متناهی باشد. چون مجموعه ناپیوستگیهای f در $[a, b]$ یک زیرمجموعه اجتماع $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ است، پس این مجموعه شمارشپذیر خواهد بود. (در حالتی که f نزولی باشد، اثبات بالا را می‌توان در مورد $f -$ بکار برد.)

۳.۶ تابعهای با تغییر کراندار

تعریف ۳.۶ فرض کنیم $[a, b]$ بازه فشرده‌ای باشد. اگر

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

مجموعه $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ را یک افراز $[a, b]$ می‌نامیم. بازه $[x_{k-1}, x_k]$ را زیربازه k ام P نامیده، می‌نویسیم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. در این صورت $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$. دسته همه افرازهای ممکن $[a, b]$ با نماد $\mathcal{P}[a, b]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده باشد. اگر

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

یک افراز $[a, b]$ باشد، به ازای $n, 1, 2, \dots, k$ می نویسیم

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر افراز $[a, b]$ ،

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M,$$

آنگاه گوئیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

دو قضیه زیرین مثالهایی از تابعهای با تغییر کراندار را بدست می دهند.

قضیه ۵.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ یکنوا باشد، آنگاه f بر این بازه با تغییر کراندار است.

برهان. فرض کنیم f صعودی باشد. در این صورت، به ازای هر افراز $[a, b]$ داریم $\Delta f_k \geq 0$ و در نتیجه

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n \Delta f_k = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

قضیه ۶.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و f' در $[a, b]$ وجود داشته و کراندار باشد، یعنی هرگاه به ازای هر x در $[a, b]$ ، $|f'(x)| \leq A$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

برهان. بنا بر قضیه مقدار میانگین،

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}),$$

که در آن $x_{k-1} < t_k < x_k$. از این نتیجه می شود که

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f'(t_k)| \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^n \Delta x_k = A(b - a).$$

قضیه ۷.۶ هرگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، یعنی هرگاه به ازای هر افراز $[a, b]$ ، $\sum |\Delta f_k| \leq M$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار است. در واقع، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq |f(a)| + M$.

پوهان. فرض می‌کنیم که $x \in]a, b[$ با استفاده از افراز مخصوص $P = \{a, x, b\}$ نتیجه می‌گیریم که

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $|f(x) - f(a)| \leq M$ ، یا

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M.$$

همین نامساوی به‌ازای $x = a$ یا $x = b$ نیز برقرار هست.

چند مثال

۱. بسادگی می‌توان تابع برسته‌ای ساخت که با تغییر کراندار نباشد. مثلاً، تابع

f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = x \cos\{\pi/(2x)\}$ و $f(0) = 0$ بر $[0, 1]$ پیوسته است، ولی اگر افراز

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

را برای $[0, 1]$ در نظر بگیریم، با محاسبه ساده‌ای معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

چون رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگرا است، مجموعه مجموعه‌های بالا، به‌ازای همه مقادیر n ، نمی‌تواند کراندار باشد. در این مثال f' در $[0, 1]$ وجود دارد ولی f' بر این بازه کراندار نیست. اما، چون f' بر هر بازه فشرده‌ای که حاوی مبدأ نباشد کراندار است، پس f بر یک چنین بازه‌هایی با تغییر کراندار خواهد بود.

۲. تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛ اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ و $f(0) = 0$

و f شبیه تابع مذکور در مثال ۱ است. این f بر $[0, 1]$ واقع،

با تغییر کراندار است، زیرا f' بر $[0, 1]$ کراندار می‌باشد. در واقع،

$f'(0) = 0$ و به‌ازای $x \neq 0$ ، $f'(x) = \sin(1/x) + 2x \cos(1/x)$ بنا بر این،

به‌ازای هر x در $[0, 1]$ ، $|f'(x)| \leq 3$.

۳. کراندار بودن f' شرطی لازم برای با تغییر کراندار بودن f نیست. مثلاً،

فرض کنیم که $f(x) = x^{1/3}$. این تابع بر هر بازه متناهی یکنوا (و در نتیجه با تغییر کراندار) است. ولی وقتی که $x \rightarrow 0$ ، $f'(x) \rightarrow +\infty$.

۴.۶ تغییر کل

تعریف ۸.۶ فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و $\sum(P)$ مجموع $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k|$ متناظر با افراز $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ از $[a, b]$ را نشان دهد. عدد

$$V_f(a, b) = \sup\{\sum(P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

را تغییر کل f بر بازه $[a, b]$ می‌نامیم.

تبره. هر جا ابهامی پیش نیاید، به جای $V_f(a, b)$ می‌نویسیم V_f .

چون f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است، پس V_f عددی است متناهی. همچنین، از این که همواره $\sum(P) \geq 0$ ، نتیجه می‌شود که $V_f \geq 0$. بعلاوه، وقتی، و فقط وقتی، $V_f(a, b) = 0$ که f بر $[a, b]$ تابع پایائی باشد.

قضیه ۹.۶ فرض کنیم هر یک از دو تابع f و g بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. در این صورت، مجموع، تفاضل، و حاصل ضرب آنها نیز با تغییر کراندار هستند. همچنین،

$$V_{f,g} \leq AV_f + BV_g \quad \text{و} \quad V_{f+g} \leq V_f + V_g$$

که در آن

$$A = \sup\{|g(x)| \mid x \in [a, b]\}, \quad B = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

برهان. فرض کنیم $h(x) = f(x)g(x)$. به ازای هر افراز P از $[a, b]$ مانند P داریم

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] \\ &\quad + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|. \end{aligned}$$

یعنی h با تغییر کراندار است و $V_h \leq AV_f + BV_g$. چون برهانهای با تغییر کراندار بودن مجموع و تفاضل ساده‌ترند، از بیان آنها در اینجا صرف نظر می‌شود.

تبره. قضیه بالا در مورد خارج قسمت دو تابع برقرار نیست، زیرا متقابل یک

تابع با تغییر کراندار لزوماً تابعی با تغییر کراندار نیست. مثلاً، هرگاه وقتی که $x \rightarrow x_0$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، آنگاه $1/f$ بر هر بازه‌ای حاوی x_0 کراندار نیست، و در نتیجه (بنا بر قضیه ۷.۶)، $1/f$ نمی‌تواند بر چنین بازه‌ای با تغییر کراندار باشد. برای آن که بتوان قضیه ۹.۶ را به‌خارج قسمت تابعها وسعت داد، کافی است تابعهائی را که مقدارهایشان به‌طور دلخواه به‌صفر نزدیک می‌شوند مستثنا نمود.

قضیه ۱۰.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. همچنین f در a کراندار باشد؛ یعنی، عددی مثبت مانند m وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq m$ و $0 < m \leq |f(x)|$ در این صورت $g = 1/f$ نیز بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است، و $V_g \leq V_f/m^2$.

برهان.

$$|\Delta g_k| = \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right| = \left| \frac{\Delta f_k}{f(x_k)f(x_{k-1})} \right| \leq \frac{|\Delta f_k|}{m^2}.$$

۵.۶ خاصیت جمع‌پذیری تغییر کل

در دو قضیه اخیر بازه $[a, b]$ را ثابت نگهداشته، $V_f(a, b)$ را به‌عنوان تابعی از f در نظر گرفتیم. حال اگر f را ثابت انگاشته تغییر کل را به‌عنوان تابعی از بازه $[a, b]$ مورد مطالعه قرار دهیم، می‌توان خاصیت جمع‌پذیری زیر را ثابت نمود.

قضیه ۱۱.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و $c \in [a, b]$ در این صورت، f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار است و

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار است. فرض کنیم P_1 و P_2 ، ترتیب، افرازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند. در این صورت، $P_0 = P_1 \cup P_2$ یک افراز $[a, b]$ خواهد بود. اگر $\sum(P)$ مجموع $\sum |\Delta f_k|$ متناظر با افراز P (از بازه مورد نظر) را نشان دهد، می‌توان نوشت

$$(۱) \quad \sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leq V_f(a, b).$$

این نامساوی نشان می‌دهد که هر مجموع $\sum(P_1)$ و $\sum(P_2)$ به $V_f(a, b)$ کراندار است، و این بدان معنی است که f بر $[a, c]$ و بر $[c, b]$ با تغییر کراندار می‌باشد. بنا بر قضیه ۱۵.۱، از (۱) نامساوی زیر نیز نتیجه می‌شود:

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b).$$

برای بدست آوردن عکس نامساوی بالا، فرض می‌کنیم

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ و $P_0 = P \cup \{c\}$ افزای (احتمالاً جدید) باشد که با اضافه کردن نقطه c به P حاصل می‌گردد. هرگاه $c \in [x_{k-1}, x_k]$ ، آنگاه

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

و در نتیجه، $\sum (P) \leq \sum (P_0)$. حال گوئیم نقطه‌های P_0 در $[a, c]$ و $[c, b]$ یک افراز $[a, c]$ مانند P_1 و یک افراز $[c, b]$ مانند P_2 را بوجود می‌آورند. مجموعه‌های متناظر همهٔ این افرازاها با رابطهٔ زیرین به هم مربوطند:

$$\sum (P) \leq \sum (P_0) = \sum (P_1) + \sum (P_2) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

بنابراین، $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ کرانی بالائی برای هر مجموع $\sum (P)$ است. چون این عدد از کوچکترین کران بالائی کوچکتر نیست، باید داشته باشیم

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b),$$

و برهان قضیه تمام خواهد بود.

۶.۶ تغییر کل بر $[a, x]$ به عنوان تابعی از x

اکنون تابع f و نقطهٔ انتهائی چپ بازه را ثابت نگهداشته، تغییر کل را به عنوان تابعی از نقطهٔ انتهائی راست مورد مطالعه قرار می‌دهیم. از خاصیت جمع‌پذیری نتیجه‌های مهم زیرین برای این تابع حاصل می‌شوند.

قضیهٔ ۱۲.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییرکراندار باشد. تابع V را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $a < x \leq b$ ، $V(x) = V_f(a, x)$ ، $V(a) = 0$. در این صورت:

یکم) V بر $[a, b]$ تابعی صعودی است.

دوم) $V - f$ بر $[a, b]$ تابعی صعودی است.

برهان. اگر $a < x < y \leq b$ ، می‌توان نوشت

$$V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y).$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$. از این روی $V(x) \leq V(y)$ ، و (یکم) برقرار است.

برای اثبات (دوم)، به ازای هر $x \in [a, b]$ ، قرار می‌دهیم

$D(x) = V(x) - f(x)$. در این صورت، اگر $a \leq x < y \leq b$ ، خواهیم داشت

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)] \\ = V_f(x, y) - [f(y) - f(x)].$$

اما از تعریف $V_f(x, y)$ معلوم می‌شود که

$$f(y) - f(x) \leq V_f(x, y).$$

یعنی که $0 \leq D(y) - D(x)$ و (دوم) برقرار خواهد بود.

تبرسه. به ازای برخی از تابعهای f ، تغییر کل $V_f(a, x)$ را می‌توان به صورت انتگرال بیان کرد. (ر. ک. تمرین ۰.۲۰.۷)

۷.۶ نمایش تابعهای با تغییر کراندار به صورت تفاضل تابعهای صعودی

وصف زیبا و ساده‌ترین از تابعهای با تغییر کراندار نتیجه‌ای است از قضیه ۱.۲.۶.

قضیه ۱۳.۶ فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. در این صورت، f بر $[a, b]$ وقتی، و فقط وقتی، با تغییر کراندار است که f را بتوان به صورت تفاضل دو تابع صعودی نشان داد.

برهان. اگر f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، می‌توان نوشت $f = V - D$ که در آن V تابع یاد شده در قضیه ۱۲.۶ است و $D = V - f$. هر دو تابع V و D بر $[a, b]$ صعودی می‌باشند.

عکس مطلب بالا بی‌درنگ از قضیه‌های ۵.۶ و ۹.۶ نتیجه می‌شود.

نمایش یک تابع با تغییر کراندار به صورت تفاضل دو تابع صعودی مطلقاً منحصر بفرد نیست. اگر رابطه $f = f_1 - f_2$ ، که در آن f_1 و f_2 صعودی هستند، برقرار باشد، رابطه $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$ هم، که در آن g تابع صعودی دلخواهی است، برقرار خواهد بود، و صورت اخیر نمایش تازه‌ای است از f . اگر g صعودی اکید باشد، $f_1 + g$ و $f_2 + g$ نیز چنین خواهند بود. بنابراین، اگر در قضیه ۱۳.۶ لفظ «صعودی» را به «صعودی اکید» تبدیل کنیم باز حکم برقرار است.

۸.۶ تابعهای با تغییر کراندار پیوسته

قضیه ۱۴.۶ فرض کنیم تابع f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. اگر $x \in [a, b]$ قرار می‌دهیم $V(x) = V_f(a, x)$ و $V(a) = 0$. در این صورت، هر نقطه پیوستگی f نقطه پیوستگی V نیز هست. و عکس قضیه هم درست است.

برهان. چون V یکنوا است، به ازای هر نقطه در $[a, b]$ مانند x حدهای دست

راستی و چپی $V(x+)$ و $V(x-)$ وجود دارند. بنا بر قضیه ۱۳.۶، $f(x+)$ و $f(x-)$ نیز وجود خواهند داشت.

هرگاه $a < x < y \leq b$ ، آنگاه $[V_f(x, y)]$ با توجه به تعریف $[V_f(x, y)]$ ،

$$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq V(y) - V(x).$$

اگر در رابطه بالا $y \rightarrow x$ ، می بینیم که

$$0 \leq |f(x+) - f(x)| \leq V(x+) - V(x).$$

و، به نحو مشابه، $0 \leq |f(x) - f(x-)| \leq V(x) - V(x-)$ ، نامساویها نتیجه می شود که هر نقطه پیوستگی V نقطه پیوستگی f نیز هست.

برای اثبات عکس این مطلب، فرض کنیم f در نقطه c در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، δ ی مثبتی هست که به ازای آن هرگاه $0 < |x - c| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$ ، به ازای همین ε ، یک افراز $[c, b]$ مانند P نیز، مثلاً، به صورت

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad x_0 = c, \quad x_n = b,$$

وجود دارد بقسمی که

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^n |\Delta f_k|.$$

افزودن نقطه هائی به P موجب بالا رفتن مجموع $\sum |\Delta f_k|$ می شود، پس می توان فرض کرد که $0 < x_1 - x_0 < \delta$. این بدان معنی است که

$$|\Delta f_1| = |f(x_1) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

و چون $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یک افراز $[x_1, b]$ است، نامساوی بالا به صورت زیر درمی آید:

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^n |\Delta f_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + V_f(x_1, b).$$

بنابراین

$$V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon.$$

اما

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(x_1) - V(c) = V_f(a, x_1) - V_f(a, c) \\ &= V_f(c, x_1) = V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon. \end{aligned}$$

بدین ترتیب نشان داده‌ایم که

$$0 < x_1 - c < \delta \quad \text{و} \quad 0 \leq V(x_1) - V(c) < \varepsilon$$

از این رابطه $V(c + \delta) = V(c)$ ثابت می‌شود. با بیانی مشابه می‌توان ثابت کرد که $V(c - \delta) = V(c)$. بنابراین، قضیه برای همه نقطه‌های درونی $[a, b]$ برقرار است. (برای نقطه‌های انتهایی کافی است در استدلال تغییرهای مختصری داد.)

از تلفیق قضیه‌های ۱۴.۶ و ۱۳.۶ قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱۵.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، وقتی، و فقط وقتی، f بر $[a, b]$ با تغییر کران‌داد است که آن را بتوان به صورت تفاضل دو تابع پیوسته صعودی نشان داد.

تبصره. اگر در قضیه بالا لفظ «صعودی» را به «صعودی اکید» تبدیل کنیم، قضیه بازهم برقرار خواهد بود.

بنابر قضیه ۱۳.۶، ناپیوستگیهای یک تابع با تغییرکران‌دار (در صورت وجود) البته باید از نوع ناپیوستگیهای جهشی باشند. بعلاوه، بنابر قضیه ۲.۶، ناپیوستگیهای چنین تابعی تشکیل مجموعه‌ای شمارشپذیر می‌دهند.

۹.۶ خمها و گذرها

فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابعی باشد برداری، که بر بازه فشرده $[a, b]$ در \mathbb{R}^n پیوسته باشد. وقتی t عضوهای $[a, b]$ را بخود بگیرد، $f(t)$ ها مجموعه‌ای از نقطه‌های \mathbb{R}^n را رسم می‌کنند. این مجموعه را نمودار f یا خمی که به وسیله f توصیف شده است می‌نامند. (چون هر خم نقش پیوسته بازه‌ای فشرده است، پس هر خم یک زیرمجموعه فشرده و همبند \mathbb{R}^n می‌باشد) در این‌جا خود f یک گذر نامیده می‌شود. غالباً تصور این که یک خم به وسیله تغییر مکان نقطه متحرکی رسم می‌شود مشکل‌گشا است. بازه $[a, b]$ به صورت یک بازه زمان انگاشته می‌شود، و بردار $f(t)$ وضع نقطه متحرک را در لحظه t نشان می‌دهد. در این تعبیر، تابع f خودش حرکت نامیده می‌شود.

گذرهای مختلف می‌توانند خم واحدی را مشخص کنند. مثلاً، هر یک از دو تابع مختلط

$$f(t) = e^{2\pi i t}, \quad g(t) = e^{-2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

دایره یک‌ه $x^2 + y^2 = 1$ را معین می‌کنند، اما جهت‌های حرکت که به وسیله این دو تابع

مشخص می‌شوند مقابل یکدیگر خواهند بود. همین دایره پنج بار با حرکتی که به وسیله تابع $h(t) = e^{10\pi it}$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، مشخص می‌گردد پیموده می‌شود.

۱۰.۶ گذرهای با درازای متناهی و درازای کمان

اکنون می‌خواهیم مفهوم درازای کمان یک خم را معرفی کنیم. برای این کار خم را به چند ضلعیهای محاط شده در آن نزدیک می‌کنیم. این روشی است که توسط هندسه دانان قدیم بکار برده می‌شد. چون هر خط مستقیم کوتاهترین گذر بین دو نقطه از آن است، از راه شهود درک می‌کنیم که درازای هر چند ضلعی محاط در یک خم نباید از درازای آن خم بیشتر باشد. از این روی، درازای یک خم باید کرانی بالائی برای مجموعه درازاهای همه چند ضلعیهای محاط در آن خم باشد. بنابراین، طبیعی است که درازای یک خم را مساوی کوچکترین کران بالائی مجموعه درازاهای همه چند ضلعیهای محاط ممکن در آن تعریف کنیم.

برای اکثر خمهایی که عملاً با آنها سروکار داریم، تعریف بالا برای درازای کمان تعریف مفیدی است. اما همان طور که بزودی خواهیم دید، خمهایی هستند که مجموعه درازاهای همه چند ضلعیهای محاطی در آنها کران بالائی ندادد. بنابراین، لازم است خمها را به دو رسته تقسیم کنیم: یک رسته آنهایی که دارای درازای کمان هستند، و رسته دیگر آنهایی که، با تعریف بالا، درازای کمان ندارند. هر عضو از رسته اول یک خم با درازای متناهی، و هر عضو از رسته دوم یک خم با درازای نامتناهی نامیده می‌شود.

اکنون مفهومهای بالا را به طریقه صوری بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ گذری در \mathbb{R}^n باشد. به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\},$$

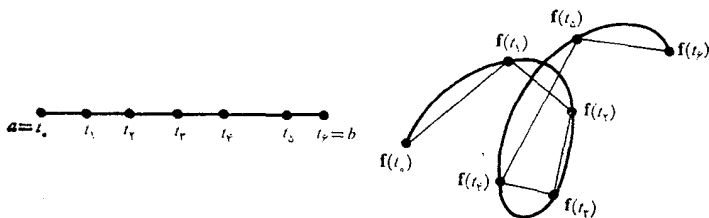
نقطه‌های $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m)$ رأسهای یک چند ضلعی محاطی می‌باشند. (در شکل ۱۰.۶ مثالی در این مورد نشان داده شده است.) درازای این چند ضلعی را با $\Lambda_f(P)$ نشان می‌دهیم و با مجموع زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_f(P) = \sum_{k=1}^m \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|.$$

تعریف ۱۰.۶ هرگاه به ازای همه افرازهای $[a, b]$ مانند P مجموعه عددهای $\Lambda_f(P)$ کراندار باشد، آنگاه گوئیم گذر f با درازای متناهی است، و درازای کمان f را با $\Lambda_f(a, b)$ نشان داده، با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda_f(a, b) = \sup \{ \Lambda_f(P) \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \} .$$

در حالتی که مجموعه $\Lambda_f(P)$ ها پی‌کران باشد، f با درازای نامتناهی نامیده می‌شود.



شکل ۱.۶

سادگی می‌توان همهٔ خمهای با درازای متناهی را مشخص کرد.

قضیهٔ ۱۷.۶ گذر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ با مؤلفه‌های $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، f وقتی، و فقط وقتی، با درازای متناهی است که هر مؤلفهٔ f_k بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. اگر f با درازای متناهی باشد، نامساویهای زیرین را خواهیم داشت:

$$(۲) \quad V_k(a, b) \leq \Lambda_f(a, b) \leq V_1(a, b) + \dots + V_n(a, b) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

که در آنها $V_k(a, b)$ تغییر کل f_k بر $[a, b]$ را نشان می‌دهد.

برهان. اگر $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ یک افراز $[a, b]$ باشد، به ازای هر k این رابطه‌ها برقرارند:

$$(۳) \quad \sum_{i=1}^m |f_k(t_i) - f_k(t_{i-1})| \leq \Lambda_f(P) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |f_j(t_i) - f_j(t_{i-1})| .$$

از رابطهٔ (۳) همهٔ قسمتهای قضیه با آسانی نتیجه می‌شوند.

چند مثال

۱. همان طور که بیشتر ذکر شد، تابع $f(x) = x \cos \{ \pi / (2x) \}$ به ازای

$x \neq 0$ و $f(0) = 0$ ، بر بازه $[0, 1]$ پیوسته است و لسی با تغییر کراندار نیست. بنابراین، نمودار آن یک خم با درازای نامتناهی می باشد.

۲. می توان نشان داد (تمرین ۲۱۰۷) که هرگاه f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f با درازای متناهی است و درازای کمان آن را می توان با انتگرال زیر بیان کرد:

$$\Lambda_f(a, b) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

۱۱.۶ خاصیت‌های جمعپذیری و خاصیت‌های پیوستگی درازای کمان

فرض می کنیم $f = (f_1, \dots, f_n)$ گذری باشد با درازای متناهی که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. در این صورت، هر f_i بر هر زیربازه $[a, b]$ مانند $[x, y]$ با تغییر کراندار خواهد بود. در این بخش f را ثابت نگهداشته، درازای کمان $\Lambda_f(x, y)$ را به عنوان تابعی از بازه $[x, y]$ مورد مطالعه قرار می دهیم. ابتدا یک خاصیت جمعپذیری برای این تابع را ثابت می کنیم.

قضیه ۱۸.۶ اگر $a, b \in c$ ، داریم

$$\Lambda_f(a, b) = \Lambda_f(a, c) + \Lambda_f(c, b).$$

پرهان. با الحاق نقطه c به یک افراز $[a, b]$ مانند P ، بترتیب، افرازهای P_1 و P_2 بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ بدست می آیند بقسمی که

$$\Lambda_f(P) \leq \Lambda_f(P_1) + \Lambda_f(P_2) \leq \Lambda_f(a, c) + \Lambda_f(c, b).$$

از این نتیجه می شود که $\Lambda_f(a, b) \leq \Lambda_f(a, c) + \Lambda_f(c, b)$. برای بدست آوردن عکس این نامساوی، فرض کنیم P_1 و P_2 ، بترتیب، افرازهای دلخواه $[a, c]$ و $[c, b]$ باشند. در این صورت،

$$P = P_1 \cup P_2$$

یک افراز $[a, b]$ است که برای آن داریم

$$\Lambda_f(P_1) + \Lambda_f(P_2) = \Lambda_f(P) \leq \Lambda_f(a, b).$$

چون سوپریم همه $\Lambda_f(P_1) + \Lambda_f(P_2)$ ها مساوی مجموع

$$\Lambda_f(a, c) + \Lambda_f(c, b)$$

است (ر.ک. قضیه ۱۵.۱)، پس قضیه برقرار است.

قضیه ۱۹.۶ گذر با درازای متناهی f را که بر $[a, b]$ تعریف شده است در نظر می‌گیریم. اگر $x \in]a, b]$ قرار می‌دهیم $s(x) = \Lambda_f(a, x)$ و $s(a) = 0$. در این صورت:

یکم) تابع s بر $[a, b]$ صعودی و پیوسته است.
دوم) هرگاه f بر هیچ یک از زیربازه‌های $[a, b]$ پایا نباشد، آنگاه s بر $[a, b]$ صعودی اکید خواهد بود.

برهان. اگر $a \leq x < y \leq b$ ، با توجه به قضیه ۱۸.۶ داریم

$$s(y) - s(x) = \Lambda_f(x, y) \geq 0.$$

یعنی، s بر $[a, b]$ صعودی است. بعلاوه، $s(y) - s(x) > 0$ مگر آن که $\Lambda_f(x, y) = 0$. اما، بنا بر نامساوی (۲)، از $\Lambda_f(x, y) = 0$ نتیجه می‌شود که به ازای هر k ، $V_k(x, y) = 0$ و این به نوبه خود نتیجه می‌دهد که f بر $[x, y]$ تابعی است پایا. بنا بر این (دوم) برقرار است.
برای اثبات پیوستگی s ، بار دیگر از نامساوی (۲) استفاده نموده می‌نویسیم

$$0 \leq s(y) - s(x) = \Lambda_f(x, y) \leq \sum_{k=1}^n V_k(x, y).$$

حال اگر در رابطه بالا $x \rightarrow y$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر k ، $V_k(x, y) \rightarrow 0$ و در نتیجه $s(x) = s(x +)$ بهمین نحو، $s(x) = s(x -)$ و بدین ترتیب برهان قضیه تمام است.

۱۲.۶ هم ارزی گذرها. تغییر پرما

در این بخش رده گذرهای را توصیف می‌کنیم که همه دارای یک نمودارند. فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ گذری در \mathbb{R}^n باشد، و $u: [c, d] \rightarrow [a, b]$ تابعی حقیقی، پیوسته، و یکنوا ای اکید بر $[c, d]$ با برد $[a, b]$ باشد. در این صورت، تابع مرکب $g = f \circ u$ ، که با رابطه

$$g(t) = f[u(t)]$$

مشخص شده است، گذری است که نمودار آن با نمودار f یکی است. دو گذر f و g را که به طریق بالا به هم مربوط باشند هم‌ارز نامیده، گوئیم این دو نمایشهای پرمائی مختلف یک خم می‌باشند. همچنین گوئیم تابع u یک تغییر پرما را تعریف می‌نماید.

فرض کنیم C نمودار مشترک دو گذر هم ارز f و g باشد. اگر u صعودی اکید باشد، گوئیم f و g خم C را در یک جهت رسم می کنند. اگر u نزولی اکید باشد، می گوئیم f و g خم C را در دو جهت مقابل رسم می نمایند. در حالت اول u را جهت نگهدار، و در حالت دوم، آن را جهت برگردان نام می گذاریم.

قضیه ۲۰.۶ فرض کنیم $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ دو گذر در \mathbb{R}^n باشند بقسمی که هر یک بر قلمرو خود یک به یک باشد. در این صورت، f و g وقتی، و فقط وقتی، هم‌ارزند که این دو گذر دارای یک نمودار باشند.

پروهان. گذرهای هم ارز لزوماً دارای یک نمودار خواهند بود. برای اثبات عکس آن، فرض کنیم f و g دارای یک نمودار باشند. چون f بر مجموعه فشرده $[a, b]$ یک به یک و پیوسته است، پس بنا بر قضیه ۲۹.۴، f^{-1} وجود دارد و بر نمودار f پیوسته می باشد. حال اگر $t \in [c, d]$ ، تعریف می کنیم:

$$u(t) = f^{-1}[g(t)].$$

u بر $[c, d]$ پیوسته است و $g(t) = f[u(t)]$. می توان تحقیق کرد که u یکنوای اکید است، و در نتیجه f و g گذرهای هم ارز می باشند.

تمرین

تابعهای با تغییر کراندار

۱.۶ تعیین کنید کدام از تابعهای زیرین بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است.

(آ) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ، و $f(0) = 0$.

(ب) اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = \sqrt{x} \sin(1/x)$ ، و $f(0) = 0$.

۲.۶ فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. گوئیم f در شرط لیب-شیتس یکشکل از مرتبه $\alpha > 0$ بر $[a, b]$ صدق می کند در صورتی که عددی پایا مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر x و y در $[a, b]$ ،

$$|f(x) - f(y)| < M |x - y|^\alpha.$$

(این تعریف را با تعریف مذکور در تمرین ۱.۵ مقایسه کنید.)

(آ) فرض کنید f یک چنین تابعی باشد. نشان دهید که اگر $\alpha > 1$ ، f بر $[a, b]$ پایا است، حال آن که اگر $\alpha = 1$ ، f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است.

ب) تابعی مانند f بقسمی مثال بزنید که در شرط لیب شیتس یکشکل از مرتبه $\alpha < 1$ بر $[a, b]$ صدق کند ولی بر $[a, b]$ با تغییر کراندار نباشد.

ج) تابعی مانند f بقسمی مثال بزنید که بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد ولی در شرط لیب شیتس یکشکل بر $[a, b]$ از هیچ مرتبه‌ای صدق نکند.

۳.۶ نشان دهید که یک چند جمله‌ای مانند f بر هر بازه فشرده مانند $[a, b]$ با تغییر کراندار است. اگر صفرهای f' دانسته فرض شوند، روشی را توصیف کنید که به وسیله آن بتوان تغییرکل f را بر $[a, b]$ بندست آورد.

۴.۶ فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد ناتهی از تابعهای حقیقی که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده‌اند. S را یک فضای خطی از تابعها نامیم در صورتی که دارای دو خاصیت زیرین باشد:

آ) هرگاه $f \in S$ ، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی c ، $cf \in S$ ؛
 ب) هرگاه $f, g \in S$ ، آنگاه $f + g \in S$.

بنا به قضیه ۹.۶، چنانچه V مجموعه همه تابعهای با تغییر کراندار بر $[a, b]$ باشد، V یک فضای خطی از تابعها خواهد بود. اگر S یک فضای خطی، و حاوی همه تابعهای یکنوا بر $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که $V \subseteq S$. این مطلب را می‌توان به این طریق توصیف کرد که بگوئیم تابعهای با تغییر کراندار تشکیل کوچکترین فضای خطی را می‌دهند که حاوی همه تابعهای یکنوا می‌باشد.

۵.۶ فرض کنید تابع حقیقی f بر بازه $[0, 1]$ تعریف شده باشد بقسمی که $0 < f(0)$ ، به ازای هر x ، $f(x) \neq x$ ، و هرگاه $x \leq y$ ، آنگاه $f(x) \leq f(y)$. قرار دهید $A = \{x \mid f(x) > x\}$. ثابت کنید که

$$\sup A \in A, \text{ و } 1 > f(1)$$

۶.۶ هرگاه تابع f همه‌جا در \mathbb{R}^1 تعریف شده باشد، آنگاه گوئیم f بر $[-\infty, +\infty]$ با تغییر کراندار است در صورتی که f بر هر بازه متناهی با تغییر کراندار باشد، و همچنین عدد مثبتی مانند M باشد بقسمی که به ازای هر بازه فشرده مانند $[a, b]$ ، $V_f(a, b) < M$ ، در این صورت، تغییر کل f را بر $[-\infty, +\infty]$ مساوی سوپریم مجموعه همه عددهای

$$V_f(a, b), -\infty < a < b < +\infty,$$

تعریف می‌نمائیم، و با نماد $V_f(-\infty, +\infty)$ نشان می‌دهیم. تعریفهای مشابهی

برای بازه‌های نامنتهای نیمباز $[a, +\infty[$ و $]-\infty, b]$ وجود دارند.

(آ) مشابه قضیه‌های ۷.۶، ۹.۶، ۱۰.۶، ۱۱.۶ و ۱۲.۶ را برای بازه نامنتهای $]-\infty, +\infty[$ بیان و ثابت کنید.

(ب) اگر در قضیه ۵.۶ به جای لفظ «یکنوا»، «کراندار و یکنوا» قرار دهیم، نشان دهید که قضیه حاصل برای بازه $]-\infty, +\infty[$ درست است. مشابه این اصلاح را در مورد قضیه ۱۳.۶ بیان و سپس آن را ثابت کنید.

۷.۶ فرض کنیم f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد و

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b].$$

طبق معمول، می‌نویسیم $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ ، $k = 1, 2, \dots, n$ ،
تعریف می‌کنیم

$$A(P) = \{k \mid \Delta f_k > 0\}, B(P) = \{k \mid \Delta f_k < 0\}.$$

عددهای

$$p_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in A(P)} \Delta f_k \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}$$

و

$$n_f(a, b) = \sup \left\{ \sum_{k \in B(P)} |\Delta f_k| \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}$$

را، بترتیب، تغییرهای مثبت و منفی f بر $[a, b]$ می‌نامند. به ازای هر x در $[a, b]$ فرض می‌کنیم $p(x) = p_f(a, x)$ ، $V(x) = V_f(a, x)$

$$V(a) = p(a) = n(a) = 0 \text{ و } n(x) = n_f(a, x)$$

نشان دهید که:

$$V(x) = p(x) + n(x) \quad (\text{آ})$$

$$0 \leq n(x) \leq V(x) \text{ و } 0 \leq p(x) \leq V(x) \quad (\text{ب})$$

(ج) p و n بر $[a, b]$ صعودی‌اند.

(د) قسمت (د) برهان دیگری از $f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$.

قضیه ۱۳.۶ را بدست می‌دهد.

$${}^2 p(x) = V(x) + f(x) - f(a) \quad (\text{ه})$$

$${}^2 n(x) = V(x) - f(x) + f(a).$$

(و) هر نقطه پیوستگی f یک نقطه پیوستگی p و n نیز هست.

خمها

۸.۶ فرض کنید دو تابع مختلط f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\text{اگر } f(t) = e^{2\pi it}, t \in [0, 1], \text{ و اگر } g(t) = e^{2\pi it}, t \in [0, 2]$$

(آ) ثابت کنید f و g دارای یک نمودارند، ولی بر حسب تعریف بخش ۱۲.۶ با یکدیگر هم ارز نیستند.

(ب) ثابت کنید که درازای g دو برابر درازای f می باشد.

۹.۶ فرض کنید f گذری باشد با درازای متناهی با درازای L که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. همچنین f بر هیچ یک از زیر بازه های $[a, b]$ پایا نباشد. فرض کنید که s تابع درازای کمان باشد که به این صورت تعریف می شود:

$$\text{اگر } s(a) = 0 \text{ و } s(x) = \Lambda_f(a, x), a < x \leq b$$

(آ) ثابت کنید که s^{-1} وجود دارد و بر بازه $[0, L]$ پیوسته است.

(ب) اگر $t \in [0, L]$ ، تعریف کنید $g(t) = f[s^{-1}(t)]$ ، و نشان دهید که g هم ارز f است. چون $f(t) = g[s(t)]$ ، گوئیم تابع g نمایشی برای نمودار f با پرمای درازای کمان بدست می دهد.

۱۰.۶ فرض کنید f و g بر $[a, b]$ دو تابع حقیقی، پیوسته، و با تغییر کراندار باشند. بعلاوه، به ازای هر x در $]a, b[$ ،

$$f(a) = g(a) \text{ و } f(b) = g(b), 0 < f(x) < g(x)$$

فرض کنید تابع مختلط h بر بازه $[a, 2b - a]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{اگر } h(t) = t + if(t), a \leq t \leq b$$

$$\text{اگر } h(t) = 2b - t + ig(2b - t), b \leq t \leq 2b - a$$

(آ) نشان دهید که h یک خم با درازای متناهی مانند Γ را توصیف می کند.

(ب) به وسیله ترسیم، رابطه هندسی موجود بین f ، g ، و h را توضیح دهید.

(ج) نشان دهید که مجموعه نقطه های

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

ناحیه ای است در \mathbb{R}^2 که کرانه آن خم Γ می باشد.

د) فرض کنید H تابعی باشد مختلط که بر بازه $[a, 2b - a]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$H(t) = t - \frac{1}{\gamma} i [g(t) - f(t)] \quad , a \leq t \leq b$$

اگر

$$H(t) = t + \frac{1}{\gamma} i [g(2b - t) - f(2b - t)] \quad , b \leq t \leq 2b - a$$

نشان دهید که خم Γ_0 توصیف شده به وسیله H با درازای متناهی است، و کرانه ناحیه

$$S_0 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \\ f(x) - g(x) \leq 2y \leq g(x) - f(x)\}$$

می باشد.

ه) نشان دهید که محور x خط تقارن S_0 می باشد. (ناحیه S_0 را متقارن شده S بر حسب محور x می نامند.)

و) نشان دهید که درازای Γ_0 از درازای Γ بیشتر نیست.

تابعهای پیوسته مطلق

تابع حقیقی f را که بر $[a, b]$ تعریف شده است بر این بازه پیوسته مطلق نامیم در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ مثبتی وجود داشته باشد بقسمی که هرگاه به ازای n زیربازه باز از هم جدای $[a, b]$ مانند $[a_k, b_k]$ ، $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ ، آنگاه

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon .$$

در نظریه انتگرالگیری و مشتقگیری لبگ با تابعهای پیوسته مطلق سروکار خواهیم داشت. تمرینهای زیرین برخی از خاصیتهای مقدماتی این تابعها را بدست می دهند.

۱۱.۶ ثابت کنید هر تابع پیوسته مطلق بر $[a, b]$ بر این بازه پیوسته و با تغییر کراندار است.

تبره. تابعهایی هستند که پیوسته و با تغییر کراندارند ولی پیوسته مطلق نیستند.

۱۲.۶ ثابت کنید اگر f در شرط لیپ شیتس یکشکل از مرتبه ۱ بر $[a, b]$ صدق کند، f پیوسته مطلق است. (ر. ک. تمرین ۰.۲.۶)

۱۳.۶ اگر f و g بر $[a, b]$ پیوسته مطلق باشند، ثابت کنید تابعهای $|f|$ ، cf (c پایا است)، $f + g$ ، $f \cdot g$ ، f/g (اگر g دور از صفر کراندار باشد) نیز پیوسته مطلق می باشند.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

6.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1967.

6.2 Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. 1, rev. ed. Leo F. Boron, translator. Ungar, New York, 1961.



انتگرال ریمان - اشتیل یس

۱۰۷ مقدمه

در حساب دیفرانسیل و انتگرال اساساً با دو مسأله هندسی سروکار داریم: یکی تعیین خط مماس بر یک خم، و دیگری پیدا کردن سطح ناحیه‌ای که زیر یک خم قرار داشته باشد. مسأله اول به کمک عمل حدگیری، به نام مشتقگیری؛ مسأله دوم با عمل دیگری از همان نوع، به نام انتگرالگیری (که در این فصل به آن می‌پردازیم) مطالعه می‌شوند.

خواننده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به یاد دارد که اگر f تابعی فرض شود که بر بازه $[a, b]$ مثبت باشد، برای یافتن مساحت ناحیه‌ای از صفحه که زیر نمودار این تابع است بازه $[a, b]$ را به تعدادی متناهی، مثلاً n ، زیربازه تقسیم می‌کنیم؛ اگر درازای زیربازه k ام را Δx_k بنامیم و نقطه دلخواهی در این زیربازه باشد، مجموع $\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$ را در نظر می‌گیریم. چنین مجموعی یک مقدار تقریبی است از مساحت مورد نظر که به کمک مستطیله‌ها بدست می‌آید. هرگاه f در $[a, b]$ به قدر کافی خوش رفتار باشد (مثلاً پیوسته باشد)، آنگاه وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، یعنی اگر تقسیمها را ظریفتر و ظریفتر کنیم، امید می‌رود که مجموع مذکور به حدهی بگراید. آنچه گفته شد، به‌طور سطحی، تعریف ریمان است از انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ (تعریف دقیق آن اندکی بعد داده خواهد شد).

دو مفهوم مشتق و انتگرال به‌طور کاملاً متفاوت عرضه می‌شوند. اما عجب آن که رابطه‌ای بسیار نزدیک با یکدیگر دارند. هرگاه انتگرال معین تابع پیوسته f را به‌عنوان تابعی از حد بالائی آن در نظر بگیریم، یعنی بنویسیم

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

آنگاه F مشتق دارد و $F'(x) = f(x)$. این نتیجه مهم نشان می‌دهد که عملهای مشتقگیری و انتگرالگیری، بمفهومی، معکوس یکدیگرند.

در این فصل عمل انتگرالگیری را تا حدی بتفصیل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این جا انتگرال ریمان-اشتیل پس را، که مفهومی کلیتر از انتگرال ریمان است، در نظر می‌گیریم. این انتگرال متضمن دو تابع f و α می‌باشد، یعنی به صورت $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ (یا علامتی مشابه) خواهد بود. انتگرال ریمان معمولی حالت خاص انتگرال ریمان-اشتیل پس است که در آن $\alpha(x) = x$. تعریف به صورتی است که وقتی α مشتق پیوسته داشته باشد، انتگرال ریمان-اشتیل پس $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ تبدیل به انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$ می‌شود. اما، اگر α مشتقپذیر نباشد یا حتی اگر ناپیوسته باشد، ممکن است انتگرال ریمان-اشتیل پس برای آن معنی داشته باشد. در واقع، اهمیت انتگرال اشتیل پس وقتی ظاهر می‌شود که α ناپیوسته باشد. با انتخاب α ناپیوسته مناسبی، می‌توان یک مجموع متناهی یا نامتناهی را به صورت انتگرال اشتیل پس درآورد، و سپس جمع‌بندی و انتگرالگیری ریمان معمولی به صورت حالت‌های خاصی از انتگرال ریمان-اشتیل پس در می‌آیند. در قسمت مربوط به پخش جرم در فیزیک، می‌توان با استفاده از انتگرال ریمان-اشتیل پس مسأله‌هایی را که در آنها جرم در قسمتی مجزا و در قسمت دیگر پیوسته باشد حل کرد. در نظریه ریاضی احتمال، انتگرال ریمان-اشتیل پس وسیله بسیار مفیدی است برای بحث همزمان درباره متغیرهای تصادفی مجزا و پیوسته.

در فصل ۱۰ تعمیم دیگری از انتگرال ریمان به نام انتگرال لِبگ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۲.۷ نمادگذاری

برای اختصار، نمادها و اصطلاحهای موجود در این فصل را با شرطهای زیرین بکار می‌بریم: اولاً، بازه $[a, b]$ همواره فشرده است. ثانیاً، همه تابع‌هایی که بانمادهای f, g, α, β ، و مانند اینها، نشان داده شوند تابع‌هایی حقیقی هستند که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده و کران‌دار می‌باشند، مگر آن که خلاف آن تصریح شود. در بخش ۲.۷.۷ به تابع‌های مختلط می‌پردازیم، و توسعه مطالب این فصل به تابع‌های بی‌کران و بازه‌های نامتناهی در فصل ۱۰ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

همان‌طور که در فصل ۱۰ گفته شد، منظور از یک افراز $[a, b]$ مانند P مجموعه‌ای متناهی است از نقطه‌ها، مثلاً،

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

بقسمی که $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ می‌گویند افراز P' از P ظریفتر است (یا یک تطریف P است) در صورتی که $P \subseteq P'$. (این مطلب به صورت $P' \supseteq P$ نیز نشان داده می‌شود.) علامت تفاضل

$$\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$$

را نشان می‌دهد، پس

$$\sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a).$$

مجموعه همه افرازهای ممکن $[a, b]$ را با نماد $\mathcal{P}[a, b]$ نشان می‌دهیم.

هنج افراز P عبارت است از درازای بزرگترین زیر بازه P و با نماد $\|P\|$ نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که

$$P' \supseteq P \text{ نامساوی } \|P'\| \leq \|P\| \text{ را ایجاب می‌کند.}$$

یعنی، تطریف یک افراز هنج آن را زیاد نمی‌کند، اما عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست.

۳.۷ تعریف انتگرال ریمان - اشتیل یس

* تعریف ۱.۷ فرض کنیم $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$ ، و t_k نقطه‌ای در زیر بازه $[x_{k-1}, x_k]$ باشد. هر مجموع به شکل

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k$$

را یک مجموع ریمان - اشتیل یس f بر حسب α می‌نامیم. گوئیم f بر حسب α بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد در صورتی که عددی مانند A با این خاصیت وجود داشته باشد: به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک افراز $[a, b]$ مانند P_ε باشد بقسمی که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε و هر انتخاب نقطه‌های t_k در $[x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$. در این صورت، می‌نویسیم « $f \in R(\alpha)$ » است. $[a, b]$

اگر عددی مانند A با خاصیت مذکور در بالا وجود داشته باشد، این عدد منحصر بفرد است و آن را با نماد $\int_a^b f d\alpha$ یا با $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین می‌گوئیم که انتگرال ریمان - اشتیل یس $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد. تابعهای f

و α ، بترتیب، انتگرالده و انتگرالگیر نامیده می‌شوند. در حالت خاص که $\alpha(x) = x$ ، به جای $S(P, f, \alpha)$ نماد $S(P, f)$ ، و به جای $f \in R(\alpha)$ نماد $f \in R$ را بکار خواهیم برد. انتگرال در این حالت خاص انتگرال ریمان نامیده، با نماد $\int_a^b f dx$ یا $\int_a^b f(x) dx$ نشان داده می‌شود. مقدار عددی $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ فقط به f, α, a ، و بستگی دارد، و از علامت x مستقل است. حرف x یک «متغیر فریبان» است و می‌توان آن را با هر علامت مناسب دیگری عوض کرد.

تبصره. تعریف بالا یکی از چند تعریف مورد قبول انتگرال ریمان - اشتیلینس است. تعریف دیگری (که هم ارز این تعریف نیست) در تمرین ۳۰۷ بیان شده است.

۴.۷ خاصیت‌های خطی

بسادگی می‌توان ثابت کرد که عمل انتگرال هم بر انتگرالده و هم بر انتگرالگیر خطی است. این مطالب موضوع دو قضیه زیرین است.

قضیه ۲۰۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، آنگاه به ازای هر دو پایای c_1 و c_2 ، $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) d\alpha = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b g d\alpha.$$

برهان. فرض می‌کنیم $h = c_1 f + c_2 g$. به ازای یک افراز مفروض $[a, b]$ مانند P ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} S(P, h, \alpha) &= \sum_{k=1}^n h(t_k) \Delta\alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta\alpha_k \\ &= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha). \end{aligned}$$

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که $P \supseteq P'_\varepsilon$ نامساوی $|S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon$ را ایجاب کند. همچنین P''_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که $P \supseteq P''_\varepsilon$ نامساوی $|S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha| < \varepsilon$ را ایجاب کند. با فرض $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ معلوم می‌شود که اگر P ظریفتر از P_ε باشد،

$$|S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f d\alpha - c_2 \int_a^b g d\alpha| \leq |c_1| \varepsilon + |c_2| \varepsilon,$$

و از این قضیه باثبات می‌رسد.

قضیه ۳۰۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $f \in R(\beta)$ بر $[a, b]$ باشند، آنگاه به ازای هر دو

پایای c_1 و c_2 ، $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b f d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f d\alpha + c_2 \int_a^b f d\beta.$$

برهان شبیه برهان قضیه ۲.۷ است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.
قضیه زیرین بنوعی با دو قضیه بالا مشابه است. بنابراین قضیه، انتگرال
برحسب بازه انتگرالگیری خاصیت جمعپذیری نیز دارد.

قضیه ۴.۷ فرض کنیم $c \in]a, b[$ هرگاه دوتا از سه انتگرال (ابطه ۱) وجود داشته
باشند، آنگاه سومی نیز وجود دارد و داریم

$$(1) \quad \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

برهان. فرض می‌کنیم P یک افراز $[a, b]$ باشد بقسمی که $c \in P$ در
این صورت،

$$P' = P \cap [a, c] \quad \text{و} \quad P'' = P \cap [c, b]$$

بترتیب، افرازهای $[a, c]$ و $[c, b]$ خواهند بود. مجموعهای ریمان - اشتیل یس
برای این افرازها با معادله زیر به هم مربوطند:

$$S(P, f, \alpha) = S(P', f, \alpha) + S(P'', f, \alpha).$$

حال فرض کنیم $\int_a^c f d\alpha$ و $\int_c^b f d\alpha$ وجود داشته باشند. در این صورت، به
ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک افراز $[a, c]$ مانند P'_ε هست بقسمی که
هرگاه P' از P'_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

و یک افراز $[c, b]$ مانند P''_ε وجود دارد بقسمی که
هرگاه P'' از P''_ε ظریفتر باشد، آنگاه

$$\left| S(P'', f, \alpha) - \int_c^b f d\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

در این صورت، $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ یک افراز $[a, b]$ است بقسمی که هرگاه
 P_ε از P ظریفتر باشد، آنگاه $P' \supseteq P'_\varepsilon$ و $P'' \supseteq P''_\varepsilon$ در نتیجه، اگر P ظریفتر از
 P_ε باشد، می‌توان با تلفیق نتیجه‌های بالا نامساوی

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^c f d\alpha - \int_c^b f d\alpha \right| < \varepsilon$$

را بدست آورد. از این ثابت می شود که $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و مساوی

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

می باشد. حالت های دیگر این قضیه شبیه به آنچه گفته شد ثابت می شوند و خواننده می تواند آن را باسانی تحقیق کند.

به کمک استقرای ریاضی، می توان قضیه ای مشابه بالا برای حالتی که $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیر بازه تجزیه شده باشد ثابت نمود.

تبصره. اگر $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^c f d\alpha$ نیز وجود دارد، ولی آن را نمی توان با دلیلی مشابه دلیل مذکور در بالا ثابت نمود. این مطلب، برای وقتی که انتگرالگیر α با تغییر کراندار باشد، بعداً در قضیه ۲۵.۷ ثابت خواهد شد.

تعریف ۵.۷ اگر $a < b$ و $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ (مساوی $\int_a^b f d\alpha - \int_a^b f d\alpha$ تعریف می کنیم، و نیز $\int_a^a f d\alpha$ (مساوی صفر تعریف می نمایم. بنا به تعریف بالا، معادله مذکور در قضیه ۴.۷ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f d\alpha + \int_b^c f d\alpha + \int_c^a f d\alpha = 0.$$

۵.۷ انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء

در انتگرال ریمان - اشتیل یس ارتباط قابل ملاحظه ای بین انتگرالده و انتگرالگیر وجود دارد. اگر $\int_a^b f d\alpha$ وجود داشته باشد، انتگرال $\int_a^b \alpha df$ نیز وجود خواهد داشت و بعکس. علاوه، رابطه بسیار ساده ای بین این دو انتگرال برقرار می باشد.

* قضیه ۶.۷ هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $\alpha \in R(f)$ بر $[a, b]$ است و

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

تبصره. معادله بالا به دستور انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء معروف است. این معادله بنوعی یک قانون تقابل برای انتگرال می باشد.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد، پس یک افراز $[a, b]$ مانند P_ε هست که به ازای هر افراز ظریفتر از آن مانند P' ،

$$(۲) \quad |S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon.$$

مجموع ریمان-اشتیل یس دلخواهی برای انتگرال $\int_a^b \alpha df$ در نظر می‌گیریم، مثلاً،

$$S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) \Delta f_k = \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^n \alpha(t_k) f(x_{k-1}),$$

که در آن P از P_ε ظریفتر باشد. با فرض $A = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a)$ ، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$A = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \alpha(x_{k-1}).$$

با تفریق دو معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) [\alpha(x_k) - \alpha(t_k)] + \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) [\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})].$$

با تلفیق دو مجموع طرف راست مجموعی به شکل $S(P', f, \alpha)$ بدست می‌آید، که در آن P' آن افراز $[a, b]$ است که از همهٔ نقطه‌های x_k و t_k با هم ساخته شده است. در این صورت، P' از P ، و در نتیجه از P_ε ، ظریفتر است. بنا براین، نامساوی (۲) به ازای آن معتبر می‌باشد، یعنی اگر P از P_ε ظریفتر باشد،

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon.$$

اما این درست بدین معنی است که انتگرال $\int_a^b \alpha df$ وجود دارد و مساوی $A - \int_a^b f d\alpha$ است.

۶.۷ تغییر متغیر در انتگرال ریمان - اشتیل یس

قضیه ۷.۷ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، g بر بازهٔ S با نقطه‌های انتهائی c و d تعریف شده و بر آن تابعی پیوسته و یکنواکد باشد. همچنین $a = g(c)$ و $b = g(d)$. فرض کنید تابعهای مرکب h و β به صورت زیرین

تعریف شده باشند:

$$\beta(x) = \alpha[g(x)] \text{ و } h(x) = f[g(x)], x \in S \text{ اگر}$$

در این صورت، $h \in R(\beta)$ بر S است، و داریم $\int_a^b f d\alpha = \int_c^d h d\beta$ یعنی،

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(t) d\alpha(t) = \int_c^d f[g(x)] d\{\alpha[g(x)]\}.$$

پرهان. برای معین بودن وضع، فرض می‌کنیم g بر S صعودی اکید باشد. (این ایجاب می‌کند که $d < c$) در این صورت، تابع g یک به یک است، و g^{-1} بر $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته و صعودی اکید می‌باشد. بنابراین، متناظر با هر افراز $P = \{y_0, \dots, y_n\}$ بازه $[c, d]$ یک، و فقط یک، افراز $[a, b]$ مانند $P' = \{x_0, \dots, x_n\}$ وجود دارد که $x_k = g(y_k)$ در حقیقت، می‌توان نوشت

$$P = g^{-1}(P') \text{ و } P' = g(P)$$

بعلاوه، اگر P را ظریف کنیم، افراز متناظر آن، یعنی P' ، نیز ظریف خواهد شد، و بعکس.

حال اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، یک افراز $[a, b]$ مانند P'_ε هست قسمی که به‌ازای هر افراز P' ظریفتر از P'_ε ، $|S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon$ ، فرض می‌کنیم $P_\varepsilon = g^{-1}(P'_\varepsilon)$ و $[c, d]$ افراز متناظر P_ε باشد. مجموع ریمان - اشتیلیس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S(P, h, \beta) = \sum_{k=1}^n h(u_k) \Delta\beta_k,$$

که در آن $\Delta\beta_k = \beta(y_k) - \beta(y_{k-1})$ و $u_k \in [y_{k-1}, y_k]$ و $x_k = g(y_k)$ و $t_k = g(u_k)$ یک افراز $P' = \{x_0, \dots, x_n\}$ نگاه P'_ε می‌باشد. بعلاوه، چون $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ پس

$$\begin{aligned} S(P, h, \beta) &= \sum_{k=1}^n f[g(u_k)] \{\alpha[g(y_k)] - \alpha[g(y_{k-1})]\} \\ &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\} = S(P', f, \alpha). \end{aligned}$$

بنابراین، $|S(P, h, \beta) - \int_a^b f d\alpha| < \varepsilon$ و حکم ثابت است.

بمورد این قضیه خصوصاً در مورد انتگرالهای ریمان بکار برده می‌شود (یعنی،

وقتی که $x = \alpha(x)$. کمی بعد قضیه دیگری از این نوع برای انتگرالهای ریمان ثابت می‌شود که در آن g لزوماً یکنوا نیست. (ر. ک. قضیه ۳۶.۷)

۷.۷ تحویل انتگرال ریمان - اشتیل یس به انتگرال ریمان

بنابر قضیه زیرین، اگر α مشتق پیوسته داشته باشد، در انتگرال $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ می‌توان $\alpha'(x) dx$ را به جای $d\alpha(x)$ قرار داد.

قضیه ۸.۷ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، و α بر این بازه مشتق پیوسته داشته باشد. در این صورت، انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) \alpha'(x) dx$ وجود دارد و داریم

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

برهان. با فرض $g(x) = f(x) \alpha'(x)$ ، مجموع ریمان زیرین را در نظر می‌گیریم:

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \alpha'(t_k) \Delta x_k.$$

با افراز P و t_k های انتخاب شده در بالا، مجموع ریمان - اشتیل یس زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k.$$

بنابر قضیه مقدار میانگین، می‌توان نوشت

$$\Delta \alpha_k = \alpha'(v_k) \Delta x_k, \quad v_k \in]x_{k-1}, x_k[\text{ که در آن}$$

و در نتیجه

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^n f(t_k) [\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)] \Delta x_k.$$

چون f کراندار است، پس عددی مانند $M > 0$ هست بقسمی که به ازای هر x در $[a, b]$ ، $|f(x)| \leq M$. از فرض پیوستگی α' بر $[a, b]$ معلوم می‌شود که α' بر این بازه پیوسته یکشکل است. بنابراین، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، δ مثبتی (فقط تابع ε) وجود دارد بقسمی که هرگاه $0 \leq |x - y| < \delta$ ، آنگاه

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

هرگاه افراز P'_ϵ را طوری اختیار کنیم که $\|P'_\epsilon\| < \delta$ ، آنگاه به ازای هر افراز ظریفتر از P'_ϵ مانند P در معادله بالا خواهیم داشت

$$|\alpha'(v_k) - \alpha'(t_k)| < \frac{\epsilon}{[2M(b-a)]}$$

بنابراین، برای این چنین P داریم

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\epsilon}{4}$$

از سوی دیگر، چون $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، پس افرازی مانند P''_ϵ هست که به ازای هر افراز P ظریفتر از آن،

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

بنابراین، با تلفیق دو نامساوی اخیر، معلوم می‌شود که هرگاه افراز P از

$$P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$$

ظریفتر باشد. آنگاه $|S(P, g) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ ، و از این حکم ثابت می‌شود.

تبره. در قضیه ۳۵.۷ نتیجه‌ای قویتر از قضیه بالا ثابت می‌شود که در آن لزومی به پیوسته بودن α' نیست.

۸.۷ تابعهای پله‌ای به عنوان انتگرالگیر

اگر α در سراسر $[a, b]$ تابعی باشد پایا، چون هر مجموع $S(P, f, \alpha)$ مساوی صفر است، پس انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و مساوی صفر خواهد بود. اما، اگر α تابعی پایا باشد مگر در یک نقطه و در این نقطه ناپیوستگی جهشی داشته باشد، انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ لزوماً وجود ندارد، و اگر وجود داشته باشد، ممکن است مقدارش صفر نباشد. توضیح کاملتر این مطلب در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۹.۷ فرض کنیم که $a < c < b$. تابع α را بر $[a, b]$ به صورت زیرین تعریف می‌کنیم: مقدارهای $\alpha(a)$ ، $\alpha(c)$ و $\alpha(b)$ اختیاری باشند؛

$$\alpha(x) = \alpha(a), \quad a \leq x < c$$

$$\alpha(x) = \alpha(b), \quad c < x \leq b$$

بعلاوه، f بر $[a, b]$ بقسمی تعریف شده باشد که دست کم یکی از تابعهای f و α از چپ، و دست کم یکی از آنها از راست در نقطه c پیوسته باشد. در این صورت، $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)].$$

تصور. نتیجه در حالت $c = a$ هم برقرار است مشروط به آن که $\alpha(c)$ را به جای $\alpha(c-)$ قرار دهیم، و نیز در حالت $c = b$ برقرار است اگر $\alpha(c)$ را به جای $\alpha(c+)$ بگذاریم. بعداً ثابت می‌کنیم (قضیه ۲۹۰۷) که اگر f و α هر دو از راست یا چپ در c ناپیوسته باشند، انتگرال وجود ندارد.

پروهان. اگر $c \in P$ ، هر جمله در مجموع $S(P, f, \alpha)$ مساوی صفر است مگر آن دو جمله‌ای که مربوط به زیر بازه‌های جدا شده به وسیله c می‌باشند. بنابراین،
 $S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})[\alpha(c) - \alpha(c-)] + f(t_k)[\alpha(c+) - \alpha(c)]$ ،
 که در آن $t_{k-1} \leq c \leq t_k$. این معادله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\Delta = [f(t_{k-1}) - f(c)][\alpha(c) - \alpha(c-)] + [f(t_k) - f(c)][\alpha(c+) - \alpha(c)],$$

که در آن $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)[\alpha(c+) - \alpha(c-)]$. از این روی داریم:

$$|\Delta| \leq |f(t_{k-1}) - f(c)| |\alpha(c) - \alpha(c-)| + |f(t_k) - f(c)| |\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

اگر f در c پیوسته باشد، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ ی مثبتی هست بقسمی که اگر $\|P\| < \delta$ ،

$$|f(t_k) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |f(t_{k-1}) - f(c)| < \varepsilon$$

در این حالت، نامساوی زیر بدست می‌آید:

$$|\Delta| \leq \varepsilon |\alpha(c) - \alpha(c-)| + \varepsilon |\alpha(c+) - \alpha(c)|.$$

اما نامساوی بالا حتی وقتی که f در c پیوسته نباشد نیز برقرار است. مثلاً، هرگاه f هم از راست و هم از چپ در c ناپیوسته باشد، آنگاه $\alpha(c) = \alpha(c-)$ و $\alpha(c) = \alpha(c+)$ خواهیم داشت $\Delta = 0$. از سوی دیگر، اگر f در c از چپ پیوسته، و از راست ناپیوسته باشد، باید $\alpha(c) = \alpha(c+)$. در این حالت،

$$|\Delta| \leq \varepsilon |\alpha(c) - \alpha(c-)|.$$

بهمین نحو، در حالتی که f در c از راست پیوسته، و از چپ ناپیوسته باشد،

$$\alpha(c) = \alpha(c-) \quad \text{و} \quad |\Delta| \leq \varepsilon |\alpha(c+) - \alpha(c)|$$

از این روی، نامساوی بالا در همه حالاتها برقرار است. از این قضیه باثبات می‌رسد.

مثال. بنا بر قضیه ۹.۷، مقدار انتگرال ریمان - اشتیل یس ممکن است با تغییر مقدار تابع f فقط در یک نقطه تغییر کند. مثال زیرین نشان می‌دهد که یک چنین تغییری می‌تواند بر موجودیت انتگرال نیز اثر بگذارد. فرض کنیم

$$\text{اگر } x \neq 0, \alpha(x) = 0 \quad \text{و} \quad \alpha(0) = -1$$

$$\text{اگر } -1 \leq x \leq +1, f(x) = 1$$

در این حالت، بنا بر قضیه ۹.۷، $\int_{-1}^1 f d\alpha = 0$ ولی اگر f را بار دیگر بدین صورت تعریف کنیم: $f(0) = 2$ ، و اگر $x \neq 0, f(x) = 1$ ، با آسانی می‌توان دید که $\int_{-1}^1 f d\alpha$ وجود ندارد. در حقیقت، اگر 0 یکی از نقطه‌های تقسیم افراز P باشد،

$$\begin{aligned} S(P, f, \alpha) &= f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(0)] + f(t_{k-1})[\alpha(0) - \alpha(x_{k-2})] \\ &= f(t_k) - f(t_{k-1}), \end{aligned}$$

که در آن $x_k \leq t_k \leq 0 \leq t_{k-1} \leq x_{k-2}$. مقدار این مجموع، بر حسب انتخاب t_{k-1} و t_k مساوی 0 ، 1 یا -1 است. از این روی، در این حالت $\int_{-1}^1 f d\alpha$ وجود ندارد. اما، در انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ ، می‌توان مقدار f را در تعدادی متناهی نقطه تغییر داد بدون آن که تأثیری بر موجودیت یا مقدار انتگرال داشته باشد. برای اثبات این مطلب، کافی است حالتی را که f بر $[a, b]$ جز در یک نقطه، مثلاً $x = c$ ، مساوی صفر است در نظر بگیریم. واضح است که برای یک چنین تابعی داریم $\|P\| |f(c)| \leq \|P\| |S(P, f)|$ چون $\|P\|$ را می‌توان بدلیخواه کوچک کرد، پس $\int_a^b f(x) dx = 0$

۹.۷ تحویل انتگرال ریمان - اشتیل یس به مجموع متناهی

انتگرالگیر α مذکور در قضیه ۹.۷ نوع خاصی از یک رده مهم از تابعها به نام تابعهای پله‌ای می‌باشد. این تابعها بر یک بازه جز در تعدادی متناهی از نقاط پایا هستند، و در این نقطه‌ها ناپیوستگی جهشی دارند.

تعریف ۱۰.۷ (تابع پله‌ای). تابع α تعریف شده بر $[a, b]$ را یک تابع پله‌ای

نامیم در صورتی که افزای مانند

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

وجود داشته باشد قسمی که α بر هر یک از زیر بازه‌های باز x_k, x_{k-1} پایا باشد. اگر $1 < k < n$ ، عدد $\alpha(x_k +) - \alpha(x_k -)$ در جهش در نقطه x_k می‌نامیم. جهش در x_1 مساوی $\alpha(x_1 +) - \alpha(x_1)$ و جهش در x_n مساوی $\alpha(x_n) - \alpha(x_n -)$

تعریف می‌شود.

تابعهای پله‌ای ارتباط بین انتگرالهای ریمان - اشتیل یس و مجموعه‌های متناهی را می‌سازند:

قضیه ۱۱.۷ (تحویل انتگرال ریمان - اشتیل یس به مجموع متناهی). فرض کنیم تابع پله‌ای α بر $[a, b]$ تعریف شده باشد، و در نقطه x_k جهشی مساوی α_k داشته باشد، که در آن x_1, \dots, x_n همانهایی باشند که در تعریف ۱۰.۷ توصیف شده‌اند. نیز f بر $[a, b]$ قسمی تعریف شده باشد که هر دو تابع f و α از چپ یا از راست در هر x_k ناپیوسته نباشند. در این صورت، $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \alpha_k.$$

پروان. با توجه به قضیه ۴.۷، می‌توان انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ را به صورت مجموع انتگرالهایی از نوعی که در قضیه ۹.۷ گفته شد در آورد.

یکی از ساده‌ترین تابعهای پله‌ای تابع بزرگترین عدد صحیح است. مقدار این تابع در x مساوی بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x می‌باشد، که آن را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم. بنابراین، $[x]$ عدد صحیح منحصر بفردی است که در نامساویهای $[x] \leq x < [x] + 1$ صدق می‌نماید.

قضیه ۱۲.۷ هر مجموع متناهی را می‌توان به صورت انتگرال ریمان - اشتیل یس درآورد. در حقیقت، چنانچه مجموع $\sum_{k=1}^n a_k$ داده شده باشد، تابع f را بر $[0, n]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = a_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad k-1 < x \leq k$$

و $f(0) = 0$ در این صورت،

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n f(k) = \int_0^n f(x) d[x],$$

که در آن $[x]$ مساوی بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x می باشد.

برهان. تابع بزرگترین عدد صحیح تابعی است پله‌ای، که از راست در هر عدد صحیح پیوسته است و در هر یک از این نقطه‌ها جهشی مساوی ۱ دارد. همچنین، تابع f از چپ در نقطه‌های $۱، ۲، \dots، n$ پیوسته است. حال برای اثبات قضیه کافی است قضیه ۱۱.۷ را بکار ببریم.

۱۰.۷ دستور جمع‌بندی اوپلر^۱

با استفاده از انتگرالهای ریمان - اشتیل یس دستور شایان توجهی به نام دستور جمع‌بندی اوپلر بدست می آید. این دستور انتگرال یک تابع بر بازه‌ای مانند $[a, b]$ را به مجموع مقادیرهای این تابع در عددهای صحیح این بازه مربوط می سازد. گاهی می توان با استفاده از این دستور یک انتگرال را به یک مجموع نزدیک کرد، یا برعکس، یک مجموع را با یک انتگرال تخمین زد.

قضیه ۱۳.۷ (دستور جمع‌بندی اوپلر). هرگاه f بر $[a, b]$ مشتق پیوسته داشته باشد، آنگاه

$$\sum_{a < n < b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x)((x)) dx + f(a)((a)) - f(b)((b)),$$

که در آن $((x)) = x - [x]$. وقتی که a و b عددهایی صحیح باشند، رابطه بالا به صورت زیر در می آید:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x) \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

تبره. $\sum_{a < n < b}$ یعنی مجموع از $n = [a] + 1$ تا $n = [b]$.

برهان. با استفاده از قضیه ۶.۷ (انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء)، داریم

$$\int_a^b f(x) d(x - [x]) + \int_a^b (x - [x]) df(x) = f(b)(b - [b]) - f(a)(a - [a]).$$

چون تابع بزرگترین عدد صحیح در عددهای صحیح $1, [a] + 1, [a] + 2, \dots$

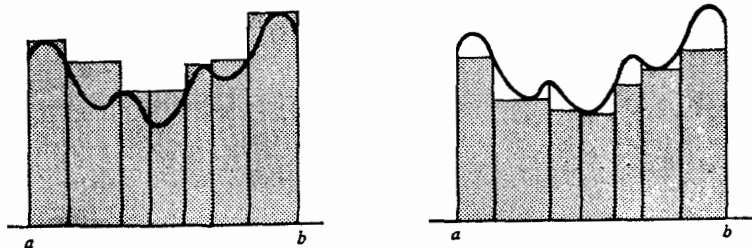
و $[b]$ جهشی مساوی ۱ دارد، می توان نوشت

$$\int_a^b f(x) d[x] = \sum_{a < n \leq b} f(n).$$

اگر این رابطه را با معادله قبلی تلفیق کنیم، قضیه بی درنگ نتیجه خواهد شد.

۱۱.۷ انتگرالگیرهای صعودی. انتگرالهای بالائی و پائینی

حال نظریه انتگرالگیری ریمان - اشتیلیس را برای انتگرالگیرهای صعودی گسترش می دهیم. بعداً (در قضیه ۲۴.۷) خواهیم دید که از بسیاری جهات این تعمیم دارای همان کلیت نظریه انتگرالگیری برای انتگرالگیرهای با تغییر کراندار است. وقتی α صعودی باشد، $\Delta\alpha_k$ های موجود در مجموعهای ریمان - اشتیلیس همه نامنفی می باشند. این واقعیت ساده نقشی اساسی در گسترش این نظریه دارد. اگر α بر $[a, b]$ صعودی باشد، برای اختصار می نویسیم « α بر $[a, b]$ است.» همان طور که پیشتر گفتیم، برای محاسبه مساحت سطح ناحیه زیر نمودار تابع f ، مجموعهای ریمان $\sum f(t_k) \Delta x_k$ را به عنوان تقریبهائی از سطح مستطیلهای برای این مساحت در نظر می گیریم. در بعضی از مسائل فیزیکی نیز که برای حل آنها از انتگرال استفاده می شود یک چنین مجموعهای پدیدار می شوند. راه دیگر برای نزدیک شدن به این مسائل استفاده از مجموعهای ریمان بالائی و پائینی می باشد. مثلاً در حالت محاسبه مساحت، می توان $\sum m_k \Delta x_k$ و $\sum M_k \Delta x_k$ را به عنوان تقریبهائی از «بالا» و «پائین» برای آن در نظر گرفت، که در آنها m_k و M_k ، بترتیب، سوپریمم و اینفیمم مقدارهای تابع در زیر بازه k ام می باشند. آنچه در هندسه درک می کنیم این است که هر مجموع بالائی دست کم مساوی سطح مورد نظر است، حال آن که مجموعهای پائینی نمی توانند بیشتر از این سطح باشند. (ر.ک. شکل ۰۱.۷) بنابراین طبیعی است که بپرسیم: کوچکترین مقدار ممکن مجموعهای بالائی چیست؟



شکل ۱.۷

از این سؤال به اینفیم همهٔ مجموعهای بالائی، به نام انتگرال بالائی f ، می‌رسیم. انتگرال پائینی به همین نحو تعریف می‌شود و آن عبارت است از سوپرمم همهٔ مجموعهای پائینی. برای تابعهائی مناسب (مثلاً، تابعهای پیوسته) این دو انتگرال هردو مساوی $\int_a^b f(x) dx$ می‌باشند. اما، در حالت کلی، این دو انتگرال متفاوتند، و مسألهٔ مهم پیدا کردن شرطهائی برای یک تابع است که با آنها انتگرالهای بالائی و پائینی آن تابع با یکدیگر مساوی باشند. حال این نوع مسأله را در مورد انتگرالهای ریمان - اشتیلیس مورد بحث قرار می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۷ فرض کنیم P یک افراز بازهٔ $[a, b]$ باشد، و قرار می‌دهیم

$$M_k(f) = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$m_k(f) = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

عددهای

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta \alpha_k, \quad U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k$$

بترتیب، مجموعهای اشتیلیس بالائی و پائینی f برحسب α برای افراز P نامیده می‌شوند.

نمبره. همواره $m_k(f) \leq M_k(f)$. هرگاه α بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $\Delta \alpha_k \geq 0$ و نیز می‌توان نوشت $m_k(f) \Delta \alpha_k \leq M_k(f) \Delta \alpha_k$. از این نامساوی نتیجه می‌شود که مجموعهای پائینی از مجموعهای بالائی متناظرشان بیشتر نیستند. بعلاوه، هرگاه $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ، آنگاه

$$m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f).$$

بنابراین، وقتی که α نامساویهای زیرین مجموعهای بالائی و پائینی را به مجموعهای ریمان - اشتیلیس مربوط می‌کنند:

$$L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

این نامساویها، که در مطالب آینده مکرر مورد استفاده قرار می‌گیرند، وقتی که α تابعی صعودی نباشد لزوماً برقرار نیستند.

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که اگر α صعودی باشد، با نظریهٔ افراز، مجموعهای پائینی کم نمی‌شوند و مجموعهای بالائی افزایش نمی‌یابند.

قضیهٔ ۱۵.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد، در این صورت :

یکم) اگر P' از P ظریفتر باشد،

$$L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha) \text{ و } U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

(دوم) به ازای هر دو افراز P_1 و P_2 ،

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

برهان. کافی است (یکم) را برای حالتی که P' فقط یک نقطه، مثلاً c ، از P بیشتر دارد ثابت کنیم. اگر c در زیر بازه P باشد، می توان نوشت

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n M_k(f) \Delta \alpha_k + M'[\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] \\ + M''[\alpha(x_i) - \alpha(c)],$$

که در آن M' و M'' سوپرمهای f در بازه های $[c, x_i]$ و $[x_{i-1}, c]$ می باشند. اما، چون

$$M'' \leq M_i(f) \text{ و } M' \leq M_i(f)$$

پس $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. (نامساوی مذکور برای مجموعه های پائینی به طریقی مشابه ثابت می شود.)

برای اثبات (دوم)، فرض می کنیم $P = P_1 \cup P_2$. در این صورت داریم

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha).$$

تبره. اگر α صعودی باشد و M و m ، بترتیب، سوپریم و اینفیم f بر $[a, b]$ باشند، از قضیه بالا نیز نتیجه می گیریم که

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \\ \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

تعریف ۱۶.۷. فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. انتگرال اشتیلیس بالائی f بر حسب α به صورت زیر تعریف می شود:

$$\int_a^b f d\alpha = \inf \{ U(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \}.$$

همچنین، انتگرال اشتیلیس پائینی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\int_a^b f d\alpha = \sup \{ L(P, f, \alpha) \mid P \in \mathcal{P}[a, b] \}.$$

تبره. گاهی انتگرالهای بالائی و پائینی را با نمادهای $I(f, \alpha)$ و $\bar{I}(f, \alpha)$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص که $\alpha(x) = x$ ، مجموعه‌های بالائی و پائینی با نمادهای $U(P, f)$ و $L(P, f)$ نشان داده می‌شوند و آنها را مجموعه‌های ریمان بالائی و پائینی می‌نامند. انتگرالهای متناظر آنها را با نمادهای

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x) dx$$

نشان داده، آنها را انتگرالهای ریمان بالائی و پائینی می‌نامیم. این انتگرالها برای اولین بار به وسیله داربو^۱ در ۱۸۷۵ معرفی شده‌اند.

قضیه ۱۷.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. در این صورت

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq I(f, \alpha).$$

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، افزای مانند P_1 هست که به ازای آن

$$U(P_1, f, \alpha) < I(f, \alpha) + \varepsilon.$$

بنابر قضیه ۱۵.۷، $I(f, \alpha) + \varepsilon$ یک کران بالائی مجموعه همه مجموعه‌های پائینی $L(P, f, \alpha)$ است. از این روی، $I(f, \alpha) \leq I(f, \alpha) + \varepsilon$ ، و چون ε اختیاری است، از این نامساوی نتیجه می‌شود که

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq I(f, \alpha).$$

مثال. بسادگی می‌توان مثالی یافت که در آن $I(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha)$. فرض

می‌کنیم $\alpha(x) = x$ ، f را بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر x گویا باشد، $f(x) = 1$ ، و اگر x گنگ باشد، $f(x) = 0$.

در این صورت، چون هر زیر بازه $[0, 1]$ هم حاوی عددهائی گویا وهم گنگ است، پس

به ازای هر افراز P در $[0, 1]$ مانند P ، $M_k(f) = 1$ و $m_k(f) = 0$. بنابراین،

به ازای هر P ، $U(P, f) = 1$ و $L(P, f) = 0$. از این جا نتیجه می‌شود که

برای $[a, b] = [0, 1]$

$$\int_a^b f dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_a^b f dx = 1$$

توجه کنید که اگر تابع f را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{وقتی که } x \text{ گویا است،} \\ 1 & \text{وقتی که } x \text{ گنگ است،} \end{cases}$$

تعریف می‌کردیم، باز هم نتیجه بالا برای آن برقرار بود.

۱۲.۷ خاصیت‌های جمع‌پذیری و خطی انتگرال‌های بالائی و پائینی

انتگرال‌های بالائی و پائینی دارای بسیاری از خاصیت‌های انتگرال هستند. مثلاً، اگر $a < c < b$

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha.$$

همین معادله برای انتگرال‌های پائینی نیز برقرار است. اما، بعضی از معادله‌های موجود در انتگرالها برای انتگرال‌های بالائی و پائینی به صورت نامساوی درمی‌آیند. مثلاً،

$$\int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha,$$

و

$$\int_a^b (f + g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha.$$

خواننده می‌تواند صحت مطالب بالا را بسادگی تحقیق نماید. (ر. ک. تمرین ۰۱۱۰۷)

۱۳.۷ شرط ریمان

هرگاه انتظار داشته باشیم که انتگرال‌های بالائی و پائینی با هم مساوی شوند، آنگاه باید منتظر باشیم که مجموعهای بالائی نیز به اندازه دلخواه به مجموعهای پائینی نزدیک گردند. از این روی طبیعی است که تابعهائی مانند f را جستجو کنیم که برای آنها تفاضل $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ را بتوان به قدر کافی کوچک نمود.

تعریف ۱۸.۷ گوییم f در شرط ریمان برحسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند در صورتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، افزایی مانند P_ϵ وجود پیدا کند بقسمی که هرگاه P از P_ϵ ظریفتر باشد، آنگاه

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon.$$

قضیه ۱۹.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. در این صورت، سه گزاره زیر با هم هم‌ارزند:

(یکم) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

(دوم) f در شرط دیمان بر حسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند.

$$\cdot I(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha)$$

برهان. ثابت می‌کنیم که از (یکم) گزاره (دوم)، از (دوم) گزاره (سوم)، و از (سوم) گزاره (یکم) نتیجه می‌شود. فرض کنیم (یکم) برقرار باشد. هرگاه $\alpha(b) = \alpha(a)$ ، آنگاه (دوم) بخودی خود برقرار است. پس می‌توانیم فرض کنیم که $\alpha(a) < \alpha(b)$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε و هر t_k و t'_k در $[x_{k-1}, x_k]$ ، داشته باشیم

$$\left| \sum_{k=1}^n f(t'_k) \Delta \alpha_k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta \alpha_k - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

که در آنها $A = \int_a^b f d\alpha$. از تلفیق این نامساویها نتیجه می‌گیریم که

$$\left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta \alpha_k \right| < \frac{2}{3} \varepsilon.$$

چون

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(x') \mid x, x' \text{ در } [x_{k-1}, x_k] \text{ باشند}\},$$

پس به ازای هر $h > 0$ ، می‌توان t_k و t'_k را بقسمی اختیار کرد که

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

حال اگر $h = (\frac{1}{3})\varepsilon / [\alpha(b) - \alpha(a)]$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta \alpha_k \\ &< \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta \alpha_k + h \sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

از این روی، از (یکم) گزاره (دوم) نتیجه می‌شود.

حال، فرض می‌کنیم (دوم) برقرار باشد. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، افزای

مانند P_ε هست که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε

$$U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon.$$

از این روی، برای این چنین P ای داریم

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) < L(P, f, \alpha) + \varepsilon \leq \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon.$$

یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ بنا براین،

$$\bar{I}(f, \alpha) \leq \underline{I}(f, \alpha).$$

اما عکس این نامساوی نیز، بنا بر قضیه ۱۷.۷، برقرار است. پس از گزاره (دوم) گزاره (سوم) نتیجه می‌شود.

بالاخره، فرض می‌کنیم که $\bar{I}(f, \alpha) = \underline{I}(f, \alpha)$ و مقدار مشترک آنها را با A نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و مساوی A است. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P'_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P'_ε ، $U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ ، همچنین P''_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر افراز P ظریفتر از P''_ε ،

$$L(P, f, \alpha) > \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon.$$

اگر $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ ، به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \underline{I}(f, \alpha) - \varepsilon < L(P, f, \alpha) &\leq S(P, f, \alpha) \\ &\leq U(P, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \varepsilon. \end{aligned}$$

اما، چون $\underline{I}(f, \alpha) = \bar{I}(f, \alpha) = A$ ، پس به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε ، $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$. از این ثابت می‌شود که $\int_a^b f d\alpha$ وجود دارد و مساوی A است، و برهان قضیه تمام است.

۱۴.۷ قضیه‌های مقایسه‌ای

قضیه ۲۰.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، و به ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

برهان. چون α بر $[a, b]$ است، به ازای هر افراز P ، مجموعه‌های ریمان - اشتیلز این دو تابع f و g متناظر P در رابطه‌های زیرین صدق می‌کنند:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \leq \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta\alpha_k = S(P, g, \alpha).$$

با استفاده از این امر قضیه بسادگی نتیجه می‌شود.

این قضیه بخصوص ایجاب می‌کند که هرگاه $g(x) \geq 0$ و α بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $\int_a^b g(x) d\alpha(x) \geq 0$.

قضیه ۲۱.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $|f| \in R(\alpha)$ است و نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x).$$

برهان. با استفاده از نمادهای مذکور در تعریف ۱۴.۷، می‌توان نوشت $M_k(f) - m_k(f) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \text{ در } [x_{k-1}, x_k] \text{ باشند}\}$. چون نامساوی $\|f(x) - f(y)\| \leq |f(x) - f(y)|$ همواره برقرار است، پس

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f).$$

با ضرب کردن دو طرف نامساوی در $\Delta\alpha_k$ و جمع‌بندی بر k ، نتیجه می‌شود که به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P ،

$$U(P, |f|, \alpha) - L(P, |f|, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha).$$

حال، با استفاده از شرط ریمان، نتیجه می‌شود که $|f| \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است. نامساوی حکم قضیه از قضیه ۲۰.۷ با فرض $g = |f|$ بدست می‌آید.

تبرئه. عکس قضیه ۲۱.۷ درست نیست. (ر. ک. تمرین ۰۱۲.۷)

قضیه ۲۲.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $f^2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ خواهد بود.

برهان. با استفاده از نمادهای مذکور در تعریف ۱۴.۷، داریم

$$m_k(f^2) = [m_k(|f|)]^2 \quad \text{و} \quad M_k(f^2) = [M_k(|f|)]^2$$

از این روی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= [M_k(|f|) + m_k(|f|)][M_k(|f|) - m_k(|f|)] \\ &\leq 2M[M_k(|f|) - m_k(|f|)], \end{aligned}$$

که در آن M یک کران بالائی برای $|f|$ بر $[a, b]$ است. حال با بکاربردن شرط ریمان نتیجه بدست می‌آید.

قضیه ۲۳.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، آنگاه $f \cdot g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ خواهد بود.

برهان. برای اثبات، قضیه ۲۲.۷ و اتحاد

$$2f(x)g(x) = [f(x) + g(x)]^2 - [f(x)]^2 - [g(x)]^2$$

را بکار می‌بریم.

۱۵.۷ انتگرالگیرهای باتغییر کراندار

در قضیه ۱۳.۶ دیدیم که اگر α بر $[a, b]$ با تغیر کراندار باشد، α را می‌توان به صورت تفاضل دو تابع صعودی بیان نمود. اگر $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ یک چنین تجزیه‌ای باشد و $f \in R(\alpha_1)$ و $f \in R(\alpha_2)$ بر $[a, b]$ باشند، از خاصیت خطی نتیجه می‌شود که $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است. اما، عکس این مطلب همواره درست نیست. یعنی اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، کاملاً ممکن است دو تابع صعودی α_1 و α_2 اختیار کرد بقسمی که $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ ، اما هیچ‌یک از انتگرالهای $\int_a^b f d\alpha_1$ و $\int_a^b f d\alpha_2$ وجود نداشته باشد. البته اشکال کار ناشی از منحصر بفرد نبودن تجزیه $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ است. اما می‌توانیم ثابت کنیم که دست‌کم برای یکی از تجزیه‌های α عکس حکم درست است، و آن در موردی است که α_1 تغیر کل α باشد و $\alpha_2 = 0$. (تعریف ۸.۶ را بیاد بیاورید.)

قضیه ۲۴.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغیر کراندار باشد. همچنین $V(x)$ عبادت باشد از تغیر کل α بر $[a, x]$ ، $(a < x \leq b)$ ، و $V(a) = 0$. بعلاوه، f بر $[a, b]$ تعریف شده و کراندار باشد. هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $f \in R(V)$ بر $[a, b]$ است.

برهان. هرگاه $V(b) = 0$ ، آنگاه V بر $[a, b]$ تابعی پایا است و حکم بدیهی است. پس، فرض می‌کنیم $V(b) > 0$. همچنین به‌ازای هر $x \in [a, b]$ ، $|f(x)| \leq M$. چون V صعودی است، فقط کافی است تحقیق کنیم که f در شرط ریمان بر حسب V بر $[a, b]$ صدق می‌کند.

به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، P_ε را بقسمی اختیار می‌کنیم که به‌ازای هر افراز P ظریفتر از آن و هر t_k و t'_k در $[x_{k-1}, x_k]$ داشته باشیم

$$V(b) < \sum_{k=1}^n |\Delta\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{و} \quad \left| \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta\alpha_k \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

به‌ازای P ظریفتر از P_ε ، دو نامساوی زیرین را ثابت می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta V_k - |\Delta\alpha_k|) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{4},$$

و

زیرا با جمع این دو نامساوی نتیجه می شود که $U(P, f, V) - L(P, f, V) < \varepsilon$ برای اثبات نامساوی اول، توجه می کنیم که $\Delta V_k - |\Delta \alpha_k| \geq 0$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] (\Delta V_k - |\Delta \alpha_k|) &\leq 2M \sum_{k=1}^n (\Delta V_k - |\Delta \alpha_k|) \\ &= 2M \left(V(b) - \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

برای اثبات نامساوی دوم، فرض می کنیم

$$A(P) = \{k \mid \Delta \alpha_k \geq 0\}, \quad B(P) = \{k \mid \Delta \alpha_k < 0\},$$

و $h = (\varepsilon/4)/V(b)$. اگر $k \in A(P)$ ، t_k و t'_k را بقسمی اختیار می کنیم که

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h;$$

ولی اگر $k \in B(P)$ ، t_k و t'_k را چنان اختیار می نمایم که

$$f(t'_k) - f(t_k) > M_k(f) - m_k(f) - h.$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] |\Delta \alpha_k| &< \sum_{k \in A(P)} [f(t_k) - f(t'_k)] |\Delta \alpha_k| \\ &+ \sum_{k \in B(P)} [f(t'_k) - f(t_k)] |\Delta \alpha_k| + h \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \\ &= \sum_{k=1}^n [f(t_k) - f(t'_k)] \Delta \alpha_k + h \sum_{k=1}^n |\Delta \alpha_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + hV(b) = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

بنابراین، $f \in R(V)$ بر $[a, b]$ است.

بسمه. به کمک این قضیه و قضیه ۱۲.۶ می توان نظریه انتگرالگیرهای ریمان-اشتیلیس برای انتگرالگیرهای با تغییر کراندار را به حالتی که در آن انتگرالگیرها صعودی باشند تحویل کرد. در این صورت، شرط ریمان قابل استفاده است و بخصوص در این کار به صورت ابزاری مفید درمی آید. به عنوان اولین کاربرد این تحویل، قضیه زیرین را نتیجه می گیریم که با قضیه ۴.۷ رابطه ای نزدیک دارد.

قضیه ۲۵.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار، و $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد.

در این صورت $f \in R(\alpha)$ بر هر زیر بازه $[a, b]$ مانند $[c, d]$ خواهد بود.

پوهان. فرض کنیم $V(x)$ تغییر کل α بر $[a, x]$ را نشان دهد، و $V(a) = 0$. در این صورت $\alpha = V - (V - \alpha)$ ، که در آن V و $V - \alpha$ بر $[a, b]$ صعودیند (قضیه ۱۲.۶). بنا بر قضیه ۲۴.۷، $f \in R(V)$ ، و در نتیجه $f \in R(V - \alpha)$ بر $[a, b]$ است. بنا بر این، اگر قضیه برای انتگرالگیرهای صعودی برقرار باشد، نتیجه می‌شود که $f \in R(V)$ و $f \in R(V - \alpha)$ بر $[c, d]$ است. یعنی، $f \in R(\alpha)$ بر $[c, d]$ خواهد بود.

از این روی، کافی است قضیه را برای وقتی که $\alpha \searrow$ بر $[a, b]$ است ثابت کنیم. بنا بر قضیه ۴.۷، کافی است ثابت کنیم که هر یک از انتگرالهای $\int_a^d f d\alpha$ و $\int_a^c f d\alpha$ وجود دارد. فرض می‌کنیم که $a < c < b$. اگر P یک افراز $[a, x]$ باشد، قرار می‌دهیم $\Delta(P, x) = U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ ، که در آن U و L مجموعهای بالائی و پائینی f بر بازه $[a, x]$ اند. چون $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، پس شرط ریمان برقرار است. بنا بر این، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، یک افراز $[a, b]$ مانند P_ε وجود دارد قسمی که به ازای هر افراز P ظریفتر از P_ε ، $\Delta(P, b) < \varepsilon$ می‌توان فرض کرد که $c \in P_\varepsilon$. نقطه‌های P_ε در $[a, c]$ تشکیل یک افراز $[a, c]$ مانند P'_ε را می‌دهند. هرگاه P' یک افراز $[a, c]$ ظریفتر از P'_ε باشد، آنگاه $P = P' \cup P_\varepsilon$ یک افراز $[a, b]$ است که از نقطه‌های P' و نقطه‌هایی از P_ε که در بازه $[c, b]$ قرار دارند تشکیل شده است. مجموعی که $\Delta(P', c)$ به وسیله آن تعریف می‌شود فقط حاوی قسمتی از جمله‌های موجود در مجموع $\Delta(P, b)$ است. چون هر جمله در این مجموعه نامنفی است و P از P_ε ظریفتر می‌باشد، پس

$$\Delta(P', c) \leq \Delta(P, b) < \varepsilon.$$

یعنی، اگر P' ظریفتر از P'_ε باشد، $\Delta(P', c) < \varepsilon$. بنا بر این، f در شرط ریمان بر $[a, c]$ صدق می‌کند و انتگرال $\int_a^c f d\alpha$ وجود دارد. البته، با بیانی مشابه، معلوم می‌شود که انتگرال $\int_a^d f d\alpha$ نیز وجود دارد. پس، بنا بر قضیه ۴.۷، انتگرال $\int_a^d f d\alpha$ وجود خواهد داشت.

قضیه زیرین کاربردی است از قضیه‌های ۲۳.۷، ۲۱.۷، و ۲۵.۷.

قضیه ۲۶.۷ فرض کنیم $f \in R(\alpha)$ و $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، که در آنها $\alpha \searrow$ بر $[a, b]$ باشد. اگر $x \in [a, b]$ ، تعریف می‌کنیم

$$F(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t)$$

$$G(x) = \int_a^x g(t) d\alpha(t).$$

دو این صورت $f \in R(G)$ ، $g \in R(F)$ ، و $f \cdot g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ خواهد بود، و داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) &= \int_a^b f(x) dG(x) \\ &= \int_a^b g(x) dF(x). \end{aligned}$$

پوهان. بنا بر قضیه ۲۳.۷، انتگرال $\int_a^b f \cdot g d\alpha$ وجود دارد. به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P ، داریم

$$S(P, f, G) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t) d\alpha(t) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t_k) g(t) d\alpha(t),$$

$$\int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) g(t) d\alpha(t).$$

بنابراین، اگر $M_g = \sup\{|g(x)| \mid x \in [a, b]\}$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left| S(P, f, G) - \int_a^b f \cdot g d\alpha \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(t_k) - f(t)\} g(t) d\alpha(t) \right| \\ &\leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t_k) - f(t)| d\alpha(t) \\ &\leq M_g \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [M_k(f) - m_k(f)] d\alpha(t) \\ &= M_g \{U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)\}. \end{aligned}$$

چون $f \in R(\alpha)$ ، به ازای هر $\epsilon > 0$ ، افرازی مانند P_ϵ هست قسمی که اگر P از P_ϵ ظریفتر باشد، $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$. از این ثابت می شود که $f \in R(G)$ بر $[a, b]$ است و $\int_a^b f \cdot g d\alpha = \int_a^b f dG$ با بیانی مشابه معلوم می شود که $g \in R(F)$ بر $[a, b]$ است و $\int_a^b f \cdot g d\alpha = \int_a^b g dF$.

تبره. قضیه ۲۶.۷ برای وقتی که α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد نیز معتبر است.

۱۶.۷ شرطهای کافی برای وجود انتگرالهای ریمان - اشتیل

در اکثر قضیه‌های پیش با فرض وجود داشتن انتگرالها خاصیت‌های آنها را بررسی نمودیم. حال طبیعی است بپرسیم: چه موقع خود انتگرال وجود دارد؟ در زیر دو شرط کافی مفید برای وجود انتگرال ذکر می‌شود.

* قضیه ۲۷.۷ هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته، و α بر این بازه با تغییرکراندار باشد، آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

تبره. بنا بر قضیه ۶.۷، اگر درقضیه بالا جای f و α را عوض کنیم، دومین شرط کافی برای وجود انتگرال بدست خواهد آمد.

پرهان. کافی است قضیه را برای حالتی که α ↘ و $\alpha(a) < \alpha(b)$ ثابت کنیم. گوئیم چون f بر $[a, b]$ پیوسته است، پس بر این بازه پیوسته یکشکل است. بنا بر این، با فرض $A = 2[\alpha(b) - \alpha(a)]$ ، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، δ مثبتی (فقط تابع ε) می‌توان یافت بقسمی که هرگاه $|x - y| < \delta$ ، آنگاه $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/A$. هرگاه P_ε افزایی باشد که $\|P_\varepsilon\| < \delta$ ، آنگاه به‌ازای افزایش P ظریفتر از P_ε باید داشته باشیم

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \varepsilon/A,$$

زیرا $\{x, y\}$ در $[x_{k-1}, x_k]$ باشند $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y)\}$ با ضرب کردن دو طرف نامساوی بالا در $\Delta\alpha_k$ و جمع‌بندی آنها، خواهیم داشت

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq \frac{\varepsilon}{A} \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

یعنی شرط ریمان برقرار است. پس $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ خواهد بود. برای حالت خاص که $\alpha(x) = x$ ، از قضیه‌های ۲۷.۷ و ۶.۷ این نتیجه حاصل می‌شود:

قضیه ۲۸.۷ هر یک از شرطهای زیرین برای وجود انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ کافی است:

(آ) f بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

(ب) f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد.

۱۷.۷ شرطهای لازم برای وجود انتگرالهای ریمان - اشتیل

وقتی که α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، پیوستگی f برای وجود انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ کافی است. ولی پیوستگی f در سراسر این بازه شرط لازم برای وجود

انتگرال نیست. مثلاً، در قضیه ۹.۷ دیدیم که هرگاه α تابعی پله‌ای باشد، آنگاه f را می‌توان بدلخواه در $[a, b]$ تعریف کرد به شرط آن‌که f در ناپیوستگی‌های α پیوسته باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که برای وجود انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ ، f و α نباید هر دو از چپ یا از راست نقطه‌ای ناپیوسته باشند.

* قضیه ۹.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد، و $a < c < b$ و نیز فرض می‌کنیم که α و f هر دو از راست در $x = c$ ناپیوسته باشند؛ یعنی، عدد مثبتی مانند ε وجود داشته باشد بقسمی که به‌ازای هر δ مثبت، دو مقدار x و y در بازه $[c, c + \delta]$ باشند که به‌ازای آنها

$$|\alpha(y) - \alpha(c)| \geq \varepsilon \quad \text{و} \quad |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$$

در این صورت، $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. همچنین اگر α و f هر دو از چپ در c ناپیوسته باشند، این انتگرال وجود نخواهد داشت.

برهان. فرض کنیم P یک افراز $[a, b]$ حاوی c باشد. تفاضل زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta \alpha_k.$$

هرگاه c نقطه انتهائی چپ زیربازه i م باشد، آنگاه چون هر جمله مجموع بالا نامنفی است، پس

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq [M_i(f) - m_i(f)] [\alpha(x_i) - \alpha(c)].$$

اگر c ناپیوستگی مشترک f و α از راست باشد، x_i را می‌توان طوری اختیار کرد که $\alpha(x_i) - \alpha(c) \geq \varepsilon$. بعلاوه، از فرض قضیه برمی‌آید که $M_i(f) - m_i(f) \geq \varepsilon$. از این روی،

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \geq \varepsilon^2,$$

یعنی شرط ریمان نمی‌تواند برقرار باشد. (اثبات حالتی که c ناپیوستگی مشترک f و α از چپ باشد مشابه بالا خواهد بود.)

۱۸.۷ قضیه‌های مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان - اشتیل بس

اگر چه انتگرالها در مسائل مختلفی مورد پیدا می‌کند، ولی در حالت‌های نسبتاً کمی می‌توان مقدار آنها را بدست آورد. اما، اغلب تخمین از یک انتگرال کافی است و احتیاجی به مقدار دقیق آن نمی‌باشد. قضیه‌های مقدار میانگین مذکور در این بخش مخصوصاً برای این چنین تخمینها مفیدند.

قضیه ۳۰.۷ (قضیه اول مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان - اشتیل (س)). فرض کنیم $\alpha \nearrow$ و $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین M و m ، ترتیب، سوپرم و اینفیم مجموعه $\{f(x) | x \in [a, b]\}$ را نشان دهند. در این صورت، عددی حقیقی مانند c هست بقسمی که $m \leq c \leq M$ و

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = c \int_a^b d\alpha(x) = c[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

بخصوص، هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ ، $c = f(x_0)$.

برهان. اگر $\alpha(a) = \alpha(b)$ ، دو طرف تساوی بالا مساوی صفر هستند و حکم بدیهی است. پس می‌توانیم فرض کنیم که $\alpha(a) < \alpha(b)$. چون همه مجموعه‌های بالائی و پائینی در

$$m[\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

صدق می‌کنند، پس انتگرال $\int_a^b f d\alpha$ باید بین دو کران مذکور در نامساویهای بالا باشد. بنا براین، خارج قسمت $c = (\int_a^b f d\alpha) / (\int_a^b d\alpha)$ بین m و M واقع خواهد بود. وقتی که f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، بنا بر قضیه مقدار میانی، x_0 در $[a, b]$ هست که به ازای آن $c = f(x_0)$.

با استفاده از انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء، از قضیه اول مقدار میانگین می‌توان قضیه دیگری از این نوع بدست آورد.

قضیه ۳۱.۷ (قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان - اشتیل (س)). فرض کنیم α پیوسته، و $f \nearrow$ بر $[a, b]$ باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ هست بقسمی که به ازای آن،

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} d\alpha(x) + f(b) \int_{x_0}^b d\alpha(x).$$

برهان. با توجه به قضیه ۳۰.۷، داریم

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x) df(x).$$

حال اگر قضیه ۳۰.۷ را در مورد انتگرال طرف راست تساوی بالا بکار ببریم، معلوم می‌شود که x_0 در $[a, b]$ هست که به ازای آن

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(a)[\alpha(x_0) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(x_0)],$$

و حکم ثابت است.

۱۹.۷ انتگرال به عنوان تابعی از بازه

هرگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، و α با تغییر کراندار باشد، آنگاه (بنا به قضیه ۲۵.۷) به ازای هر x در $[a, b]$ انتگرال $\int_a^x f d\alpha$ وجود دارد، و آن را می توان به عنوان تابعی از x مورد مطالعه قرار داد. اکنون بعضی از خاصیت های این تابع را بدست می آوریم.

قضیه ۳۲.۷ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار، و $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد. تابع F را با معادله زیر تعریف می کنیم:

$$F(x) = \int_a^x f d\alpha, \quad \text{اگر } x \in [a, b]$$

در این صورت:

(یکم) F بر $[a, b]$ با تغییر کراندار است؛

(دوم) هر نقطه پیوستگی α نقطه پیوستگی F نیز هست؛

(سوم) اگر α بر $[a, b]$ باشد، در هر نقطه $[a, b]$ مانند x که $\alpha'(x)$ وجود داشته و f پیوسته باشد، $F'(x)$ وجود خواهد داشت. برای چنین x ، داریم

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

پرهان. کافی است فرض کنیم α بر $[a, b]$ می باشد. اگر $y \neq x$ ، از قضیه ۳۰.۷ نتیجه می شود که

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f d\alpha = c[\alpha(y) - \alpha(x)],$$

که در آن $m \leq c \leq M$ (در این جا نمادهای قضیه ۳۰.۷ بکار رفته اند). گزاره های (یکم) و (دوم) بی درنگ از معادله بالا نتیجه می شوند. برای اثبات (سوم)، پس از آن که معادله بالا را بر $y - x$ تقسیم نمودیم، به این مطلب توجه می کنیم که وقتی که $y \rightarrow x$ ، $c \rightarrow f(x)$.

با استفاده از قضیه های ۳۲.۷ و ۲۶.۷، قضیه زیر نتیجه می شود. این قضیه انتگرال ریمان حاصل ضرب $f \cdot g$ را به یک انتگرال ریمان - اشتیل پس $\int_a^b f dG$ بر- می گرداند، که در آن انتگرال کبیر با تغییر کراندار و پیوسته است.

قضیه ۳۳.۷ اگر $f \in R$ و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشند، فرض می کنیم

اگر $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ و $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، $x \in [a, b]$ در این صورت، F و G بر $[a, b]$ تابعهائی پیوسته و با تغییر کراندار می باشند. همچنین، $f \in R(G)$ و $g \in R(F)$ بر $[a, b]$ هستند، و داریم

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) dG(x) = \int_a^b g(x) dF(x).$$

برهان. قسمتهای (یکم) و (دوم) قضیه ۳۲.۷ نشان می دهند که F و G بر $[a, b]$ پیوسته و با تغییر کراندار هستند. وجود انتگرالها و دو دستور مذکور در بالا برای $\int_a^b f(x) g(x) dx$ با فرض $\alpha(x) = x$ در قضیه ۲۶.۷ نتیجه می شوند.

تیسر. وقتی که $\alpha(x) = x$ ، قسمت (سوم) قضیه ۳۲.۷ گاهی قضیه اساسی اول حساب انتگرال نامیده می شود. بنابراین قضیه، در هر نقطه پیوستگی f ، $F'(x) = f(x)$. در بخش آینده لنگه این نتیجه، به نام قضیه اساسی دوم، داده خواهد شد.

۲۵.۷ قضیه اساسی دوم حساب انتگرال

قضیه زیرین نشان می دهد که چگونه از مشتق انتگرال گیری می شود.

قضیه ۳۴.۷ (قضیه اساسی دوم حساب انتگرال). فرض کنیم $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین تابع g بر $[a, b]$ بقسمی تعریف شده باشد که g' در $]a, b[$ وجود داشته باشد، و

$$g'(x) = f(x), \quad x \in]a, b[$$

در نقطه های انتهائی فرض می کنیم که $g(a+)$ و $g(b-)$ وجود داشته، در رابطه زیرین صدق کنند:

$$g(a) - g(a+) = g(b) - g(b-).$$

در این صورت،

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a).$$

برهان. به ازای هر افراز $[a, b]$ ، می توان نوشت

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= \sum_{k=1}^n [g(x_k) - g(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n g'(t_k) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k, \end{aligned}$$

که در آنها t_k نقطه‌ای در $[x_{k-1}, x_k]$ است که به وسیله قضیه مقدار میانگین حساب دیفرانسیل مشخص می‌شود. اما، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، افزاز را می‌توان آن قدر ظریف انتخاب نمود که

$$\left| g(b) - g(a) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

و از این حکم با ثبات می‌رسد.

می‌توان قضیه اساسی دوم را با قضیه ۳۳.۷ تلفیق نمود و قضیه زیر را، که از قضیه ۸.۷ قویتر است، بدست آورد.

قضیه ۳۵.۷ فرض کنیم $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین α بر $[a, b]$ پیوسته باشد و α' بر این بازه انتگرال ریمان داشته باشد. در این صورت، انتگرالهای زیر وجود دارند و این رابطه برقرار می‌باشد:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

برهان. بنابر قضیه اساسی دوم، به ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$\alpha(x) - \alpha(a) = \int_a^x \alpha'(t) dt.$$

حال اگر در قضیه ۳۳.۷ فرض کنیم که $g = \alpha'$ ، قضیه ۳۵.۷ نتیجه می‌شود. تبصره. نتیجه‌ای مربوط به این قضیه در تمرین ۳۴.۷ توصیف شده است.

۲۱.۷ تغییر متغیر در انتگرال ریمان

هرگاه $x = \alpha(x)$ ، g یکنواکاید، و g' پیوسته باشد، آنگاه دستور

$$\int_a^b f d\alpha = \int_c^d h d\beta$$

در قضیه ۷.۷ برای تغییر متغیر در یک انتگرال به شکل زیر در می‌آید:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt.$$

رابطه اخیر در صورتی معتبر است که $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. در حالتی که f پیوسته باشد، با استفاده از قضیه ۳۲.۷ می‌توان قید یکنوا بودن g را حذف نمود. در حقیقت، در این حالت قضیه زیرین برقرار است:

قضیه ۳۶.۷ (تئیر متغیر در انتگرال ریمان). فرض کنیم g' بر بازه $[c, d]$ و f بر $g([c, d])$ پیوسته باشد. تابع F را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_{g(c)}^x f(t) dt, \quad x \in g([c, d]) \quad \text{اگر}$$

در این صورت، به ازای هر x در $[c, d]$ ، انتگرال $\int_c^x f[g(t)]g'(t) dt$ وجود دارد و مقدار آن مساوی $F[g(x)]$ می‌باشد. بخصوص،

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt.$$

برهان. چون g' و تابع مرکب $f \circ g$ هر دو بر $[c, d]$ پیوسته‌اند، پس انتگرال مورد بحث، یعنی $\int_c^x f[g(t)]g'(t) dt$ ، به ازای هر x در $[c, d]$ وجود دارد. حال تابع G را بر $[c, d]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G(x) = \int_c^x f[g(t)]g'(t) dt.$$

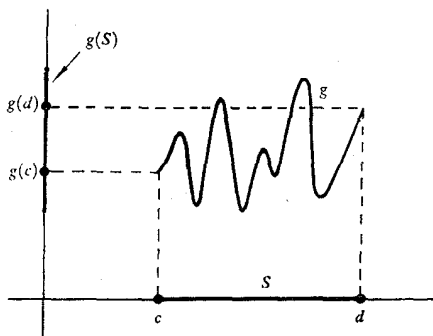
باید نشان دهیم که $G(x) = F[g(x)]$. بنا بر قضیه ۳۲.۷، داریم

$$G'(x) = f[g(x)]g'(x).$$

همچنین، بنا بر قاعده زنجیره‌ای، مشتق $F[g(x)]$ نیز مساوی $f[g(x)]g'(x)$ می‌باشد (چون $F'(x) = f(x)$). از این روی، $G(x) - F[g(x)]$ پایا است. اما وقتی که $x = c$ ، $G(c) = 0$ و $F[g(c)] = 0$ ، پس این مقدار پایا باید صفر باشد. از این روی، به ازای هر x در $[c, d]$ ، $G(x) = F[g(x)]$. خصوصاً، وقتی که $x = d$ ، $G(d) = F[g(d)]$ ، و این همان آخرین معادله مذکور در حکم قضیه است.

تبصره. در بعضی از کتابهای درسی قضیه بالا با شرط اضافی صفر نبودن g' در هیچ نقطه $[c, d]$ ثابت شده است، شرطی که، البته، یکنوا بودن g را ایجاب می‌کند. برهان بالا نشان می‌دهد که این شرط ضرورت ندارد. باید خاطر نشان ساخت که، چون g بر $[c, d]$ پیوسته است، پس $g([c, d])$ بازه‌ای است حاوی بازه‌ای که $g(c)$ و $g(d)$ را به هم وصل می‌کند. بخصوص، در حالت $g(c) = g(d)$ ، نتیجه بالا معتبر است. این خاصیت قضیه بالا را در عمل بسیار قابل استفاده می‌سازد. (برای مشاهده یک هی مجاز، ر. ک. شکل ۲.۷).

علاً، بیان کلیتری از قضیه ۳۶.۷ وجود دارد که در آن پیوستگی f یا g'



شکل ۲.۷

لازم نیست، ولی اثبات آن به طور قابل ملاحظه‌ای مشکلتر است. این قضیه به قرار زیر است: فرض کنیم $h \in R$ بر $[c, d]$ باشد. اگر $x \in [c, d]$ و a نقطه ثابتی در $[c, d]$ باشد، قرار می‌دهیم $g(x) = \int_a^x h(t) dt$. در این صورت، اگر $f \in R$ بر $g([c, d])$ باشد، انتگرال $\int_c^d f[g(t)]h(t) dt$ وجود دارد و

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]h(t) dt.$$

بنظر می‌رسد که این قضیه کلترین قضیه درباره تغییر متغیر در انتگرال ریمان باشد. قضیه ۲۶.۷ حالت خاصی از این قضیه است که در آن h بر $[c, d]$ و f بر $g([c, d])$ پیوسته‌اند.

۲۲.۷ قضیه دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای ریمان

قضیه ۲۷.۷ فرض کنیم g پیوسته، و f بر $[a, b]$ باشد. همچنین A و B دو عدد حقیقی باشند که در نامساویهای زیرین صدق کنند:

$$A \leq f(a+) \text{ و } B \geq f(b-)$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ هست بقسمی که

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = A \int_a^{x_0} g(x) dx + B \int_{x_0}^b g(x) dx \quad (\text{یکم})$$

۱. برای مشاهده برهانی از آن، ر.ک. مقاله نوشته شده به وسیله H. Kestelman در شماره ۴۵ Mathematical Gazette، سال ۱۹۶۱، صفحات ۱۷-۲۳.

خصوصاً، اگر به ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، به ازای نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ ،

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = B \int_{x_0}^b g(x) dx \quad (\text{دوم})$$

تصوره. قسمت (دوم) به نام قضیهٔ بونه^۱ معروف است.

برهان. هرگاه $\alpha(x) = \int_a^x g(t) dt$ ، آنگاه $\alpha' = g$. بنا براین، بنا بر قضیهٔ ۳۱۰۷،

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx.$$

یعنی، قسمت (یکم) برای $A = f(a)$ و $B = f(b)$ برقرار است. اکنون اگر A و B دو عدد حقیقی باشند بقسمی که $A \leq f(a+)$ و $B \geq f(b-)$ ، می‌توان f را در نقطه‌های انتهائی a و b مجدداً تعریف کرد که دارای مقدارهای $f(a) = A$ و $f(b) = B$ شود. f اصلاح شده باز هم بر $[a, b]$ صعودی است، و همان طور که قبلاً متذکر شده‌ایم، تغییر مقدار f در تعدادی متناهی نقطه بر مقدار انتگرال ریمان آن اثری ندارد. (نقطهٔ x_0 که در (یکم) بدست آمده است البته به انتخاب A و B بستگی دارد.) با انتخاب $A = 0$ ، قسمت (دوم) از قسمت (یکم) نتیجه خواهد شد.

۲۳۰۷ انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس که به یک پرما بستگی دارند

قضیهٔ ۲۸۰۷ فرض کنیم f در هر نقطهٔ (x, y) از مستطیل

$$Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

پیوسته باشد. و نیز α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. تابع F را بر $[c, d]$ با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x).$$

در این صورت، F بر بازهٔ $[c, d]$ پیوسته است. با بیان دیگر می‌توان گفت که، اگر $y_0 \in [c, d]$ ،

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) d\alpha(x) &= \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) d\alpha(x) \\ &= \int_a^b f(x, y_0) d\alpha(x). \end{aligned}$$

برهان. فرض کنیم α بر $[a, b]$ باشد. چون Q مجموعه‌ای فشرده است، پس f بر Q پیوسته یکشکل می‌باشد. از این روی، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، δ مثبتی (فقط تابع ε) هست بقسمی که به ازای هر جفت نقطه مانند $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در Q که واجد شرط $|z - z'| < \delta$ باشند، خواهیم داشت $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. اگر $|y - y'| < \delta$ ، داریم

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y')| &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y')| d\alpha(x) \\ &\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)]. \end{aligned}$$

بنا بر این، F بر $[c, d]$ پیوسته خواهد بود.

البته، اگر $\alpha(x) = x$ ، این قضیه به قضیه پیوستگی انتگرالهای ریمان وابسته به یک پرما تبدیل می‌شود. ولی اگر به جای آن که در این قضیه $\alpha(x) = x$ را قرار دهیم قضیه ۲۶.۷ را بکار بریم، برای انتگرالهای ریمان نتیجه مفیدتری بیار خواهیم آمد.

قضیه ۳۹.۷ هرگاه f بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته، و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه تابع F که با معادله

$$F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y) dx$$

تعریف می‌شود بر $[c, d]$ پیوسته خواهد بود. یعنی، اگر $y_0 \in [c, d]$ ، داریم

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b g(x) f(x, y) dx = \int_a^b g(x) f(x, y_0) dx.$$

برهان. اگر $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ ، بنا بر قضیه ۲۶.۷، $F(y) = \int_a^b f(x, y) dG(x)$ ، حال قضیه ۳۸.۷ را بکار می‌بریم.

۲۴.۷ مشتقگیری زیر علامت انتگرال

قضیه ۴۰.۷ فرض کنیم $Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. و نیز α بر $[a, b]$ با تغییر کران‌داد باشد، و به ازای هر نقطه ثابت مانند y در $[c, d]$ ،

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x)$$

وجود داشته باشد. اگر مشتق جزئی $D_y f$ بر Q پیوسته باشد، به ازای هر y در

$F'(y)$ ، $]c, d[$ وجود دارد و از رابطه زیر بدست می آید:

$$F'(y) = \int_a^b D_y f(x, y) d\alpha(x).$$

تبصره. در حالت خاصی که $g \in R$ بر $[a, b]$ است و $\alpha(x) = \int_a^x g(t) dt$ خواهیم داشت

$$F'(y) = \int_a^b g(x) D_y f(x, y) dx \quad \text{و} \quad F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y) dx$$

برهان. اگر $y_0 \in]c, d[$ و $y \neq y_0$ داریم

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} d\alpha(x) = \int_a^b D_y f(x, \bar{y}) d\alpha(x),$$

که در آن \bar{y} نقطه‌ای بین y و y_0 است. چون $D_y f$ بر Q پیوسته است، قضیه را می توان با برهانی مشابه برهان قضیه ۳۸.۷ با ثبات رسانید.

۲۵.۷ تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری

قضیه ۴۱.۷ فرض کنیم $Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. همچنین α بر $[a, b]$ و β بر $[c, d]$ با تغییر کراندار باشند، و f بر Q پیوسته باشد. اگر $(x, y) \in Q$ ، تابعهای F و G را با معادله‌های زیر تعریف می کنیم:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \quad , \quad G(x) = \int_c^d f(x, y) d\beta(y).$$

در این صورت، $F \in R(\beta)$ بر $[c, d]$ ، $G \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است، و داریم

$$\int_c^d F(y) d\beta(y) = \int_a^b G(x) d\alpha(x).$$

به بیان دیگر می شود گفت که، می توان ترتیب عمل انتگرالگیری را به صورت زیر عوض کرد:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) d\beta(y) \right] d\alpha(x) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \right] d\beta(y).$$

برهان. بنا بر قضیه ۳۸.۷، F بر $[c, d]$ پیوسته است، و در نتیجه $F \in R(\beta)$ بر $[c, d]$ خواهد بود. بهمین نحو، معلوم می شود که $G \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است. برای اثبات تساوی دو انتگرال، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن α بر $[a, b]$ و β بر $[c, d]$ می باشند.

بنا به خاصیت پیوستگی یکشکل، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، δ مثبتی هست بقسمی که به ازای هر جفت نقطه مانند $z = (x, y)$ و $z' = (x', y')$ در Q که در نامساوی $|z - z'| < \delta$ صدق کنند،

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

حال عدد طبیعی n را بقسمی اختیار می‌کنیم که در نامساویهای زیرین صدق کند:

$$\frac{d-c}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \frac{b-a}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

سپس با تقسیم هر یک از بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ به n قسمت مساوی، Q را به n^2 مستطیل مساوی تقسیم می‌نمائیم. اگر به ازای n ، $0, 1, 2, \dots, k$ بنویسیم

$$y_k = c + \frac{k(d-c)}{n} \quad \text{و} \quad x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) d\beta(y) \right) d\alpha(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) d\beta(y) \right) d\alpha(x). \end{aligned}$$

قضیه ۳۰.۷ را دوبار در طرف راست تساوی بالا بکار می‌بریم. مجموع مضاعف به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x'_k, y'_j) [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)],$$

که در آن (x'_k, y'_j) در مستطیل $Q_{k,j}$ با رأسهای متقابل (x_k, y_j) و (x_{k+1}, y_{j+1}) قرار دارد. بهمین نحو، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} & \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) d\alpha(x) \right) d\beta(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(x''_k, y''_j) [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)], \end{aligned}$$

که در آن $(x''_k, y''_j) \in Q_{k,j}$. اما $|f(x'_k, y'_j) - f(x''_k, y''_j)| < \varepsilon$ ، و

$$\left| \int_a^b G(x) d\alpha(x) - \int_c^d F(y) d\beta(y) \right| \\ < \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\beta(y_{j+1}) - \beta(y_j)] \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)] \\ = \varepsilon [\beta(d) - \beta(c)] [\alpha(b) - \alpha(a)].$$

چون ε دلخواه است، پس دو انتگرال مورد نظر با یکدیگر متساویند.
از دو قضیه ۴۱.۷ و ۲۶.۷ نتیجه زیر برای انتگرالهای ریمان حاصل می‌گردد:

قضیه ۴۲.۷ فرض کنیم f بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد. هرگاه $g \in R$ بر $[a, b]$ و $h \in R$ بر $[c, d]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b \left[\int_c^d g(x) h(y) f(x, y) dy \right] dx \\ = \int_c^d \left[\int_a^b g(x) h(y) f(x, y) dx \right] dy.$$

پروان. قرار می‌دهیم $\alpha(x) = \int_a^x g(u) du$ و $\beta(y) = \int_c^y h(v) dv$ ، و برای اثبات قضیه، قضیه‌های ۲۶.۷ و ۴۱.۷ را بکار می‌بریم.

۲۶.۷ محک لبگ برای وجود انتگرالهای ریمان

هر تابع پیوسته دارای انتگرال ریمان است. اما محققاً پیوسته بودن الزامی نیست، زیرا دیده‌ایم که اگر f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، $f \in R$ بر $[a, b]$ است. بخصوص، f می‌تواند تابعی یکنوا یا مجموعه‌ای ناپیوستگیهای شمارشپذیر باشد. برای این f می‌دانیم که انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد. در واقع، تابعهائی هستند که دارای انتگرال ریمان هستند و مجموعه‌ای ناپیوستگیهای آنها شمارش‌ناپذیر است. (ر.ک. تمرین ۰.۳۲.۷). بنا براین، طبیعی است سؤال کنیم که: مجموعه‌ای ناپیوستگیهای یک تابع دارای انتگرال ریمان تا چه حدی می‌تواند «وسیع» باشد؟ جواب قطعی این سؤال به وسیله لبگ کشف شده است و در این بخش ثابت خواهد شد. نحوه اثبات قضیه لبگ با بررسی نوع قیدلی که شرط ریمان بر مجموعه‌ای ناپیوستگیهای f می‌گذارد روشن می‌گردد.

تفاضل بین مجموعه‌های ریمان بالائی و پائینی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k.$$

با بیان سطحی می توان گفت که، f وقتی، و فقط وقتی، انتگرالپذیر است که این مجموعه را به دو قسمت،، مثلاً، $S_1 + S_2$ ، تقسیم کنیم، که در آن مجموعه جمله‌های متناظر زیر بازه‌هایی است که فقط حاوی نقطه‌های پیوستگی f اند، و S_2 مجموعه بقیه جمله‌ها است. در S_1 ، به خاطر پیوستگی f ، هر تفاضل $M_k(f) - m_k(f)$ کوچک است. بنابراین، اگر حتی تعداد جمله‌های S_1 زیاد باشد، S_1 را می توان کوچک نگهداشت. ولی در S_2 ، تفاضلهای $M_k(f) - m_k(f)$ لزوماً کوچک نیستند؛ اما چون این تفاضلهای کراندار هستند (مثلاً به M)، پس $|S_2| \leq M \sum \Delta x_k$. بنابراین، S_2 در صورتی کوچک است که مجموع درازاهای زیر بازه‌های متناظر جمله‌های S_2 کوچک باشد. از این روی، انتظار می رود که مجموعه ناپیوستگیهای یک تابع انتگرالپذیر را بتوان با تعدادی بازه، که مجموع درازاهای آنها کوچک باشد، پوشانید.

آنچه گفته شد مدلول اصلی قضیه لبگ است. برای تنظیم این قضیه به صورت دقیقتر، مجموعه‌های دارای اندازه صفر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴۳.۷ می‌گوئیم که مجموعه S از عددهای حقیقی دارای اندازه صفر است در صورتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، یک پوشش شمارشپذیر از بازه‌های باز وجود داشته باشد که مجموع درازاهایشان از ϵ کوچکتر باشد.

اگر این بازه‌ها را با $[a_k, b_k]$ نشان دهیم، باید

$$(۳) \quad \sum_k (b_k - a_k) < \epsilon \quad \text{و} \quad S \subseteq \bigcup_k [a_k, b_k]$$

اگر دسته بازه‌ها منتهای باشد، زیر نویس k در (۳) روی مجموعه‌ای منتهای تغییر می‌کند. هرگاه دسته بازه‌ها نامنتهاسی شمارشپذیر باشد، آنگاه k از ۱ تا ∞ تغییر می‌کند، و مجموع درازاهای بازه‌ها مساوی مجموع این رشته نامنتهاسی است:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (b_k - a_k).$$

علاوه بر تعریف بالا، نتیجه‌ای دیگر در مورد مجموعه‌های دارای اندازه صفر نیز مورد نیاز ما می‌باشد.

قضیه ۴۴.۷ فرض کنیم F دسته‌ای باشد شمارشپذیر از مجموعه‌هائی در \mathbb{R} ، مثلاً،
به صورت

$$F = \{F_1, F_2, \dots\},$$

که هر يك دارای اندازه صفر باشد. در این صورت، اجتماع آنها، یعنی

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

نیز دارای اندازه صفر خواهد بود.

برهان. اگر $\varepsilon > 0$ معلوم باشد، به ازای هر k ، یک پوشش شمارشپذیر F_k از بازه‌های باز هست که مجموع درازاهای آنها از $\varepsilon/2^k$ کمتر است. اجتماع همه این پوششها خود یک پوشش شمارشپذیر S از بازه‌های باز است، و مجموع درازاهای همه این بازه‌ها از

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

کمتر است.

چند مثال. چون هر مجموعه شامل فقط یک نقطه دارای اندازه صفر است، پس هر زیرمجموعه شمارشپذیر R دارای اندازه صفر می‌باشد. بخصوص، مجموعه عددهای گویا دارای اندازه صفر است. اما باید توجه داشت که، مجموعه‌هائی شمارش‌ناپذیر که دارای اندازه صفرند نیز وجود دارند. (ر. ک. تمرین ۰۳۲.۷)

اینک مفهوم نوسان را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۵.۷ فرض کنیم f بر بازه S تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد. اگر $T \subseteq S$ عدد

$$\Omega_f(T) = \sup \{f(x) - f(y) \mid x, y \in T\}$$

دا نوسان f بر T می‌نامند. نوسان f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \Omega_f(B(x;h) \cap S).$$

تبصره. چون $\Omega_f(B(x;h) \cap S)$ تابعی نزولی از h است، پس حد بالا همواره وجود دارد. در حقیقت، هرگاه $T_1 \subseteq T_2$ ، آنگاه $\Omega_f(T_1) \leq \Omega_f(T_2)$. همچنین، $\omega_f(x) = 0$ فقط وقتی، و فقط وقتی، که f در x پیوسته باشد (تمرین ۲۴.۴).

بنا بر قضیه زیرین، هرگاه در هر نقطه از بازه فشردۀ $[a, b]$ مانند x $\omega_f(x) < \varepsilon$ ، آنگاه به ازای هر زیر بازه $[a, b]$ مانند T به قدر کافی کوچک، $\Omega_f(T)$ نیز کوچکتر از ε خواهد بود.

قضیه ۴۶.۷ فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد.

همچنین $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. فرض می‌کنیم به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $\omega_f(x) < \varepsilon$.
 در این صورت، عدد مثبتی مانند δ (فقط تابع ε) هست قسمتی که به‌ازای هر زیربازه
 بسته $[a, b]$ مانند T که درازای آن کمتر از δ باشد، داریم $\Omega_f(T) < \varepsilon$.

برهان. به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، گویی یک بعدی مانند $B_x = B(x; \delta_x)$ هست
 قسمتی که

$$\Omega_f(B_x \cap [a, b]) < \omega_f(x) + [\varepsilon - \omega_f(x)] = \varepsilon.$$

مجموعه همه گویهای $B(x; \delta_x/2)$ یک پوشش باز $[a, b]$ است. چون $[a, b]$ فشرده
 است، پس تعدادی متناهی (مثلاً k تا) از این بازه‌ها $[a, b]$ را می‌پوشانند.
 فرض کنیم که $\delta_1/2, \dots, \delta_k/2$ شعاعهای آنها باشند و δ مینیمم این k عدد باشد.
 هرگاه بازه T درازایش از δ کمتر باشد، آنگاه قسمتی از T دست‌کم به‌وسیله یکی از
 این گویها، مثلاً $B(x_p; \delta_p/2)$ ، پوشیده می‌شود. چون $\delta_p \geq 2\delta$ ، پس گوی
 $B(x_p; \delta_p)$ تمام T را می‌پوشاند. بعلاوه، در $B(x_p; \delta_p) \cap [a, b]$ نوسان f از ε
 کمتر است. از این نتیجه می‌شود که $\Omega_f(T) < \varepsilon$ و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۴۷.۷ فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد. به‌ازای
 هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه J_ε را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_\varepsilon = \{x \mid x \in [a, b], \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

در این صورت، J_ε مجموعه‌ای است بسته.

برهان. فرض کنیم x یک نقطه انباشتگی J_ε باشد. اگر $x \notin J_\varepsilon$ ، داریم $\omega_f(x) < \varepsilon$.
 از این روی، گویی یک بعدی مانند $B(x)$ هست که به‌ازای آن،

$$\Omega_f(B(x) \cap [a, b]) < \varepsilon.$$

یعنی، هیچ نقطه $B(x)$ نمی‌تواند به J_ε تعلق داشته باشد، و این ناقض آن است که x
 نقطه انباشتگی J_ε باشد. بنا بر این، $x \in J_\varepsilon$ و J_ε بسته است.

قضیه ۴۸.۷ (محدبیت برای وجود انتگرال ریمان). فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده،
 و بر این بازه کراندار باشد. همچنین D مجموعه ناپیوستگیهای f در $[a, b]$ باشد.
 در این صورت، $f \in R$ بر $[a, b]$ است وقتی، و فقط وقتی، که D دارای اندازه
 صفر باشد.

برهان (لزوم شرط). ابتدا فرض می‌کنیم D دارای اندازه صفر نباشد و نشان
 می‌دهیم که f انتگرالپذیر نیست. D را می‌توان به‌صورت اجتماعی شمارشپذیر از

مجموعه‌ها مانند

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$$

نوشت، که در آن

$$D_r = \left\{ x \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{r} \right\}.$$

هرگاه $x \in D$ ، آنگاه $\omega_f(x) > 0$ ، بنابراین، D مساوی اجتماع مجموعه‌های D_r ($r = 1, 2, \dots$) خواهد بود.

حال اگر D دارای اندازه صفر نباشد، بنا بر قضیه ۴۴.۷، یکی از D_r ها دارای اندازه صفر نیست. بنابراین، عدد مثبتی مانند ε هست بقسمی که در هر دسته شمارشپذیر از بازه‌های باز که D_r را پوشانند، مجموع درازاهای این بازه‌ها از ε کمتر نیست. به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P ،

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k = S_1 + S_2 \geq S_1,$$

که در آن S_1 مجموع جمله‌هایی است که زیر بازه‌های متناظر آنها حاوی نقطه‌هایی از D در درون خود باشند، و S_2 بقیه جمله‌ها است. چون بازه‌های باز موجود در S_1 مجموعه D_r را، بجز احتمالاً یک زیرمجموعه متناهی D_r ، که دارای اندازه صفر است، می‌پوشانند، پس مجموع درازاهای آنها دستکم مساوی ε است. بعلاوه، در این بازه‌ها داریم

$$S_1 \geq \frac{\varepsilon}{r} \quad \text{و در نتیجه} \quad M_k(f) - m_k(f) \geq \frac{1}{r}$$

یعنی، به ازای هر افراز P ،

$$U(P, f) - L(P, f) \geq \frac{\varepsilon}{r},$$

پس شرط ریمان نمی‌تواند صادق باشد. بنابراین، f انتگرالپذیر نیست. بایان دیگر می‌توان گفت که، هرگاه $f \in R$ ، آنگاه D دارای اندازه صفر است.

(کفایت شرط). حال فرض می‌کنیم D دارای اندازه صفر باشد، و نشان می‌دهیم که شرط ریمان برقرار است. بار دیگر می‌نویسیم $D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r$ ، که در آن D_r مجموعه نقطه‌هایی مانند x است که در آنها $\omega_f(x) \geq 1/r$ ، چون $D_r \subseteq D$ ،

پس هر D_r دارای اندازه صفر است. پس D_r را می توان به وسیله تعدادی بازه باز با مجموع درازاهای کمتر از $1/r$ پوشانید. چون D_r فشرده است (قضیه ۴۷.۷) ، تعدادی متناهی از این بازه ها D_r را می پوشانند. اجتماع این بازه ها مجموعه بازی است که آن را با A_r نشان می دهیم. مجموعه متمم $B_r = [a, b] - A_r$ مساوی اجتماع تعدادی متناهی زیربازه بسته $[a, b]$ خواهد بود. فرض کنیم I یکی از زیر-بازه های B_r باشد. هرگاه $x \in I$ ، آنگاه $1/r < \omega_r(x)$ ، پس، بنا بر قضیه ۴۶.۷ ، عدد مثبتی مانند δ (فقط تابع r) هست بقسمی که I را می توان به تعدادی متناهی زیربازه تقسیم کرد بطوری که درازای هریک از زیربازه های بدست آمده، مثلاً T ، از δ کمتر باشد و $\Omega_r(T) < 1/r$. نقطه های انتهائی این زیربازه ها یک افراز $[a, b]$ مانند P_r بوجود می آورند. اگر P از P_r ظریفتر باشد، می توان نوشت

$$U(P, f) - L(P, f) = \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k = S_1 + S_2,$$

که در آن مجموع جمله های متناظر زیر بازه هائی است که حاوی نقطه هائی از D_r هستند، و S_2 بقیه جمله ها است. در جمله k ام S_2 داریم

$$S_2 < \frac{b-a}{r} \quad \text{و در نتیجه} \quad M_k(f) - m_k(f) < \frac{1}{r}.$$

چون همه بازه های مربوط به S_1 را می پوشانند، پس

$$S_1 \leq \frac{M - m}{r},$$

که در آن M و m سوپریم و اینفیم f بر $[a, b]$ می باشند. بنا براین،

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{M - m + b - a}{r}.$$

چون رابطه بالا به ازای هر $r \geq 1$ برقرار است، پس شرط ریمان برقرار بوده، $f \in R$ بر $[a, b]$ خواهد بود.

تصوره. فرض کنیم S یک زیرمجموعه \mathbb{R}^1 باشد. اگر همه نقطه های S ، بجز نقاط زیر مجموعه ای از آن که دارای اندازه صفر است، دارای خاصیتی باشند، گوئیم این خاصیت تقریباً همه جا بر S برقرار است. بنا براین، بنا به قضیه لبگ، هر تابع کراندار مانند f بر بازه فشرده $[a, b]$ وقتی، و فقط وقتی، انتگرال ریمان دارد که f تقریباً همه جا بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

گزاره‌های زیرین (که بعضی از آنها پیشتر در این فصل ثابت شده‌اند) بی‌درنگ از قضیهٔ لبگ نتیجه می‌شوند.

قضیه ۴۹.۷

(آ) هرگاه f بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه $f \in R$ بر $[a, b]$ است.

(ب) هرگاه $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه به ازای هر زیربازهٔ $[a, b]$ مانند $[c, d]$ ، $f \in R$ بر $[c, d]$ است، و $|f| \in R$ و $f^2 \in R$ بر $[a, b]$ خواهند بود. همچنین، هرگاه $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، آنگاه $f \cdot g \in R$ بر $[a, b]$ است.

(ج) هرگاه $f \in R$ و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشند و g دراز و کراندار باشد، آنگاه $(f/g) \in R$ بر $[a, b]$ است.

(د) هرگاه f و g بر $[a, b]$ کراندار باشند و ناپیوستگیهای آنها برای این بازه یکی باشند، آنگاه $f \in R$ بر $[a, b]$ است وقتی، و فقط وقتی، که $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد.

(ه) فرض کنیم $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و به ازای هر x در $[a, b]$ ، $m \leq g(x) \leq M$. اگر f بر بازهٔ $[m, M]$ پیوسته باشد، تابع مرکب h که با معادلهٔ $h(x) = f[g(x)]$ تعریف می‌شود بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داد.

تبره. اگر فقط فرض کنیم که $f \in R$ بر $[m, M]$ باشد، گزارهٔ (ه) لزوماً برقرار نیست. (ر.ک. تمرین ۰۲۹.۷)

۲۷.۷ انتگرالهای ریمان - اشتیل یس مختلط

انتگرالهای ریمان - اشتیل یس به شکل $\int_a^b f d\alpha$ ، که در آن f و α تابعهای مختلط بر $[a, b]$ تعریف شده و کراندار باشند، در نظریهٔ تابعهای یک متغیر مختلط دارای اهمیتی اساسی هستند. این انتگرالها را می‌توان درست با همان تعریفی که در حالت حقیقی بکار برده شده است معرفی نمود. در حقیقت، تعریف ۱.۷ برای وقتی هم که f و α مختلط باشند معنی دارد. در این حالت، مجموع حاصل ضربهای به شکل $[f(t_k)][\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$ ، که برای تشکیل مجموعه‌های ریمان - اشتیل یس بکار می‌روند، فقط نیازمند به آن هستند که مانند مجموع حاصل ضربهای چند عدد مختلط تعبیر شوند. چون عددهای مختلط، مانند عددهای حقیقی، از قانونهای تعویضپذیری و شرکتپذیری و بخشپذیری تبعیت می‌کنند، پس این مطلب که انتگرالهای مختلط بیشتر خاصیتهای انتگرالهای حقیقی را دارا هستند تعجب‌آور نخواهد بود. مخصوصاً، قضیه‌های ۲.۷، ۳.۷، ۴.۷، ۶.۷، و ۷.۷ (و همچنین برهانهای آنها کلمه به کلمه)

برای وقتی که f و α مختلط باشند همه معتبرند. (در قضیه‌های ۲۰۷ و ۳۰۷ پایاهای c_1 و c_2 می‌توانند عددهای مختلط اختیار شوند.) بعلاوه، قضیه زیرین، که در واقع نظریه انتگرالهای اشتیل‌یس مختلط را به حالت حقیقی تحویل می‌کند، وجود دارد.

قضیه ۵۰۷ فرض کنیم تابعهای مختلط $f = f_1 + if_2$ و $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشند. در این صورت،

$$\int_a^b f d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha_1 - \int_a^b f_2 d\alpha_2 \right) + i \left(\int_a^b f_2 d\alpha_1 + \int_a^b f_1 d\alpha_2 \right),$$

به شرط آن‌که چهار انتگرال طرف راست تساوی بالا وجود داشته باشند.

برهان قضیه ۵۰۷، که بی‌درنگ از تعریف نتیجه می‌شود، به خواننده واگذار

می‌گردد.

با استفاده از این قضیه می‌توان اکثر خاصیت‌های مهم انتگرالهای حقیقی را به حالت مختلط وسعت داد. مثلاً، اگر مفهومی پیوستگی، مشتق‌پذیری، و با تغییر کراندار بودن را برای تابعهای مختلط مؤلفه به مؤلفه (مانند تابعهای برداری) تعریف کنیم، رابطه بین مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مذکور در قضیه ۳۲۰۷ برای انتگرالهای مختلط نیز معتبر خواهد بود. بنابراین، تابع مختلط $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ بر $[a, b]$ را با تغییر کراندار نامیم در صورتی که هر یک از مؤلفه‌های α_1 و α_2 بر این بازه با تغییر کراندار باشد. همچنین، اگر $\alpha'_1(t)$ و $\alpha'_2(t)$ وجود داشته باشند، $\alpha'(t)$ با معادله $\alpha'(t) = \alpha'_1(t) + i\alpha'_2(t)$ تعریف می‌شود. (مشتقهای یکطرفی نیز به همین صورت تعریف می‌شوند.) با این تعریفها، قضیه‌های ۳۲۰۷ و ۳۴۰۷ (قضیه‌های اساسی حساب انتگرال) هر دو برای وقتی که f و α مختلط باشند معتبر باقی خواهند ماند. برهانهای این دو قضیه از حالت‌های حقیقی آنها و قضیه ۵۰۷ مستقیماً بدست می‌آیند.

در فصل ۱۶، وقتی که تابعهای مختلط با تفصیل بیشتری مورد مطالعه قرار

می‌گیرند، به انتگرالهای مختلط باز خواهیم گشت.

تمرین

انتگرالهای ریمان - اشتیل‌یس

۱۰۷ مستقیماً از تعریف ۱۰۷ ثابت کنید که $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$

۲.۷ اگر به ازای هر تابع f که بر $[a, b]$ یکنوا باشد، $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد و $\int_a^b f d\alpha = 0$ ، ثابت کنید که α بر $[a, b]$ باید تابعی پایا باشد.

۳.۷ در نوشته‌ها غالباً تعریف انتگرال ریمان - اشتیل یس مذکور در زیر بکار می‌رود: تابع f را بر حسب α انتگرالپذیر گوئیم در صورتی که عددی حقیقی مانند A وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، δ مثبتی باشد چنان که به ازای هر افزایش $[a, b]$ مانند P با $\|P\| < \delta$ و اختیار کردن هر t_k در $[x_{k-1}, x_k]$ ، رابطه $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$ برقرار باشد.

(آ) نشان دهید هرگاه $\int_a^b f d\alpha$ بر طبق این تعریف وجود داشته باشد، آنگاه این انتگرال بر طبق تعریف ۱.۷ نیز وجود دارد و دو انتگرال با یکدیگر مساویند.

(ب) فرض کنید به ازای $a \leq x < c$ ، $f(x) = \alpha(x) = 0$ ، و به ازای $c < x \leq b$ ، $f(x) = \alpha(x) = 1$ ، و $f(c) = 0$ و $\alpha(c) = 1$. نشان دهید که $\int_a^b f d\alpha$ بر طبق تعریف ۱.۷ وجود دارد ولی بر طبق این تعریف دوم مذکور در بالا وجود ندارد.

۴.۷ اگر بر طبق تعریف ۱.۷، $f \in R$ ، ثابت کنید که $\int_a^b f(x) dx$ بر طبق تعریف تمرین ۳.۷ نیز وجود دارد. [برخلاف تمرین ۳.۷ (ب).] دانهائی. فرض کنید که داده شده، P_ε را بقسمی اختیار کنید که $I + \varepsilon/2 < U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon$ (در این جا نمادهای بخش ۱.۷ بکار برده شده‌اند). فرض کنید N تعداد نقطه‌های تقسیم در P_ε باشد و قرار دهید $\delta = \varepsilon/(2MN)$. اگر $\|P\| < \delta$ ، بنویسید

$$U(P, f) = \sum M_k(f) \Delta x_k = S_1 + S_2,$$

که در آن S_1 مجموع جمله‌های متناظر زیر بازه‌هایی از P است که حاوی هیچ نقطه P_ε نیستند، و S_2 مجموع بقیه جمله‌ها است. در این صورت،

$$S_1 \leq U(P_\varepsilon, f) < I + \varepsilon/2$$

$$\text{و } S_2 \leq NM \|P\| < NM\delta = \varepsilon/2$$

و در نتیجه $U(P, f) < I + \varepsilon$. بهمین طریق، معلوم می‌شود که به ازای δ' مثبتی،

$$\text{هرگاه } \|P\| < \delta', \text{ آنگاه } L(P, f) > I - \varepsilon$$

یعنی هرگاه $\|P\| < \min(\delta, \delta')$ ، آنگاه $|S(P, f) - I| < \varepsilon$.

۵.۷ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد از عددهای حقیقی. به ازای $x \geq 0$ ، تعریف کنید

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{[x]} a_n,$$

که در آن $[x]$ بزرگترین عدد صحیح در x می‌باشد، و مجموعهای تهی صفر فرض می‌شوند. فرض کنید f در بازه $1 \leq x \leq a$ مشتق پیوسته داشته باشد. با استفاده از انتگرالهای اشتیل‌یس دستور زیر را بدست آورید:

$$\sum_{n \leq a} a_n f(n) = - \int_1^a A(x) f'(x) dx + A(a) f(a).$$

۶.۷ با استفاده از دستور جمع‌بندی اولر، یا انتگرال‌گیری به طریقه جزء به جزء از انتگرال اشتیل‌یس، اتحادهای زیرین را ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s \int_1^n \frac{[x]}{x^{s+1}} dx, \quad s \neq 1 \quad (A)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n - \int_1^n \frac{x - [x]}{x^2} dx + 1 \quad (B)$$

۷.۷ فرض کنید f' بر $[1, 2n]$ پیوسته باشد. با استفاده از دستور جمع‌بندی اولر، یا انتگرال‌گیری به طریقه جزء به جزء، ثابت کنید که

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k f(k) = \int_1^{2n} f'(x) ([x] - 2[x/2]) dx.$$

۸.۷ فرض کنید اگر x عددی صحیح نباشد، $\varphi_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ ، و اگر x

عدد صحیح باشد، $\varphi_1(x) = 0$. و نیز فرض کنید که $\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi_2(t) dt$ اگر f'' بر $[1, n]$ پیوسته باشد، ثابت کنید از دستور جمع‌بندی اولر رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx - \int_1^n \varphi_2(x) f''(x) dx + \frac{f(1) + f(n)}{2}.$$

۹.۷ با فرض $f(x) = \log x$ در تمرین ۸.۷، ثابت کنید که

$$\log n! = (n + \frac{1}{2}) \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\varphi_2(t)}{t^2} dt.$$

۱۰.۷ اگر $x \geq 1$ ، فرض کنید $\pi(x)$ تعداد عددهای اول نایبتر از x را نشان دهد، یعنی،

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

که در آن مجموع روی همه عددهای اول نایبتر از x گرفته شده باشد. بنا بر قضیه عددهای اول،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1.$$

این قضیه معمولاً با مطالعه تابع ϑ ثابت می‌گردد. ϑ با تابع π مربوط است و با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p,$$

که در آن باز هم مجموع بروی همه عددهای اول نایبتر از x گرفته شده است. تابعهای π و ϑ هر دو پله‌ای هستند، و فقط در عددهای اول دارای جهش می‌باشند. این تمرین نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با استفاده از انتگرالهای ریمان - اشتیل یس این دو تابع را به هم مربوط کرد.

(آ) اگر $x \geq 2$ ، ثابت کنید که $\pi(x)$ و $\vartheta(x)$ را می‌توان به صورت انتگرالهای ریمان - اشتیل یس زیر درآورد:

$$\vartheta(x) = \int_{2/x}^x \log t \, d\pi(t), \quad \pi(x) = \int_{2/x}^x \frac{1}{\log t} \, d\vartheta(t).$$

بصره. حد پائینی دو انتگرال بالا را می‌توان با هر عدد دیگری در بازه $[2, 1]$ عوض کرد.

(ب) اگر $x \geq 2$ ، با استفاده از انتگرالگیری به طریقه جزء بجزء نشان دهید که

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt, \\ \pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt. \end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌های بالا می‌توان ثابت کرد که قضیه عددهای اول

هم‌ارز رابطه $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x)/x = 1$ است.

۱۱.۷ اگر α بر $[a, b]$ باشد، ثابت کنید که

$$(آ) \quad (a < c < b) \int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$$

$$(ب) \quad \int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

$$(ج) \quad \int_a^b (f + g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$$

۱۲.۷ بر بازه‌ای چون $[a, b]$ ، تابع با تغییر کراندار f و تابع صعودی α را بقسمی مثال بزنید که $|f| \in R(\alpha)$ ولی $\int_a^b f d\alpha$ وجود نداشته باشد.

۱۳.۷ فرض کنید تابع α بر $[a, b]$ پیوسته و با تغییر کراندار باشد. همچنین $g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد، و اگر $x \in [a, b]$ ، $\beta(x) = \int_a^x g(t) d\alpha(t)$ ، نشان دهید که:

(آ) اگر f بر $[a, b]$ باشد، نقطه‌ای مانند x_0 در $[a, b]$ هست بقسمی که

$$\int_a^b f d\beta = f(a) \int_a^{x_0} g d\alpha + f(b) \int_{x_0}^b g d\alpha.$$

(ب) بعلاوه، اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نیز خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)g(x) d\alpha(x) = f(a) \int_a^{x_0} g d\alpha + f(b) \int_{x_0}^b g d\alpha.$$

۱۴.۷ فرض کنید $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، و α بر این بازه با تغییر کراندار باشد. همچنین به ازای هر x در $[a, b]$ ، $V(x)$ تغییر کسل α بر $[a, x]$ باشد، و $V(a) = 0$. اگر M کرانی بالائی برای $|f|$ بر $[a, b]$ باشد، نشان دهید که

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq \int_a^b |f| dV \leq MV(b).$$

در حالت خاص که $\alpha(x) = x$ ، نامساوی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a).$$

۱۵.۷ فرض کنید $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعهای با تغییر کراندار بر $[a, b]$. همچنین تابعی مانند α تعریف شده بر $[a, b]$ باشد بقسمی که تغییر کل $\alpha - \alpha_n$ بر $[a, b]$ ، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، به ۰ بگراید. بعلاوه، به ازای هر

$$\alpha(a) = \alpha_n(a) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

۱۶.۷ اگر $f \in R(\alpha)$ ، $f^2 \in R(\alpha)$ ، $g \in R(\alpha)$ و $g^2 \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند، ثابت کنید که

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b \left| \begin{matrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{matrix} \right|^2 d\alpha(y) \right] d\alpha(x) \\ &= \left(\int_a^b f(x)^2 d\alpha(x) \right) \left(\int_a^b g(x)^2 d\alpha(x) \right) \\ & \quad - \left(\int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) \right)^2. \end{aligned}$$

وقتی که α بر $[a, b]$ باشد، نامساوی زیر (نامساوی کوشی - شوارتز) را از آن نتیجه بگیرد:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 d\alpha(x) \right) \left(\int_a^b g(x)^2 d\alpha(x) \right).$$

(با تمرین ۲۳.۱ مقایسه شود.)

۱۷.۷ فرض کنید $f \in R(\alpha)$ ، $g \in R(\alpha)$ و $f \cdot g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشند. نشان دهید که

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) d\alpha(y) \right] d\alpha(x) \\ &= (\alpha(b) - \alpha(a)) \int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x) \\ & \quad - \left(\int_a^b f(x) d\alpha(x) \right) \left(\int_a^b g(x) d\alpha(x) \right). \end{aligned}$$

اگر α بر $[a, b]$ باشد، و f و g بر $[a, b]$ هر دو صعودی (یا هر دو نزولی)

باشند، نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$\left(\int_a^b f(x) d\alpha(x)\right)\left(\int_a^b g(x) d\alpha(x)\right) \\ \leq (\alpha(b) - \alpha(a)) \int_a^b f(x)g(x) d\alpha(x).$$

نشان دهید که در حالتی که f بر $[a, b]$ صعودی، و g نزولی باشد، عکس نامساوی بالا برقرار خواهد بود.

انتگرالهای ریمان

۱۸۰۷ فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. با استفاده از تمرین ۴۰۷، ثابت کنید که حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

وجود دارد و مقدار آن مساوی $\int_a^b f(x) dx$ است. از آن نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{-1/2} = \log(1 + \sqrt{2}).$$

۱۹۰۷ تابعهای f و g را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

(آ) نشان دهید که به ازای هر x ، $g'(x) + f'(x) = 0$ ، و نتیجه بگیرید که

$$g(x) + f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

(ب) با استفاده از (آ)، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

۲۰۰۷ فرض کنید $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و اگر $x \in [a, b]$ ، $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ ، ثابت کنید که انتگرال مساوی تغییر کل f بر $[a, x]$ است.

۲۱.۷ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ دارای مشتق پیوسته بر $[a, b]$ باشد. ثابت کنید که درازای خمی که به وسیله \mathbf{f} توصیف شده است از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Lambda_t(a, b) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| dt.$$

۲۲.۷ اگر $f^{(n+1)}$ بر $[a, x]$ پیوسته باشد، تابع I_n را به صورت زیر تعریف کنید:

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

(آ) نشان دهید که

$$I_{k-1}(x) - I_k(x) = \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

(ب) با استفاده از (آ) قسمت باقیمانده در دستور تیلور (قضیه ۱۹.۵) را به صورت انتگرال درآورید.

۲۳.۷ فرض کنید تابع f بر بازه $[0, a]$ پیوسته باشد. اگر $x \in [0, a]$ تعریف کنید $f_0(x) = f(x)$ و

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(آ) نشان دهید که مشتق f_n n وجود دارد و مساوی f است.

(ب) قضیه زیر را، که به نام قضیه فکته^۱ معروف است، ثابت کنید: تعداد تغییر علامتهای f در بازه $[0, a]$ از تعداد تغییر علامتها در مجموعه مرتب حاصل از عددهای

$$f(a), f_1(a), \dots, f_n(a)$$

کمتر نیست.

۱. اهنمائی. استقرای ریاضی را بکار برید.

(ج) با استفاده از (ب)، قضیه زیر را، که به نام قضیه فجر^۲ معروف است، ثابت کنید: تعداد تغییر علامتهای f در $[0, a]$ از تعداد تغییر علامتها در

مجموعه مرتب حاصل از عددهای

$$f(0), \int_0^a f(t) dt, \int_0^a t f(t) dt, \dots, \int_0^a t^n f(t) dt$$

کمتر نیست.

۲۴.۷ فرض کنید تابع مثبت f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین M ماکزیم مقدارهای f بر $[a, b]$ را نشان دهد. نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} = M.$$

۲۵.۷ تابع f از دو متغیر حقیقی به ازای هر نقطه (x, y) در مربع یک $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد،} \\ 2y & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \end{cases}$$

(آ) انتگرالهای $\int_0^1 f(x, y) dx$ و $\int_0^1 f(x, y) dy$ را بر حسب y محاسبه کنید.

(ب) نشان دهید که انتگرال $\int_0^1 f(x, y) dy$ به ازای هر x ثابت وجود دارد، و به ازای $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq t \leq 1$ ، انتگرال $\int_0^1 f(x, y) dy$ را بر حسب x و t محاسبه کنید.

(ج) فرض کنید $F(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$. نشان دهید که انتگرال $\int_0^1 F(x) dx$ وجود دارد، و مقدار آن را بیابید.

۲۶.۷ فرض کنید f بر $[0, 1]$ به این صورت تعریف شده باشد: $f(0) = 0$ ؛ به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، هرگاه $2^{-n} < x \leq 2^{-n-1}$ ، آنگاه $f(x) = 2^{-n}$.

(آ) دو دلیل بیاورید برای این که چرا $\int_0^1 f(x) dx$ وجود دارد.

(ب) فرض کنید $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. نشان دهید به ازای $0 < x \leq 1$ ،

$$F(x) = xA(x) - \frac{1}{x}A(x)^2,$$

که در آن $A(x) = 2^{-\lceil -\log_2 x \rceil}$ ، و $[y]$ بزرگترین عدد صحیح در y است.

۲۷.۷ فرض کنید مشتق f بر بازه $[a, b]$ نزولی باشد، و به ازای هر x در این بازه، $f'(x) \geq m > 0$ ثابت کنید که

$$\left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}.$$

داهمنائی. انتگرالده را در $f'(x)$ ضرب و بسر آن تقسیم کنید، و قضیه ۳۷.۷ قسمت (دوم) را بکار برید.

۲۸.۷ دنباله نزولی مفروض $\{G(n)\}$ از عددهای حقیقی بقسمی است که، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $G(n) \rightarrow 0$. تابع f را بر $[0, 1]$ برحسب $\{G(n)\}$ به این صورت تعریف کنید: $f(0) = 1$ ؛ هرگاه x گنگ باشد، آنگاه $f(x) = 0$ ؛ هرگاه x گویا و به صورت m/n (n نسبت به هم اول) باشد، آنگاه $f(m/n) = G(n)$. نوسان $\omega_f(x)$ را در هر x در $[0, 1]$ محاسبه کنید، و نشان دهید که $f \in R$ بر $[0, 1]$ است.

۲۹.۷ فرض کنید f تابعی باشد مانند تمرین ۲۸.۷، که برحسب $G(n) = 1/n$ تعریف شده باشد. همچنین، اگر $0 < x \leq 1$ ، قرار دهید $g(x) = 1$ ، و $g(0) = 0$. نشان دهید که، با وجود آن که $f \in R$ و $g \in R$ بر $[0, 1]$ اند، ولی تابع مرکب h که چنین تعریف می شود $h(x) = g[f(x)]$ بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.

۳۰.۷ با استفاده از قضیه لبگ قضیه ۴۹.۷ را ثابت کنید.

۳۱.۷ با استفاده از قضیه لبگ ثابت کنید هرگاه $f \in R$ و $g \in R$ بر $[a, b]$ باشند، و به ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq m > 0$ ، آنگاه تابع h تعریف شده با معادله

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد.

۳۲.۷ فرض کنید $I = [0, 1]$ ، و $A_1 = I -]1/3, 2/3[$ ، آن زیرمجموعه I باشد که با حذف قسمت باز وسط I به درازای $1/3$ بدست می آید؛ یعنی، $A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. همچنین، آن زیرمجموعه A_1 باشد که با حذف قسمتهای باز وسطی $[0, 1/3]$ و $[2/3, 1]$ به درازای $1/9$ بدست می آید. این عمل را تکرار نموده، مجموعه های A_2, A_3, \dots را نیز تعریف کنید. مجموعه $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ مجموعه کانتود نامیده می شود. ثابت کنید:

(آ) مجموعه ای فشرده است، و دارای اندازه صفر می باشد.

(ب) $x \in C$ وقتی، و فقط وقتی، که $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ ، که در آن هر a_n یا ۰ یا ۲ باشد.

(ج) C شمارش ناپذیر است.

(د) اگر $x \in C$ ، قرار دهید $f(x) = 1$ ، و اگر $x \notin C$ ، فرض کنید $f(x) = 0$. ثابت کنید $f \in R$ بر $[0, 1]$ است.

۳۳.۷ این تمرین اثبات گنگ بودن π^2 را (که منسوب به نیون^۱ است) با اختصار شرح می‌دهد. فرض کنید $f(x) = x^n(1-x)^n/n!$. ثابت کنید:

$$(آ) \quad 0 < f(x) < 1/n!, \quad 0 < x < 1.$$

(ب) هریک از مشتق‌های k ام $f^k(0)$ و $f^k(1)$ عددی صحیح است.

حال فرض کنید به‌ازای عددهای صحیح و مثبت a و b ، $\pi^2 = a/b$ ، و قرار دهید

$$F(x) = b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x) \pi^{2n-2k}.$$

ثابت کنید:

(ج) $F(1)$ و $F(0)$ عددهائی صحیح هستند.

$$(د) \quad \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x = \frac{d}{dx} \{F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x\}$$

$$(ه) \quad F(1) + F(0) = \pi a^n \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx$$

(و) با استفاده از (آ) در (ه)، نتیجه بگیرید که اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، $0 < F(1) + F(0) < 1$. این مطلب ناقض (ج) است و نشان می‌دهد که π^2 (و در نتیجه π) گنگ است.

۳۴.۷ تابع حقیقی α ، که بر بازه $[a, b]$ پیوسته است و α' بر $[a, b]$ کراندار می‌باشد، مفروض است. فرض کنیم f بر $[a, b]$ تعریف شده، و بر این بازه کراندار باشد. همچنین، دو انتگرال

$$\int_a^b f(x) \alpha'(x) dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

وجود داشته باشند. ثابت کنید که این دو انتگرال متساویند. (در این‌جا فرض نشده است که α' پیوسته باشد.)

۳۵.۷ قضیه زیر را ثابت کنید. بنابراین قضیه، اگر انتگرال یک تابع مثبت باشد، خود این تابع باید بر بازه‌ای مثبت باشد. فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و

به ازای M مثبتی، $0 \leq f(x) \leq M$ بر $[a, b]$ باشد. قرار دهید

$$h = (I/2)/(M + b - a) \text{ و } I = \int_a^b f(x) dx$$

و فرض کنید که $I > 0$. در این صورت، مجموعه $T = \{x | f(x) \geq h\}$ حاوی تعدادی متناهی بازه است، که مجموع درازاهای آنها دست کم مساوی h می باشد.

دانهائی. فرض کنید P یک افراز $[a, b]$ باشد بقسمی که هر مجموع ریمان $S(P, f) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$ در نامساوی $S(P, f) > I/2$ صدق کند. $S(P, f)$ را به دو قسمت $S(P, f) = \sum_{k \in A} + \sum_{k \in B}$ تقسیم کنید، که در آن

$$A = \{k | [x_{k-1}, x_k] \subseteq T\} \text{ و } B = \{k | k \notin A\}$$

اگر $k \in A$ ، از نامساوی $f(t_k) \leq M$ استفاده کنید؛ اگر $k \in B$ ، t_k را بقسمی اختیار کنید که $f(t_k) < h$. نتیجه بگیرید که $\sum_{k \in A} \Delta x_k > h$.

قضیه‌های وجودی برای معادله‌های انتگرال و دیفرانسیل

تمرینهای زیر مصور می سازند که چگونه قضیه نقطه ثابت در مورد انقباضها (قضیه ۴۸.۴) برای اثبات قضیه‌های وجودی درباره جوابهای بعضی از معادله‌های انتگرال و دیفرانسیل بکار می رود. فضای متری همه تابعهای پیوسته حقیقی بر $[a, b]$ را به $C[a, b]$ نشان می دهیم. متر این فضا به صورت زیر است:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|,$$

و یادآوری می کنیم که $C[a, b]$ یک فضای متری تام می باشد (تمرین ۶۷.۴).

۳۶.۷ g تابع مفروضی در $C[a, b]$ ، و تابع K بر مستطیل $Q = [a, b] \times [a, b]$ پیوسته می باشد. اگر λ پایای داده شده‌ای باشد، تابع T را بر $C[a, b]$ ، که با معادله

$$T(\varphi)(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

تعریف شده است، در نظر بگیرید.

(آ) ثابت کنید T فضای $C[a, b]$ را در خودش می نگارد.

(ب) اگر به ازای M مثبتی، $|K(x, y)| \leq M$ بر Q باشد، و اگر $(b-a)^{-1} |\lambda| < M^{-1}$ ، ثابت کنید T یک انقباض $C[a, b]$ است، و در نتیجه دارای نقطه ثابتی مانند φ می باشد، که عبارت است از جواب معادله انتگرال

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

۳۷.۷ فرض کنید تابع f بر مستطیل $Q = [a-h, a+h] \times [b-k, b+k]$ که در آن $h > 0$ و $k > 0$ پیوسته باشد.

(آ) فرض کنید تابع φ بر $[a-h, a+h]$ پیوسته باشد، بقسمی که به ازای هر x در $Q: [a-h, a+h]$ $(x, \varphi(x)) \in Q$ ، اگر $0 < c \leq h$ ، ثابت کنید φ بر $[a-c, a+c]$ وقتی، و فقط وقتی، در معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ با شرط اولیه $\varphi(a) = b$ صدق می‌کند که φ در معادله انتگرال

$$\varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt \quad \text{بر } [a-c, a+c]$$

صدق نماید.

(ب) فرض کنید به ازای M مثبتی، $|f(x, y)| \leq M$ بر Q باشد، و $c = \min\{h, k/M\}$. همچنین، S زیر فضای متری $C[a-c, a+c]$ مشتمل بر همه φ هایی را نشان دهد که $|\varphi(x) - b| \leq Mc$ بر $[a-c, a+c]$ باشد. ثابت کنید که S یک زیر فضای بسته $C[a-c, a+c]$ است، و در نتیجه خود S یک فضای متری تام می‌باشد.

(ج) ثابت کنید تابع T ، که بر S با معادله

$$T(\varphi)(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t)) dt$$

تعریف می‌شود، S را در خودش می‌نگارد.

(د) حال فرض کنید که f در شرط لیپ شیتس به شکل زیر صدق کند: A مثبتی باشد که به ازای هر جفت نقطه در Q مانند (x, y) و (x, z) ، داشته باشیم

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq A|y - z|.$$

ثابت کنید اگر $h < 1/A$ ، T یک انقباض S می‌باشد. از این‌جا نتیجه بگیرید که به ازای $h < 1/A$ ، معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ فقط دارای یک جواب مانند $y = \varphi(x)$ بر $[a-c, a+c]$ با $\varphi(a) = b$ می‌باشد.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

- 7.1 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration*. Academic Press, New York, 1963.
- 7.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, Oxford, 1937.
- 7.3 Rankin, R. A., *An Introduction to Mathematical Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1963.
- 7.4 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral*. Wiley, New York, 1952.
- 7.5 Shilov, G. E., and Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach*. R. Silverman, translator. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.



دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

رشته‌های نامتناهی و حاصل ضربهای نامتناهی

۱۰۸ مقدمه

در این فصل نظریه رشته‌های نامتناهی و حاصل ضربهای نامتناهی با مختصر نشان داده می‌شود. اینها صرفاً دنباله‌های نامتناهی هستند که جمله‌هایشان حقیقی یا مختلط می‌باشند. درباره دنباله‌های همگرا در فصل ۴ در محدوده فضا‌های متری کلی بحث شد. در این جا بعضی از مفهومی‌های فصل ۴ را، به صورتی که در مورد دنباله‌های موجود در C (با متر اقلیدسی متداول) بکار می‌روند، یادآوری می‌کنیم.

۲۰۸ دنباله‌های همگرا و واگرایی عددی مختلط

تعریف ۱۰۸ دنباله $\{a_n\}$ از نقطه‌ها در C را همگرا نامیم در صورتی که نقطه‌ای مانند p در C با این خاصیت وجود داشته باشد:

به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N (تابع ε) باشد بقسمی که

$$\text{هرگاه } n \geq N \text{ آنگاه } |a_n - p| < \varepsilon$$

اگر $\{a_n\}$ همگرا به p باشد، می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$ را حد دنباله می‌نامیم. دنباله‌ای واگرا نامیده می‌شود که همگرا نباشد.

یک دنباله در C را یک دنباله‌کشی نامند در صورتی که در شرطکشی صدق کند؛ یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که

$$\text{هرگاه } m \geq N \text{ و } n \geq N \text{ آنگاه } |a_n - a_m| < \varepsilon$$

چون C یک فضای متری تام است، از فصل ۴ می‌دانیم که یک دنباله در C وقتی، فقط وقتی، همگرا است که یک دنباله‌کشی باشد.

خصوصاً وقتی که عملاً مقدار حد یک دنباله را ندانیم، شرطکشی در اثبات همگرایی دنباله‌ها مفید است.

هر دنباله همگرا کراندار است (قضیه ۳.۴)، و در نتیجه یک دنباله بی‌کران لزوماً واگرا است.

هرگاه دنباله $\{a_n\}$ همگرا به p باشد، آنگاه هر زیردنباله آن مانند $\{a_{k_n}\}$ نیز به p همگرا خواهد بود (قضیه ۵.۴).

دنباله حقیقی $\{a_n\}$ را واگرا به $+\infty$ نامند در صورتی که به ازای هر $M > 0$ ، عدد صحیحی مانند N (تابع M) باشد بقسمی که

$$\text{هرگاه } n \geq N \text{ آنگاه } a_n > M.$$

در این حالت می‌نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$ می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ و گوئیم $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است. البته، دنباله‌هایی حقیقی و واگرا وجود دارند که واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ نمی‌باشند. مثلاً، دنباله $\{(1 - 1/n)^n\}$ واگرا است ولی واگرا به $+\infty$ یا $-\infty$ نیست.

۳.۸ حد اعلا و حد اسفل یک دنباله حقیقی

تعریف ۳.۸ فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. همچنین، عددی حقیقی مانند U باشد که در دو شرط زیرین صدق کند: یکم) به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشد بقسمی که اگر $n > N$

$$a_n < U + \varepsilon.$$

دوم) به ازای $\varepsilon > 0$ و $m > 0$ داده‌شده، عدد صحیحی مانند $n > m$ باشد بقسمی که

$$a_n > U - \varepsilon.$$

در این صورت، U را حد اعلا (یا حد بالائی) $\{a_n\}$ نامیده، می‌نویسیم

$$U = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

بنا بر گزاره (یکم)، مجموعه $\{a_1, a_2, \dots\}$ از بالا کراندار است. اگر این مجموعه از بالا کراندار نباشد، تعریف می‌کنیم

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

هرگاه این مجموعه از بالا کراندار باشد ولی از پائین کراندار نباشد، و $\{a_n\}$ حد اعلاى متناهی نداشته باشد، آنگاه گوئیم که

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

حد اسفل (یا حد پائینی) $\{a_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = -a_n$$

تیسر. گزاره (یکم) بدین معنی است که سرانجام همه جمله‌های دنباله در سمت چپ $U + \varepsilon$ قرار می‌گیرند. گزاره (دوم) یعنی که تعدادی نامتناهی از جمله‌های آن در طرف راست $U - \varepsilon$ قرار دارند. واضح است که بیش از یک U نمی‌تواند وجود داشته باشد که در دو شرط (یکم) و (دوم)، با هم، صدق کند. هر دنباله حقیقی در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته، یعنی \mathbb{R}^* ، دارای حد اعلا و حد اسفل است. (ر. ک. تمرین ۱۰۸)

اثبات قضیه‌های زیرین به‌خواننده واگذار می‌شود:

قضیه ۳۰۸ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از عددهای حقیقی باشد. در این صورت:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{آ})$$

(ب) این دنباله وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

هر دو متناهی و متساوی باشند، که در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(ج) این دنباله وقتی، و فقط وقتی، واگرا به $+\infty$ است که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

(د) این دنباله وقتی، و فقط وقتی، واگرا به $-\infty$ است که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

تیمبره. اگر در دنباله $\{a_n\}$ ، $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ، گوئیم $\{a_n\}$ نوسان می‌کند.

قضیه ۴.۸ فرض کنیم به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \leq b_n$ ، در این صورت:
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ و $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$

چند مثال

۱. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ ، $a_n = (-1)^n (1 + 1/n)$ ، $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +1$

۲. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ ، $a_n = (-1)^n$ ، $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +1$

۳. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ، $a_n = (-1)^n n$ ، $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

۴. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، $a_n = n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} n \pi\right)$ ، $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

۴.۸ دنباله‌های یکنوای عددهای حقیقی

تعریف ۵.۸ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد از عددهای حقیقی. اگر به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \leq a_{n+1}$ ، گوئیم این دنباله صعودی است، و می‌نویسیم $a_n \nearrow$. اگر به ازای هر n ، $a_n \geq a_{n+1}$ ، دنباله را نزولی نامیده، می‌نویسیم $a_n \searrow$. دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد یکنوا نامیده می‌شود.

بخصوص تعیین همگرایی یا واگرایی دنباله‌های یکنوا ساده است. در حقیقت،

داریم

قضیه ۶.۸ یک دنباله یکنوا وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که کراندار باشد.

پرهان. اگر $a_n \nearrow$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ ،
 اگر $a_n \searrow$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n | n = 1, 2, \dots\}$ ،

۵.۸ رشته‌های نامتناهی

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای مفروض از عددهای حقیقی یا مختلط باشد. دنباله جدید

$\{s_n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

$$(1) \quad s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (n = 1, 2, \dots).$$

تعریف ۷.۸ جفت مرتب $(\{a_n\}, \{s_n\})$ یک رشته نامتناهی نامیده می‌شود. عدد s_n را مجموع جزئی n رشته می‌نامند. رشته را همگرا یا واگرا نامند در صورتی که $\{s_n\}$ همگرا یا واگرا باشد. برای رشته‌ای که با رابطه (۱) تعریف شود علامتهای زیر بکار می‌روند :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

تبصره. حرف k که در $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ بکار برده شده است یک «متغیر فریبان» است، و می‌تواند با هر علامت مناسب دیگری تعویض گردد. اگر p عدد صحیحی ناکمتر از ۰ باشد، منظور از علامت $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ یعنی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، که در آن $a_n = b_{n+p-1}$ ، هر کجا خطر ابهام نباشد، به جای $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$ می‌نویسیم $\sum b_n$. اگر دنباله $\{s_n\}$ که با رابطه (۱) تعریف شده است همگرا به s باشد، عدد s را مجموع رشته می‌نامیم و می‌نویسیم

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

بنابراین، برای رشته‌های همگرا، علامت $\sum a_k$ هم رشته و هم مجموع آن را نشان خواهد داد.

مثال. هرگاه x دارای بسط اعشاری نامتناهی به صورت $x = a_0 a_1 a_2 \dots$ باشد (ر.ک. بخش ۱۷.۱)، آنگاه رشته $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ به x همگرا خواهد بود.

قضیه ۸.۸ فرض کنیم $a = \sum a_n$ و $b = \sum b_n$ رشته‌های همگرایی باشند. در این صورت، به ازای هر جفت عدد پایایی α و β ، رشته $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ به مجموع $\alpha a + \beta b$ همگرا است. یعنی،

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

برهان.

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

قضیه ۹.۸ فرض کنیم به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \geq 0$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، فقط وقتی، همگرا است که دنباله مجموعهای جزئی آن از بالا کراندار باشد.

برهان. فرض می‌کنیم $s_n = a_1 + \dots + a_n$. در این صورت، s_n و می‌توان قضیه ۶.۸ را در مورد آن بکار برد.

قضیه ۱۰.۸ (رشته‌های نوی هم‌رونه). فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند با این خاصیت که به ازای $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n = b_{n+1} - b_n$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، فقط وقتی، همگرا است که $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ وجود داشته باشد، که در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b_1.$$

برهان.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1.$$

قضیه ۱۱.۸ (شرط کنی برای رشته‌ها). داشته $\sum a_n$ وقتی، فقط وقتی، همگرا است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که به ازای هر $n > N$ و هر $p = 1, 2, \dots$ داشته باشیم

$$(۲) \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

برهان. فرض می‌کنیم $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ می‌نویسیم:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$$

و قضیه‌های ۸.۴ و ۶.۴ را بکار می‌بریم.

اگر در رابطه (۲)، p را مساوی ۱ قرار دهیم، معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

شرطی لازم برای همگرایی $\sum a_n$ است. کافی نبودن شرط وقتی معلوم می‌شود که a_n را مساوی $1/n$ اختیار کنیم. اگر در رابطه (۲)، $n = 2^m$ و $p = 2^m$ اختیار گردند، نتیجه می‌شود که

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+p} = \frac{1}{2^m + 1} + \dots + \frac{1}{2^m + 2^m} \geq \frac{2^m}{2^m + 2^m} = \frac{1}{2}$$

و در نتیجه شرطکشی به ازای $1/2 \leq \varepsilon$ نمی‌تواند صادق باشد. بنابراین، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ واگرا است. این رشته را (دشته توافقی می‌نامند.

۶.۸ درج و حذف کمانکها

تعریف ۱۲.۸ فرض کنیم p تابعی باشد که قلمرو آن مجموعه عددهای صحیح مثبت، و برد آن یک زیرمجموعه عددهای صحیح مثبت باشد بقسمی که یکم) اگر $n < m$ ، داشته باشیم $p(n) < p(m)$.

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو (دشته باشند که بدین صورت با هم مربوط شده‌اند:

$$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{p(1)},$$

(دوم) هرگاه $n = 1, 2, \dots$ ، آنگاه

$$b_{n+1} = a_{p(n)+1} + a_{p(n)+2} + \dots + a_{p(n+1)}.$$

در این صورت، گوئیم که $\sum b_n$ از $\sum a_n$ با درج کمانکها، و $\sum a_n$ از $\sum b_n$ با حذف کمانکها بدست آمده است.

قضیه ۱۳.۸ اگر $\sum a_n$ همگرا به s باشد، هر (دشته مانند $\sum b_n$ که از $\sum a_n$ با درج کمانکها بدست آمده باشد نیز به s همگرا خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با رابطه (دوم) به هم مربوط باشند، می‌نویسیم $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ و $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ در این صورت، $\{t_n\}$ یک زیردنباله $\{s_n\}$ است. در حقیقت، $t_n = s_{p(n)}$. بنابراین، همگرایی $\{s_n\}$ به s همگرایی $\{t_n\}$ را ایجاب می‌کند.

حذف کمانکها ممکن است همگرایی رشته را از بین ببرد. برای پی بردن به این مطلب، رشته $\sum b_n$ را که هر جمله آن 0 (و مسلماً همگرا) است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $p(n) = 2n$ و $a_n = (-1)^n$. در این صورت، (یکم) و (دوم) برقرارند ولی $\sum a_n$ واگرا است.

با تحمیل قیدهایی بر $\sum a_n$ و p می‌توان کمانکها را حذف کرد.

قضیه ۱۴.۸ فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ با شرط تعریف ۱۲.۸ به هم مربوط باشند. و نیز عدد پایانی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر مقدار n ، نامساوی $p(n+1) - p(n) < M$ برقرار باشد. بعلاوه، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\sum b_n$ همگرا باشد، که در این صورت مجموع هر دو (دشته یکی خواهد بود.

برهان. اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، نتیجه از قضیه ۱۳.۸ حاصل است. تمام اشکال در اثبات عکس این مطلب نهفته است. فرض کنیم

$$s_n = a_1 + \dots + a_n, \quad t_n = b_1 + \dots + b_n, \quad t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای $n > N$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{و} \quad |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$$

اگر $n > p(N)$ ، می‌توان یک $m \geq N$ یافت بقسمی که

$$N \leq p(m) \leq n < p(m+1).$$

[چرا؟] به ازای این مقدار n ، داریم

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_{p(m+1)} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{p(m+1)}) \\ &= t_{m+1} - (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{p(m+1)}), \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} |s_n - t| &\leq |t_{m+1} - t| + |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{p(m+1)}| \\ &\leq |t_{m+1} - t| + |a_{p(m+1)}| + |a_{p(m+2)}| + \dots + |a_{p(m+1)}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (p(m+1) - p(m)) \frac{\varepsilon}{2M} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t$.

۷.۸ رشته‌های متناوب

تعریف ۱۵.۸ اگر به ازای هر مقدار n ، $a_n > 0$ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ دشته متناوب می‌نامند.

قضیه ۱۶.۸ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد و همگرا به 0 ، دشته متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ همگرا است. اگر s مجموع این دشته، و s_n مجموع جزئی n م آن باشد، نامساوی زیرین برقرار است:

$$(3) \quad 0 < (-1)^n (s - s_n) < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

بصره. بنا بر نامساوی (۳)، وقتی که s را با s_n «تقریب» می‌زنیم، خطائی که در این عمل مرتکب می‌شویم دارای علامت اولین جمله‌ای است که از آن صرف نظر شده است و مقدار آن از قدر مطلق این جمله کمتر است.

برهان. با درج کمانکها در $\sum (-1)^{n+1} a_n$ ، جمله‌های این رشته را دوتا دوتا با هم دسته‌بندی می‌کنیم. یعنی، p_n را مساوی $2n$ اختیار نموده، رشته جدید $\sum b_n$ را برطبق تعریف ۱۲.۸ تشکیل می‌دهیم. جمله‌های این رشته به‌صورت زیرند:

$$b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_3 - a_4, \dots, b_n = a_{2n-1} - a_{2n}.$$

چون $a_n \rightarrow 0$ و $p(n+1) - p(n) = 2$ ، بنا بر قضیه ۱۴.۸، اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum (-1)^{n+1} a_n$ نیز همگرا خواهد بود. اما چون a_n ، پس $\sum b_n$ رشته‌ای است با جمله‌های نامنفی. همچنین، مجموعهای جزئی آن از بالا کراندارند، زیرا

$$\sum_{k=1}^n b_k = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1.$$

بنابراین، $\sum b_n$ همگرا است، در نتیجه $\sum (-1)^{n+1} a_n$ نیز همگرا می‌باشد. نامساوی (۳) نتیجه‌ای است از رابطه‌های زیرین:

$$(-1)^n (s - s_n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) > 0,$$

و

$$(-1)^n (s - s_n) = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n+2k} - a_{n+2k+1}) < a_{n+1}.$$

۸.۸ همگرایی مطلق و همگرایی مشروط

تعریف ۱۲.۸ (دسته $\sum a_n$ همگرایی مطلق نامیم در صورتی که $\sum |a_n|$ همگرا باشد. اگر $\sum a_n$ همگرا، اما $\sum |a_n|$ واگرا باشد، گوئیم (دسته $\sum a_n$ همگرایی مشروط است).

قضیه ۱۸.۸ همگرایی مطلق $\sum a_n$ همگرایی آن را ایجاب می‌کند.

برهان. شرط‌کشی را در نامساوی زیر بکار برید:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|.$$

برای آن که درست نبودن عکس این قضیه را ببینیم، مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

این رشته متناوب، بنا بر قضیه ۱۶.۸، همگرا است، ولی همگرایی مطلق نیست.

قضیه ۱۹.۸ فرض کنیم $\sum a_n$ (دسته‌ای داده شده با جمله‌های حقیقی باشد و تعریف می‌کنیم

$$(۴) \quad p_n = \frac{|a_n| + a_n}{۲}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{۲} \quad (n=۱, ۲, \dots).$$

در این صورت:

(یکم) اگر $\sum a_n$ همگرای مشروط باشد، هر دو دسته $\sum p_n$ و $\sum q_n$ واگرا هستند.

(دوم) اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، هر دو دسته $\sum p_n$ و $\sum q_n$ همگرا هستند و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

ببره. اگر $a_n \geq 0$ ، $p_n = a_n$ و $q_n = 0$ ، حال آن که اگر $a_n \leq 0$ ، $q_n = -a_n$ و $p_n = 0$.

برهان. داریم $a_n = p_n - q_n$ و $|a_n| = p_n + q_n$. برای اثبات (یکم)، فرض می‌کنیم $\sum a_n$ همگرا و $\sum |a_n|$ واگرا باشد. هرگاه $\sum q_n$ همگرا باشد، آنگاه چون $p_n = a_n + q_n$ ، بنا بر قضیه ۸.۸، $\sum p_n$ نیز همگرا است. به نحو مشابه، هرگاه $\sum p_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum q_n$ نیز همگرا است. از این روی، اگر $\sum p_n$ یا $\sum q_n$ همگرا باشد، هر دو باید همگرا باشند و نتیجه می‌گیریم که، چون $|a_n| = p_n + q_n$ ، پس $\sum |a_n|$ همگرا است. از این تناقض صحت قسمت (یکم) مسلم می‌شود. برای اثبات (دوم)، کافی است رابطه‌های (۴) و قضیه ۸.۸ را بکار ببریم.

۹.۸ قسمتهای حقیقی و موهومی يك رشته مختلط

$\sum c_n$ را رشته‌ای با جمله‌های مختلط فرض کرده می‌نویسیم $c_n = a_n + ib_n$ ، که در آن a_n و b_n حقیقی هستند. رشته‌های $\sum a_n$ و $\sum b_n$ ، به ترتیب، قسمتهای حقیقی و موهومی $\sum c_n$ نامیده می‌شوند. هر وقت با رشته‌های مختلط سروکار پیدا کنیم، اغلب راحت‌تر آن است که قسمتهای حقیقی و موهومی جداگانه بررسی بشوند. البته، همگرایی هر دو رشته $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرایی رشته $\sum c_n$ را ایجاب می‌کند. همچنین، بعکس، همگرایی $\sum c_n$ همگرایی هر دو رشته $\sum a_n$ و $\sum b_n$ را موجب می‌شود. این مطالب در مورد همگرایی مطلق نیز صادقند. اما، وقتی که $\sum c_n$ همگرای مشروط باشد، فقط یکی از دو رشته $\sum a_n$ و $\sum b_n$ می‌تواند همگرای مطلق باشد. (ر. ک. تمرین ۱۹.۸). اگر $\sum c_n$ همگرای مطلق باشد، می‌توان قسمت (دوم) قضیه ۱۹.۸ را در

قسمتهای حقیقی و موهومی این رشته جداگانه بکار برد، تا تجزیه زیر بدست آید:

$$\sum c_n = \sum (p_n + iu_n) - \sum (q_n + iv_n),$$

که در آن $\sum p_n$ ، $\sum q_n$ ، $\sum u_n$ ، و $\sum v_n$ رشته‌هایی همگرا با جمله‌های نامنفی می‌باشند.

۱۰.۸ آزمون‌هایی برای همگرایی رشته‌های با جمله‌های مثبت

قضیه ۲۰.۸ (آزمون مقایسه‌ای). هرگاه به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ هرگاه $a_n > 0$ و $b_n > 0$ و پایاهای مثبتی مانند c و N وجود داشته باشند بقسمی که به‌ازای $n \geq N$ ، $a_n < cb_n$ ، آنگاه همگرایی $\sum b_n$ موجب همگرایی $\sum a_n$ می‌شود. برهان. اگر مجموعهای جزئی $\sum b_n$ کراندار باشند، مجموعهای جزئی $\sum a_n$ نیز کراندار خواهند بود. از این مطلب و قضیه ۹.۸، قضیه مورد بحث ثابت می‌شود.

قضیه ۲۱.۸ (آزمون مقایسه‌ای حدی). فرض کنیم به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ $a_n > 0$ و $b_n > 0$ و نیز

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

در این صورت، $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\sum b_n$ همگرا باشد.

برهان. عددی چون N وجود دارد که به‌ازای $n \geq N$ ، $1/2 < a_n/b_n < 3/2$ ، حال برای اثبات قضیه کافی است دوبار قضیه ۲۰.۸ را بکار ببریم.

تیسر. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = c$ ، قضیه ۲۱.۸ بازم برقرار است، به شرط آن که $c \neq 0$. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ ، فقط می‌توان نتیجه گرفت که همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند.

۱۱.۸ رشته‌های هندسی

برای آن که بتوان آزمونهای مقایسه‌ای را بنحوی مؤثر بکار برد، باید مثالهایی از رشته‌هایی که رفتارشان معلوم باشد در اختیار داشته باشیم. یکی از مهمترین رشته‌ها برای این منظور (رشته هندسی) است.

قضیه ۲۳.۸ اگر $|x| < 1$ ، رشته $1 + x + x^2 + \dots$ همگرا است و مجموع آن مساوی است با $1/(1-x)$ اگر $|x| \geq 1$ این رشته واگرا است.

برهان. $\sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x^k - x^{k+1}) = 1 - x^{n+1}$. وقتی که $|x| < 1$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ ، اگر $|x| \geq 1$ ، جمله عمومی رشته به 0 نمی‌گراید و رشته نمی‌تواند همگرا باشد.

۱۲.۸ آزمون انتگرال

مثالهای دیگری از رشته‌های با رفتار معلوم را می‌توان با بکار بردن آزمون انتگرال خیلی ساده بدست آورد.

قضیه ۲۳.۸ (آزمون انتگرال). فرض کنیم f بر $[1, +\infty[$ تابعی نزولی و مثبت باشد قسمتی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ تعریف می‌کنیم

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k), t_n = \int_1^n f(x) dx, d_n = s_n - t_n.$$

دراین صورت، داریم:

یکم) به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ ، $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$ ،

دوم) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ وجود دارد.

سوم) رشته $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ وقتی، فقط وقتی، همگرا است که دنباله $\{t_n\}$ همگرا باشد.

چهارم) به‌ازای $k = 1, 2, \dots$ ، $0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k)$ ،

برهان. برای اثبات (یکم)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k) dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) = s_n. \end{aligned}$$

از این نتیجه می‌شود که

$$f(n+1) = s_{n+1} - s_n \leq s_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1},$$

و خواهیم داشت

$$0 < f(n+1) \leq d_{n+1}.$$

اما نیز داریم

$$\begin{aligned} (5) \quad d_n - d_{n+1} &= t_{n+1} - t_n - (s_{n+1} - s_n) = \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &\quad - f(n+1) \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx - f(n+1) = 0, \end{aligned}$$

و در نتیجه $d_1 = f(1) \leq d_n \leq d_{n+1}$. از این (یکم) ثابت می‌شود. اکنون واضح است که از (یکم) قسمت (دوم)، و از (دوم) قسمت (سوم) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (چهارم)، بار دیگر (۵) را بکار برده می‌نویسیم

$$0 \leq d_n - d_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx - f(n+1) = f(n) - f(n+1).$$

و چون بر n جمع‌بندی کنیم بدست می‌آوریم :

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)), \quad k \geq 1$$

وقتی که در نامساویهای بالا مجموعهای رشته‌های توی هم رونده موجود در آنها را ارزیابی کنیم، قسمت (چهارم) بدست می‌آید.

تبره. فرض کنیم $D = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$. در این صورت، از (یکم) نتیجه می‌شود که $0 \leq D \leq f(1)$ ، حال آن‌که از (چهارم) رابطه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$(۶) \quad 0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx - D \leq f(n).$$

نامساوی بالا برای تقریب بعضی از مجموعهای متناهی به انتگرالها بی‌اندازه مفید است.

۱۳.۸ نمادهای اوی بزرگ و اوی کوچک

تعریف ۲۴.۸ دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروضند قسمتی که به‌ازای هر مقدار n ، $b_n \geq 0$. هرگاه عدد پایانی چون $M > 0$ وجود داشته باشد قسمتی که به‌ازای هر مقدار n ، $|a_n| \leq Mb_n$ ، آنگاه می‌نویسیم

$$a_n = O(b_n) \quad (\text{بخوانید: «} a_n \text{ اوی بزرگ } b_n \text{ است»)}$$

و نیز هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ ، آنگاه می‌نویسیم

$$a_n = o(b_n), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{بخوانید: «} a_n \text{ اوی کوچک } b_n \text{ است»}).$$

تبره. منظور از معادله $a_n = c_n + O(b_n)$ یعنی $a_n - c_n = O(b_n)$. بهمین نحو، $a_n = c_n + o(b_n)$ به معنی $a_n - c_n = o(b_n)$ است. مزیت این نمادها این است که بعضی از نامعادله‌ها به وسیله آنها تبدیل به معادله می‌شوند. مثلاً، از رابطه (۶) این رابطه حاصل می‌شود :

$$(۷) \quad \sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + D + O(f(n)).$$

مثال ۱ در قضیه ۲۳.۸، فرض می‌کنیم $f(x) = 1/x$. دیده می‌شود که $t_n = \log n$ ، و در نتیجه $\sum 1/n$ واگرا است. اما، از رابطه (دوم) وجود حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

مسلّم می‌شود، که عدد معروفی است موسوم به پایای اویلر، و معمولاً با C (یا با γ) نشان داده می‌شود. معادله (۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$(۸) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

مثال ۲ در قضیه ۲۳.۸، فرض می‌کنیم $f(x) = x^{-s}$ ، $s \neq 1$ ، می‌بینیم که $\sum n^{-s}$ به ازای $s > 1$ همگرا، و به ازای $s < 1$ واگرا است. این رشته به ازای $s > 1$ تابع مهمی به نام تابع زتای (دیمان را تعریف می‌کند:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

برای $s > 0$ و $s \neq 1$ ، می‌توان رابطه (۷) را بکار برد و نوشت:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} + C(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

که در آن $C(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n k^{-s} - (n^{1-s} - 1)/(1-s))$

۱۴.۸ آزمون نسبت و آزمون ریشه

قضیه ۲۵.۸ (آزمون نسبت). فرض کنیم $\sum a_n$ (شته‌ای باشد که جمله‌های آن همه مختلط و ناصفر باشند. قرار می‌دهیم

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

(آ) اگر $R < 1$ ، شته $\sum a_n$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر $r > 1$ ، شته $\sum a_n$ واگرا است.

(ج) در حالت $r \leq 1 \leq R$ ، از این آزمون چیزی نتیجه نمی‌شود.

برهان. فرض می‌کنیم $R < 1$ و x را بقسمی اختیاری کنیم که $R < x < 1$. بنا بر تعریف R ، عددی مانند N وجود دارد بقسمی که هرگاه $x \geq N$ ، آنگاه

چون $x = x^{n+1}/x^n$ ، پس $|a_{n+1}/a_n| < x$

$$\frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}} < \frac{|a_n|}{x^n} \leq \frac{|a_N|}{x^N} \quad \text{هرگاه } n \geq N \text{ ، آنگاه}$$

و در نتیجه اگر $n \geq N$ ، $|a_n| \leq cx^n$ ، که در آن $c = |a_N| x^{-N}$. حال اگر آزمون مقایسه‌ای را بکار بریم ، گزاره (آ) نتیجه خواهد شد.

برای اثبات (ب) ، کافی است ملاحظه کنیم که اگر $r > 1$ ، عددی مانند N هست که به ازای هر $n \geq N$ ، $|a_{n+1}| > |a_n|$ ، و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ نمی‌تواند مساوی صفر باشد .

برای اثبات (ج) ، دو مثال $\sum n^{-1}$ و $\sum n^{-2}$ را در نظر می‌گیریم . در هر دو ، $r = R = 1$ اما $\sum n^{-1}$ واگرا است ، حال آن که $\sum n^{-2}$ همگرا می‌باشد .

قضیه ۲۶.۸ (آزمون ریشه) . فرض کنیم $\sum a_n$ دشته‌ای با جمله‌های مختلط باشد . قرار می‌دهیم

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

(آ) اگر $\rho < 1$ ، دشته $\sum a_n$ همگرای مطلق است .

(ب) اگر $\rho > 1$ ، دشته $\sum a_n$ واگرا است .

(ج) برای حالت $\rho = 1$ ، از این آزمون چیزی نتیجه نمی‌شود .

برهان . فرض کنیم $\rho < 1$ و x را بقسمی اختیار می‌کنیم که $\rho < x < 1$. بنا بر تعریف ρ ، عددی مانند N با این خاصیت وجود دارد که به ازای $n \geq N$ ، $|a_n| < x^n$. از این روی ، از آزمون مقایسه‌ای نتیجه می‌شود که $\sum |a_n|$ همگرا است . از این (آ) ثابت می‌شود .

برای اثبات (ب) ، می‌بینیم که $\rho > 1$ ایجاب می‌کند که بی‌نهایت بار $|a_n| > 1$ ، و در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ نمی‌تواند مساوی صفر باشد . بالاخره ، (ج) را می‌توان با استفاده از همان مثالهای قضیه ۲۵.۸ اثبات کرد .

تبره . آزمون ریشه از آزمون نسبت «قوی» تر است . یعنی ، هر جا آزمون ریشه بی‌حاصل باشد ، آزمون نسبت نیز چنین خواهد بود . اما مثالهایی هستند که در آنها آزمون نسبت را نمی‌توان بکار برد ولی آزمون ریشه قابل استفاده است . (ر.ک .

تمرین ۴.۸)

۱۵.۸ آزمون دیریکله^۱ و آزمون آبل^۲

همهٔ آزمون‌هایی که در بخش پیشین دیدیم برای تعیین همگرایی مطلق یک رشته با جمله‌های مختلط مفیدند. در مورد رشته‌هایی که ممکن است همگرایی مطلق نباشند نیز داشتن آزمون‌هایی برای تعیین همگرایی آنها اهمیت دارد. آزمون‌هایی که در این بخش می‌آوریم خصوصاً برای این منظور مفید می‌باشند. همهٔ این آزمون‌ها به دستود جمع‌بندی جزئی آبل (معادلهٔ (۹) در قضیهٔ زیرین) بستگی دارند.

قضیهٔ ۲۷.۸ اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از عددهای مختلط باشند، تعریف می‌کنیم

$$A_n = a_1 + \dots + a_n.$$

در این صورت، اتحاد زیر برقرار خواهد بود:

$$(۹) \quad \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k).$$

بنابراین، $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ در صورتی همگرا است که دشتهٔ $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k)$ و دنبالهٔ $\{A_n b_{n+1}\}$ هر دو همگرا باشند.

پروهان. اگر بنویسیم $A_0 = 0$ ، اتحاد

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}$$

بدست می‌آید، که قسمت دوم قضیه بی‌درنگ از آن نتیجه می‌شود.

تیسره. دستور (۹) شبیه است به دستور انتگرال‌گیری به طریقهٔ جزء به جزء در انتگرال ریمان - اشتیل یس.

قضیهٔ ۲۸.۸ (آزمون دیریکله). فرض کنیم دنبالهٔ مجموعهای جزئی دشتهٔ $\sum a_n$ با جمله‌های مختلط دنباله‌ای کراندار باشد، همچنین $\{b_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد همگرا به ۰. در این صورت $\sum a_n b_n$ همگرا است.

پروهان. فرض می‌کنیم $A_n = a_1 + \dots + a_n$ ، و به ازای هر n ، $|A_n| \leq M$. در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_{n+1} = 0.$$

بنابراین، برای اثبات همگرایی $\sum a_n b_n$ فقط کافی است نشان دهیم که

$$\sum A_k (b_{k+1} - b_k)$$

همگرا است. گوئیم چون b_n را رابطه

$$|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leq M(b_k - b_{k+1})$$

برقرار است. اما رشته $\sum (b_{k+1} - b_k)$ یک رشته توی هم رونده همگرا است. از این روی آزمون مقایسه‌ای همگرای مطلق بودن $\sum A_k(b_{k+1} - b_k)$ را ایجاب می‌کند.

قضیه ۲۹.۸ (آزمون آبل). اگر رشته $\sum a_n$ همگرا، و دنباله $\{b_n\}$ همگرای یکنوا باشد، رشته $\sum a_n b_n$ همگرا است.

برهان. اگر $A_n = a_1 + \dots + a_n$ ، از همگرایی $\sum a_n$ و $\{b_n\}$ وجود حد $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_{n+1}$ نتیجه می‌شود. همچنین، $\{A_n\}$ دنباله‌ای است کراندار. باقی برهان مشابه برهان قضیه ۲۸.۸ است. (دو آزمون دیگر، که مشابه آزمون بالا هستند. در تمرین ۲۷.۸ داده می‌شوند.)

۱۶.۸ مجموعه‌های جزئی رشته هندسی $\sum z^n$ بر دایره یکه $|z| = 1$

برای آن که آزمون دیریکله به‌طرز مؤثری قابل اجرا باشد، لازم است با چند رشته دارای مجموعه‌های جزئی کراندار آشنا شویم. البته، همه رشته‌های همگرا دارای این خاصیت هستند. قضیه زیر رشته واگرائی را نشان می‌دهد که دنباله مجموعه‌های جزئی آن کراندار است. این رشته واگرا رشته هندسی $\sum z^n$ با $|z| = 1$ ، یعنی $z = e^{ix}$ (حقیقی است)، می‌باشد. دستور برای مجموعه‌های جزئی این رشته در نظریه رشته‌های فوریه اهمیت اساسی دارد.

قضیه ۳۰.۸ به ازای هر عدد حقیقی $x \neq 2m\pi$ (m عددی است صحیح)، داریم

$$(10) \quad \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(n(x/2))}{\sin(x/2)} e^{i(n+1)x/2}$$

توجه. از اتحاد بالا تخمین زیر نتیجه می‌شود:

$$(11) \quad \left| \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

برهان.

$$(1 - e^{ix}) \sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=1}^n (e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) = e^{ix} - e^{i(n+1)x}$$

از این رابطه اولین تساوی موجود در (۱۰) بدست می‌آید. معادلهٔ دوم از اتحاد زیر نتیجه می‌شود:

$$e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} e^{i(n+1)x/2}.$$

تبره. با توجه به قسمت‌های حقیقی و موهومی (۱۰)، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \sin \frac{nx}{2} \cos (n+1) \frac{x}{2} / \sin \frac{x}{2}$$

$$(12) \quad = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin (2n+1) \frac{x}{2} / \sin \frac{x}{2},$$

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin \frac{nx}{2} \sin (n+1) \frac{x}{2} / \sin \frac{x}{2}.$$

با استفاده از (۱۰)، نیز می‌توان نوشت

$$(14) \quad \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x} = e^{-ix} \sum_{k=1}^n e^{ik(2x)} = \frac{\sin nx}{\sin x} e^{inx},$$

که اتحادی است که به‌ازای هر $x \neq m\pi$ (m عددی است صحیح) معتبر است. با جدا نمودن قسمت‌های حقیقی و موهومی (۱۴)، خواهیم داشت

$$(15) \quad \sum_{k=1}^n \cos (2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x},$$

$$(16) \quad \sum_{k=1}^n \sin (2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

دستورهای (۱۲) و (۱۶) در نظریهٔ رشته‌های فوریه بکار می‌آیند.

۱۷.۸ تجدید آرایش رشته‌ها

یادآوری می‌کنیم که Z^+ عبارت است از مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت؛ یعنی،

$$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

تعریف ۲۱.۸ فرض کنیم f تابعی با قلمرو و برد Z^+ باشد، و f بر Z^+ یک به یک باشد. همچنین دو رشتهٔ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ چنان باشند که

$$(17) \quad b_n = a_{f(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

در این صورت، گوئیم که $\sum b_n$ یک تجدید آرایش $\sum a_n$ است.

تصره. از معادله (۱۷) نتیجه می‌شود که $a_n = b_{f^{-1}(n)}$ ، و در نتیجه $\sum a_n$ نیز یک تجدید آرایش $\sum b_n$ است.

قضیه ۳۲.۸ فرض کنیم $\sum a_n$ یک رشته همگرای مطلق با مجموع s باشد. در این صورت، هر تجدید آرایش $\sum a_n$ نیز همگرای مطلق است و مجموع آن s است. برهان. فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای باشد که با (۱۷) تعریف شده باشد. در این صورت،

$$|b_1| + \dots + |b_n| = |a_{f(1)}| + \dots + |a_{f(n)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|,$$

پس دنباله مجموعهای جزئی $\sum |b_n|$ کراندار است. از این روی، $\sum b_n$ همگرای مطلق است.

برای آن که نشان دهیم که $\sum b_n = s$ ، قرار می‌دهیم $t_n = b_1 + \dots + b_n$ و $s_n = a_1 + \dots + a_n$ به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که $|s_N - s| < \varepsilon/2$ و $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| \leq \varepsilon/2$ در این صورت،

$$|t_n - s| \leq |t_n - s_N| + |s_N - s| < |t_n - s_N| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

همچنین، M را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{f(1), f(2), \dots, f(M)\}.$$

در این صورت، $n > M$ ایجاب می‌کند که $f(n) > N$ ، و برای این چنین n داریم

$$\begin{aligned} |t_n - s_N| &= |b_1 + \dots + b_n - (a_1 + \dots + a_N)| \\ &= |a_{f(1)} + \dots + a_{f(n)} - (a_1 + \dots + a_N)| \\ &\leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots \leq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

زیرا همه جمله‌های a_1, \dots, a_N در تفریق حذف می‌شوند. از این روی، $n > M$ ایجاب می‌کند که $|t_n - s| < \varepsilon$ و این بدان معنی است که $\sum b_n = s$.

۱۸.۸ قضیه ریمان درباره رشته‌های همگرای مشروط

فرض همگرایی مطلق در قضیه ۳۲.۸ فرضی است لازم. ریمان کشف کرد که هر رشته با جمله‌های حقیقی و همگرای مشروط را می‌توان با تجدید آرایش به رشته‌ای تبدیل کرد که به مجموع مفروض دلخواه همگرا باشد. این واقعیت شایان توجه نتیجه‌ای

است از قضیه زیرین:

قضیه ۲۳.۸ فرض کنیم رشته $\sum a_n$ با جمله‌های حقیقی همگرای مشروط باشد. همچنین x و y دو عدد مفروض در بازه بسته $[-\infty, +\infty]$ باشند، و $x \leq y$. در این صورت، برای $\sum a_n$ تجدید آرایشی مانند $\sum b_n$ وجود دارد بقسمی که

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = y \quad \text{و} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} t_n = x$$

که در آنها $t_n = b_1 + \dots + b_n$

برهان. حذف جمله‌های صفر یک رشته اثری بر همگرایی یا واگرایی آن ندارد. از این روی می‌توان فرض کرد که هیچ جمله $\sum a_n$ صفر نباشد. فرض کنیم جمله m مثبت $\sum a_n$ ، و $q_n -$ جمله n منفی آن باشد. در این صورت، $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هر دو رشته‌هایی و اگر با جمله‌های مثبت می‌باشند. [چرا؟] اکنون، دو دنباله از عدددهای حقیقی، مثلاً $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ را با خاصیت‌های زیر می‌سازیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \text{با} \quad x_n < y_n \quad \text{و} \quad y_1 > 0$$

حال دیگر طرز اثبات قضیه کاملاً ساده است. به تعداد کافی (مثلاً k_1) جمله مثبت اختیار می‌کنیم بقسمی که

$$p_1 + \dots + p_{k_1} > y_1$$

و متعاقب آن به تعداد کافی (مثلاً r_1) جمله منفی اختیار می‌نمائیم بقسمی که

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{r_1} < x_1$$

سپس، به قدر کافی جمله مثبت دیگر اختیار می‌کنیم بقسمی که

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} > y_2$$

و بار دیگر به قدر کافی جمله منفی اختیار می‌نمائیم که در نامساوی زیرین صدق کنند:

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{r_1} + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} - q_{r_1+1} - \dots - q_{r_2} < x_2$$

چون $\sum p_n$ و $\sum q_n$ هر دو و اگر با جمله‌های مثبت می‌باشند، مرحله‌های بالا امکان پذیر خواهند بود. واضح است که اگر این عملها را به همین نحو ادامه دهیم، یک تجدید آرایش رشته $\sum a_n$ بدست خواهد آمد. اثبات این که مجموعهای جزئی این تجدید آرایش دارای حداعلای y و حداسفل x می‌باشند به خواننده واگذار می‌شود.

۱۹.۸ زیردسته‌ها

تعریف ۲۴.۸ فرض کنیم f تابعی باشد با قلمرو Z^+ که برد آن یک زیرمجموعه نامتناهی Z^+ باشد، و f بر Z^+ یک به یک باشد. همچنین دو رشته $\sum a_n$ و $\sum b_n$ چنان باشند که

$$b_n = a_{f(n)}, \quad n \in Z^+$$

در این صورت، گوئیم $\sum b_n$ یک زیردسته $\sum a_n$ است.

قضیه ۳۵.۸ اگر $\sum a_n$ همگرایی مطلق باشد، هر زیردسته آن مانند $\sum b_n$ نیز همگرایی مطلق است. بعلاوه،

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

پروهان. به ازای n مفروض، فرض می‌کنیم N بزرگترین عدد صحیح موجود در مجموعه $\{f(1), \dots, f(n)\}$ باشد. در این صورت،

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |b_k| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

نامساوی $\sum_{k=1}^n |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ همگرایی مطلق $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند.

قضیه ۳۶.۸ فرض کنیم $\{f_1, f_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از تابعهایی باشد که هر یک بر Z^+ تعریف شده باشد، و دارای خاصیت‌های زیرین باشند:

(آ) هر f_n بر Z^+ یک به یک باشد.

(ب) برد $Q_n = f_n(Z^+)$ یک زیرمجموعه Z^+ باشد.

(ج) $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ دسته‌ای از مجموعه‌های از هم جدا باشد که اجتماع آن مساوی Z^+ باشد.

فرض کنیم که $\sum a_n$ یک رشته همگرایی مطلق باشد، و تعریف می‌کنیم:

$$b_k(n) = a_{f_k(n)}, \quad k \in Z^+ \text{ و } n \in Z^+$$

در این صورت:

یکم) به ازای هر k ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$ یک زیردسته همگرایی مطلق $\sum a_n$ است.

دوم) اگر $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} b_k(n)$ (رشته s_k) همگرایی مطلق است و مجموع آن با مجموع $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ یکی است.

برهان. از قضیه ۳۵.۸ می‌توان (یکم) را نتیجه گرفت. برای اثبات (دوم)، فرض کنیم که $t_k = |s_1| + \dots + |s_k|$ در این صورت،

$$t_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_1(n)| + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} |b_k(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} (|b_1(n)| + \dots + |b_k(n)|) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \dots + |a_{f_k(n)}|).$$

اما $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{f_1(n)}| + \dots + |a_{f_k(n)}|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ این ثابت می‌کند که دنباله مجموعهای جزئی رشته $\sum |s_k|$ کراندار است، و در نتیجه $\sum s_k$ همگرای مطلق است.

برای پیدا کردن مجموع $\sum s_k$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. N را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر $n \geq N$

$$(18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^n |a_k| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

حال به تعداد کافی از تابعها، مثلاً f_1, \dots, f_r ، را چنان اختیار می‌نمائیم که a_1, a_2, \dots, a_N و a_{N+1} جایی در مجموع

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f_1(n)} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} a_{f_r(n)}$$

ظاهر شوند. عدد r بستگی به N ، و در نتیجه به ε دارد. اگر $n > N$ و $n > r$ این نامساویها را بدست می‌آوریم

$$(19) \quad \left| s_1 + s_2 + \dots + s_n - \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots < \frac{\varepsilon}{r},$$

زیرا جمله‌های a_1, a_2, \dots, a_N و a_{N+1} در تفریق حذف می‌شوند. حال از (18) نتیجه می‌شود که

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

با تلفیق این نامساوی و رابطه (19) معلوم می‌شود که اگر $n > N$ و $n > r$

$$\left| s_1 + \dots + s_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon,$$

و برهان قسمت (دوم) تمام می شود.

۲۰.۸ دنباله های مضاعف

تعریف ۳۷.۸ هر تابع مانند f را که قلمرو آن مجموعه $Z^+ \times Z^+$ باشد يك دنباله مضاعف می نامند.

تیسره. فقط دنباله های مضاعف حقیقی یا مختلط مورد علاقه ما هستند.

تعریف ۳۸.۸ اگر $a \in C$ و به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عددی مانند N وجود داشته باشد بقسمی که از $p > N$ و $q > N$ نتیجه شود که $|f(p, q) - a| < \epsilon$ می نویسیم $\lim_{p, q \rightarrow \infty} f(p, q) = a$ و می گوئیم که دنباله مضاعف f همگرا به a است.

قضیه ۳۹.۸ فرض کنیم $\lim_{p, q \rightarrow \infty} f(p, q) = a$ ، و به ازای هر p ثابت، $\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q)$ وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q))$$

نیز وجود دارد و مقدار آن مساوی a است.

تیسره. برای آن که $\lim_{p, q \rightarrow \infty} f(p, q)$ را از $\lim_{p \rightarrow \infty} (\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q))$ تمیز دهیم، اولی را یک حد مضاعف، و دومی را یک حد مکرر می نامیم.

برهان. فرض می کنیم که $F(p) = \lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q)$. به ازای مقدار مفروض $\epsilon > 0$ ، N_1 را بقسمی اختیار می کنیم که

$$(۲۰) \quad |f(p, q) - a| < \frac{\epsilon}{۲}, \quad q > N_1 \text{ و } p > N_1$$

به ازای هر p ، می توان $N_۲$ را بقسمی اختیار کرد که

$$(۲۱) \quad |F(p) - f(p, q)| < \frac{\epsilon}{۲}, \quad q > N_۲$$

(توجه داشته باشید که $N_۲$ هم به p بستگی دارد و هم به ϵ .) به ازای هر $p \geq N_۱$ ، $N_۲$ را اختیار نموده، سپس یک q ثابتی را بزرگتر از $N_۱$ و $N_۲$ در نظر می گیریم. در این صورت، هر دو رابطه (۲۰) و (۲۱) برقرارند، و در نتیجه

$$|F(p) - a| < \epsilon, \quad p > N_1$$

بنابراین، $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = a$

تبره. اگر نقش‌های p و q عوض شوند، نتیجه‌ای مشابه بدست می‌آید.

بنابراین، وجود حد مضاعف $\lim_{p, q \rightarrow \infty} f(p, q)$ و $\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q)$ وجود حد مکرر

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q) \right)$$

را ایجاب می‌کنند. مثال زیر نشان می‌دهد که عکس این مطلب صحیح نیست.

مثال. فرض کنیم

$$f(p, q) = \frac{pq}{p^2 + q^2}, \quad (p = 1, 2, \dots, q = 1, 2, \dots).$$

در این صورت $\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q) = 0$ ، و در نتیجه

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\lim_{q \rightarrow \infty} f(p, q)) = 0.$$

اما وقتی که $p = q$ ، $f(p, q) = \frac{1}{2}$ ، و وقتی که $p = 2q$ ، $f(p, q) = \frac{2}{5}$

و در نتیجه واضح است که در این حالت حد مضاعف نمی‌تواند وجود داشته باشد.

با وارد ساختن مفهوم همگرایی یکشکل می‌توان عکس مناسبی برای قضیه

۳۹.۸ بیان کرد. (این عمل در فصل آینده در قضیه ۱۶.۹ انجام خواهد شد.)

در تمرین ۲۸.۸ مثالهای دیگری ذکر شده است، که رفتار دنباله‌های مضاعف

را تصور می‌سازند.

۲۱.۸ رشته‌های مضاعف

تعریف ۴۰.۸ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد، و s دنباله مضاعفی باشد که با معادله

$$s(p, q) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q f(m, n)$$

تعریف شود. در این صورت، جفت (f, s) را یک رشته مضاعف نامیده، آن را با

علامت $\sum_{m, n} f(m, n)$ یا، به‌طور ساده‌تر، با علامت $\sum f(m, n)$ نشان می‌دهیم.

گوئیم این رشته مضاعف به مجموع a همگرا است در صورتی که

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} s(p, q) = a.$$

هر $f(m, n)$ را یک جمله، و هر $s(p, q)$ را یک مجموع جزئی رشته مضاعف می‌نامیم. اگر جمله‌های $\sum f(m, n)$ همه مثبت باشند، بسادگی می‌توان نشان داد که این رشته وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که مجموعهٔ مجموعه‌های جزئی آن کراندار باشد. (ر.ک. تمرین ۰.۲۹.۸). گوئیم $\sum f(m, n)$ همگرای مطلق است در صورتی که $\sum |f(m, n)|$ همگرا باشد. قضیهٔ ۱۸.۸ برای رشته‌های مضاعف معتبر است. (ر.ک. تمرین ۰.۲۹.۸).

۲۲.۸ قضیهٔ تجدیدآرایش برای رشته‌های مضاعف

تعریف ۴۱.۸ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد و تابع یک به یک g بر Z^+ تعریف شده، و برد آن $Z^+ \times Z^+$ باشد. همچنین دنبالهٔ G با معادلهٔ زیرین تعریف شده باشد:

$$G(n) = f[g(n)] \quad , \quad n \in Z^+ \text{ اگر}$$

در این صورت، g را یک آرایش دنبالهٔ مضاعف f به صورت دنبالهٔ G می‌نامیم.

قضیهٔ ۴۲.۸ فرض کنیم رشتهٔ مضاعف $\sum f(m, n)$ داده شده باشد، و g یک آرایش دنبالهٔ مضاعف f به صورت دنبالهٔ G باشد. در این صورت،

(آ) $\sum G(n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای مطلق است که $\sum f(m, n)$ همگرای مطلق باشد.

بعلاوه، اگر $\sum f(m, n)$ همگرای مطلق، با مجموع S ، فرض شود، خواهیم داشت:

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = S$

(ج) $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ هر دو همگرای مطلق هستند.

(د) اگر $A_m = \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ و $B_n = \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ دو رشتهٔ $\sum A_m$ و $\sum B_n$ همگرای مطلق هستند، و مجموع هر یک از آنها S است. یعنی،

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = S.$$

پوهان. فرض می‌کنیم $T_k = |G(1)| + \dots + |G(k)|$ و

$$S(p, q) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q |f(m, n)|.$$

در این صورت، به‌ازای هر k ، جفتی مانند (p, q) هست که $T_k \leq S(p, q)$ ، و بعکس، به‌ازای هر جفت (p, q) ، عددی صحیح مانند r هست بقسمی که $S(p, q) \leq T_r$.

از این نامساویها نتیجه می‌شود که مجموعهای جزئی $\sum |G(n)|$ وقتی، و فقط وقتی، کراندارند که مجموعهای جزئی $\sum |f(m, n)|$ کراندار باشند. از این (آ) ثابت می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $\sum |f(m, n)|$ همگرا باشد. پیش از اثبات (ب)، نشان می‌دهیم که مجموع رشته $\sum G(n)$ از تابع g که در ساختن G از f بکار رفته است مستقل است. برای مشاهده این مطلب، فرض کنیم h آرایش دیگری از دنباله مضاعف f به صورت دنباله H باشد. در این صورت،

$$H(n) = f[h(n)] \quad \text{و} \quad G(n) = f[g(n)]$$

اما این بدان معنی است که $G(n) = H[k(n)]$ ، که در آن $k(n) = h^{-1}[g(n)]$. چون k نگاشتی یک به یک از Z^+ روی Z^+ است، پس رشته $\sum H(n)$ یک تجدید آرایش $\sum G(n)$ است، و در نتیجه هر دو دارای یک مجموع می‌باشند. این مجموع مشترک را با S' نشان می‌دهیم. بعداً نشان می‌دهیم که $S' = S$.

حال می‌بینیم که هر رشته در (ج) یک زیررشته $\sum G(n)$ است. از این روی، (ج) از (آ) نتیجه می‌شود. با استفاده از قضیه ۳۶.۸، معلوم می‌شود که $\sum A_n$ همگرای مطلق است و مجموع آن S' است. همین مطلب در مورد $\sum B_n$ صادق است. باقی می‌ماند اثبات $S' = S$.

برای این منظور، قرار می‌دهیم $T = \lim_{p, q \rightarrow \infty} S(p, q)$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که هر وقت $p > N$ و $q > N$ ، داشته باشیم $0 \leq T - S(p, q) < \varepsilon/2$ اکنون می‌توان نوشت

$$t_k = \sum_{n=1}^k G(n), \quad s(p, q) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q f(m, n).$$

M را بقسمی اختیار می‌کنیم که همه جمله‌های $f(m, n)$ ، با

$$1 \leq m \leq N+1 \quad \text{و} \quad 1 \leq n \leq N+1$$

را شامل باشد. در این صورت، $t_M - s(N+1, N+1)$ مجموع جمله‌هایی از $f(m, n)$ هاست که در آنها $m > N$ یا $n > N$. بنابراین، اگر $n \geq M$ داریم

$$|t_n - s(N+1, N+1)| \leq T - S(N+1, N+1) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

بهین نحو،

$$|S - s(N+1, N+1)| \leq T - S(N+1, N+1) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، همیشه می توان M را بقسمی یافت که اگر $|t_n - S| < \varepsilon, n \geq M$ چون $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = S'$ ، پس $S' = S$.

نمبره. رشته های $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ را «رشته های مکرر» می نامند. همگرایی هر دو رشته مکرر بالا با تساوی آنها ملازمه ندارد. مثلاً، فرض کنیم

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & n = 1, 2, \dots, m = n + 1 \\ -1, & n = 1, 2, \dots, m = n - 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = 1 \quad \text{ولی} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = -1$$

۲۳.۸ شرطی کافی برای تساوی رشته های مکرر

قضیه ۴۳.۸ فرض کنیم f دنباله مضاعف مختلطی باشد، و نیز، به ازای هر m ثابت، $\sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ همگرای مطلق باشد، و

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$$

نیز همگرا باشد. در این صورت:

(آ) رشته مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق است؛

(ب) $\sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ به ازای هر n همگرای مطلق است؛

(ج) هر دو رشته مکرر $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ همگرای مطلق هستند، و

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n) = \sum_{m,n} f(m, n).$$

برهان. فرض کنیم g یک آرایش دنباله مضاعف f به صورت دنباله G باشد. چون همه مجموعهای جزئی $\sum |G(n)|$ به $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(m, n)|$ کراندارند، پس $\sum G(n)$ همگرای مطلق است. بنا بر قضیه ۴۳.۸ (آ)، رشته مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق است، و گزاره های (ب) و (ج) نیز از قضیه ۴۳.۸ نتیجه می شوند.

رشته مضاعف $\sum_{m,n} f(m, n)$ را در نظر می‌گیریم، که در آن جمله‌های آن را می‌توان به صورت حاصل ضرب تابعی از m در تابعی از n درآورد. حال، به عنوان کاربرد از قضیه ۴۳.۸، قضیه زیر را در مورد این رشته ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴۴.۸ فرض کنیم $\sum a_m$ و $\sum b_n$ دو رشته همگرای مطلق باشند، و مجموعه‌های آنها، بترتیب، A و B باشند. همچنین، دنباله مضاعف f با معادله زیر تعریف شده باشد:

$$f(m, n) = a_m b_n, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$$

در این صورت، $\sum_{m,n} f(m, n)$ همگرای مطلق، و مجموع آن AB است.

برهان. داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{m=1}^{\infty} \left(|a_m| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_m| |b_n|.$$

بنابراین، به موجب قضیه ۴۳.۸، رشته مضاعف $\sum_{m,n} a_m b_n$ همگرای مطلق، و مجموع آن AB است.

۲۴.۸ ضرب رشته‌ها

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو رشته مفروض باشند، همواره می‌توان رشته مضاعف $\sum f(m, n)$ را تشکیل داد، که در آن $f(m, n) = a_m b_n$. به ازای هر آرایش تابع f به صورت دنباله G مانند G ، رشته دیگری مانند $\sum G(n)$ حاصل می‌شود. همچنان‌که در مجموعه‌های متناهی معمول است، طبیعی است که $\sum f(m, n)$ یا $\sum G(n)$ را «حاصل ضرب» رشته $\sum a_n$ و $\sum b_n$ بنامیم. قضیه ۴۴.۸ این اصطلاح را برای حالتی که دو رشته داده شده $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرای مطلق باشند توجیه می‌کند. اما، اگر $\sum a_n$ یا $\sum b_n$ همگرای مشروط باشد، تضمینی برای همگرایی $\sum f(m, n)$ یا $\sum G(n)$ وجود ندارد. بعلاوه، اگر یکی از این دو رشته همگرا باشد، مجموع آن لزوماً مساوی AB نخواهد بود. همگرایی و مجموع $\sum G(n)$ بستگی به آرایش G دارند. با انتخاب G ‌های متفاوت ممکن است حاصل ضرب مقادیرهای متفاوتی بخود بگیرد. حالت بسیار مهمی وجود دارد، که در آن برای بدست آوردن $\sum G(n)$ جمله‌های $f(m, n)$ را به صورت «قطری» آراسته، سپس با درج کمانکها، $a_m b_n$ ‌هایی را که به ازای آنها $m+n$ مقدار ثابتی است دسته‌بندی می‌کنیم. این حاصل ضرب به نام حاصل ضرب کشی معروف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۴۵.۸ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو رشته مفروض باشند. بنا بر تعریف،

$$(۲۲) \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ اگر}$$

دشته $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ حاصل ضرب کشی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیده می شود. تبصره. اگر دو رشته توانی را در هم ضرب کنیم، حاصل ضرب کشی به صورتی طبیعی ظاهر خواهد شد. (ر. ک. تمرین ۰.۳۳.۸)

اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرای مطلق باشند، بنا بر قضیه های ۴۴.۸ و ۱۳.۸، حاصل ضرب کشی این دو رشته همگرا است و

$$(۲۳) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

در حالتی که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هر دو همگرای مشروط باشند، معادله بالا ممکن است برقرار نباشد. (ر. ک. تمرین ۰.۳۲.۸). اما، می توان ثابت کرد که اگر دست کم از $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یکی همگرای مطلق باشد، معادله (۲۳) معتبر است.

قضیه ۴۶.۸ (مرتس). فرض کنیم رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق، و مجموع آن A باشد. همچنین، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرا، و مجموع آن B باشد. در این صورت، حاصل ضرب کشی این دو رشته همگرا است و دارای مجموع AB می باشد.

پرهان. تعریف می کنیم

$$C_n = \sum_{k=0}^n c_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

که در آن c_k از رابطه (۲۲) بدست می آید. فرض کنیم $d_n = B - B_n$ و $e_n = \sum_{k=0}^n a_k d_{n-k}$ ، در این صورت،

$$(۲۴) \quad C_p = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^p f_n(k),$$

که در آن

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k}, & \text{اگر } n \geq k \\ 0, & \text{اگر } n < k \end{cases}$$

در این صورت، رابطه (۲۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_{k=0}^p \sum_{n=0}^p f_n(k) = \sum_{k=0}^p \sum_{n=k}^p a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^p a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m = \sum_{k=0}^p a_k B_{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p a_k (B - d_{p-k}) = A_p B - e_p. \end{aligned}$$

برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که وقتی که $e_p \rightarrow 0$ ، $p \rightarrow \infty$ چون $B = \sum b_n$ ، دنباله $\{d_n\}$ همگرا به صفر است. $M > 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر n ، $|d_n| \leq M$ ، و قرار می‌دهیم $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ، اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر $n > N$ ، $|d_n| < \varepsilon / (2K)$ ، و نیز

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

در این صورت، به ازای $p > 2N$ ، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |e_p| &\leq \sum_{k=0}^N |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^p |a_k d_{p-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^N |a_k| + M \sum_{k=N+1}^p |a_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2K} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که وقتی که $e_p \rightarrow 0$ ، $p \rightarrow \infty$ ، و در نتیجه وقتی که

$$C_p \rightarrow AB, \quad p \rightarrow \infty$$

قضیه دیگری در این مورد، که منسوب به آبل است، در فصل آینده ثابت خواهد شد. (ر. ک. قضیه ۳۲۰۹) در این قضیه قید همگرایی مطلق وجود ندارد. حاصل ضرب دیگری، که در نظریه اعداد اهمیت بخصوصی دارد، حاصل ضرب دیریکله است. فرض می‌کنیم $a_n = b_n = 0$ ، و به جای آن که c_n را با معادله (۲۲) تعریف کنیم، از دستور زیر استفاده می‌نمائیم:

$$(25) \quad c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

که در آن $\sum_{d|n}$ یعنی مجموعی که روی همه مقسوم‌علیه‌های مثبت n (به انضمام ۱ و n) گرفته شده باشد. مثلاً،

$$c_6 = a_1 b_6 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_6 b_1$$

مشابه قضیه مرتس برای این حاصل ضرب نیز برقرار است. اگر دو رشته دیریکله

را درهم ضرب کنیم، حاصل ضرب دیریکله به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود.
(ر. ک. تمرین ۰۳۴۰۸)

۲۵۰۸ مجموعه‌پذیری چزارو^۱

تعریف ۴۷۰۸ فرض کنیم S_n مجموع جزئی n م (دشته) $\sum a_n$ باشد، و دنباله $\{\sigma_n\}$ دنباله میانگینهای حسابی باشد که با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$(۲۶) \quad \sigma_n = \frac{s_1 + \dots + s_n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

دشته $\sum a_n$ را مجموعه‌پذیر چزارو (یا مجموعه‌پذیر از نوع $(C, 1)$) نامیم در صورتی که $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد. هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S$ ، آنگاه S را مجموع چزاروی (یا مجموع از نوع $(C, 1)$) $\sum a_n$ می‌نامیم، و می‌نویسیم $\sum a_n = S \quad (C, 1)$.

مثال ۱ فرض می‌کنیم $a_n = z^n$ ، $|z| = 1$ و $z \neq 1$. در این صورت،

$$\sigma_n = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{n} \frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2} \quad \text{و} \quad s_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

بنابراین،

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} \quad (C, 1).$$

خصوصاً،

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2} \quad (C, 1).$$

مثال ۲ فرض می‌کنیم $a_n = (-1)^{n+1} n$. در این حالت،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0,$$

و در نتیجه $\sum (-1)^{n+1} n$ مجموعه‌پذیر از نوع $(C, 1)$ نیست.

قضیه ۴۸۰۸ هرگاه (دشته‌ای همگرا با مجموع S باشد، آنگاه این دشته مجموعه‌پذیر از نوع $(C, 1)$ نیز هست و مجموع چزاروی آن S است.

برهان. فرض کنیم s_n مجموع جزئی n رشته باشد. σ_n را با رابطه (۲۶) تعریف می‌کنیم، و قرار می‌دهیم $t_n = s_n - S$ و $\tau_n = \sigma_n - S$. در این صورت،

$$(۲۷) \quad \tau_n = \frac{t_1 + \dots + t_n}{n},$$

و باید ثابت کنیم وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\tau_n \rightarrow 0$ ، $A > 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که همواره $|t_n| \leq A$. همچنین، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر $n > N$ ، $|t_n| < \varepsilon$. با فرض $n > N$ در (۲۷)، خواهیم داشت

$$|\tau_n| \leq \frac{|t_1| + \dots + |t_N|}{n} + \frac{|t_{N+1}| + \dots + |t_n|}{n} < \frac{NA}{n} + \varepsilon.$$

از این روی، $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| \leq \varepsilon$. چون ε دلخواه است، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\tau_n| = 0.$$

تیسره. در حقیقت، ثابت کرده‌ایم که هرگاه دنباله $\{s_n\}$ همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{\sigma_n\}$ ، یعنی دنباله میانگینهای حسابی s_n ها، نیز همگرا است و حد آن همان حد دنباله $\{s_n\}$ می‌باشد.

روش مجموعپذیری جزارویکی از «روشهای مجموعپذیری» بسیار است که ممکن است برای نسبت دادن یک «مجموع» به یک رشته نامتناهی بکار روند. قضیه ۴۸.۸ و مثال ۱ (بعد از تعریف ۴۷.۸) نشان می‌دهند که روش جزاروحوزه عمل وسیعتری از همگرایی معمولی دارد. نظریه روشهای مجموعپذیری مبحث مهم و جالبی است، ولی ما در این جا نمی‌توانیم وارد آن شویم. برای بررسی یک پژوهش عالی درباره این موضوع خواننده می‌تواند به کتاب «دشته‌های واگرا» نوشته هاردی^۲ (کتاب مرجع ۱۰.۸) مراجعه کند. بعداً خواهیم دید که مجموعپذیری از نوع (۱) و (C) نقش مهمی در نظریه رشته‌های فوریه دارد. (ر. ک. قضیه ۱۰۱۱.۱۵)

۲۶.۸ حاصل‌ضربهای نامتناهی

در این بخش نظریه حاصل‌ضربهای نامتناهی را باختصار معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۹.۸ اگر دنباله حقیقی یا مختلط $\{u_n\}$ داده شده باشد، قرار می‌دهیم

$$(۲۸) \quad p_1 = u_1, \quad p_2 = u_1 u_2, \quad p_n = u_1 u_2 \dots u_n = \prod_{k=1}^n u_k.$$

جفت مرتب $(\{u_n\}, \{p_n\})$ يك حاصل ضرب نامتناهی (یا مختصراً، يك حاصل ضرب) نامیده می شود. عدد p_n حاصل ضرب جزئی m ، و u_n را سازه m حاصل ضرب می نامند. علامتهای زیرین برای نمایش حاصل ضربی که به وسیله (۲۸) تعریف شده است بکار می روند:

$$(29) \quad u_1 u_2 \cdots u_n \cdots, \prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

تصور. منظور از علامت $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$ یعنی $\prod_{n=1}^{\infty} u_{N+n}$ ، همچنین، وقتی خطر ابهام نباشد، می نویسیم $\prod u_n$.

اگر دنباله $\{p_n\}$ همگرا باشد، طبیعی بنظر می رسد که، همانند رشته های نامتناهی، حاصل ضرب موجود در (۲۹) همگرا نامیده شود. اما این تعریف نامناسب است زیرا هر حاصل ضرب با داشتن یک سازه مساوی صفر، بی توجه به رفتار سازه های دیگر، همگرا می شود. تعریف زیر مفیدتر واقع می شود:

تعریف ۵۰۸. فرض کنیم $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ يك حاصل ضرب نامتناهی مفروض باشد. قرارداد می دهیم $p_n = \prod_{k=1}^n u_k$.

(آ) اگر تعدادی نامتناهی از سازه های u_n صفر باشند، گوئیم این حاصل ضرب واگرا به صفر است.

(ب) اگر هیچ يك از سازه های u_n صفر نباشد، گوئیم این حاصل ضرب همگرا است در صورتی که عددی مانند $p \neq 0$ وجود داشته باشد قسمی که $\{p_n\}$ به p همگرا باشد. در این حالت، p مقدار حاصل ضرب نامیده، می نویسیم $p = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$. در حالتی که $\{p_n\}$ همگرا به صفر باشد، گوئیم این حاصل ضرب واگرا به صفر است.

(ج) اگر عددی مانند N باشد قسمی که به ازای هر $n > N$ ، $u_n \neq 0$ ، گوئیم $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا است به شرط آن که $\prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$ ، به وجهی که در (ب) توصیف شده است، همگرا باشد. در این حالت، مقدار حاصل ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ مساوی

$$u_1 u_2 \cdots u_N \prod_{n=N+1}^{\infty} u_n$$

تعریف می شود.

(د) اگر $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ به صورتی که در (ب) یا (ج) توصیف شده است همگرا نباشد،

در این صورت گوئیم که $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ واگرا است.

توجه داشته باشید که مقدار یک حاصل‌ضرب نامتناهی همگرا می‌تواند صفر باشد. اما این وقتی، و فقط وقتی، اتفاق می‌افتد که تعدادی متناهی از سازه‌ها مساوی صفر باشند. درج یا حذف تعدادی متناهی از سازه‌ها (صفر یا ناصفر) در یک حاصل‌ضرب نامتناهی تأثیری برهمگرایی آن ندارد. از این رو است که تعریف ۵۰.۸ تعریف بسیار مناسبی است.

مثال. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)$ و $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - 1/n)$ هر دو واگرا هستند. در اولی، $p_n = n + 1$ و در دومی، $p_n = 1/n$.

تضیه ۵۱.۸ (شرط‌کشی برای حاصل‌ضربها). حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod u_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N باشد قسمی که $n > N$ ایجاب کند که

$$(۳۰) \quad |u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+k} - 1| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

برهان. فرض کنیم حاصل‌ضرب $\prod u_n$ همگرا باشد. می‌توان (در صورت لزوم با حذف چند جمله) فرض کرد که هیچ u_n صفر نباشد. قرار می‌دهیم $p_n = u_1 \cdots u_n$ و $p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. در این صورت $p \neq 0$ و در نتیجه عددی مانند $M > 0$ هست قسمی که $|p_n| > M$. حال، چون $\{p_n\}$ در شرط‌کشی برای دنباله‌ها صدق می‌کند، پس به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مانند N وجود دارد قسمی که به‌ازای $n > N$ و $k = 1, 2, \dots$ خواهیم داشت $|p_{n+k} - p_n| < \varepsilon M$ با تقسیم نامساوی اخیر بر $|p_n|$ ، شرط (۳۰) حاصل می‌شود.

حال فرض کنیم شرط (۳۰) برقرار باشد. در این صورت، به‌ازای $n > N$ ، $u_n \neq 0$ [چرا؟] در (۳۰)، ε را مساوی $1/2$ اختیار می‌کنیم. اگر N متناظر این ε برای N باشد، به‌ازای هر $n > N$ ، قرار می‌دهیم $q_n = u_{N+1} u_{N+2} \cdots u_n$. از شرط (۳۰) نتیجه می‌شود که $1/2 < |q_n| < 3/2$. بنا بر این، اگر $\{q_n\}$ همگرا باشد، این دنباله نمی‌تواند به‌صفر همگرا باشد. برای اثبات همگرا بودن $\{q_n\}$ ، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد و نامساوی (۳۰) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left| \frac{q_{n+k}}{q_n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

از این نتیجه می‌شود که $\varepsilon < (2/3) < \varepsilon |q_n| < \varepsilon |q_{n+k} - q_n|$. بنا بر این، $\{q_n\}$ در شرط‌کشی برای دنباله‌ها صدق می‌کند، و در نتیجه همگرا است. یعنی حاصل‌ضرب

$\prod u_n$ همگرا است.

نمونه. با فرض $k = 1$ در (۳۰)، دیده می‌شود که از همگرایی $\prod u_n$ می‌توان $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ را نتیجه گرفت. به این دلیل است که سازه‌های یک حاصل ضرب را به صورت $u_n = 1 + a_n$ می‌نویسند. بنابراین، از همگرایی $\prod (1 + a_n)$ نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

قضیه ۵۳.۸ فرض کنیم هر $a_n > 0$ در این صورت، حاصل ضرب $\prod (1 + a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که رشته $\sum a_n$ همگرا باشد. برهان. در قسمتی از برهان از نامساوی

$$(31) \quad 1 + x \leq e^x$$

استفاده می‌کنیم. اگرچه نامساوی (۳۱) به ازای هر عدد حقیقی x برقرار است، ولی در این جا برقراری آن فقط به ازای x های نامنفی مورد لزوم است. وقتی که $x > 0$ ، (۳۱) نتیجه ساده قضیه مقدار میانگین است، که نتیجه می‌دهد که

$$e^x - 1 = x e^{x_0} \quad \text{که در آن } 0 < x_0 < x$$

چون $e^{x_0} \geq 1$ ، نامساوی (۳۱) بی‌درنگ از معادله بالا حاصل می‌شود. حال فرض می‌کنیم

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

هر دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{p_n\}$ صعودیند، پس برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که دنباله $\{s_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، کراندار است که $\{p_n\}$ کراندار باشد.

واضح است که نامساوی $p_n > s_n$ برقرار است. حال، چون در رابطه (۳۱) x را مساوی a_k اختیار کنیم ($k = 1, 2, \dots, n$) و آنها را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود که $p_n < e^{s_n}$. از این روی، $\{s_n\}$ وقتی، و فقط وقتی، کراندار است که $\{p_n\}$ کراندار باشد. توجه داشته باشید که چون هر $p_n \geq 1$ ، پس دنباله $\{p_n\}$ نمی‌تواند همگرا به صفر باشد. همچنین

$$\text{اگر } s_n \rightarrow +\infty, \quad p_n \rightarrow +\infty$$

تعریف ۵۳.۸ حاصل ضرب $\prod (1 + a_n)$ را همگرایی مطلق نامند در صورتی که $\prod (1 + |a_n|)$ همگرا باشد.

قضیه ۵۴.۸ همگرایی مطلق $\prod (1 + a_n)$ همگرایی آن را ایجاب می‌کند.

برهان. از شرطکشی و نامساوی زیر استفاده کنید:

$$\begin{aligned} & |(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \\ & \leq (1 + |a_{n+1}|)(1 + |a_{n+2}|) \cdots (1 + |a_{n+k}|) - 1. \end{aligned}$$

تصوه. بنا بر قضیه ۵۲.۸، $\prod(1 + a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای مطلق است که $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد. در تمرین ۴۳.۸ مثالی می‌آوریم که در آن $\prod(1 + a_n)$ همگرا است ولی $\sum a_n$ واگرا است.

قضیه زیر شبیه قضیه ۵۲.۸ است:

قضیه ۵۵.۸ فرض کنیم هر $a_n \geq 0$ ، $\prod(1 - a_n)$ در این صورت، حاصل ضرب $\prod(1 - a_n)$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که $\sum a_n$ همگرا باشد.

برهان. از همگرایی $\sum a_n$ همگرایی مطلق $\prod(1 - a_n)$ (و در نتیجه همگرایی آن) نتیجه می‌شود.

برای اثبات عکس آن، فرض کنیم $\sum a_n$ واگرا باشد. هرگاه $\{a_n\}$ همگرا به صفر نباشد، آنگاه $\prod(1 - a_n)$ نیز واگرا است. بنابراین، می‌توان فرض کرد که وقتی که $a_n \rightarrow 0$ ، $n \rightarrow \infty$ ، با حذف چند جمله (در صورت لزوم)، می‌توان فرض کرد که هر $a_n \leq 1/2$ در این صورت، به ازای هر n ، $1 - a_n \geq 1/2$ (و در نتیجه $1 - a_n \neq 0$) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} p_n &= (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n), \\ q_n &= (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n). \end{aligned}$$

چون

$$(1 - a_k)(1 + a_k) = 1 - a_k^2 \leq 1,$$

می‌توان نوشت $p_n \leq 1/q_n$. اما در برهان قضیه ۵۲.۸ دیدیم که اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $q_n \rightarrow +\infty$ ، بنابراین، وقتی که $p_n \rightarrow 0$ ، $n \rightarrow \infty$ ، و از قسمت (ب) تعریف ۵۰.۸ نتیجه می‌شود که $\prod(1 - a_n)$ واگرا به صفر است.

۲۷.۸ حاصل‌ضرب اویلر برای تابع زتای ریمان

این فصل را با قضیه‌ای از اویلر خاتمه می‌دهیم. در این قضیه تابع زتای ریمان $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ به صورت حاصل‌ضربی نامتناهی بیان شده است، که این حاصل-ضرب روی همه عددهای اول گرفته شده است.

قضیه ۵۶.۸ فرض کنیم p_k عبارت باشد از k امین عدد اول. در این صورت، اگر

۱ $\sigma > 1$ خواهیم داشت

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

و حاصل ضرب همگرای مطلق است.

برهان. حاصل ضرب جزئی $P_m = \prod_{k=1}^m (1 - p_k^{-s})^{-1}$ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که وقتی که $m \rightarrow \infty$ ، $P_m \rightarrow \zeta(s)$ ، بانوشتن هر سازه به صورت یک رشته هندسی، رابطه

$$P_m = \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \dots \right)$$

را نتیجه می‌گیریم، که حاصل ضرب تعدادی متناهی رشته همگرای مطلق است. اگر این رشته‌ها را درهم ضرب کرده جمله‌های حاصل را بر حسب صعودی بودن مخرج‌های آنها تجدید آرایش نمائیم، رشته همگرای مطلق دیگری بدست می‌آید، که جمله نمونه آن بدین صورت است:

$$n = p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}, \quad \frac{1}{p_1^{a_1 s} p_2^{a_2 s} \dots p_m^{a_m s}} = \frac{1}{n^s}$$

و هر $a_i \geq 0$ بنا بر این،

$$P_m = \sum \frac{1}{n^s},$$

که در آن $\sum_1 n$ روی n هائی جمع‌بندی شده است که همه سازه‌های اول آنها از p_m نایبتر باشند. بنا بر قضیه یکنائی تجزیه (قضیه ۹.۱)، هر یک از این n ها یک، و فقط یک، بار در \sum_1 ظاهر می‌شود. با تفریق P_m از $\zeta(s)$ رابطه‌های

$$\zeta(s) - P_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_1 \frac{1}{n^s} = \sum_2 \frac{1}{n^s}$$

بدست می‌آیند، که در آنها \sum_2 روی n هائی جمع‌بندی شده است که دست‌کم یک سازه اول بزرگتر از p_m دارند. چون این چنین هائی در میان عددهای صحیح بزرگتر از p_m قرار دارند، پس

$$|\zeta(s) - P_m| \leq \sum_{n > p_m} \frac{1}{n^s}$$

وقتی که $m \rightarrow \infty$ ، چون $\sum n^{-s}$ همگرا است، مجموع مذکور در نامساوی بالا همگرا

به صفر می‌شود، پس $P_m \rightarrow \zeta(s)$.

برای اثبات همگرایی مطلق بودن حاصل‌ضرب، قضیه ۵۲.۸ را بکار می‌بریم. این حاصل‌ضرب به شکل $\prod(1+a_k)$ است، که در آن

$$a_k = \frac{1}{p_k^s} + \frac{1}{p_k^{2s}} + \dots$$

چون رشته $\sum a_k$ تحت تسلط $\sum n^{-s}$ است، پس $\sum a_k$ همگرایی مطلق است. بنا بر این $\prod(1+a_k)$ نیز همگرایی مطلق می‌باشد.

تمرین

دنباله‌ها

۱.۸ (آ) $\{a_n\}$ دنباله مفروضی است حقیقی و از بالا کراندار. قرارداد کنید $u_n = \sup \{a_k \mid k \geq n\}$. در این صورت $u_n \searrow$ و در نتیجه $U = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ یا متناهی است یا مساوی $-\infty$. ثابت کنید که

$$U = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup \{a_k \mid k \geq n\}).$$

(ب) بهمین نحو، اگر $\{a_n\}$ از پائین کراندار باشد، ثابت کنید که

$$V = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf \{a_k \mid k \geq n\}).$$

در حالتی که U و V متناهی باشند، نشان دهید که:

(ج) دو زیردنباله $\{a_n\}$ وجود دارند که یکی به U و دیگری به V همگرا می‌باشند.

(د) اگر $U = V$ ، هر زیردنباله $\{a_n\}$ به U همگرا است.

۲.۸ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله حقیقی مفروض هستند که از پائین کراندارند. ثابت کنید که

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\Gamma)$$

(ب) اگر به ازای هر n ، $a_n > 0$ و $b_n > 0$ ، و دو عدد

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ و } \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

هر دو متناهی یا هر دو نامتناهی باشند،

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n) (\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n).$$

قضیه‌های ۳.۸ و ۴.۸ را ثابت کنید. ۳.۸

اگر هر $a_n > 0$ ، ثابت کنید که ۴.۸

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

۵.۸ فرض کنید $a_n = n^n/n!$ نشان دهید که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = e$ ، و با استفاده از تمرین ۴.۸، نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$$

۶.۸ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد حقیقی و $\sigma_n = (a_1 + \dots + a_n)/n$ نشان دهید که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

۷.۸ اگر a_n یکی از عبارتهای زیرین باشد،

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{و} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

را بیابید.

(آ) $\cos n$ ، (ب) $(1 + 1/n) \cos n\pi$

(ج) $n \sin(n\pi/3)$ ، (د) $\sin(n\pi/2) \cos(n\pi/2)$

(ه) $(-1)^n n / (1+n)^n$ ، (و) $n/3 - [n/3]$

تیسره. در (و)، منظور از $[x]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x .

۸.۸ فرض کنید که $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$ ثابت کنید که دنباله $\{a_n\}$ به حدی مانند p در بازه $1 < p < 2$ همگرا است.

در هر یک از تمرینهای ۹.۸ تا ۱۴.۸، نشان دهید که دنباله حقیقی $\{a_n\}$ همگرا است. فرض بر این است که شرطهای داده شده به ازای هر $n \geq 1$ برقرارند. در تمرینهای ۱۰.۸ تا ۱۴.۸، نشان دهید که $\{a_n\}$ دارای همان حد L است که تعیین

شده است.

$$\cdot |a_{n+\gamma} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{\lambda} |a_{n+1}^\gamma - a_n^\gamma|, |a_n| \leq \gamma \quad 9.8$$

$$\cdot L = (a_1 a_\gamma^\gamma)^{1/\gamma} \text{ و } a_{n+\gamma} = (a_n a_{n+1})^{1/\gamma}, a_\gamma \geq 0, a_1 \geq 0 \quad 10.8$$

$$a_\gamma = \lambda, a_1 = \gamma \quad 11.8$$

$$\cdot a_{\gamma n+1} = \frac{1}{\gamma} (a_{\gamma n} + a_{\gamma n+1}) \text{ و}$$

$$\cdot L = \gamma \text{ و } a_{\gamma n+\gamma} = \frac{a_{\gamma n} a_{\gamma n-1}}{a_{\gamma n+1}}$$

$$\cdot L = 1 \text{ و } a_1 = -\frac{\gamma}{\gamma} \text{ و } \gamma a_{n+1} = \gamma + a_n^\gamma, a_1 = -\frac{\gamma}{\gamma} \quad 12.8$$

کنید که L مساوی $\gamma - 2$ شود.

$$\cdot L = \sqrt{\gamma} \text{ و } a_{n+1} = \frac{\gamma(1+a_n)}{\gamma+a_n}, a_1 = \gamma \quad 13.8$$

$$\cdot b_1 = b_\gamma = 1 \text{ که در آن } a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad 14.8$$

$$\cdot L = \frac{1+\sqrt{\delta}}{\gamma} \text{ و } b_{n+\gamma} = b_n + b_{n+1}$$

دانهائی. نشان دهید که $b_{n+\gamma} b_n - b_{n+1}^\gamma = (-1)^{n+1}$ و از این نتیجه

بگیرید که اگر $\gamma > 4$ ، $|a_n - a_{n+1}| < n^{-\gamma}$.

رشته‌ها

۱۵.۸ همگرایی رشته‌های زیر را آزمایش کنید (p و q عددهای حقیقی ثابتی می‌باشند).

$$\cdot \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\gamma e^{-n} \quad (\text{آ})$$

$$\cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q} \quad (0 < q < p) \quad (\text{د}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p^n n^p \quad (p > 0) \quad (\text{ج})$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n - q^n} \quad (0 < q < p) \quad (\text{و}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-1/n} \quad (\text{ه})$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \right) \quad (\text{ح} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(1 + 1/n)} \right) \quad (\text{ز})$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log \log n} \right)^{\log \log n} \right) \quad (\text{ی} \quad \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p} \right) \quad (\text{ط})$$

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \quad (\text{ل} \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^2} - n) \right) \quad (\text{ک})$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 1)^n \right) \quad (\text{م})$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^p (\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \right) \quad (\text{ن})$$

۱۶.۸ فرض کنید $S = \{n_1, n_2, \dots\}$ دسته عددهای صحیح مثبتی باشد که در نمایش اعشاری آنها رقم ۰ وجود ندارد. (مثلاً، $7 \in S$ ولی $101 \notin S$). نشان دهید که $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ همگرا است و مجموع آن از ۹۰ کوچکتر است.

۱۷.۸ فرض کنید عددهای صحیح a_1, a_2, \dots داده شده باشند قسمی که $1 \leq a_n \leq n-1$ ، $n=2, 3, \dots$. نشان دهید که مجموع رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n!$ وقتی، و فقط وقتی، گویا است که عددی صحیح مانند N وجود داشته باشد قسمی که به ازای هر $n \geq N$ ، $a_n = n-1$.

دانهائی. برای کفایت حکم، نشان دهید که $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)/n!$ یک رشته توی هم رونده است که مجموع آن ۱ است.

۱۸.۸ فرض کنید که $1 \leq q \leq p$ عددهای صحیح ثابتی باشند، و نیز

$$x_n = \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{k}, \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

(آ) با استفاده از دستور (۸)، ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \log(p/q).$$

(ب) در حالتی که $q=1$ و $p=2$ ، نشان دهید که $s_{2n} = x_n$ و نتیجه بگیرید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

(ج) رشته مذکور در (ب) را تجدید آرایش دهید بدین صورت که، متناوباً p جمله مثبت و سپس q جمله منفی پشت سرهم نوشته شوند، و بسا استفاده از (\bar{A}) نشان دهید که مجموع این تجدید آرایش مساوی

$$\log 2 + \frac{1}{4} \log(p/q)$$

است.

(د) مجموع رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (1/(3n-2) - 1/(3n-1))$ را پیدا کنید.

۱۹۰۸ فرض کنید $c_n = a_n + ib_n$ ، که در آن $a_n = (-1)^n / \sqrt{n}$ و $b_n = 1/n^2$ نشان دهید که $\sum c_n$ همگرای مشروط است.

۲۰۰۸ با استفاده از قضیه ۲۳۰۸ دستورهای زیرین را نتیجه بگیرید:

$$(\bar{A}) \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2} \log^2 n + A + O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

$$(\bar{B}) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} = \log(\log n) + B + O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$$

۲۱۰۸ اگر $0 < a \leq 1$ و $s > 1$ ، تعریف کنید $\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$

(\bar{A}) نشان دهید که این رشته به ازای $s > 1$ همگرای مطلق است، و ثابت کنید

$$\sum_{h=1}^k \zeta\left(s, \frac{h}{k}\right) = k^s \zeta(s), \quad k = 1, 2, \dots$$

که در آن $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$ تابع زتای ریمان است.

(ب) ثابت کنید اگر $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} / n^s = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s).$$

۲۲۰۸ فرض کنید در رشته همگرای مفروض $\sum a_n$ هر a_n نامنفی باشد. ثابت کنید

اگر $p > 1/2$ ، $\sum \sqrt{a_n} n^{-p}$ همگرا است. برای $p = 1/2$ مثال ناقصی ارائه دهید.

۲۳۰۸ فرض کنید رشته $\sum a_n$ واگرا باشد. ثابت کنید که $\sum na_n$ نیز واگرا است.

۲۴۰۸ فرض کنید رشته $\sum a_n$ همگرا باشد، و هر a_n مثبت باشد. ثابت کنید که

$$\sum (a_n a_{n+1})^{1/2}$$

نیز همگرا است. نشان دهید که عکس این مطلب برای حالتی که $\{a_n\}$ یکنوا باشد نیز درست است.

۲۵.۰۸ فرض کنید رشته $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد. نشان دهید که هر یک از رشته‌های زیرین نیز همگرای مطلق است:

$$(آ) \quad \sum a_n^2, \quad (ب) \quad \sum \frac{a_n}{1+a_n} \quad (a_n \neq -1)$$

$$(ج) \quad \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

۲۶.۰۸ همه مقادیرهای حقیقی x را که به‌ازای آنها رشته زیر همگرا است مشخص کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}$$

۲۷.۰۸ گزاره‌های زیرین را ثابت کنید:

(آ) اگر $\sum a_n$ همگرا، و $\sum (b_n - b_{n+1})$ همگرای مطلق باشد، $\sum a_n b_n$ همگرا است.

(ب) اگر مجموعهای جزئی $\sum a_n$ کراندار باشند، و $\sum (b_n - b_{n+1})$ همگرای مطلق باشد، و وقتی که $b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ، $\sum a_n b_n$ همگرا خواهد بود.

دنباله‌های مضاعف و رشته‌های مضاعف

۲۸.۰۸ در وجود دو حد مکرر و حد مضاعف دنباله مضاعف f در هر یک از موردهای زیر تحقیق کنید:

$$(آ) \quad f(p, q) = \frac{1}{p+q} \quad (ب) \quad f(p, q) = \frac{p}{p+q}$$

$$(ج) \quad f(p, q) = \frac{(-1)^p p}{p+q} \quad (د) \quad f(p, q) = (-1)^{p+q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

$$(ه) \quad f(p, q) = \frac{(-1)^p}{q} \quad (و) \quad f(p, q) = (-1)^{p+q}$$

$$(ز) \quad f(p, q) = \frac{\cos p}{q} \quad (ح) \quad f(p, q) = \frac{p}{q^x} \sum_{n=1}^q \sin \frac{n}{p}$$

جواب. حد مضاعف در (آ)، (د)، (ه)، (ز)، و هر دو حد مکرر در (آ)، (ب)، (ح) وجود دارند. در (ج) و (ه) فقط یکی از حدهای مکرر وجود دارد، و در (د) و (و) هیچ یک از حدهای مکرر موجود نیست.

۲۹.۸ گزاره‌های زیرین را ثابت کنید:

(آ) یک رشته مضاعف با جمله‌های مثبت وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که مجموعه مجموعهای جزئی آن کراندار باشد.

(ب) اگر یک رشته مضاعف همگرای مطلق باشد، همگرا نیز هست.

(ج) $\sum_{m,n} e^{-(m^2+n^2)}$ همگرا است.

۳۰.۸ فرض کنید رشته مضاعف $\sum_{m,n} a(n) x^{mn}$ به‌ازای $|x| < 1$ همگرای مطلق باشد. مجموع آن را $S(x)$ بنامید. نشان دهید که هر یک از رشته‌های زیرین نیز به‌ازای $|x| < 1$ همگرای مطلق است، و مجموع آن $S(x)$ می‌باشد:

$$A(n) = \sum_{d|n} a(d) \quad \text{که در آن} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A(n) x^n ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{x^n}{1-x^n}$$

۳۱.۸ اگر α حقیقی باشد، نشان دهید که رشته مضاعف $\sum_{m,n} (m+in)^{-\alpha}$ وقتی، و فقط وقتی، همگرای مطلق است که $\alpha > 2$.

داهمنائی. قرار دهید $s(p, q) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q |m+in|^{-\alpha}$ مجموعه

$$\{m+in \mid m = 1, 2, \dots, p, n = 1, 2, \dots, q\}$$

از p^2 عدد مختلط تشکیل شده است که قدر مطلق یکی $\sqrt{2}$ است، سه‌تای آنها در نامساویهای $|1+2i| \leq |m+in| \leq 2\sqrt{2}$ ، پنج‌تای آنها در نامساویهای $|1+3i| \leq |m+in| \leq 3\sqrt{2}$ صدق می‌نمایند، و مانند اینها. این مطلب را به‌طریقه هندسی تحقیق کنید و نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$2^{-\alpha/2} \sum_{n=1}^p \frac{2n-1}{n^\alpha} \leq s(p, p) \leq \sum_{n=1}^p \frac{2n-1}{(n^2+1)^{\alpha/2}}$$

۳۲.۸ (آ) نشان دهید که حاصل ضرب کشی $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} / \sqrt{n+1}$ با خودش یک رشته واگرا است.

(ب) نشان دهید که حاصل ضرب کشی $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} / (n+1)$ با خودش مساوی رشته زیر است:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

آیا این رشته همگرا است؟ چرا؟

۳۳.۸ اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو رشته توانی همگرای مطلق مفروض باشند، و مجموعهای آنها، بترتیب، $A(x)$ و $B(x)$ باشند، نشان دهید که $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = A(x) B(x)$ که در آن

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

۳۴.۸ رشتهای به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ را یک رشته دیریکله می نامند. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/n^s$ دو رشته دیریکله همگرای مطلق مفروض باشند، و مجموعهای آنها، بترتیب، $A(s)$ و $B(s)$ باشند، نشان دهید که

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n/n^s = A(s) B(s)$$

۳۵.۸ اگر $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ ، $s > 1$ ، نشان دهید که

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)/n^s,$$

که در آن $d(n)$ تعداد مقسوم علیه های مثبت n (به انضمام ۱ و n) می باشد.

مجموعه پذیر چزارو

۳۶.۸ نشان دهید که مجموع از نوع (۱، C) هریک از رشته های زیرین مساوی صفر است:

(آ) $1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - \dots$

(ب) $\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \dots$

(ج) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots$ ($x \neq m\pi$ حقیقی است)

۳۷.۸ $\sum a_n$ رشته ای است مفروض. قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n k a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k.$$

ثابت کنید که

(آ) $t_n = (n+1)s_n - n\sigma_n$

(ب) هرگاه $\sum a_n$ مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ باشد، آنگاه $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، همگرا است که وقتی که $t_n = o(n)$ ، $n \rightarrow \infty$

(ج) $\sum a_n$ وقتی، و فقط وقتی، مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n/n(n+1)$$

همگرا باشد.

۳۸۰۸ فرض کنید در دنبالهٔ یکنوای $\{a_n\}$ جمله‌ها مثبت باشند، بقسمی که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ قرار دهید

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k s_k.$$

ثابت کنید که:

$$v_n = \frac{1}{2} u_n + (-1)^n s_n/2 \quad (\text{آ})$$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n s_n$ مجموعپذیر از نوع $(C, 1)$ است و مجموع جزاوی آن مساوی $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ می‌باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = -\log \sqrt{2} \quad (C, 1) \quad (\text{ج})$$

حاصل‌ضربهای نامتناهی

۳۹۰۸ همگرایی و واگرایی هر یک از حاصل‌ضربهای نامتناهی زیر را مشخص نموده، مقدار هر یک از حاصل‌ضربهای همگرا را معین کنید:

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - n^{-2}) \quad (\text{ب}), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \quad (\text{آ})$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}), \quad |z| < 1 \quad (\text{د}), \quad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \quad (\text{ج})$$

۴۰۰۸ اگر هیچ یک از مجموعهای جزئی رشتهٔ همگرای $\sum a_n$ ، یعنی s_n ، صفر نباشد و خود مجموع رشته نیز غیر از صفر باشد، نشان دهید که حاصل‌ضرب نامتناهی $\prod_{n=2}^{\infty} (1 + a_n/s_{n-1})$ همگرا است و مقدار آن مساوی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌باشد.

۴۱.۸ مقادیر حاصل ضربهای زیر را با اثبات اتحادهای زیر و جمعبندی رشته‌های موجود در آنها بیابید:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n - 2}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \quad (\text{آ})$$

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{ب})$$

۴۲.۸ همه مقادیرهای حقیقی x را که به‌ازای آنها حاصل ضرب $\prod_{n=1}^{\infty} \cos(x/2^n)$ همگرا باشد پیدا نموده، مقدار این حاصل ضرب را وقتی که همگرا باشد بیابید.

۴۳.۸ (آ) به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ فرض کنید $a_n = (-1)^n / \sqrt{n}$. نشان دهید که $\prod(1 + a_n)$ واگرا است ولی $\sum a_n$ همگرا است.

(ب) فرض کنید به‌ازای

$$a_{2n} = 1/\sqrt{n} + 1/n \text{ و } a_{2n-1} = -1/\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

نشان دهید که $\prod(1 + a_n)$ همگرا است ولی $\sum a_n$ واگرا است.

۴۴.۸ فرض کنید به‌ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \geq 0$. همچنین به‌ازای

$$a_{2n+2} < a_{2n+1} < \frac{a_{2n}}{1 + a_{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

نشان دهید که $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + (-1)^k a_k)$ وقتی، فقط وقتی، همگرا است که $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ همگرا باشد.

۴۵.۸ دنبالهٔ مختلط $\{f(n)\}$ را یک دنبالهٔ ضربپذیر نامیم در صورتی که

$f(1) = 1$ ، و اگر m و n نسبت به هم اول باشند، $f(mn) = f(m)f(n)$. (ر. ک. بخش ۷.۱) اگر $f(1) = 1$ و به‌ازای هر m و هر n

$$f(mn) = f(m)f(n),$$

گوئیم که $\{f(n)\}$ یک دنبالهٔ ضربپذیر تام است.

(آ) اگر $\{f(n)\}$ ضربپذیر، ورشتهٔ $\sum f(n)$ همگرای مطلق باشد، ثابت کنید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{\infty} \{1 + f(p_k) + f(p_k^2) + \dots\},$$

که در آن p_k ، k امین عدد اول است، و حاصل ضرب بالا همگرای مطلق می‌باشد.

(ب) بعلاوه، اگر $\{f(n)\}$ ضربپذیر تام باشد، ثابت کنید که دستور مذکور در

(آ) به صورت زیر درمی آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - f(p_k)}$$

ملاحظه می شود که حاصل ضرب اوایل برای $\zeta(s)$ (قضیه ۵۶.۸) حالت خاصی از رابطه بالا است که به ازای $f(n) = n^{-s}$ بدست می آید.

۴۶.۸ در این تمرین برهان ساده‌ای از دستور $\zeta(2) = \pi^2/6$ مختصراً بیان می شود. با نامساوی $\sin x < x < \tan x$ ، که به ازای $0 < x < \pi/2$ معتبر است، شروع می کنیم. با گرفتن متقابل از جمله‌های آن و مربع کردن آنها، خواهیم داشت

$$\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x.$$

حال در نامساویهای بالا $x = k\pi/(2m+1)$ و k و m عددهائی صحیح هستند و $1 \leq k \leq m$ را قرار داده، سپس بر k جمع بندی می کنیم، خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^m \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

با استفاده از دستور تمرین ۴۹.۱ (ج)، نامساویهای زیر نتیجه می شود:

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} < \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}.$$

اکنون اگر $m \rightarrow \infty$ ، تساوی $\zeta(2) = \pi^2/6$ بدست می آید.

۴۷.۸ با دلیلی مشابه مذکور در تمرین ۴۶.۸، ثابت کنید که $\zeta(4) = \pi^4/90$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

- 8.1 Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford University Press, Oxford, 1949.
- 8.2 Hirschmann, I. I., *Infinite Series*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
- 8.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, 2nd ed. R. C. Young, translator. Hafner, New York, 1948.

دنباله‌های توابع

۱.۹ همگرایی نقطه‌وار دنباله‌های توابع

در این فصل با دنباله‌هایی مانند $\{f_n\}$ سروکار داریم که جمله‌هایشان تابعهائی حقیقی یا مختلط هستند که دارای قلمرو مشترک بر خط حقیقی R یا در صفحه مختلط C می‌باشند. به ازای هر x در قلمرو مشترک، می‌توان دنباله‌ای دیگر مانند $\{f_n(x)\}$ ساخت که جمله‌هایش مقدارهای متناظر تابعها باشند. فرض کنیم S مجموعه x هائی باشد که به ازای آنها این دنباله دوم، یعنی $\{f_n(x)\}$ ، همگرا باشد. تابع f را که با معادله

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in S.$$

تعریف شود تابع حد دنباله $\{f_n\}$ نامیده، گوئیم که $\{f_n\}$ بر مجموعه S نقطه‌وار به f همگرا است.

توجه اصلی ما در این فصل به این مسأله است: اگر هر یک از تابعهائی دنباله $\{f_n\}$ خاصیت معینی، مثلاً، پیوستگی، مشتقپذیری، یا انتگرالپذیری، داشته باشد، این خاصیت تا چه اندازه به تابع حد این دنباله منتقل می‌شود؟ مثلاً، اگر هر یک از f_n ها در c پیوسته باشد، آیا تابع حد f نیز در c پیوسته است؟ خواهیم دید که عموماً چنین نیست. در واقع خواهیم دید که همگرایی نقطه‌وار معمولاً آن قدر قوی نیست که هر یک از خاصیت‌هایی را که بالاتر به آنها اشاره شد از جمله‌های فردی f_n به تابع حد f منتقل سازد. این امر ما را به مطالعه روشهای قویتر همگرایی که

بتوانند این خاصیتها را حفظ کنند سوق می‌دهد. مهمترین اینها مفهوم همگرایی یکشکل است.

پیش از معرفی همگرایی یکشکل، یکی از سؤالهای اساسی خود را به صورتی دیگر تنظیم می‌کنیم: وقتی که می‌پرسیم آیا پیوستگی هر f_n در c پیوستگی تابع حد f در c را نتیجه می‌دهد یا خیر، در حقیقت می‌خواهیم بدانیم که آیا صحت معادله

$$\lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = f_n(c),$$

به ازای هر مقدار n ، صحت معادله

$$(۱) \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

را ایجاب می‌کند؟ اما معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x).$$

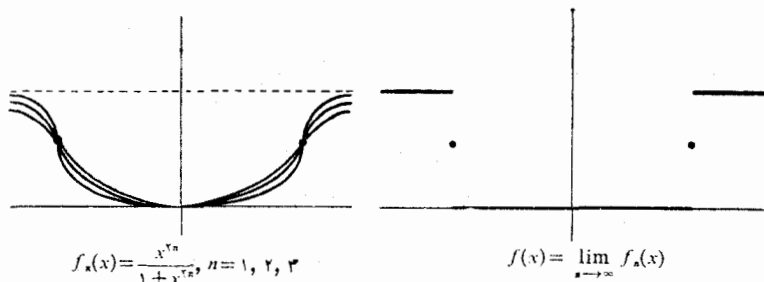
بنابراین، سؤال ما درباره پیوستگی بدین صورت درمی‌آید: آیا در (۲) می‌توان جای علامتهای حدگیری را با یکدیگر عوض کرد؟ خواهیم دید که این عمل، در حالت کلی، امکان پذیر نیست. اولاً ممکن است که حد مذکور در (۱) وجود نداشته باشد. ثانیاً، حتی اگر این حد وجود داشته باشد، لزومی ندارد که با $f(c)$ مساوی باشد. در فصل ۸ در مورد رشته‌های مکرر با وضع مشابهی روبرو شدیم. در آنجا دیدیم که $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m, n)$ لزوماً مساوی $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m, n)$ نیست.

در آنالیز ریاضی مکرر با این سؤال کلی مواجه می‌شویم که آیا می‌توان جای دو حد را باهم عوض کرد؟ خواهیم دید که همگرایی یکشکل دامنه دارترین شرط کافی برای اعتبار تعویض برخی از حدها است، ولی جواب کامل به سؤال ما را نمی‌دهد. به مثالهایی برخوردیم که هر چند در آنها دنباله همگرایی یکشکل نیست باز می‌توان جای دو حد را معاوضه کرد.

۲.۹ مثالهایی از دنباله‌های توابع حقیقی

مثالهای زیرین بعضی از آنچه را که ممکن است به هنگام تشکیل تابع حد دنباله‌ای از تابعهای حقیقی روی دهد تصور می‌سازند.

مثال ۱ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با تابع حد ناپیوسته. فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbf{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) = x^{2^n} / (1 + x^{2^n})$. نمودارهای تعدادی از



شکل ۱.۹

جمله‌ها در شکل ۱.۹ نشان داده شده است. در این حالت، به ازای هر عدد حقیقی x ، $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ وجود دارد، و تابع حد f با رابطه‌های زیر مشخص می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

هر f_n بر \mathbb{R} پیوسته است، ولی f در $x = 1$ و $x = -1$ ناپیوسته می‌باشد.

مثال ۲ دنباله‌ای از تابعها که در آن

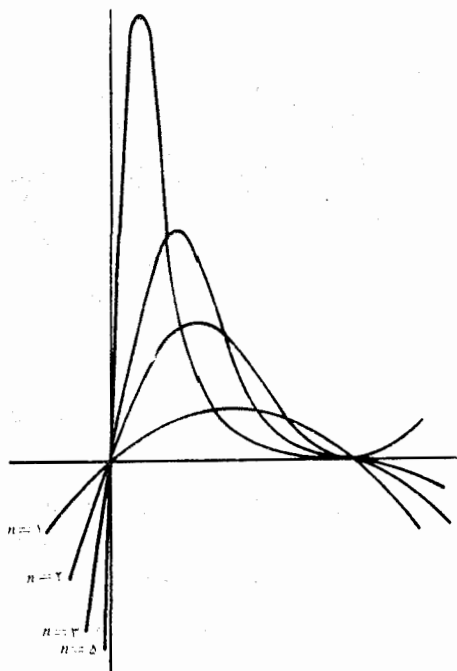
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbb{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ و $f_n(x) = n^x x(1-x)^n$ ، اگر $0 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ وجود دارد و مساوی ۰ است. (ر.ک. شکل

۰.۲۰۹) از این روی $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ولی

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= n^x \int_0^1 x(1-x)^n dx \\ &= n^x \int_0^1 (1-t)t^n dt = \frac{n^x}{n+1} - \frac{n^x}{n+2} = \frac{n^x}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، حد انتگرالها مساوی انتگرال تابع حد نیست. بنابراین، عملهای «حدگیری» و «انتگرالگیری»



شکل ۲.۹

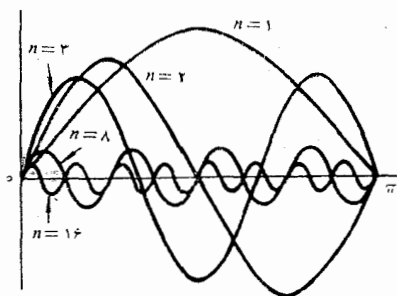
همواره قابل تعویض نمی باشند.

مثال ۳ دنباله‌ای از تابعهای مشتقپذیر $\{f_n\}$ با حد صفر که در آن $\{f'_n\}$ واگرا است. فرض می‌کنیم اگر $x \in \mathbb{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$ است. در این صورت، به ازای هر x ، $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ اما $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$. پس $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ به ازای هیچ مقدار x وجود ندارد. (ر. ک. شکل ۳.۹).

۳.۹ تعریف همگرایی یکشکل

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که بر مجموعه S نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد. یعنی به ازای هر نقطه x در S و هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N (که هم به x و هم به ε بستگی دارد) وجود داشته باشد بقسمی که

$$\text{هرگاه } n > N, \text{ آنگاه } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$



شکل ۳.۹

در حالتی که یک مقدار N برای همه نقطه‌های در S صدق کند، همگرایی را بر S یکشکل نامند. یعنی،

تعریف ۱۰.۹ گویند دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ بر S به f همگرایی یکشکل است وقتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N (فقط تابع ε) وجود داشته باشد قسمی که $n > N$ ایجاب کند که به ازای هر x در S ،

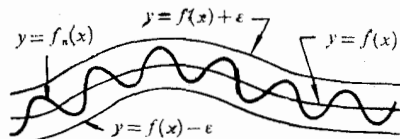
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ما آن را به صورت علامتی $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر S نشان می‌دهیم.

در حالتی که هر جمله دنباله $\{f_n\}$ تابعی حقیقی باشد، تعبیر هندسی مفیدی از همگرایی یکشکل وجود دارد. در این صورت، نامساوی $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ هم‌ارز است با دو نامساوی

$$(۳) \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

برقرار بودن (۳) به ازای هر $n > N$ و هر x در S بدین معنی است که، تمام نمودار f_n (یعنی، مجموعه $\{(x, y) \mid y = f_n(x), x \in S\}$) در «نوار» به ارتفاع 2ε ، که به طور متقارن در اطراف نمودار f در نظر گرفته می‌شود، واقع می‌گردد. (ر. ک. شکل ۴.۹).



شکل ۴.۹

دنباله $\{f_n\}$ را بر S کراندار یکشکل نامیم در صورتی که عدد پایائی مانند $M > 0$ بتوان یافت قسمی که به ازای هر x در S و هر مقدار n ,

$$|f_n(x)| \leq M.$$

عدد M را یک کران یکشکل برای $\{f_n\}$ می‌نامیم. هرگاه هر تابع f_n کراندار باشد و $f \rightarrow f_n$ به طور یکشکل بر S ، آنگاه باسانی می‌توان ثابت کرد که $\{f_n\}$ بر S کراندار یکشکل است. (ر. ک. تمرین ۰۱۰۹). این مطلب اغلب ما را قادر می‌سازد که نتیجه بگیریم که یک دنباله همگرای یکشکل نیست. مثلاً، بانگاهی به شکل ۲۰۹ می‌توان بفوریت دریافت که دنباله مذکور در مثال ۲ نمی‌تواند بر هیچ زیرمجموعه‌ای که حاوی یکی از همسایگیهای مبدأ است همگرای یکشکل باشد. اما، در همین مثال، همگرایی دنباله بر هر زیربازه فشرده‌ای که حاوی مبدأ نباشد یکشکل است.

۴.۹ همگرایی یکشکل و پیوستگی

قضیه ۲۰۹ فرض کنیم $f \rightarrow f_n$ به طور یکشکل بر S . هرگاه هر f_n در نقطه c از S پیوسته باشد، آنگاه تابع حد f نیز در c پیوسته است.

تبر. اگر c یک نقطه انباشتگی S باشد، از این حکم نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x).$$

پروهان. هرگاه c یک نقطه تنهای S باشد، آنگاه f خود بخود در c پیوسته است. پس، فرض کنیم که c یک نقطه انباشتگی S باشد. بنا به فرض قضیه، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک مقدار M وجود دارد قسمی که اگر $n \geq M$ ،

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } S,$$

چون f_M در c پیوسته است، پس یک همسایگی مانند $B(c)$ وجود دارد قسمی که اگر $x \in B(c) \cap S$

$$|f_M(x) - f_M(c)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

اما

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(c)| + |f_M(c) - f(c)|.$$

اگر $x \in B(c) \cap S$ ، هر جمله طرف راست نامساوی بالا از $\varepsilon/3$ کمتر است، و در نتیجه $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. از این قضیه باثبات می‌رسد.

تبره. همگرایی یکشکل $\{f_n\}$ شرطی است کافی، اما نه لازم، برای انتقال پیوستگی از جمله‌های دنباله به تابع حد. در مثال ۲ (بخش ۲۰۹)، دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با تابع حد پیوسته ارائه شده است که همگرایی یکشکل نیست.

۵.۹ شرط‌کشی برای همگرایی یکشکل

قضیه ۳.۹ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابعها که بر مجموعه S تعریف شده باشند. تابعی مانند f که $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکشکل بر S وقتی، فقط وقتی، وجود دارد که شرط زیر (به نام شرط‌کشی) صادق باشد: به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N باشد بقسمی که هرگاه $m > N$ و $n > N$ ، آنگاه

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in S,$$

برهان. فرض کنیم $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکشکل بر S . در این صورت، به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مانند N می‌توان یافت بقسمی که هرگاه $n > N$ ، آنگاه به ازای هر $x \in S$ ، $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. با فرض $m > N$ ، این رابطه را هم داریم $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ ، و در نتیجه به ازای هر $x \in S$ ،

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

برعکس، فرض کنیم شرط‌کشی برقرار باشد. در این صورت، به ازای هر $x \in S$ ، دنباله $\{f_n(x)\}$ همگرا است. اگر $x \in S$ ، قرار می‌دهیم

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

باید نشان دهیم که $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکشکل بر S . اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، N را می‌توان بقسمی اختیار کرد که به ازای $n > N$ و هر $k = 1, 2, \dots$ و هر $x \in S$ ، داشته باشیم $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon/2$. بنابراین،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

از این روی، $n > N$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $x \in S$ ،

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

این ثابت می‌کند که $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکشکل بر S .

نمبره. همگرایی نقطه‌وار و همگرایی یکشکل را می‌توان در محدوده‌های کلیتر فضاهای متری تنظیم کرد. اگر f_n و f تابعهائی از مجموعه ناتهی S به فضای متری (T, d_T) باشند، گوئیم $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر S ، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند N (فقط تابع ε) باشد بقسمی که هر گاه $n \geq N$ آنگاه

$$\text{به ازای هر } x \text{ در } S, d_T(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

قضیه ۳.۹ برای این حالت کلیتر معتبر است، و همچنین، اگر S یک فضای متری باشد، قضیه ۲.۹ نیز معتبر خواهد بود. برهان قضیه‌ها مانند حالت‌های خاص آنهاست، فقط کافی است در آن برهانها متر اقلیدسی را با هریک از مترهای d_S و d_T ، که مناسب باشد، عوض کرد. چون توجه ما اصولاً به تابعه‌های حقیقی یا مختلطی است که بر زیرمجموعه‌های R یا C تعریف شده باشند، جز مثال زیرین، درباره این توسیع صحبتی نخواهیم کرد.

مثال. $(B(S), d)$ ، یعنی فضای متری همه تابعه‌های حقیقی و کمرانداری که بر مجموعه ناتهی S تعریف شده‌اند، را در نظر می‌گیریم. متر d در آن به صورت $d(f, g) = \|f - g\|$ است، که در آن $\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$ (تمرین ۶.۶.۴). در این صورت، در فضای متری $(B(S), d)$ ، $f_n \rightarrow f$ وقتی، و فقط وقتی، که $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر S . با بیان دیگر می‌توان گفت که، همگرایی یکشکل بر S همان همگرایی معمولی در فضای متری $(B(S), d)$ است.

۶.۹ همگرایی یکشکل رشته‌های نامتناهی از تابعه‌ها

تعریف ۴.۹ $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعه‌ها انگاشته می‌شود که بر مجموعه S تعریف شده‌اند. به ازای هر x در S ، قرار می‌دهیم

$$(۴) \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

اگر تابعی مانند f وجود داشته باشد بقسمی که $s_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر S ، گوئیم که رشته $\sum f_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{به طور یکشکل بر } S).$$

قضیه ۵.۹ (شرط کنی برای همگرایی یکشکل رشته‌ها). رشته نامتناهی $\sum f_n(x)$ بر S وقتی، و فقط وقتی، همگرای یکشکل است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N

وجود داشته باشد قسمی که اگر $n > N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, S \text{ در } x \text{ و هر } p = 1, 2, \dots$$

برهان. S_n را با رابطه (۲) تعریف نموده، سپس قضیه ۳.۹ را بکار ببرید.

قضیه ۶.۹ (آزمون M و ایراشتراس). فرض کنیم دنباله $\{M_n\}$ از عددهای نامنفی قسمی داده شده باشد که

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, S \text{ در } x \text{ و هر } n = 1, 2, \dots$$

در این صورت اگر $\sum M_n$ همگرا باشد، رشته $\sum f_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است.

برهان. قضیه‌های ۱۱.۸ و ۵.۹ را توأم با نامساوی زیر بکار ببرید:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k.$$

قضیه ۷.۹ فرض کنیم $\sum f_n(x) = f(x)$ (به طوری که شکل بر S) هرگاه هر f_n در یک نقطه S مانند x پیوسته باشد، آنگاه f نیز در x پیوسته است.

برهان. S_n را با رابطه (۲) تعریف می‌کنیم. از پیوستگی هر f_n در x نتیجه می‌شود که S_n در x پیوسته است. حال قضیه بی‌درنگ از قضیه ۲.۹ نتیجه می‌شود.

تبره. اگر x نقطه انباشتگی S باشد، به موجب این قضیه می‌توان حدها و مجموعه‌های نامتناهی را با هم به صورت زیر عوض کرد:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

۷.۹ یک خم فضا پرکن

با بکار بردن قضیه ۷.۹ می‌توان خمی ساخت که فضا را پر کند. یک خم فضا پرکن خمی است در R^2 که از هر نقطه مربع یک $[0, 1] \times [0, 1]$ می‌گذرد. پتانو (۱۸۹۵) اولین کسی بود که مثالی برای این نوع خمها عرضه کرد. مثالی که در این جا می‌آوریم از شبرگ^۲ است و بدین صورت توصیف می‌شود:

1. Peano

2. I. J. Schoenberg (Bulletin of the American Mathematical Society, 1938)

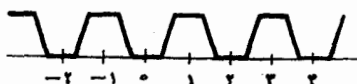
فرض کنیم φ بر بازه $[0, 2]$ با دستورهای زیرین تعریف شده باشد:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ اگر } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \text{ یا } \frac{5}{3} \leq t \leq 2 \\ 3t - 1 & , \text{ اگر } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & , \text{ اگر } \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3} \\ -3t + 5 & , \text{ اگر } \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

تعریف φ را به تمام R با معادله زیر وسعت می‌دهیم:

$$\varphi(t + 2) = \varphi(t).$$

در نتیجه φ تابعی متناوب با دوره تناوب ۲ می‌شود. (نمودار φ در شکل ۵.۹ نشان داده شده است.)



شکل ۵.۹

حال دو تابع f_1 و f_2 را با معادله‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-2}t)}{2^n}, \quad f_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n-1}t)}{2^n}.$$

هردورشته بالا به‌ازای هر t حقیقی همگرای مطلق هستند و بر R همگرای یک‌شکل می‌باشند. درواقع، چون به‌ازای هر t ، $|\varphi(t)| \leq 1$ ، می‌توان آزمون M و ایراشتراس را به‌ازای $M_n = 2^{-n}$ بکار برد. چون φ بر R پیوسته است، بنا بر قضیه ۷.۹، f_1 و f_2 نیز بر R پیوسته خواهند بود. فرض کنیم $f = (f_1, f_2)$ و Γ نقش بازه یکه $[0, 1]$ با f باشد. نشان می‌دهیم که Γ مربع یکه را «پر» می‌کند؛ یعنی، $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$.

اولاً، واضح است که به‌ازای هر t ، $0 \leq f_1(t) \leq 1$ و $0 \leq f_2(t) \leq 1$ ، زیرا $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. پس Γ یک زیرمجموعه مربع یکه است. حال، باید نشان داد که هرگاه $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ، آنگاه $(a, b) \in \Gamma$. برای این منظور a و b را در دستگاه عددها در پایه دو بیان می‌کنیم. یعنی، می‌نویسیم

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

که در آنها هر a_n و هر b_n مساوی ۰ یا ۱ است. (ر.ک. تمرین ۰۲۲۰۱) حال قرار می‌دهیم

$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \quad \text{که در آن } c_{2n} = b_n \text{ و } c_{2n-1} = a_n, n=1, 2, \dots$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = 1$ ، پس واضح است که $0 \leq c \leq 1$. نشان می‌دهیم که $f_2(c) = b$ و $f_1(c) = a$ هرگاه بتوان ثابت کرد که

$$(5) \quad \varphi(3^k c) = c_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

آنگاه خواهیم داشت $\varphi(3^{2n-1}c) = c_{2n-1} = a_n$ و $\varphi(3^{2n}c) = c_{2n} = b_n$ و از اینها دو رابطه $f_2(c) = b$ و $f_1(c) = a$ نتیجه خواهند شد. برای اثبات (5)، می‌نویسیم

$$3^k c = 2 \sum_{n=1}^k \frac{c_n}{3^{n-k}} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} = d_k + (عددی صحیح و زوج)$$

که در آن $d_k = 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k} / 3^n$. چون φ دارای دوره تناوب ۲ است، پس

$$\varphi(3^k c) = \varphi(d_k).$$

هرگاه $c_{k+1} = 0$ ، آنگاه $1/3 \leq d_k \leq 2 \sum_{n=2}^{\infty} 3^{-n} = 1/3$ ، و در نتیجه $\varphi(d_k) = 0$. بنا بر این، در این حالت $\varphi(3^k c) = c_{k+1}$ تنها حالتی می‌ماند که $c_{k+1} = 1$ در این حالت $2/3 \leq d_k \leq 1$ ، و در نتیجه $\varphi(d_k) = 1$ پس در همه حال $\varphi(3^k c) = c_{k+1}$ و این ثابت می‌کند که $f_2(c) = b$ و $f_1(c) = a$. از این روی، Γ مربع بیکه را پر می‌کند.

۸.۹ همگرایی یکشکل و انتگرالگیری ریمان - اشتیل یس

قضیه ۸.۹ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد، و نیز هر جمله دنباله $\{f_n\}$ تابعی حقیقی باشد بقسمی که به‌ازای هر $n = 1, 2, \dots$ $f_n \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ باشد. بعلاوه $f_n \rightarrow f$ به‌طوری‌یکشکل بر $[a, b]$. اگر $x \in [a, b]$ ، $n = 1, 2, \dots$ تعریف می‌کنیم $g_n(x) = \int_a^x f_n(t) d\alpha(t)$ در این صورت:

(آ) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

(ب) هرگاه $g(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t)$ ، آنگاه $g_n \rightarrow g$ به‌طوری‌یکشکل بر $[a, b]$.

بصورت. بنا براین، به ازای هر x در $[a, b]$ ، می‌توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) d\alpha(t).$$

این خاصیت را معمولاً این‌طور توصیف می‌کنند که از یک دنباله همگرای یکشکل می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

پروهان. می‌توان فرض کرد که α صعودی باشد و $\alpha(a) < \alpha(b)$. برای اثبات (آ)، نشان می‌دهیم که f در شرط ریمان بر حسب α بر $[a, b]$ صدق می‌کند. (ر. ک. قضیه ۱۹.۷)

به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3[\alpha(b) - \alpha(a)]} \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } [a, b]$$

در این صورت، به ازای هر افراز $[a, b]$ مانند P ، داریم

$$|L(P, f - f_N, \alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad |U(P, f - f_N, \alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

(در اینجا نمادهای تعریف ۱۴.۷ بکار گرفته شده‌اند). برای این P_ε, N را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر P از P_ε ظریفتر باشد،

$$U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha) < \varepsilon/3.$$

در این صورت، به ازای این چنین P هائی، داریم

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \leq U(P, f - f_N, \alpha) - L(P, f - f_N, \alpha) + U(P, f_N, \alpha) - L(P, f_N, \alpha)$$

$$< |U(P, f - f_N, \alpha)| + |L(P, f - f_N, \alpha)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

این ثابت می‌کند که (آ) برقرار است. برای اثبات (ب)، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد و N را بقسمی اختیار می‌کنیم که به ازای هر $n > N$ و هر t در $[a, b]$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[\alpha(b) - \alpha(a)]}.$$

اگر $x \in [a, b]$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| d\alpha(t) \\ &\leq \frac{\alpha(x) - \alpha(a)}{\alpha(b) - \alpha(a)} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

این ثابت می‌کند که $g_n \rightarrow g$ به طور یکشکل بر $[a, b]$.

قضیه ۹.۹ فرض کنیم α بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. همچنین،

$$\sum f_n(x) = f(x)$$

به طوری که $f_n \in R(\alpha)$ و f تابعی حقیقی، در $[a, b]$ باشد. در این صورت:

(آ) $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ است.

(ب) $\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) d\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) d\alpha(t)$ (به طوری که یکشکل بر $[a, b]$).

پروهان. قضیه ۸.۹ را در مورد دنبالهٔ مجموعهای جزئی بکار برید.

تبره. این قضیه را این طور توصیف می‌کنند که در یک رشته همگرایی یکشکل می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت.

۹.۹ دنباله‌هایی که همگرایی آنها یکشکل نیست ولی می‌توان از آنها جمله به جمله انتگرال گرفت

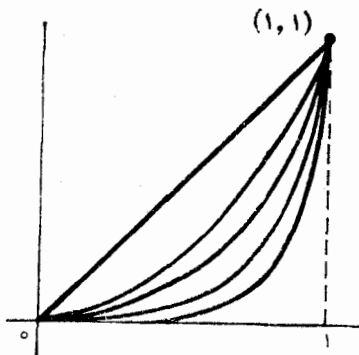
همگرایی یکشکل شرطی کافی برای انتگرالگیری جمله به جمله است، ولی، همان طور که در مثال زیر دیده می‌شود، این شرط لازم نیست.

مثال) فرض می‌کنیم اگر $0 \leq x \leq 1$ ، $f_n(x) = x^n$ (ر. ک. شکل ۶.۹). مقدار تابع حد f در هر نقطهٔ $[0, 1]$ صفر است و $f(1) = 1$ چون $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته با حد ناپیوسته است، پس همگرایی آن بر $[0, 1]$ یکشکل نخواهد بود. با وجود این، در این دنباله می‌توان بر $[0, 1]$ جمله به جمله انتگرال گرفت. در حقیقت،

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$$

پس



شکل ۶.۹

دنباله‌ای که در این مثال دیده‌شد، اگرچه بر $[0, 1]$ همگرایی یکشکل نیست، ولی همین دنباله بر هر زیر بازه بسته $[0, 1]$ که حاوی یک نباشد همگرایی یکشکل است. قضیه زیر مجوزی کلی برای انتگرالگیری جمله به جمله در این گونه مثالهاست. فرض اضافی این است که $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ کراندار یکشکل، و تابع حد f انتگرالپذیر باشد.

تعریف ۱۰.۹ دنباله $\{f_n\}$ از تابعها را بر T همگرایی کراندار گونیم در صورتی که $\{f_n\}$ بر T همگرایی نقطه‌و‌اد و کراندار یکشکل باشد.

قضیه ۱۱.۹ فرض کنیم دنباله $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی کراندار باشد. و نیز هر $f_n \in R$ بر $[a, b]$ باشد، و تابع حد $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد. همچنین یک افراز $[a, b]$ مانند P ، مثلاً

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

وجود داشته باشد قسمی که دنباله $\{f_n\}$ بر هر زیر بازه $[a, b]$ چون $[c, d]$ ، که حاوی هیچ یک از x_k ها نباشد، به f همگرایی یکشکل باشد. در این صورت،

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

برهان. چون f کراندار، و $\{f_n\}$ کراندار یکشکل است، پس عددی مثبت مانند M هست قسمی که به ازای هر x در $[a, b]$ و هر $n \geq 1$ و $|f(x)| \leq M$ و $|f_n(x)| \leq M$ اگر $\varepsilon > 0$ مفروض قسمی باشد که $\|p\| < \varepsilon$ ، قرار

می‌دهیم $h = \varepsilon / (2m)$ ، که در آن m تعداد زیر بازه‌های P است. افراز جدید P' را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P' = \{x_0, x_0 + h, x_1 - h, x_1 + h, \dots, x_{m-1} - h, x_{m-1} + h, x_m - h, x_m\}.$$

چون $|f - f_n|$ بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر، و به $2M$ کراندار است، پس مجموع انتگرال‌های $|f - f_n|$ روی بازه‌های

$$[x_0, x_0 + h], [x_1 - h, x_1 + h], \dots, [x_{m-1} - h, x_{m-1} + h], [x_m - h, x_m]$$

حداکثر مساوی $2M(2mh) = 2M\varepsilon$ خواهد بود. قسمت باقیمانده $[a, b]$ (آن را S می‌نامیم) مساوی اجتماع تعدادی متناهی بازه بسته است، که در هر یک از آنها $\{f_n\}$ همگرایی یکشکل به f می‌باشد. بنابراین، عددی صحیح مانند N (فقط تابع ε) هست بقسمی که به ازای هر x در S ،

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{هرگاه } n \geq N$$

از این روی، مجموع انتگرال‌های $|f - f_n|$ روی بازه‌های موجود در S حداکثر مساوی $\varepsilon(b - a)$ می‌باشد. پس

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (2M + b - a)\varepsilon \quad \text{هرگاه } n \geq N$$

این ثابت می‌کند که وقتی که $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

در این مورد، قضیه‌ای متناسب به آرزو، قویتر از قضیه گذشته وجود دارد، که در آن به همگرایی یکشکل اشاره‌ای نشده است:

قضیه ۱۲.۹ (آرزو). فرض کنیم $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی کراندار باشد، و هر f_n بر $[a, b]$ دارای انتگرال ریمان باشد. همچنین، تابع حد f نیز بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. در این صورت،

$$(۷) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

اثبات قضیه آرزو به طور قابل ملاحظه‌ای از قضیه ۱۱.۹ مشکلتر است، و در

این‌جا گفته نخواهد شد. در فصل آینده قضیه‌ای را دربارهٔ انتگرالهای لگ ثابت می‌کنیم که قضیهٔ آرزلا حالت خاصی از آن است. (ر. ک. قضیهٔ ۲۹.۱۰)

نصرد. بآسانی می‌توان مثالی از یک دنبالهٔ همگرای کراندار $\{f_n\}$ نشان داد که هر جملهٔ آن انتگرال ریمان داشته باشد اما تابع حد آن، یعنی f ، دارای انتگرال ریمان نباشد. اگر $\{r_1, r_2, \dots\}$ مجموعهٔ عددهای گویا در $[0, 1]$ باشد، $f_n(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر n ، $k = 1, 2, \dots$ ، اگر $x = r_k$ ، $f_n(x)$ را مساوی ۱ قرار می‌دهیم، والا $f_n(x) = 0$. در این صورت، به‌ازای هر n ، $\int_0^1 f_n(x) dx = 0$ ولی تابع حد نقطه‌وار این دنباله، یعنی f ، بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.

۱۰.۹ همگرایی یکشکل و مشتگیری

شاید با قیاس به قضیه‌های ۲.۹ و ۸.۹ انتظار رود که نتیجهٔ زیر برقرار باشد: هرگاه $f \rightarrow f_n$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$ ، و هرگاه به‌ازای هر n ، f'_n وجود داشته باشد، آنگاه f' وجود دارد و $f' \rightarrow f'_n$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$. اما، مثال ۳ بخش ۲.۹ نشان می‌دهد که چنین نتیجه‌ای نمی‌تواند درست باشد. اگر چه دنبالهٔ $\{f_n\}$ مثال ۳ بر \mathbf{R} همگرایی یکشکل است، ولی دنبالهٔ $\{f'_n\}$ حتی نقطه‌وار نیز بر \mathbf{R} همگرا نیست. مثلاً، دنبالهٔ $\{f'_n(0)\}$ واگرا است زیرا $f'_n(0) = \sqrt{n}$. بنا بر این، نظایر قضیه‌های ۲.۹ و ۸.۹ برای مشتگیری باید شکل دیگری داشته باشند.

قضیهٔ ۱۳.۹ فرض کنیم هر جملهٔ $\{f_n\}$ تابعی حقیقی بوده، در هر نقطهٔ بازهٔ $[a, b]$ مشتق متناهی داشته باشد. و نیز به‌ازای دست‌کم یک نقطهٔ در $[a, b]$ مانند x_0 دنبالهٔ $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد. بعلاوه، تابعی مانند g باشد قسمی که $f'_n \rightarrow g$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$ در این صورت:

(آ) تابعی مانند f وجود دارد قسمی که $f \rightarrow f_n$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$.
 (ب) به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $f'(x)$ وجود دارد و مساوی $g(x)$ است.

پروهان. فرض می‌کنیم $[a, b]$ ، $c \in [a, b]$ و دنبالهٔ جدید $\{g_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۸) \quad g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} & , \quad x \neq c \text{ اگر} \\ f'_n(c) & , \quad x = c \text{ اگر} \end{cases}$$

دنبالهٔ $\{g_n\}$ بستگی به انتخاب نقطهٔ c دارد. چون $g_n(c) = f'_n(c)$ پس همگرایی

$\{g_n(c)\}$ از فرض نتیجه می‌شود. حال ثابت می‌کنیم که $\{g_n\}$ بر $[a, b]$ همگرای یکشکل است. اگر $x \neq c$ داریم

$$(9) \quad g_n(x) - g_m(x) = \frac{h(x) - h(c)}{x - c},$$

که در آن $h(x) = f_n(x) - f_m(x)$. به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $h'(x)$ وجود دارد و مساوی $f'_n(x) - f'_m(x)$ است. با بکار بردن قضیه مقدار میانگین در (۹)، نتیجه می‌شود که

$$(10) \quad g_n(x) - g_m(x) = f'_n(x_1) - f'_m(x_1),$$

که در آن x_1 بین x و c قرار دارد. چون بنا بر فرض $\{f'_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی یکشکل است، می‌توان با استفاده از (۱۰) و شرطکشی (قضیه ۳.۹) نتیجه گرفت که $\{g_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی یکشکل می‌باشد.

اینک می‌توان نشان داد که $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ همگرایی یکشکل است. دنباله خاص $\{g_n\}$ را برای نقطه بخصوص $c = x_0$ تشکیل می‌دهیم. می‌دانیم که $\{f_n(x_0)\}$ همگرا فرض شده است. از رابطه (۸) می‌توان نوشت

$$f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)g_n(x),$$

که معادله‌ای است که به‌ازای هر x در $[a, b]$ برقرار است. از این روی، داریم $f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)[g_n(x) - g_m(x)]$. از این معادله و شرطکشی همگرایی یکشکل $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ نتیجه می‌شود. پس (آ) برقرار است.

برای اثبات (ب)، بدنباله $\{g_n\}$ ، که به‌ازای نقطه دلخواه c در $[a, b]$ با رابطه (۸) تعریف شده است، باز می‌گردیم و قرار می‌دهیم $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$. فرض این که f'_n وجود دارد بدین معنی است که $\lim_{x \rightarrow c} g_n(x) = g_n(c)$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، هر g_n در c پیوسته است. چون $g_n \rightarrow G$ به‌طور یکشکل بر $[a, b]$ ، پس تابع حد G نیز در c پیوسته خواهد بود. یعنی

$$(11) \quad G(c) = \lim_{x \rightarrow c} G(x),$$

که در آن وجود حد مذکور قسمتی از نتیجه بدست آمده است. اما، به‌ازای $x \neq c$ ، داریم

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

از این روی، بنا بر (۱۱)، $f'(c)$ وجود دارد و مساوی $G(c)$ است. ولی

$$G(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c),$$

در نتیجه $f'(c) = g(c)$. چون c یک نقطه دلخواه $]a, b[$ است، پس (ب) برقرار می‌باشد.

اگر قضیه ۱۳.۹ را برای رشته‌ها مجدداً تنظیم کنیم، خواهیم داشت

قضیه ۱۴.۹ فرض کنیم هر تابع حقیقی f_n بر بازه $]a, b[$ تعریف شده باشد بقسمی که به ازای هر $x \in]a, b[$ ، $f'_n(x)$ وجود داشته باشد. و نیز به ازای دست کم یک نقطه $x_0 \in]a, b[$ مانند x_0 ، داشته $\sum f_n(x_0)$ همگرا باشد. بعلاوه، تابعی مانند g وجود داشته باشد بقسمی که $\sum f'_n(x) = g(x)$ (به طوری که شکل بر $]a, b[$) در این صورت:

(آ) تابعی مانند f وجود دارد بقسمی که $\sum f_n(x) = f(x)$ (به طوری که شکل بر $]a, b[$)

(ب) اگر $x \in]a, b[$ ، $f'(x)$ وجود دارد و مساوی $\sum f'_n(x)$ است.

۱۱.۹ شرطهای کافی برای همگرایی یک رشته

برخی از قضیه‌هایی که دیدیم به قدر کافی اهمیت همگرایی یک شکل را مصور ساخته‌اند. بنا بر این، طبیعی است که برای احتراز از مراجعه به تعریف در هر مورد، آزمونهای ساده برای آزمایش همگرایی یک شکل پیدا کنیم. یکی از این آزمونها آزمون M و ایراشتراس است، که در قضیه ۶.۹ توصیف شد. آزمونهای دیگری نیز وجود دارند که ممکن است برای حالت‌هایی که آزمون M و ایراشتراس را نتوان بکار برد مفید باشند. یکی از این آزمونها شبیه قضیه ۲۸.۸ است.

قضیه ۱۵.۹ (آزمون دیریکله برای همگرایی یک شکل). فرض کنیم $\sum f_n(x)$ هر f_n تابعی باشد مختلط که بر مجموعه S تعریف شده باشد، و $F_n(x)$ مجموع جزئی n آن باشد. همچنین، $\{F_n\}$ بر S کراندار یک شکل باشد. بعلاوه، دنباله‌ای $\{g_n\}$ باشد از تابعهای حقیقی بقسمی که به ازای هر $x \in S$ و هر

$$g_n \rightarrow 0 \text{ و } g_{n+1}(x) \leq g_n(x), n = 1, 2, \dots$$

به طوری که شکل بر S در این صورت، داشته $\sum f_n(x) g_n(x)$ بر S همگرای یک شکل است.

پرهان. قرار می‌دهیم $g_k(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ با توجه به دستور جمع‌بندی

جزئی، خواهیم داشت

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x) F_n(x),$$

و در نتیجه اگر $n > m$ ، می‌توان نوشت

$$s_n(x) - s_m(x) = \sum_{k=m+1}^n F_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + g_{n+1}(x)F_n(x) - g_{m+1}(x)F_m(x).$$

بنابراین، اگر M یک کران یکشکل برای $\{F_n\}$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} |s_n(x) - s_m(x)| &\leq M \sum_{k=m+1}^n (g_k(x) - g_{k+1}(x)) + M g_{n+1}(x) \\ &+ M g_{m+1}(x) = M(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) \\ &+ M g_{n+1}(x) + M g_{m+1}(x) = 2M g_{m+1}(x). \end{aligned}$$

چون $g_n \rightarrow 0$ به‌طور یکشکل بر S ، از این نامساوی (با انضمام شرط‌کشی) نتیجه می‌شود که $\sum f_n(x)g_n(x)$ بر S همگرای یکشکل است.

خواننده می‌تواند بدون هیچ اشکال قضیه ۲۹.۸ (آزمون آبل) را به‌طریقی مشابه وسعت داده، آزمونی برای همگرایی یکشکل بدست آورد. (تمرین ۱۳.۹).

مثال. فرض می‌کنیم $F_n(x) = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$. در فصل گذشته (ر. ک. قضیه ۳۰.۸)، نامساوی $|F_n(x)| \leq 1/|\sin(x/2)|$ را بدست آوردیم، که به ازای هر عدد حقیقی $x \neq 2m\pi$ (m عددی است صحیح) معتبر است. بنابراین، اگر $0 < \delta < \pi$ ، تخمین زیر را خواهیم داشت:

$$|F_n(x)| \leq 1/\sin(\delta/2), \quad \delta \leq x \leq 2\pi - \delta$$

از این روی، $\{F_n\}$ بر بازه $[\delta, 2\pi - \delta]$ کراندار یکشکل است. اگر $\{g_n\}$ در شرطهای قضیه ۱۵.۹ صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که رشته $\sum g_n(x)e^{inx}$ بر $[\delta, 2\pi - \delta]$ همگرای یکشکل است. در حالت خاص که $g_n(x) = 1/n$ ، اگر $0 < \delta < \pi$ ، همگرایی یکشکل رشته

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$$

بر $[\delta, 2\pi - \delta]$ نتیجه می‌شود. ملاحظه می‌شود که چون $|e^{inx}| = 1$ ، آزمون M

و ایراشتراس را نمی‌توان در این حالت برای اثبات همگرایی یکشکل رشته بالا بکار برد.

۱۲.۹ همگرایی یکشکل و دنباله‌های مضاعف

قضیه زیرین درباره دنباله‌های مضاعف، که می‌توان آن را به‌عنوان عکسی از قضیه ۳۹.۸ دانست، نمونه متفاوت دیگری است از کاربرد همگرایی یکشکل.

قضیه ۱۶.۹ فرض کنیم f دنباله‌ای مضاعف باشد، و Z^+ مجموعه عددهای صحیح مثبت‌دا نشان دهد. به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ تابع g_n را بر Z^+ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_n(m) = f(m, n), \quad m \in Z^+$$

فرض کنیم $g \rightarrow g_n$ به طوری که Z^+ که در آن $g(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(m, n)$ هرگاه عدم کرد $(\lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f(m, n)))$ وجود داشته باشد، آنگاه عدم مضاعف $\lim_{m, n \rightarrow \infty} f(m, n)$ نیز وجود دارد و با آن مساوی است.

برهان. در مقابل هر $\varepsilon > 0$ داده شده، N_1 را بقسمی اختیار می‌کنیم که اگر $n > N_1$

$$|f(m, n) - g(m)| < \varepsilon/2, \quad m \in Z^+$$

فرض کنیم $a = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f(m, n)) = \lim_{m \rightarrow \infty} g(m)$ همان ε ، N_2 را بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$|g(m) - a| < \varepsilon/2, \quad m > N_2$$

در این صورت، اگر N از N_1 و N_2 بزرگتر باشد، وقتی که هم $m > N$ و هم $n > N$ داریم $|f(m, n) - a| < \varepsilon$ با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} f(m, n) = a.$$

۱۳.۹ همگرایی میانگینی

در این بخش تابعها یا حقیقی هستند یا مختلط.

تعریف ۱۷.۹ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که هر یک بر بازه $[a, b]$ تعریف شده و بر آن انتگرال رییمان داشته باشد. همچنین $f \in R$ بر $[a, b]$ باشد.

گوئیم دنباله $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ به طرد میانگینی به f همگرا است، و می نویسیم

$$l.i.m. f_n = f \text{ بر } [a, b] \text{ است،}$$

در صورتی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

هرگاه به ازای هر x در $[a, b]$ نامساوی $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ برقرار باشد، آنگاه $\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2(b-a)$. بنابراین، از همگرایی یکشکل $\{f_n\}$ به f بر $[a, b]$ همگرایی میانگینی آن نتیجه می شود، بشرط آن که هر f_n بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. مطلبی که تا حدی تعجب آور است این است که از همگرایی میانگینی لزوماً همگرایی نقطه‌وار در هر نقطه از بازه را نمی توان نتیجه گرفت. برای اثبات آن به صورت زیر عمل می کنیم: به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، بازه $[0, 1]$ را به 2^n زیربازه مساوی تقسیم می کنیم، و فرض می کنیم I_k^{n+1} زیر بازه‌ای را نشان دهد که نقطه انتهایی راست آن $(k+1)/2^n$ باشد. بدین ترتیب دسته $\{I_1, I_2, \dots\}$ از زیربازه‌های $[0, 1]$ حاصل می شود، که چند عضو اول آن به صورت زیرند:

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_2 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_3 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \\ I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],$$

و مانند اینها. تابع f_n را بر $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in I_n \\ 0 & \text{اگر } x \in [0, 1] - I_n \end{cases}$$

چون $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ مساوی درازای I_n است، و وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، این درازا به صفر می گراید، پس $\{f_n\}$ به طور میانگینی به 0 همگرا خواهد بود. از سوی دیگر، به ازای هر x در $[0, 1]$ ،

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{و} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$$

[چرا؟] از این روی، به‌ازای هر x در $[0, 1]$ ، $\{f_n(x)\}$ همگرا نیست.

قضیهٔ زیرین اهمیت همگرایی میانگینی را مصور می‌سازد.

قضیهٔ ۱۸.۹ فرض کنیم $f_n = f$ ل.ی.م. $n \rightarrow \infty$ بر $[a, b]$ باشد، اگر $g \in R$ بر $[a, b]$ باشد، تعریف می‌کنیم:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t) g(t) dt \quad x \in [a, b] \text{ به‌ازای}$$

$$h(x) = \int_a^x f(t) g(t) dt.$$

در این صورت، $h_n \rightarrow h$ به‌طور یک‌شکل بر $[a, b]$ برهان. برهان براساس نامساوی زیرین قرار دارد:

$$(12) \quad 0 \leq \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)| |g(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_a^x |f(t) - f_n(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^x |g(t)|^2 dt \right).$$

این نامساوی کاربرد مستقیمی از نامساوی کوشی-شوارتز است در مورد انتگرالها. (برای ملاحظهٔ نامساوی کوشی-شوارتز و شرح مختصری از برهان آن، ر.ک. تمرین ۰.۱۶.۷) به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N را می‌توان بقسمی اختیار کرد که به‌ازای $n > N$

$$(13) \quad \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{A},$$

که در آن $A = 1 + \int_a^b |g(t)|^2 dt$ اگر (۱۳) را در رابطهٔ (۱۲) قرار دهیم، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n > N$ و هر x در $[a, b]$ ،

$$0 \leq |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon.$$

قضیهٔ بالا مخصوصاً در نظریهٔ رشته‌های فوریه مفید است. (ر.ک. قضیهٔ ۰.۱۶.۱۱)

قضیهٔ زیر تعمیمی از قضیهٔ بالا است و این نیز نتیجه سودمندی است.

قضیهٔ ۱۹.۹ فرض کنیم $f_n = f$ ل.ی.م. $n \rightarrow \infty$ و $g_n = g$ ل.ی.م. $n \rightarrow \infty$ بر $[a, b]$ باشند، تعریف می‌کنیم:

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t) g_n(t) dt, \quad x \in [a, b] \text{ به‌ازای}$$

$$h(x) = \int_a^x f(t) g(t) dt.$$

در این صورت، $h_n \rightarrow h$ به طوری یکشکل بر $[a, b]$ برهان. داریم.

$$h_n(x) - h(x) = \int_a^x (f - f_n)(g - g_n) dt + \left(\int_a^x f_n g dt - \int_a^x f g dt \right) + \left(\int_a^x f g_n dt - \int_a^x f g dt \right).$$

با بکار بردن نامساوی کشی-شوارتز، می توان نوشت

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\int_a^x |f - f_n| |g - g_n| dt \right)^2 \\ &\leq \left(\int_a^b |f - f_n|^2 dt \right) \left(\int_a^b |g - g_n|^2 dt \right). \end{aligned}$$

حال می توان قضیه را با آسانی از قضیه ۱۸.۹ نتیجه گرفت.

۱۴.۹ رشته های توانی

رشته ای نامتناهی به شکل

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

یا به صورت مختصرتر

$$(۱۴) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

را یک رشته توانی بر حسب $(z - z_0)$ می نامند. در این جا z_0 ، z ، و a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) عددهائی مختلط هستند. به هر رشته توانی به صورت (۱۴) گرده ای به نام گرده همگرایی مربوط می شود. این رشته به ازای هر z درون این گرده همگرایی مطلق است و به ازای هر z خارج آن واگرا است. مرکز این گرده در z_0 است و شعاع آن را شعاع همگرایی رشته توانی می نامند. (شعاع همگرایی ممکن است 0 یا $+\infty$ نیز باشد.) قضیه زیر موجودیت گرده همگرایی را تصریح نموده، راه محاسبه شعاع آن را نشان می دهد.

قضیه ۲۰.۹ (شعاع توانی) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ داده شده است. فرض کنیم

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{\lambda},$$

(که در آنها اگر $\lambda = +\infty$ ، $r = 0$ ، و اگر $\lambda = 0$ ، $r = +\infty$) در این صورت، اگر $|z - z_0| < r$ داشته همگرایی مطلق است، و اگر $|z - z_0| > r$ داشته دیگر خواهد بود. بعلاوه، داشته بر هر زیر مجموعه فشرده درون گرده همگرایی همگرایی یکشکل است.

پرهان. با بکار بردن آزمون ریشه (قضیه ۲۶۰۸)، داریم

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{r},$$

و در نتیجه اگر $|z - z_0| < r$ ، $\sum a_n(z - z_0)^n$ همگرایی مطلق است، و اگر $|z - z_0| > r$ ، این رشته و اگر خواهد بود.

برای اثبات دومین مطلب، ملاحظه می‌کنیم که اگر T یک زیر مجموعه فشرده گرده همگرایی باشد، نقطه‌ای مانند p در T هست قسمی که به‌ازای هر $z \in T$ ،

$$|z - z_0| \leq |p - z_0| < r.$$

از این روی، به‌ازای هر z در T ، $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n(p - z_0)^n|$ ، و در نتیجه می‌توان آزمون M و ایراشتراس را بکار برد.

تسره. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$ وجود داشته باشد (یا اگر این حد مساوی $+\infty$ باشد)، مقدار آن مساوی شعاع همگرایی رشته (۱۴) نیز خواهد بود. (ر. ک. تمرین ۰۳۰۹)

مثال ۱ دو رشته $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ و $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ دارای یک شعاع همگرایی‌اند، یعنی، برای هر دو r مساوی یک است. بر کرانه گرده همگرایی، رشته اولی در هیچ نقطه همگرا نیست و رشته دومی در همه‌جا همگرا است.

مثال ۲ رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ دارای شعاع همگرایی $r = 1$ است، ولی در $z = 1$ همگرا نیست. اما، بنا بر آزمون دیریکله (قضیه ۲۸۰۸)، این رشته همه‌جای دیگر کرانه گرده همگرایی همگرا است.

این مثالها مصور می‌سازند که چرا قضیه ۲۵۰۹ در باره رفتار یک رشته توانی بر کرانه گرده همگرایی آن اطلاعاتی بدست نمی‌دهد.

قضیه ۲۱۰۹ فرض کنیم رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ به‌ازای هر z در $B(z_0; r)$ همگرا باشد. در این صورت، تابع f تعریف شده با معادله

$$(15) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0; r),$$

بر $B(z_0; r)$ پیوسته است.

برهان. چون هر نقطه در $B(z_0; r)$ به یکی از زیرمجموعه‌های فشرده $B(z_0; r)$ تعلق دارد، پس قضیه را می‌توان بی‌درنگ از قضیه ۷.۹ نتیجه گرفت.

بصره. گوئیم رشته مذکور در (۱۵)، f را در $B(z_0; r)$ نمایش می‌دهد. همچنین، این رشته را یک بسط f به صورت رشته توانی حول z_0 نیز می‌نامند. تابعهائی که دارای بسط به صورت رشته توانی باشند، در داخل گرده همگرایی خود پیوسته‌اند. یک چنین تابعه دارای خاصیت قویتر از این هستند. بعداً ثابت می‌کنیم که این تابعه در داخل گرده همگرایی خود از هر مرتبه مشتق دارند. در اثبات این مطلب از قضیه زیر استفاده می‌شود:

قضیه ۲۲.۹ فرض کنیم $\sum a_n(z - z_0)^n$ به ازای هر $z \in B(z_0; r)$ همگرا باشد. همچنین، معادله

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

به ازای هر z در یک زیرمجموعه باز $B(z_0; r)$ مانند S ، معتبر باشد. در این صورت، به ازای هر z_1 در S ، یک همسایگی مانند $S \subseteq B(z_1; R)$ هست که در آن f دارای بسط به صورت رشته توانی به شکل زیر خواهد بود:

$$(16) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k,$$

که در آن

$$(17) \quad b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

برهان. اگر $z \in S$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1 + z_1 - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k), \end{aligned}$$

که در آن

$$c_n(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} a_n (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} & \text{اگر } k \leq n \\ 0 & \text{اگر } k > n \end{cases}$$

حال R را بقسمی اختیار می‌کنیم که $B(z_1; R) \subseteq S$ ، و فرض می‌کنیم که $z \in B(z_1; R)$ در این صورت، رشته مکرر $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k)$ همگرای مطلق است، زیرا

$$(18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_n(k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (z_2 - z_0)^n,$$

که در آن

$$z_2 = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|.$$

اما

$$|z_2 - z_0| < R + |z_1 - z_0| \leq r,$$

و در نتیجه رشته مذکور در (۱۸) همگرا است. بنابراین، بنا براین، بنا بر قضیه ۴۳۰.۸، می‌توان ترتیب جمع‌بندی را عوض کرد. از این عمل نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k,$$

که در آن b_k با رابطه (۱۷) داده شده است. بدین ترتیب برهان قضیه تمام است. تبصره. در برهان بالا نشان داده شده است که این نتیجه برای هر $R > 0$ که به‌ازای آن

$$(19) \quad B(z_1; R) \subseteq S$$

نیز برقرار است.

قضیه ۴۳۰.۹ فرض کنیم $\sum a_n (z - z_0)^n$ به‌ازای هر z در $B(z_0; r)$ همگرا باشد. در این صورت، اگر

$$(20) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0; r)$$

به‌ازای هر z در $B(z_0; r)$ وجود داده، و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(21) \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

تبره. رشته‌های مذکور در (۲۰) و (۲۱) هر دو دارای یک شعاع همگرایی می‌باشند.

پرهان. فرض کنیم $z_1 \in B(z_0; r)$ ، و همان‌طور که در (۱۶) نشان داده شده است، f را به صورت یک رشته توانی حول z_1 بسط می‌دهیم. در این صورت، اگر $z \in B(z_1; R)$ و $z \neq z_1$ ، خواهیم داشت

$$(22) \quad \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = b_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1} (z - z_1)^k.$$

بنابر خاصیت پیوستگی، عضو طرف راست (۲۲)، وقتی که $z \rightarrow z_1$ ، به b_1 می‌گراید. از این روی، $f'(z_1)$ وجود دارد و مساوی b_1 است. اگر از رابطه (۱۷) برای محاسبه b_1 استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z_1 - z_0)^{n-1}.$$

چون z_1 یک نقطه دلخواه $B(z_0; r)$ است، پس رابطه (۲۱) برقرار می‌باشد. هر دو رشته دارای یک شعاع همگرایی اند زیرا وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

تبره. با بکار بردن مکرر (۲۱)، نتیجه می‌شود که به ازای هر $k = 1, 2, \dots$ ، $f^{(k)}(z)$ در $B(z_0; r)$ وجود دارد و با رشته زیر بدست می‌آید:

$$(23) \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

اگر در رابطه (۲۳) قرار دهیم $z = z_0$ ، دستور مهم زیرین حاصل می‌شود:

$$(24) \quad f^{(k)}(z_0) = k! a_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

بنابر معادله بالا، هرگاه دو رشته توانی $\sum a_n (z - z_0)^n$ و $\sum b_n (z - z_0)^n$ هر دو در یک همسایگی مانند $B(z_0; r)$ یک تابع را نمایش دهند، آنگاه به ازای هر n ، $a_n = b_n$ ، یعنی، بسط تابع f به صورت رشته توانی حول نقطه داده شده z_0 (در صورت وجود) منحصر به فرد است، و با دستور زیر داده می‌شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

این دستور به ازای هر z واقع در گرده همگرایی معتبر است.

۱۵.۹ ضرب رشته‌های توانی

قضیه ۲۴.۹ دو بسط به صورت رشته توانی حول مبدأ، یعنی

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in B(0; r),$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in B(0; R)$$

داده شده‌اند. در این صورت، حاصل ضرب $f(z)g(z)$ از رشته توانی زیر بدست می‌آید:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in B(0; r) \cap B(0; R) \text{ اگر}$$

که در آن

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

برهان. حاصل ضرب کشی دو رشته داده شده به صورت زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

و حکم قضیه با استفاده از قضیه ۴۶.۸ (قضیه مرتنس) حاصل می‌شود. تبصره. اگر دو رشته مورد بحث با هم مساوی باشند، خواهیم داشت

$$f(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

که در آن $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{m_1+m_2=n} a_{m_1} a_{m_2}$ علامت $\sum_{m_1+m_2=n}$ نشان می‌دهد که جمع‌بندی روی همه عددهای صحیح نامنفی m_1 و m_2 گرفته شده است که مجموع آنها مساوی n باشد. به همین نحو، به ازای هر عدد صحیح $p > 0$ داریم

$$f(z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(p) z^n,$$

که در آن

$$c_n(p) = \sum_{m_1+\dots+m_p=n} a_{m_1} \cdots a_{m_p}.$$

۱۶.۹ قضیه جا نشانی

قضیه ۲۵.۹ فرض کنیم دو بسط به صورت (دشته) توانی حول مبدأ، مثلاً

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in B(0; r)$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in B(0; R),$$

داده شده باشند. هرگاه به ازای یک مقدار ثابت z در $B(0; R)$ داشته باشیم $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$ ، می توان نوشت

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

که در آن ضریبهای c_k به صورت زیر بدست می آیند: هرگاه $b_k(n)$ ها با معادله

$$g(z)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n) z^k$$

تعریف شوند، آنگاه به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)$ ،

تصور. رشته $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ رشته ای است توانی، که به طور صوری چنین بدست می آید که در بسط f به جای z رشته نمایش دهنده $g(z)$ را قرار داده، سپس جمله های آن را بر حسب توانهای صعودی z مجدداً آرایش دهیم.

برهان. بنا بر فرض، z را می توان بقسمی اختیار کرد که $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$ برای این z داریم $|g(z)| < r$ ، و در نتیجه می توان نوشت

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k(n) z^k.$$

اگر بتوان ترتیب جمع بندی را در بالا عوض کرد، خواهیم داشت

$$f[g(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n) \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

که همان حکمی است که بایستی ثابت کنیم. برای اثبات این که تعویض ترتیب جمع بندی بالا امکان پذیر است، ثابت می کنیم که رشته

$$(25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n b_k(n) z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k|.$$

همگرا است. گوئیم هر $b_k(n)$ مجموعی است متناهی به شکل زیر:

$$b_k(n) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = k} b_{m_1} \cdots b_{m_n},$$

و در نتیجه $|b_k(n)| \leq \sum_{m_1 + \dots + m_n = k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$ از سوی دیگر، داریم

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| z^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) z^k,$$

که در آن $B_k(n) = \sum_{m_1 + \dots + m_n = k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$ با مراجعه به (۲۵)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) |z^k| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k z^k| \right)^n, \end{aligned}$$

یعنی رشته مذکور در (۲۵) همگرا است.

۱۷.۹ متقابل يك رشته توانی

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ جانسانی رشتهٔ توانی در دیگری، نشان می‌دهیم که هرگاه در یک رشتهٔ توانی برحسب z جملهٔ پایا صفر نباشد، آنگاه متقابل این رشته نیز رشته‌ای توانی برحسب z خواهد بود.

قضیهٔ ۲۶.۹ فرض کنیم

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad , \text{ اگر } z \in B(0; h)$$

که در آن $p(0) \neq 0$ در این صورت، يك همسایگی مانند $B(0; \delta)$ هست که در آن متقابل p دارای بسطی به صورت رشتهٔ توانی به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

بعلاوه، $q_0 = 1/p_0$

برهان. بی‌آن‌که به‌کلیت خلی وارد آید می‌توان فرض کرد که $p_0 = 1$ [چرا؟] در این صورت $p(0) = 1$ اگر $z \in B(0; h)$ قرار می‌دهیم

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |p_n z^n|.$$

بنا بر پیوستگی، یک همسایگی مانند $B(0; \delta)$ هست بقسمی که اگر

$$|P(z) - 1| < 1, \quad z \in B(0; \delta)$$

حال قضیه را می توان با بکار بردن قضیه ۲۵.۹ و رابطه های

$$g(z) = 1 - p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad \text{و} \quad f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

نتیجه گرفت.

۱۸.۹ رشته های توانی حقیقی

اگر x, x_0 و a_n عددهائی حقیقی باشند، رشته $\sum a_n (x - x_0)^n$ را یک (دسته) توانی حقیقی می نامند. گرده همگرایی این رشته محور حقیقی را در بازه ای مانند $[x_0 - r, x_0 + r]$ ، به نام بازه همگرایی، قطع می کند. به ازای هر رشته توانی حقیقی، تابعی حقیقی (به نام تابع مجموع رشته) تعریف می شود که مقدار آن در هر نقطه x در بازه همگرایی از دستور زیر بدست می آید:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

گوئیم این رشته f را در بازه همگرایی نمایش می دهد، و آن را یک بسط f به صورت (دسته) توانی حول x_0 می نامیم. در این جا دو مسأله مورد نظر است:

- (۱) رشته ای داده شده است، مطلوب است تعیین خاصیت های تابع مجموع f .
- (۲) تابع f مفروض است، مطلوب است تحقیق امکان نمایش آن به صورت یک رشته توانی.

معلوم می شود که فقط تابع های نسبتاً خاصی دارای بسط به صورت رشته توانی هستند. با وجود این، چون رده این گونه تابعها شامل تعداد زیادی مثال است که در عمل پدیدار می شوند، مطالعه آنها دارای اهمیت بسیار است.

به مسأله (۱) به وسیله قضیه های که پیشتر برای رشته های توانی مختلط ثابت شده اند جواب داده شده است. یک رشته توانی به ازای هر x در زیر بازه باز همگرایی $[x_0 - r, x_0 + r]$ همگرایی مطلق است، و بر هر زیرمجموعه فشرده این بازه همگرایی یک شکل است. چون هر جمله رشته توانی بر \mathbb{R} پیوسته است، تابع

مجموع f بر هر زیرمجموعه فشرده بازه همگرایی، و در نتیجه بر $[x_0 - r, x_0 + r]$ پیوسته است.

بر اثر همگرایی یکشکل، از قضیه ۹.۹ معلوم می‌شود که بر هر زیربازه فشرده داخل بازه همگرایی یک رشته توانی، می‌توان از آن جمله به جمله انتگرال گرفت. بنابراین، به ازای هر x در $[x_0 - r, x_0 + r]$ داریم

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

رشته انتگرالگیری شده دارای همان شعاع همگرایی رشته اولی است.

تابع مجموع رشته در بازه همگرایی دارای مشتق از هر مرتبه است، و این مشتقها را می‌توان با مشتگیری جمله به جمله از رشته بدست آورد. بعلاوه، $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$ ، پس تابع مجموع رشته با رشته توانی زیر نمایش داده می‌شود:

$$(۲۶) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

حال به مسأله (۲) توجه می‌کنیم. فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازه بازی مانند $[x_0 - r, x_0 + r]$ تعریف شده باشد، و در این بازه مشتق از هر مرتبه را دارا باشد. در این صورت، واضح است که می‌توان رشته توانی مذکور در طرف راست (۲۶) را تشکیل داد. آیا این رشته به ازای x ‌هایی علاوه بر $x = x_0$ نیز همگرا است؟ اگر چنین است، آیا مجموع آن مساوی $f(x)$ خواهد بود؟ در حالت کلی، جواب هر دو سؤال «منفی» است. (برای مثال ناقص، ر. ک. تمرین ۰.۳۳.۹) در بخش آینده، به کمک دستور تیلور (قضیه ۱۹.۵)، شرطی لازم و کافی برای جواب مثبت دادن به دو سؤال بالا داده می‌شود.

۱۹.۹ رشته تیلوری که از يك تابع تولید می‌شود

تعریف ۲۷.۹ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی که بر بازه I در R تعریف شده باشد. اگر در هر نقطه I مشتقهای f از هر مرتبه وجود داشته باشند، می‌نویسیم $f \in C^\infty$ بر I است.

اگر $f \in C^\infty$ بر یکی از همسایگیهای نقطه c باشد، رشته توانی

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

را رشته تیلود تولید شده به وسیله f حول c می نامند. برای این که نشان دهیم f این رشته را تولید کرده است، می نویسیم

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

این پرسش برای ما مطرح است: چه وقت می توان به جای علامت \sim علامت $=$ گذاشت؟ بنا به دستور تیلور، هرگاه $f \in C^\infty$ بر بازه بسته $[a, b]$ باشد و $c \in [a, b]$ ، آنگاه به ازای هر x در $[a, b]$ و هر n ،

$$(27) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-c)^n,$$

که در آن x_1 نقطه ای است بین x و c . نقطه x_1 به x ، c ، و n بستگی دارد. از این روی، شرط لازم و کافی برای آن که رشته تیلور بالا به $f(x)$ همگرا شود آن است که

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x-c)^n = 0.$$

چون جای x_1 نامشخص است، عملاً بررسی حد بالا ممکن است خیلی مشکل باشد. اما در بعضی از حالتها می توان کران بالائی مناسبی برای $f^{(n)}(x_1)$ پیدا نموده، نشان داد که حد بالا صفر است. چون به ازای هر A ، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $A^n/n! \rightarrow 0$ ، پس اگر عدد پایا و مثبتی مانند M باشد بقسمی که به ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n,$$

معادله (28) محققاً برقرار خواهد بود. با بیان دیگر می توان گفت که، اگر $f^{(n)}$ از توان M^n عدد مثبتی سریعتر رشد نکند، رشته تیلور تابع f همگرا خواهد بود. این مطلب به شکل صورتیتر در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۲۸.۹ فرض کنیم $f \in C^\infty$ بر $[a, b]$ باشد و $c \in [a, b]$ و نیز یک همسایگی مانند $B(c)$ و عدد پایانی مانند M (که ممکن است تابع c باشد) وجود داشته باشند بقسمی که به ازای هر x در $B(c) \cap [a, b]$ و هر $n = 1, 2, \dots$ ، $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$ ، در این صورت، به ازای هر x در $B(c) \cap [a, b]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

۲۰.۹ قضیه برنشتاین^۱

در این بخش شرط کافی دیگری را برای همگرایی رشته تیلور f ثابت می‌کنیم، که به وسیله برنشتاین تنظیم شده است. برای ساده کردن برهان آن، ابتدا شکل دیگر دستور تیلور را بدست می‌آوریم که در آن جمله نماینده خطا برحسب انتگرال بیان شده است.

قضیه ۲۹.۹ فرض کنیم f بر بازه‌ای باز مانند I حاوی نقطه c دارای مشتق مرتبه $(n+1)$ پیوسته باشد. به ازای x در I ، $E_n(x)$ را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$(29) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + E_n(x).$$

در این صورت، $E_n(x)$ از انتگرال زیر نیز بدست می‌آید:

$$(30) \quad E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

برهان. قضیه را به وسیله استقرا بر n ثابت می‌کنیم. به ازای $n=1$ ، داریم

$$\begin{aligned} E_1(x) &= f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) = \int_c^x [f'(t) - f'(c)] dt \\ &= \int_c^x u(t) dv(t), \end{aligned}$$

که در آن $u(t) = f'(t) - f'(c)$ و $v(t) = t - x$. با انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_c^x u(t) dv(t) &= u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^x v(t) du(t) \\ &= \int_c^x (x-t) f''(t) dt. \end{aligned}$$

این رابطه (۳۰) را به ازای $n=1$ ثابت می‌کند. حال فرض می‌کنیم که (۳۰) به ازای n درست باشد، و ثابت می‌کنیم این رابطه برای $n+1$ نیز برقرار است. از رابطه (۲۹) داریم

$$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}.$$

اگر $E_n(x)$ را به صورت یک انتگرال بنویسیم و توجه کنیم که

$$(x - c)^{n+1} = (n + 1) \int_c^x (x - t)^n dt,$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_c^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_c^x (x - t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_c^x (x - t)^n [f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)] dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_c^x u(t) dv(t), \end{aligned}$$

که در آن

$$v(t) = -(x - t)^{n+1} / (n + 1) \text{ و } u(t) = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(c)$$

با انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} E_{n+1}(x) &= -\frac{1}{n!} \int_c^x v(t) du(t) = \frac{1}{(n+1)!} \\ &\int_c^x (x - t)^{n+1} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

از این رابطه (۳۰) ثابت می شود.

تیسر. با تغییر متغیر $t = x + (c - x)u$ ، انتگرال مذکور در (۳۰) به شکل زیر درمی آید:

$$(۳۱) \quad E_n(x) = \frac{(x - c)^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}[x + (c - x)u] du.$$

قضیه ۳۰.۹ (برنشتاین). فرض کنیم تابع f همه مشتقهای آن بر بازه فشردۀ $[b, b + r]$ نامنفی باشند. در این صورت، اگر $b \leq x < b + r$ داشته تیلور

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (x - b)^k$$

به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

پرهان. با یک انتقال معلوم می شود که می توان فرض کرد که $b = 0$. به ازای

$x = 0$. نتیجه واضح است. پس فرض می‌کنیم $0 < x < r$. دستور تیلور با باقیمانده را بکار برده، می‌نویسیم

$$(۳۲) \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + E_n(x).$$

ثابت می‌کنیم که جمله نماینده خطا در نامساویهای زیرین صدق می‌کند:

$$(۳۳) \quad 0 \leq E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} f(r).$$

چون اگر $0 < x < r$ ، $0 \rightarrow (x/r)^{n+1}$ پس از (۳۳) نتیجه می‌شود که وقتی $E_n(x) \rightarrow 0$ ، $n \rightarrow \infty$ که

برای اثبات (۳۳)، رابطه (۳۱) را با $c = 0$ بکار می‌بریم. نتیجه آن که به‌ازای هر x در $[0, r]$ ،

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) du.$$

اگر $x \neq 0$ قرار می‌دهیم

$$F_n(x) = \frac{E_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x - xu) du.$$

تابع $f^{(n+1)}$ بر $[0, r]$ صعودی است زیرا مشتق آن بر $[0, r]$ نامنفی است. بنابراین، اگر $0 \leq u \leq 1$ ،

$$f^{(n+1)}(x - xu) = f^{(n+1)}[x(1 - u)] \leq f^{(n+1)}[r(1 - u)],$$

و از این نتیجه می‌شود که اگر $0 < x \leq r$ ، $F_n(x) \leq F_n(r)$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، $E_n(x)/x^{n+1} \leq E_n(r)/r^{n+1}$ یا

$$(۳۴) \quad E_n(x) \leq \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} E_n(r).$$

با قرار دادن $x = r$ در (۳۲)، ملاحظه می‌شود که چون هر جمله در مجموع نامنفی است، پس $E_n(r) \leq f(r)$. با بکار بردن این نامساوی در (۳۴)، رابطه (۳۳) بدست می‌آید. پس قضیه برقرار است.

۲۱.۹ رشته دو جمله‌ای

به‌عنوان مثالی که کاربرد قضیه بر نشانین را نشان‌دهد، بسط زیرین را بدست می‌آوریم،

که به‌دشته دو جمله‌ای معروف است:

$$(۳۵) \quad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad -1 < x < 1 \quad \text{اگر}$$

که در آن a عدد حقیقی دلخواهی است و $\binom{a}{n} = a(a-1)\dots(a-n+1)/n!$ برای اثبات بسط بالا قضیه برنشتاین مستقیماً قابل بکار بردن نیست. اما می‌توان استدلال زیر را انجام داد: قرار می‌دهیم $f(x) = (1-x)^{-c}$ که در آن $c > 0$ و $x < 1$ در این صورت،

$$f^{(n)}(x) = c(c+1)\dots(c+n-1)(1-x)^{-c-n},$$

و در نتیجه اگر $x < 1$ ، به‌ازای هر n ، $f^{(n)}(x) \geq 0$. با بکار بردن قضیه برنشتاین با $b = -1$ و $r = 2$ ، معلوم می‌شود که $f(x)$ دارای بسط به‌صورت رشته توانی حول نقطه $b = -1$ است، که به‌ازای $-1 \leq x < 1$ همگرا است. بنابراین، بنا بر قضیه ۲۲.۹، $f(x)$ نیز دارای بسط به‌صورت رشته توانی حول 0 است، یعنی $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) x^k / k!$ که به‌ازای $-1 < x < 1$ همگرا است. اما $f^{(k)}(0) = \binom{-c}{k} (-1)^k k!$ پس

$$(۳۶) \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-c}{k} (-1)^k x^k, \quad -1 < x < 1 \quad \text{اگر}$$

اگر در رابطه (۳۶) c را با $-a$ و x را با $-x$ عوض کنیم، نتیجه می‌شود که رابطه (۳۵) به‌ازای هر $a < 0$ معتبر است. اینک با انتگرالگیری متوالی، می‌توان ثابت کرد که رابطه (۳۵) به‌ازای هر عدد حقیقی a برقرار است.

البته، هرگاه a عدد صحیح مثبتی باشد، مثلاً $a = m$ ، برای $n > m$ ، $\binom{m}{n} = 0$ ، و رابطه (۳۵) به‌یک مجموع متناهی (قضیه دو جمله‌ای) تحویل خواهد شد.

۲۲.۹ قضیه حدی آبل

اگر $-1 < x < 1$ ، با انتگرالگیری از رشته هندسی

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

نتیجه می‌شود که بسط به‌صورت رشته

$$(۳۷) \quad \log(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

نیز به‌ازای $1 < x < -1$ معتبر است. باقراردادن $x = -1$ در طرف راست (۳۷)، رشته متناوب و همگرای $\sum (-1)^{n+1}/n$ بدست می‌آید. آیا می‌توان $x = -1$ را در طرف چپ رابطه (۳۷) نیز قرار داد؟ قضیه زیرین نشان می‌دهد که جواب این سؤال مثبت است.

قضیه ۳۱.۹ (قضیه حدی آبل). فرض کنیم

$$(۳۸) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad -r < x < r \text{ اگر}$$

هرگاه این رشته در $x = r$ نیز همگرا باشد، آنگاه حد $\lim_{x \rightarrow r-} f(x)$ وجود دارد و

$$\lim_{x \rightarrow r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

پرهان. برای ساده کردن کار، فرض می‌کنیم $r = 1$ (این کار با تغییر مقیاس امکان پذیر است). در این صورت، به‌ازای $1 < x < -1$ ، $f(x) = \sum a_n x^n$ و $\sum a_n$ همگرا است. می‌نویسیم $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. باید ثابت کنیم که $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$ ، یا به بیانی دیگر، باید نشان دهیم که f از چپ در $x = 1$ پیوسته است.

اگر رشته متناظر $f(x)$ را در رشته هندسی ضرب نموده، سپس از قضیه ۲۴.۹ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{، که در آن } \frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

از این روی،

$$(۳۹) \quad f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n, \\ \text{اگر } -1 < x < 1$$

بنابر فرض، $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = f(1)$. بنابراین، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان N را بقسمی اختیار کرد که اگر $n \geq N$ ، $|c_n - f(1)| < \varepsilon/2$ ، اگر مجموع مذکور در (۳۹) را به دو قسمت تقسیم کنیم، بدست می‌آید

$$(۴۰) \quad f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} [c_n - f(1)] x^n \\ + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} [c_n - f(1)] x^n.$$

فرض کنیم M ماکزیمم N عدد $|c_n - f(1)|$ ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$) باشد. اگر $0 < x < 1$ ، از رابطه (۳۰) خواهیم داشت

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x)NM + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=N}^{\infty} x^n$$

$$= (1-x)NM + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \frac{x^N}{1-x} < (1-x)NM + \frac{\epsilon}{2}.$$

حال قرار می‌دهیم $\delta = \epsilon/2NM$. در این صورت، اگر $0 < 1-x < \delta$ ، پس برهان قضیه تمام است. یعنی $|f(x) - f(1)| < \epsilon$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

مثال. در رابطه (۳۷) می‌توان x را مساوی -1 قرار داد، نتیجه می‌شود که

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(برای بدست آوردن این دستور از راه دیگر، ر. ک. تمرین ۱۸.۸.)
به‌عنوان کاربردی از قضیه آبل، می‌توان نتیجه زیر را درباره ضرب رشته‌ها بدست آورد:

قضیه ۳۳.۹ فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو رشته همگرا باشند و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ حاصل ضرب کشی آنها را نشان دهد. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

نبره. این نتیجه شبیه قضیه ۴۶.۸ است جز این که فرضی درباره همگرایی مطلق یکی از دو رشته داده شده نشده است. اما، در این جا فرض شده است که حاصل ضرب کشی آنها همگرا باشد.

برهان. رشته توانی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ هر دو به ازای $x=1$ همگرا هستند، و در نتیجه در همسایگی $B(0; 1)$ همگرا خواهند بود. اگر $|x| < 1$ ، با استفاده از قضیه ۲۴.۹ می‌توان نوشت

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

حال فرض می‌کنیم $x \rightarrow 1^-$ و قضیه آبل را بکار می‌بریم.

۲۳.۹ قضیه تاوبر

در حالت کلی عکس قضیه حدی آبل درست نیست. یعنی، اگر f بارابطة (۳۸) داده شده باشد، حد $f(r-)$ ممکن است وجود داشته باشد ولی رشته $\sum a_n r^n$ همگرا نباشد. مثلاً، فرض می‌کنیم $a_n = (-1)^n$. در این صورت، اگر $-1 < x < 1$ ، $f(x) = 1 / (1 + x)$ ، و وقتی که $x \rightarrow 1 -$ ، $f(x) \rightarrow 1/2$ ، اما $\sum (-1)^n$ واگرا است.

تاوبر (۱۸۹۷) دریافت که با قرار دادن قید هائی بر ضریبهای a_n ، می‌توان عکسی برای قضیه آبل بدست آورد. تاکنون تعداد زیادی از این نتیجه‌ها شناخته شده‌اند، و همه آنها به نام قضیه‌های تاوبری معروفند. ساده‌ترین این نتیجه‌ها به صورت زیر است. این نتیجه را گاهی قضیه اول تاوبر نیز می‌نامند.

قضیه ۳۳.۹ (تاوبر). فرض کنیم به‌ازای $-1 < x < 1$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

هرگاه وقتی که $x \rightarrow 1 -$ ، $f(x) \rightarrow S$ ، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا است و دادای مجموع S خواهد بود.

پروهان. قرار می‌دهیم $n \sigma_n = \sum_{k=0}^n k |a_k|$ در این صورت، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sigma_n \rightarrow 0$ (ر.ک. تبصرة بعد از قضیه ۴۸.۸). همچنین، اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S$ ، $x_n = 1 - 1/n$ ، به‌ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، می‌توان N را بقسمی اختیار کرد که اگر $n \geq N$

$$|f(x_n) - S| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sigma_n < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n |a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

حال قرار می‌دهیم $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. در این صورت، به‌ازای $-1 < x < 1$ ، می‌توان نوشت

$$s_n - S = f(x) - S + \sum_{k=0}^n a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

حال x را در بازه $[1, 0]$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، به‌ازای هر k ،

$$(1 - x^k) = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{k-1}) \leq k(1 - x).$$

بنابراین، اگر $n \geq N$ و $0 < x < 1$ ، خواهیم داشت

$$|s_n - S| \leq |f(x) - S| + (1-x) \sum_{k=0}^n k |a_k| + \frac{\varepsilon}{3n(1-x)}.$$

با فرض $x = x_n = 1 - 1/n$ ، نتیجه می‌شود که

$$|s_n - S| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

و برهان قضیه تمام است.

تیسر... برای یک قضیه دیگر تاویری، ر.ک. تمرین ۳۷.۹.

تمرین

همگرایی یکشکل

۱.۹ فرض کنید $f \rightarrow f_n$ به طور یکشکل بر S ، و هر f_n بر S کراندار باشد. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر S کراندار یکشکل است.

۲.۹ دو دنباله $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\text{اگر } x \in \mathbb{R} \text{ و } n = 1, 2, \dots \text{ و } f_n(x) = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } x \text{ گنگ باشد،} \\ b + \frac{1}{n}, b > 0 \text{ و } x = \frac{a}{b} & \text{اگر } x \text{ گویا باشد، مثلاً به صورت} \end{cases}$$

قرار دهید $h_n(x) = f_n(x) g_n(x)$.

(آ) ثابت کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ هر دو بر هر بازه کراندار همگرای یکشکل هستند.

(ب) ثابت کنید که $\{h_n\}$ بر هیچ بازه کراندار همگرای یکشکل نیست.

۳.۹ فرض کنید $f \rightarrow f_n$ به طور یکشکل بر S ، و $g_n \rightarrow g$ به طور یکشکل بر S .

(آ) ثابت کنید که $f_n + g_n \rightarrow f + g$ به‌طور یک‌شکل بر S .
 (ب) فرض کنید اگر $x \in S$ ،

$$h(x) = f(x)g(x) \text{ و } h_n(x) = f_n(x)g_n(x)$$

تمرین ۲۰۹ نشان می‌دهد که حکم $h_n \rightarrow h$ به‌طور یک‌شکل بر S ، در حالت کلی، صحیح نیست. ثابت کنید که این حکم در صورتی صحیح است که هر f_n و هر g_n بر S کراندار باشد.

۴۰۹ فرض کنید $f_n \rightarrow f$ به‌طور یک‌شکل بر S ، و نیز عدد پایائی مانند $M > 0$ وجود داشته باشد قسمی که به‌ازای هر x در S و هر n ، $|f_n(x)| \leq M$ ، بعلاوه، تابع g بر بست گرده $B(0; M)$ پیوسته باشد. اگر $x \in S$ ، تعریف کنید $h(x) = g[f(x)]$ و $h_n(x) = g[f_n(x)]$ ثابت کنید که $h_n \rightarrow h$ به‌طور یک‌شکل بر S .

۵۰۹ (آ) فرض کنید اگر $0 < x < 1$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) = 1/(nx + 1)$ ، ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرایی یک‌شکل نیست.

(ب) فرض کنید اگر $0 < x < 1$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، $g_n(x) = x/(nx + 1)$ ، ثابت کنید که $g_n \rightarrow 0$ به‌طور یک‌شکل بر $[0, 1]$.

۶۰۹ فرض کنید $f_n(x) = x^n$. دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرایی یک‌شکل نیست. فرض کنید g بر $[0, 1]$ پیوسته باشد و $g(1) = 0$. ثابت کنید که دنباله $\{g(x)x^n\}$ بر $[0, 1]$ همگرایی یک‌شکل است.

۷۰۹ فرض کنید $f_n \rightarrow f$ به‌طور یک‌شکل بر S . همچنین، هر f_n بر S پیوسته باشد. اگر $x \in S$ ، فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقطه‌ها در S باشد قسمی که $x_n \rightarrow x$. ثابت کنید که $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

۸۰۹ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابع‌های پیوسته که بر مجموعه فشردۀ S تعریف شده باشند. همچنین، $\{f_n\}$ بر S نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد. ثابت کنید که $f_n \rightarrow f$ به‌طور یک‌شکل بر S وقتی، و فقط وقتی، که دو شرط زیر برقرار باشند:

(یکم) تابع حد f بر S پیوسته باشد.

(دوم) به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، دو عدد مانند $m > 0$ و $\delta > 0$ وجود داشته باشند قسمی که هرگاه $n > m$ و به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots$ و هر x

در S ، δ ، $|f_k(x) - f(x)| < \delta$ ، آنگاه ε ، $|f_{k+n}(x) - f(x)| < \varepsilon$ ،
 دهنمائی. برای اثبات کفایت (یکم) و (دوم)، نشان دهید که به ازای هر x_0 در S ،
 یک همسایگی مانند $B(x_0)$ ، و عددی صحیح مانند k (تابع x_0) هست قسمی که

$$\cdot |f_k(x) - f(x)| < \delta, x \in B(x_0) \text{ اگر}$$

بنا بر خاصیت فشردگی، مجموعه‌ای متناهی از عددهای صحیح، مثلاً
 $A = \{k_1, \dots, k_r\}$ ، دارای این خاصیت است که به ازای هر x در S ، k ای در A
 وجود دارد قسمی که $|f_k(x) - f(x)| < \delta$. همگرایی یکشکل نتیجه ساده‌ای
 است از آنچه گفته شد.

۹.۹ (آ) با استفاده از تمرین ۸.۹ قضیه زیر را، که متعلق به دینی^۱ است، ثابت
 کنید: هرگاه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پیوسته و حقیقی باشد که بر مجموعه
 فشردۀ S نقطه‌وار به تابع حد پیوسته‌ای چون f همگرا باشد، و به ازای
 هر x در S و هر $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ، آنگاه $f_n \rightarrow f$
 به‌طور یکشکل بر S .

(ب) با استفاده از دنباله مذکور در تمرین ۵.۹ (آ)، نشان دهید که شرط
 فشردگی S در قضیه دینی ضروری است.

۱۰.۹ فرض کنید به ازای x حقیقی و $n \geq 1$ ، $f_n(x) = n^n x(1-x)^n$ ثابت
 کنید به ازای هر عدد حقیقی c ، دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است. c هائی
 را بیابید که به ازای آنها همگرایی این دنباله بر $[0, 1]$ یکشکل باشد. همچنین،
 c هائی را معین کنید که به ازای آنها بتوان از این دنباله بر $[0, 1]$ جمله به جمله
 انتگرال گرفت.

۱۱.۹ ثابت کنید که $\sum x^n(1-x)$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرایی
 یکشکل نیست، حال آن که $\sum (-1)^n x^n(1-x)$ بر $[0, 1]$ همگرایی یکشکل
 می‌باشد. این مطلب مصور می‌سازد که از همگرایی یکشکل $\sum f_n(x)$ و همگرایی
 نقطه‌وار $\sum |f_n(x)|$ همگرایی یکشکل $\sum |f_n(x)|$ لزوماً نتیجه نمی‌شود.

۱۲.۹ فرض کنید به ازای هر x در T و هر $n = 1, 2, \dots$ ، $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ ،
 همچنین $g_n \rightarrow 0$ به‌طور یکشکل بر T . ثابت کنید که $\sum (-1)^{n+1} g_n(x)$ بر T
 همگرایی یکشکل است.

۱۳.۹ آزمون آبل برای همگرایی یکشکل را ثابت کنید: فرض کنید $\{g_n\}$
 دنباله‌ای از تابعهای حقیقی باشد قسمی که به ازای هر x در T و هر $n = 1, 2, \dots$

$g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ هرگاه $\{g_n\}$ بر T کراندار یکشکل، و $\sum f_n(x)$ بر T همگرایی یکشکل باشد، آنگاه $\sum f_n(x) g_n(x)$ نیز بر T همگرایی یکشکل است.

۱۴.۹ فرض کنید اگر $x \in \mathbb{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) = x/(1+nx^2)$ ، تابع حد f دنباله $\{f_n\}$ ، و تابع حد g دنباله $\{f'_n\}$ را بیابید.

(آ) ثابت کنید به ازای هر x ، $f'(x)$ وجود دارد ولی $f'(0) \neq g(0)$. به ازای چه مقدارهایی از x ، $f'(x) = g(x)$ ؟

(ب) در کدام زیربازه‌های \mathbb{R} ، $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل؟

(ج) در کدام زیربازه‌های \mathbb{R} ، $f'_n \rightarrow g$ به طور یکشکل؟

۱۵.۹ فرض کنید اگر $x \in \mathbb{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) = (1/n)e^{-n^2x^2}$ ، ثابت کنید که $f_n \rightarrow 0$ به طور یکشکل بر \mathbb{R} ، $f'_n \rightarrow 0$ به طور نقطه‌وار بر \mathbb{R} ولی همگرایی $\{f'_n\}$ بر هیچ بازه‌ای حاوی مبدأ یکشکل نیست.

۱۶.۹ فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای باشد از تابع‌های پیوسته و حقیقی که بر بازه $[0, 1]$ تعریف شده باشند. همچنین، $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر $[0, 1]$. برقراری رابطه زیر را ثابت یا رد کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-1/n} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

۱۷.۹ ریاضیدانان اسلوبوویا فتوا دادند که انتگرال ریمان خیلی پیچیده است، و در نتیجه به جای آن انتگرال اسلوبودی را قرار دادند، که به صورت زیر تعریف می‌شود: اگر f تابعی باشد که بر مجموعه عددهای گویا در $[0, 1]$ ، یعنی \mathbb{Q} ، تعریف شده باشد، انتگرال اسلوبووی f ، که با $S(f)$ نشان داده می‌شود، با حد زیر تعریف می‌گردد:

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

وقتی که این حد وجود داشته باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابع‌ها باشد بقسمی که n هر چه باشد $S(f_n)$ وجود داشته باشد، و $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر \mathbb{Q} . ثابت کنید که $\{S(f_n)\}$ همگرا است، $S(f)$ وجود دارد، و وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $S(f_n) \rightarrow S(f)$.

۱۸.۹ فرض کنید اگر $0 \leq x \leq 1$ و $n = 1, 2, \dots$ ، $f_n(x) = 1/(1+n^2x^2)$

ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی بر این بازه همگرای یکشکل نیست. آیا در این مورد انتگرالگیری جمله به جمله مجاز است؟

۱۹.۹ ثابت کنید اگر $\alpha > 1/2$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} x/n^\alpha (1 + nx^2)$ بر هر بازهٔ منتهای در \mathbb{R} همگرای یکشکل است. آیا همگرایی این رشته بر \mathbb{R} یکشکل است؟

۲۰.۹ ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n / \sqrt{n}) \sin(1 + (x/n))$ بر هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ \mathbb{R} همگرای یکشکل است.

۲۱.۹ ثابت کنید که رشتهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n+1}/(2n+1) - x^{n+1}/(2n+2))$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرای یکشکل نیست.

۲۲.۹ ثابت کنید اگر $\sum |a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ بر \mathbb{R} همگرای یکشکل هستند.

۲۳.۹ فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی با جمله‌های مثبت باشد. ثابت کنید که رشتهٔ $\sum a_n \sin nx$ بر \mathbb{R} وقتی، و فقط وقتی، همگرای یکشکل است که وقتی که $na_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

۲۴.۹ رشتهٔ همگرای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مفروض است. ثابت کنید که رشتهٔ دیریکلهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ بر بازهٔ نیمه نامتناهی $0 \leq s < +\infty$ همگرای یکشکل است. با استفاده از این خاصیت، ثابت کنید که $\lim_{s \rightarrow 0+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

۲۵.۹ اگر $h > 0$ ، ثابت کنید که رشتهٔ $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ بر بازهٔ نیمه نامتناهی $1 + h \leq s < +\infty$ همگرای یکشکل است. نشان دهید که معادلهٔ

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

به‌ازای هر $s > 1$ معتبر است، و دستور مشابهی برای مشتق k ام، یعنی $\zeta^{(k)}(s)$ پیدا کنید.

همگرایی میانگینی

۲۶.۹ فرض کنید $f_n(x) = n^{2/3} x e^{-n^2 x^2}$. ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[-1, 1]$ نقطه‌وار به 0 همگرا است ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx \neq 0$ است.

۲۷.۹ فرض کنید دنبالهٔ $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ نقطه‌وار به f همگرا باشد و $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ باشد. ثابت کنید اگر f و g هر دو بر $[a, b]$

پیوسته باشند، $f = g$.

۲۸.۹ فرض کنید اگر $0 \leq x \leq \pi$ ، $f_n(x) = \cos^n x$.

(آ) ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ بر $[0, \pi]$ است ولی دنباله $\{f_n(\pi)\}$ همگرا نیست.

(ب) ثابت کنید دنباله $\{f_n\}$ بر $[0, \pi/2]$ نقطه‌وار همگرا است ولی همگرایی یکشکل نیست.

۲۹.۹ اگر $0 \leq x \leq 1/n$ یا $1/2 \leq x \leq 1$ ، $f_n(x) = 0$ ، و اگر $1/n < x < 1/2$ ، $f_n(x) = n$ ، ثابت کنید که $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ نقطه‌وار به 0 همگرا است ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq 0$ بر $[0, 1]$ است.

رشته‌های توانی

۳۰.۹ اگر r شعاع همگرایی $\sum a_n(z - z_0)^n$ باشد، که در آن هر $a_n \neq 0$ ، نشان دهید که

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq r \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

۳۱.۹ فرض کنید شعاع همگرایی رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ مساوی 2 باشد. شعاع همگرایی هر یک از رشته‌های زیرین را بیابید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n} \quad (\text{ج}) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn} \quad (\text{ب}) \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n \quad (\text{آ})$$

در (آ) و (ب) ، k عدد صحیح مثبت و ثابتی است.

۳۲.۹ ضریبهای رشته توانی مفروض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با معادله‌ای بدین شکل مربوطند:

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

نشان دهید که به‌ازای هر x که رشته بالا همگرا باشد، مجموع آن مساوی

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}$$

است.

۳۳.۹ فرض کنید اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{-1/x^2}$ ، و $f(0) = 0$.

(آ) نشان دهید که به ازای هر $n \geq 1$ ، $f^{(n)}(0)$ وجود دارد.

(ب) نشان دهید که رشته تیلور تولید شده به وسیله f حول 0 همگرا بر R همگرا است ولی فقط f را در مبدأ نمایش می دهد.

۳۴.۹ نشان دهید که رشته دو جمله ای $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ در نقطه های $x = \pm 1$ دارای این رفتارها است:

(آ) اگر $x = -1$ ، رشته به ازای $\alpha \geq 0$ همگرا، و به ازای $\alpha < 0$ واگرا است.

(ب) اگر $x = 1$ ، رشته به ازای $\alpha \leq -1$ واگرا، به ازای α در بازه $0 < \alpha < 1$ همگرای مشروط، و به ازای $\alpha \geq 0$ همگرای مطلق است.

۳۵.۹ نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد، رشته $\sum a_n x^n$ بر $[0, 1]$ همگرای یک شکل است. با استفاده از این مطلب، برهان دیگری برای قضیه حدی آبل بیابید.

۳۶.۹ اگر هر $a_n \geq 0$ و رشته $\sum a_n$ واگرا باشد، نشان دهید که وقتی که $x \rightarrow 1^-$ ، $\sum a_n x^n \rightarrow +\infty$ ، (فرض کنید $\sum a_n x^n$ به ازای $|x| < 1$ همگرا باشد).

۳۷.۹ اگر هر $a_n \geq 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n x^n$ وجود داشته باشد و مساوی A باشد، ثابت کنید که $\sum a_n$ همگرا، و مجموع آن A است. (با قضیه ۳۳.۹ مقایسه کنید).

۳۸.۹ به ازای هر عدد حقیقی t ، اگر $x \in R$ و $x \neq 0$ ، تعریف کنید

$$f_t(x) = \frac{xe^{xt}}{e^x - 1} \quad \text{و} \quad f_t(0) = 1$$

(آ) نشان دهید که گردهای مانند $B(0; \delta)$ هست که در آن f_t را می توان به صورت یک رشته توانی بر حسب x نمایش داد.

(ب) $P_0(t)$ ، $P_1(t)$ ، $P_2(t)$ ، ... را با معادله زیرین تعریف کنید:

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \frac{x^n}{n!}, \quad x \in B(0; \delta)$$

و با استفاده از اتحاد

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \frac{x^n}{n!} = e^{tx} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \frac{x^n}{n!},$$

ثابت کنید که $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(0) t^{n-k}$. این امر نشان می‌دهد که هر تابع P_n یک چند جمله‌ای است. اینها را چند جمله‌ای‌های برنولی^۱، و عدد‌های دیگر زیر را بدست آورید:

(ج) $B_0 = 1$ ، $B_1 = -1/2$ ، و اگر $n = 2, 3, \dots$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0.$$

(د) اگر $n = 1, 2, \dots$ $P'_n(t) = nP_{n-1}(t)$

(ه) اگر $n = 1, 2, \dots$ $P_n(t+1) - P_n(t) = nt^{n-1}$

(و) $P_n(1-t) = (-1)^n P_n(t)$

(ز) اگر $n = 1, 2, \dots$ $B_{2n+1} = 0$

(ح) $1^n + 2^n + \dots + (k-1)^n = \frac{P_{n+1}(k) - P_{n+1}(0)}{n+1}$

($n = 2, 3, \dots$).

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 9.1 Hardy, G. H., *Divergent Series*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1949.
- 9.2 Hirschmann, I. I., *Infinite Series*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
- 9.3 Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, 2nd ed. R. C. Young, translator. Hafner, New York, 1948.

انتگرال لبگ

۱۰۱۰ مقدمه

انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ ، که در فصل ۷ ظاهر شد، از انگیزه‌های کافی برای تعریف برخوردار است، توصیفی ساده دارد، و همهٔ نیازهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را برمی‌آورد. اما، این انتگرال برای همهٔ نیازهای آنالیز عالی کافی نیست. توسیع آن، به نام انتگرال لبگ، در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد. این مبحث تابعهای کلیتری را به عنوان انتگرال‌ده می‌پذیرد، تابعهای کراندار و بی‌کران را باهم دربر می‌گیرد، و به ما امکان می‌دهد که به جای بازهٔ $[a, b]$ مجموعه‌های کلیتری را قرار دهیم.

همچنین، برای انتگرال لبگ قضیه‌های همگرایی متقاعده کننده تری وجود دارند. اگر دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ بر $[a, b]$ نقطه‌وار به تابع حد f همگرا باشد، مطلوب آن است که رابطهٔ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

با کمترین قیدهای اضافی برقرار باشد. نتیجهٔ قطعی این‌گونه احکام قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ است، که بنا بر آن، اگر هر جملهٔ $\{f_n\}$ انتگرال لبگ داشته باشد و دنباله تحت تسلط تابعی باشد که انتگرال لبگ دارد، از این دنباله می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. (ر. ک. قضیهٔ ۲۷.۱۰). در این جا انتگرال لبگ داشتن شرطی ضروری است. قضیه برای انتگرالهای ریمان درست نیست.

در روش ریمان بازه انتگرالگیری به تعدادی متناهی زیربازه تقسیم می‌شود در روش لبگ بازه به مجموعه‌های کلیتری به نام مجموعه‌های اندازه‌پذیر تقسیم می‌شود. در مقاله‌ای عالی که لبگ در ۱۹۰۲ زیر عنوان «انتگرال، ددازا، وسعت»^۱ منتشر ساخت، اندازه را برای مجموعه‌های نقطه‌ای تعریف کرد و این را برای نشان دادن انتگرال جدیدش بکار برد.

از زمان نخستین کارهای لبگ، نظریه اندازه‌ها و نظریه انتگرالگیری هر دو دستخوش تعمیمها و اصلاحهای متعدد شده‌اند. کارهای یانگ^۲، دانیل^۳، ریس، استن^۴، و دیگران نشان داده‌اند که انتگرال لبگ را می‌توان با روشی معرفی کرد که بستگی به نظریه اندازه‌ها نداشته باشد، بلکه به‌طور مستقیم بر تابعها و انتگرالهای آنها متمرکز باشد. در این فصل از این روش، به صورتی که در کتاب مرجع ۱۰.۱۰ طرح شده است، پیروی می‌کنیم. تنها مفهومی که از نظریه اندازه‌ها مورد نیاز است مفهوم مجموعه دارای اندازه صفر است، این مفهوم ساده در فصل ۷ معرفی شد. بعداً، باختصار نشان خواهیم داد که چگونه نظریه اندازه‌ها را می‌توان به کمک انتگرال لبگ بوجود آورد.

۲.۱۰ انتگرال تابع پله‌ای

روش کار در اینجا چنین است که ابتدا انتگرال را برای تابعهای پله‌ای، سپس برای رده وسیعتری از تابعها (به نام تابعهای بالائی) که حاوی حدهای بعضی از دنباله‌های صعودی از تابعهای پله‌ای هستند، و سرانجام برای رده بازم وسیعتری به نام تابعهای که انتگرال لبگ دارند تعریف می‌نمائیم.

یادآوری می‌کنیم که تابع s را، که بر بازه فشرده $[a, b]$ تعریف شده باشد، یک تابع پله‌ای نامند اگر یک افراز $[a, b]$ مانند $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که s بر هر زیربازه باز این افراز تابعی پایا باشد، یعنی

$$s(x) = c_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{اگر}$$

یک تابع پله‌ای بر هر زیربازه $[x_{k-1}, x_k]$ دارای انتگرال ریمان است، و انتگرال آن روی این زیربازه، بی‌توجه به مقادیرهای s در نقطه‌های انتهائی، از دستور زیر بدست می‌آید:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} s(x) dx = c_k(x_k - x_{k-1}).$$

بنابراین، انتگرال ریمان s روی $[a, b]$ مساوی مجموع زیر خواهد بود :

$$(1) \quad \int_a^b s(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}).$$

نمبره . اگر معادله (۱) را به عنوان تعریف انتگرال یک تابع پله‌ای در نظر بگیریم ، می توان نظریه لبگ را بی هرگونه اطلاع قبلی از انتگرال گیری ریمان بوجود آورد. باید توجه داشت که تا وقتی که s بر زیربازه های باز افزاز P پایا باشد، مجموعی که در (۱) ذکر شده است از انتخاب P مستقل خواهد بود . شایسته است که قید فشرده بودن را از قلمرو یک تابع پله‌ای برداریم.

تعریف ۱۰۱۰ فرض کنیم I یک بازه کلی (کراندار ، بی کران ، باز ، بسته ، یا نیمباز) باشد. تابع s را بر I یک تابع پله‌ای نامند در صورتی که I زیربازه فشرده‌ای مانند $[a, b]$ داشته باشد بقسمی که s بر آن پله‌ای باشد، و به ازای هر

$$s(x) = 0, \quad x \in I - [a, b]$$

انتگرال s روی I را به $\int_I s(x) dx$ یا به $\int_I s$ نشان می دهیم ، و آن را مساوی انتگرال s روی $[a, b]$ ، که با رابطه (۱) داده شده است، تعریف می نماییم.

البته، تعداد زیادی بازه فشرده مانند $[a, b]$ هستند که s در خارج آنها مساوی صفر می شود، اما انتگرال s به انتخاب $[a, b]$ بستگی ندارد. البته، مجموع و حاصل ضرب دو تابع پله‌ای نیز تابعهائی پله‌ای هستند. خاصیت‌های زیرین در مورد انتگرال تابعهائی پله‌ای را می توان باسانی از تعریف بالا نتیجه گرفت:

$$\int_I cs = c \int_I s, \quad \text{به ازای هر پایای } c, \quad \int_I (s + t) = \int_I s + \int_I t$$

$$\int_I s \leq \int_I t, \quad \text{آنگاه } s(x) \leq t(x), I \text{ در } x \text{ هر به ازای هر } x$$

همچنین، هرگاه I به صورت اجتماع مجموعه‌ای متناهی از زیربازه‌ها بیان شود، مثلاً، $I = \bigcup_{r=1}^p [a_r, b_r]$ ، بقسمی که هیچ دو زیربازه نقطه درونی مشترک نداشته باشند، آنگاه

$$\int_I s(x) dx = \sum_{r=1}^p \int_{a_r}^{b_r} s(x) dx.$$

۳.۱۰ دنباله‌های یکنوا از تابعهای پله‌ای

دنباله $\{f_n\}$ از تابعهای حقیقی را که بر مجموعه S تعریف شده باشند بر S صعودی نامیم در صورتی که

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \text{ هر } n \text{ و } x \text{ در } S$$

دنباله نزولی آن است که در نامساوی بالا درجهت دیگر صدق کند.

تبره. یادآوری می‌کنیم که یک زیرمجموعه R مانند T را دارای اندازه صفر گویند وقتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ ، T را بتوان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌ها پوشانید، که مجموع درازاهای آنها کمتر از ϵ باشد. اگر خاصیتی همه جا بر S برقرار باشد بجز در مورد مجموعه‌ای دارای اندازه صفر، گوئیم این خاصیت تقریباً همه جا بر S برقرار است، (در این صورت می‌نویسیم: ت. ه. بر S).

نماد گذاری. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعها بر S باشد بقسمی که $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه جا بر S ، می‌نویسیم

$$f_n \nearrow f \text{ ت. ه. بر } S.$$

بهمین نحو، نماد $f_n \searrow f$ ت. ه. بر S ، یعنی دنباله $\{f_n\}$ بر S نزولی است و تقریباً همه جا بر S به f همگرا می‌باشد.

قضیه زیرین مربوط است به دنباله‌های نزولی از تابعهای پله‌ای بر بازه‌ای کلی مانند I .

قضیه ۲.۱۰ فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای نزولی از تابعهای پله‌ای نامنفی باشد بقسمی که $s_n \searrow 0$ ت. ه. بر بازه‌ای مانند I . در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0.$$

برهان. روش اثبات این است که انتگرال $\int_I s_n$ را به صورت

$$\int_I s_n = \int_A s_n + \int_B s_n$$

بنویسیم، که در آن A و B ، هر یک، اجتماع تعدادی متناهی بازه باشد. مجموعه A را طوری اختیار می‌کنیم که عبارت باشد از اجتماع بازه‌هایی که وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد انتگرالده در آنها کوچک باشد. در B انتگرالده لزوماً

کوچک نیست ولی مجموع درازاهای همه بازه‌های آن کوچک خواهد بود. برای انجام این کار چنین عمل می‌کنیم:

بازه فشرده ای مانند $[a, b]$ وجود دارد که s_1 در خارج آن مساوی صفر می‌شود. چون

$$0 \leq s_n(x) \leq s_1(x), I \text{ در } x$$

هر s_n در خارج $[a, b]$ مساوی صفر خواهد شد. اما s_n بر هر زیربازه باز یکی از افزاهای $[a, b]$ پایا است. فرض می‌کنیم D_n مجموعه نقطه‌های انتهایی این زیر-بازه‌ها را نشان دهد، و قرار می‌دهیم $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. چون هر D_n مجموعه‌ای متناهی است، D شمارشیدزیر، و در نتیجه دارای اندازه صفر است. فرض کنیم E مجموعه نقطه‌هایی در $[a, b]$ را نشان دهد که در آنها دنباله $\{s_n\}$ به صفر همگرا نباشد. بنا بر فرض، E دارای اندازه صفر است، پس مجموعه

$$F = D \cup E$$

نیز دارای اندازه صفر خواهد بود. بنابراین، اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، F را می‌توان با دسته‌ای شمارشیدزیر از بازه‌های باز مانند F_1, F_2, \dots پوشانید، که مجموع درازاهای آنها از ε کمتر باشد.

اینک فرض می‌کنیم که $F = [a, b] - x \in x$ در این صورت $x \notin E$ ، پس وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $s_n(x) \rightarrow 0$. بنابراین، عددی صحیح مانند $N = N(x)$ هست بقسمی که $\varepsilon < s_N(x)$. همچنین، از این که $x \notin D$ ، نتیجه می‌شود که x نقطه درونی یکی از زیربازه‌هایی است که s_N بر آن تابعی پایا است. از این روی، بازه بازی مانند $B(x)$ هست بقسمی که به ازای هر t در $B(x)$ ، $s_N(t) < \varepsilon$. چون $\{s_n\}$ نزولی است، پس

$$(۲) \quad s_n(t) < \varepsilon, B(x) \text{ در } t \text{ هر } n \geq N$$

مجموعه همه بازه‌های $B(x)$ که به ازای همه عضوهای $F - [a, b]$ حاصل می‌شوند، به انضمام بازه‌های F_1, F_2, \dots تشکیل یک پوشش باز $[a, b]$ را خواهند داد. چون $[a, b]$ فشرده است، زیرپوششی متناهی از آن برای $[a, b]$ وجود دارد، مثلاً

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i) \cup \bigcup_{r=1}^q F_r.$$

فرض کنیم N ماکزیمم عددهای صحیح $N(x_1), \dots, N(x_p)$ باشد. از رابطه (۲) دیده می‌شود که

$$(۳) \quad s_n(t) < \varepsilon, \bigcup_{i=1}^p B(x_i) \text{ در } t \text{ هر } n \geq N_0$$

به‌ازای هر $n \geq N_0$ و هر t در $\bigcup_{i=1}^p B(x_i)$ ، $s_n(t) < \varepsilon$ است.

$$B = \bigcup_{r=1}^q F_r, A = [a, b] - B.$$

در این صورت، A مساوی اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌های از هم جدا است، و داریم

$$\int_I s_n = \int_a^b s_n = \int_A s_n + \int_B s_n.$$

ابتدا انتگرال روی B را تخمین می‌زنیم. فرض کنیم M یک کران بالایی برای s_1 بر $[a, b]$ باشد. چون $\{s_n\}$ نزولی است، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، داریم

$$s_n(x) \leq s_1(x) \leq M.$$

چون مجموع درازاهای بازه‌های موجود در B از ε کمتر است، پس

$$\int_B s_n \leq M\varepsilon.$$

حال انتگرال روی A را تخمین می‌زنیم. چون $A \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i)$ ، نامساوی مذکور در (۳) نشان می‌دهد که اگر $x \in A$ و $n \geq N_0$ ، $s_n(x) < \varepsilon$ ، مجموع درازاهای بازه‌های موجود در A از $b - a$ بیشتر نیست، پس تخمین زیر را خواهیم داشت:

$$\int_A s_n \leq (b - a)\varepsilon, n \geq N_0 \text{ اگر}$$

از دو تخمین بالا نتیجه می‌شود که اگر $n \geq N_0$ ، $\int_I s_n \leq (M + b - a)\varepsilon$ و این رابطه نشان می‌دهد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0.$$

قضیه ۳.۱۵ فرض کنیم $\{t_n\}$ دنباله‌ای باشند از تابع‌های پله‌ای بر بازه I بقسمی که:

(آ) تابعی مانند f وجود داشته باشد که $t_n \nearrow f$ ت. م. بر I ؛

و

(ب) دنباله $\{\int_I t_n\}$ همگرا باشد.

در این صورت، به ازای هر تابع پله‌ای مانند t که $t(x) \leq f(x)$ بر I ، خواهیم داشت

$$(۴) \quad \int_I t \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n.$$

برهان. $\{s_n\}$ ، دنباله‌ی جدیدی از تابعهای پله‌ای نامنفی، را بر I به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x) = \begin{cases} t(x) - t_n(x) & , \quad t(x) \geq t_n(x) & \text{اگر} \\ 0 & , \quad t(x) < t_n(x) & \text{اگر} \end{cases}$$

توجه کنید که $s_n(x) = \max \{t(x) - t_n(x), 0\}$ چون $\{t_n\}$ صعودی است، پس $\{s_n\}$ بر I نزولی می‌باشد، و $s_n(x) \rightarrow \max \{t(x) - f(x), 0\}$ ت. ه. بر I . ولی $t(x) \leq f(x)$ ت. ه. بر I ، بنابراین $s_n \searrow 0$ ت. ه. بر I . از این روی، بنا بر قضیه ۲.۱۰، $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0$ ، چون به ازای هر x در I ، $s_n(x) \geq t(x) - t_n(x)$ پس

$$\int_I s_n \geq \int_I t - \int_I t_n.$$

حال اگر در نامساوی بالا $n \rightarrow \infty$ ، رابطه (۴) بدست می‌آید.

۴.۱۰ تابعهای بالائی و انتگرالهای آنها

فرض کنیم $S(I)$ مجموعه همه تابعهای پله‌ای بر بازه I را نشان دهد. مفهوم انتگرال را برای همه تابعهای در $S(I)$ تعریف کردیم. حال این مفهوم را به رده‌ای بزرگتر وسعت می‌دهیم. این رده، که به $U(I)$ نشان داده می‌شود، حاوی حدهای بعضی از دنباله‌های صعودی از تابعهای پله‌ای است. تابعهای موجود در این رده تابعهای بالائی نامیده، و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف ۴.۱۰ تابع حقیقی f را که بر بازه I تعریف شده باشد یک تابع بالائی بر I می‌نامیم، و می‌نویسیم $f \in U(I)$ ، در صورتی که دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$f \nearrow s_n \quad \text{ت. ه. بر } I;$$

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$ متناهی باشد.

در این صورت گوئیم دنباله $\{s_n\}$ تابع f را تولید می‌کند. انتگرال f روی I با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$(۵) \quad \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n.$$

تبره. چون $\{\int_I s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی است، شرط (ب) هم‌ارز این است که گفته شود $\{\int_I s_n\}$ از بالا کراندار است. قضیه زیرین نشان می‌دهد که تعریف انتگرال در رابطه (۵) فارغ از ابهام است.

قضیه ۵.۱۵ فرض کنیم $f \in U(I)$ و $\{s_n\}$ و $\{t_m\}$ دو دنباله باشند که f را تولید کنند. در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

برهان. دنباله $\{t_m\}$ در فرضهای (آ) و (ب) از قضیه ۳.۱۵ صدق می‌کند. همچنین، به‌ازای هر m ، داریم

$$s_n(x) \leq f(x) \quad \text{بر } I،$$

پس از (۴) نتیجه می‌شود که

$$\int_I s_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

چون نامساوی بالا به‌ازای هر n برقرار است، خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I t_m.$$

با تعویض جای $\{s_n\}$ و $\{t_m\}$ با یکدیگر و تکرار استدلال بالا، نامساوی اخیر در جهت دیگر بدست می‌آید و برهان قضیه تمام می‌شود.

سادگی می‌توان دید که هر تابع پله‌ای یک تابع بالائی است، و انتگرال آن، که با رابطه (۵) معین می‌شود، مساوی انتگرال این تابع بر حسب تعریف اولی است که در بخش ۲.۱۰ آمده است. خاصیت‌های دیگر انتگرال تابع‌های بالائی در قضیه زیر توصیف می‌شوند.

قضیه ۶.۱۰ فرض کنیم که $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$. در این صورت:

$$(f + g) \in U(I) \quad (\bar{A})$$

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g.$$

(ب) به ازای هر پایای $c \geq 0$ ، $cf \in U(I)$ و

$$\int_I cf = c \int_I f.$$

(ج) هرگاه $f(x) \leq g(x)$ ، بر I ، آنگاه $\int_I f \leq \int_I g$.

تفسیر. در قسمت (ب) شرط $c \geq 0$ شرطی است ضروری. تابعهائی مانند f وجود دارند که $f \in U(I)$ ولی $f \notin U(I)$. (ر. ک. تمرین ۴.۱۰). اما، هرگاه $f \in U(I)$ و $s \in S(I)$ ، چون $f - s = f + (-s)$ ، آنگاه $f - s \in U(I)$. برهان. قسمت‌های (آ) و (ب) نتیجه‌های ساده‌ای از خاصیت‌های متناظر آنها برای تابعه‌های پله‌ای می‌باشند. برای اثبات (ج)، فرض کنیم $\{s_m\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هایی باشند که، بر ترتیب، f و g را تولید می‌کنند. در این صورت، $s_m \nearrow f$ و $t_n \nearrow g$.
ه. بر I ، و

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_I s_m = \int_I f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n = \int_I g.$$

اما به ازای هر m ،

$$s_m(x) \leq f(x) \leq g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x)$$

از این روی، بنا بر قضیه ۳.۱۰،

$$\int_I s_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n = \int_I g.$$

حال، اگر در بالا $m \rightarrow \infty$ ، قسمت (ج) نتیجه خواهد شد.

قضیه زیر نتیجه مهمی است از قسمت (ج).

قضیه ۷.۱۰ هرگاه $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$ ، و $f(x) = g(x)$ تقریباً همه جا بر I ، آنگاه $\int_I f = \int_I g$.

برهان. چون هر دو نامساوی $f(x) \leq g(x)$ و $g(x) \leq f(x)$ تقریباً همه جا

بر I برقرارند، پس از قضیه ۶.۱۰ (ج) نتیجه می شود که $\int_I f \leq \int_I g$ و $\int_I f \leq \int_I g$.

تعریف ۸.۱۰ فرض کنیم تابعهای حقیقی f و g بر I تعریف شده باشند. تابعهای $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ را به این صورت تعریف می کنیم که مقادیرهای آنها به ازای هر x در I ، بترتیب، مساوی $\max\{f(x), g(x)\}$ و $\min\{f(x), g(x)\}$ باشند.

بآسانی می توان وجود خاصیتهای زیر را در مورد \max و \min تحقیق کرد.

$$(آ) \max(f, g) + \min(f, g) = f + g$$

$$(ب) \max(f + h, g + h) = \max(f, g) + h$$

$$\text{و } \min(f + h, g + h) = \min(f, g) + h$$

هرگاه $f_n \searrow f$ ت. ه. بر I ، و $g_n \searrow g$ ت. ه. بر I ، آنگاه

(ج) $\max(f, g) \searrow \max(f_n, g_n)$ ت. ه. بر I ، و $\min(f, g) \searrow \min(f_n, g_n)$ ت. ه. بر I .

قضیه ۹.۱۰ هرگاه $f \in U(I)$ و $g \in U(I)$ ، آنگاه $\max(f, g) \in U(I)$ و $\min(f, g) \in U(I)$.

برهان. فرض کنیم $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دنباله‌هایی از تابعهای پله‌ای باشند که، بترتیب، f و g را تولیدکنند. قرار می دهیم $u_n = \max(s_n, t_n)$ و $v_n = \min(s_n, t_n)$. در این صورت، u_n و v_n تابعهای پله‌ای هستند بطوری که $\max(f, g) \searrow u_n$ و $\min(f, g) \searrow v_n$ ت. ه. بر I .

برای اثبات این که $\min(f, g) \in U(I)$ ، کافی است نشان دهیم که دنباله $\{\int_I v_n\}$ از بالا کراندار است. اما $v_n = \min(s_n, t_n) \leq f$ ت. ه. بر I ، پس $\int_I v_n \leq \int_I f$. بنابراین، دنباله $\{\int_I v_n\}$ همگرا است. اما دنباله $\{\int_I u_n\}$ نیز همگرا است زیرا، بنا بر خاصیت (آ)، $u_n = s_n + t_n - v_n$ ، و در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_I u_n &= \int_I s_n + \int_I t_n - \int_I v_n \\ &\rightarrow \int_I f + \int_I g - \int_I \min(f, g). \end{aligned}$$

قضیه زیر خاصیت جمعپذیری انتگرال را بر حسب بسازه انتگرالگیری نشان

می دهد.

قضیه ۱۰.۱۰ فرض کنیم بازه I به صورت اجتماع دو زیربازه باشد، مثلاً $I = I_1 \cup I_2$ ، قسمی که I_1 و I_2 نقطه درونی مشترک نداشته باشند.

(آ) هرگاه $f \in U(I)$ و $f \geq 0$ ، ت. ه. بر I_1 ، آنگاه $f \in U(I_1)$ ، $f \in U(I_2)$ ، و

$$(۶) \quad \int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

(ب) فرض کنیم $f_1 \in U(I_1)$ و $f_2 \in U(I_2)$ ، تابع f را بر I به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{اگر } x \in I_1 \\ f_2(x), & \text{اگر } x \in I - I_1 \end{cases}$$

در این صورت، $f \in U(I)$

$$\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2.$$

پروهان. اگر $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای باشد که f را بر I تولید کند، به ازای هر x در I ، قرار می‌دهیم $\{s_n^+(x) = \max\{s_n(x), 0\}$ ، در این صورت، چون $f \geq 0$ ، $\{s_n^+\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای ناهنجری است که f را بر I تولید می‌کند. بعلاوه، به ازای هر زیربازه J مانند I ، $\int_J s_n^+ \leq \int_I s_n^+ \leq \int_I f$ ، پس $\{s_n^+\}$ تابع f را بر I تولید خواهد کرد. همچنین،

$$\int_I s_n^+ = \int_{I_1} s_n^+ + \int_{I_2} s_n^+.$$

حال اگر در رابطه بالا $n \rightarrow \infty$ ، قسمت (آ) نتیجه خواهد شد. اثبات قسمت (ب) به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

تبره. قضیه‌ای مشابه بالا برای حالتی که بازه به صورت اجتماع تعدادی متناهی زیربازه باشد و هیچ دو بازه‌ای نقطه مشترک درونی نداشته باشند وجود دارد. این قضیه را می‌توان به استقرا ثابت کرد.

۵.۱۰ تابعهایی که انتگرال ریمان دارند به عنوان مثالهایی از تابعهای بالائی قضیه زیرین نشان می‌دهد که رده تابعهای بالائی، همه تابعهایی که انتگرال ریمان دارند در برمی‌گیرد.

قضیه ۱۱.۱۵ فرض کنیم f تابعی باشد که بر بازه فشرده $[a, b]$ تعریف شده و کراندار و تقریباً همه جا بر $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، $f \in U([a, b])$ و انتگرال f ، به عنوان تابعی در $U([a, b])$ ، مساوی انتگرال دیمان $\int_a^b f(x) dx$ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{2^n}\}$ یک افراز $[a, b]$ باشد که این بازه را به 2^n زیر بازه متساوی، هر یک به درازای $(b-a)/2^n$ ، تقسیم کند. زیر-بازه های P_{n+1} از نصف کردن زیر بازه های P_n حاصل می شوند. فرض می کنیم

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad 1 \leq k \leq 2^n$$

و تابع پله ای s_n را بر $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$s_n(x) = m_k, \quad x_{k-1} < x \leq x_k, \quad \text{و} \quad s_n(a) = m_1$$

در این صورت، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $s_n(x) \leq f(x)$ ، همچنین، $\{s_n\}$ صعودی است زیرا $\inf f$ در یک زیر بازه $[x_{k-1}, x_k]$ از $\inf f$ در خود $[x_{k-1}, x_k]$ کوچکتر نمی تواند بود.

دیگر آن که، ثابت می کنیم که $s_n(x) \rightarrow f(x)$ در هر نقطه درونی که نقطه پیوستگی f باشد. چون مجموعه ناپیوستگیهای f بر $[a, b]$ دارای اندازه صفر است، پس ثابت می شود که $s_n \rightarrow f$ تقریباً همه جا بر $[a, b]$. هرگاه f در x پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، مقداری مانند δ (وابسته به x و ε) وجود دارد بقسمی که

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon, \quad x - \delta < y < x + \delta$$

فرض می کنیم $m(\delta) = \inf\{f(y) \mid y \in]x - \delta, x + \delta[\}$. در این صورت $f(x) - \varepsilon \leq m(\delta)$ ، پس $f(x) \leq m(\delta) + \varepsilon$. افزایی مانند P_N زیر بازه ای چون $[x_{k-1}, x_k]$ دارد که حاوی x است و در داخل بازه $]x - \delta, x + \delta[$ قرار می گیرد. بنابراین،

$$s_N(x) = m_k \leq f(x) \leq m(\delta) + \varepsilon \leq m_k + \varepsilon = s_N(x) + \varepsilon.$$

اما به ازای هر n ، $s_n(x) \leq f(x)$ ، و به ازای هر $n \geq N$ ، $s_n(x) \leq s_N(x)$ ، از این روی،

$$s_n(x) \leq f(x) \leq s_n(x) + \varepsilon, \quad n \geq N$$

که از این معلوم می شود که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_n(x) \rightarrow f(x)$.

دنباله $\{f_n^b\}$ از انتگرالها همگرا است زیرا که دنباله‌ای است صعودی، که از بالا به $M(b-a)$ کراندار است، که در آن $M = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.
بعلاوه،

$$\int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{r_n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(P_n, f),$$

که در آن $L(P_n, f)$ یک مجموع ریمان پائینی است. چون حد یک دنباله صعودی مساوی سوپریم آن است، پس دنباله $\{f_n^b\}$ به انتگرال ریمان f روی $[a, b]$ همگرا خواهد بود. (بهموجب محک لبگ، یعنی قضیه ۴۸.۷، انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد.)

تبره. همان طور که پیشتر گفته شد، در $U(I)$ تابعهائی مانند f وجود دارند بقسمی که $f \notin U(I)$. — بنابراین، رده $U(I)$ عملاً از رده تابعهائی که بر I انتگرال ریمان دارند بزرگتر است، زیرا که اگر $f \in R$ بر I باشد، $f \in U(I)$ خواهد بود.

۶.۱۰ رده تابعهائی که بر یک بازه کلی انتگرال لبگ دارند

اگر u و v دو تابع بالائی باشند، تفاضل $u - v$ لزوماً تابعی بالائی نیست. این خاصیت نامطلوب را با وسیع کردن رده تابعهائی انتگرالپذیر از بین می‌بریم.

تعریف ۱۲.۱۰ مجموعه همه تابعهائی به شکل $f = u - v$ ، که در آن

$$v \in U(I) \text{ و } u \in U(I)$$

با نماد $L(I)$ نشان می‌دهیم. گوئیم هر تابع مانند f در $L(I)$ بر I انتگرال لبگ دارد، و انتگرال آن‌ها با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۷) \quad \int_I f = \int_I u - \int_I v.$$

اگر $f \in L(I)$ ، ممکن است f را به بیش از یک طریق به صورت تفاضل دو تابع بالائی، یعنی $u - v$ ، درآورد. قضیه زیرین نشان می‌دهد که انتگرال f از انتخاب u و v مستقل است.

قضیه ۱۳.۱۰ فرض کنیم u, v, u_1, v_1 تابعهائی در $U(I)$ باشند بقسمی که $u - v = u_1 - v_1$ در این صورت

$$(۸) \quad \int_I u - \int_I v = \int_I u_1 - \int_I v_1.$$

برهان. تابعهای $u + v_1$ و $u + v$ در $U(I)$ هستند و $u + v_1 = u + v$. از این روی، بنا بر قضیه ۶.۱۰ (آ)، داریم $\int_I u + \int_I v_1 = \int_I u + \int_I v$ ، که از این رابطه (۸) ثابت می‌شود.

تیسر. اگر $a \leq b$ و a و b نقطه‌های انتهائی بازه I در دستکاه عددهای حقیقی وسعت یافته \mathbf{R}^* باشند، ما علامت

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b f$$

را برای انتگرال لیگ $\int_I f$ نیز بکار می‌بریم. و نیز تعریف می‌کنیم که

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

اگر $[a, b]$ بازه‌ای فشرده باشد، هر تابع که بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد در $U([a, b])$ ، و در نتیجه در $L([a, b])$ نیز خواهد بود.

۷.۱۰ خاصیت‌های اساسی انتگرال لیگ

قضیه ۱۴.۱۰ فرض کنیم $f \in L(I)$ و $g \in L(I)$. در این صورت:

(آ) به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، $(af + bg) \in L(I)$ ، و

$$\int_I (af + bg) = a \int_I f + b \int_I g.$$

(ب) هرگاه $f(x) \geq 0$ ، $\forall x \in I$ ، آنگاه $\int_I f \geq 0$.

(ج) هرگاه $f(x) \geq g(x)$ ، $\forall x \in I$ ، آنگاه $\int_I f \geq \int_I g$.

(د) هرگاه $f(x) = g(x)$ ، $\forall x \in I$ ، آنگاه $\int_I f = \int_I g$.

برهان. قسمت (آ) بسادگی از قضیه ۶.۱۰ نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب) می‌نویسیم $f = u - v$ ، که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. در این صورت، $u(x) \geq v(x)$ ، $\forall x \in I$ ، پس بنا بر قضیه ۶.۱۰ (ج)، داریم $\int_I u \geq \int_I v$ ، و در نتیجه،

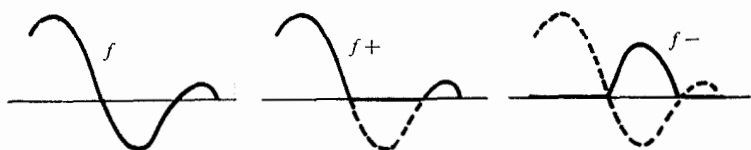
$$\int_I f = \int_I u - \int_I v \geq 0.$$

قسمت (ج) نتیجه کاربرد قسمت (ب) است در مورد $f - g$ ، و قسمت (د) از دو بار

کاربرد (ج) نتیجه می‌گردد.

تعریف ۱۵.۱۰ اگر f تابعی حقیقی باشد، قسمتهای مثبت و منفی آن، بترتیب، با علامتهای f^+ و f^- نشان داده، و با معادله‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0).$$



شکل ۱.۱۰

توجه داشته باشید که f^+ و f^- تابعهائی نامنفی هستند و

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

در شکل ۱.۱۰ مثالهایی آورده شده‌اند.

قضیه ۱۶.۱۰ هرگاه f و g در $L(I)$ باشند، آنگاه تابعهائی f^+ ، f^- ، $|f|$ ، $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ نیز در $L(I)$ هستند. بملاده،

$$(۹) \quad \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

برهان. می‌نویسیم $f = u - v$ که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. در این صورت،

$$f^+ = \max(u - v, 0) = \max(u, v) - v.$$

اما، بنا بر قضیه ۹.۱۰، $\max(u, v) \in U(I)$ و چون $v \in U(I)$ پس $f^+ \in L(I)$. چون $f^- = f^+ - f$ ، ملاحظه می‌شود که $f^- \in L(I)$. بالاخره، از $|f| = f^+ + f^-$ نتیجه می‌شود که $|f| \in L(I)$.

چون به ازای هر x در I ، $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

که از آن (۹) ثابت می‌شود. برای اتمام برهان از رابطه‌های زیرین استفاده می‌کنیم:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

در قضیه زیرین رفتار انتگرال لبگ، وقتی بازه انتگرالگیری در آن منتقل، منبسط یا منقبض شود، و یا نسبت به مبدأ منعکس گردد، شرح داده می‌شود. در این قضیه این نمادها را بکار می‌بریم. به ازای هر عدد حقیقی c ,

$$I + c = \{x + c | x \in I\}, \quad cI = \{cx | x \in I\}.$$

قضیه ۱۷.۱۵ فرض کنیم که $f \in L(I)$ در این صورت:

(آ) نامتغیر بودن انتگرال با انتقال بازه انتگرالگیری. هرگاه به ازای هر x در

$$I + c, \quad g(x) = f(x - c), \quad \text{آنگاه } g \in L(I + c) \text{ و}$$

$$\int_{I+c} g = \int_I f.$$

(ب) رفتار انتگرال با انبساط یا انقباض بازه انتگرالگیری. هرگاه به ازای هر x در

$$cI, \quad g(x) = f(x/c), \quad \text{که در آن } c > 0, \quad \text{آنگاه } g \in L(cI) \text{ و}$$

$$\int_{cI} g = c \int_I f.$$

(ج) نامتغیر بودن انتگرال با انعکاس بازه انتگرالگیری. هرگاه به ازای هر x در $-I$,

$$g(x) = f(-x), \quad \text{آنگاه } g \in L(-I) \text{ و}$$

$$\int_{-I} g = \int_I f.$$

نبره. اگر a و b ، نقطه‌های انتهائی I ، در دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته \mathbb{R}^* باشند و $a < b$ ، دستور مذکور در (آ) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

خاصیتهای مذکور در (ب) و (ج) را می‌توان با دستور واحدی، که شامل c های مثبت و منفی هر دو باشد، بدین صورت بیان نمود:

$$\int_{ca}^{cb} f(x/c) dx = |c| \int_a^b f(x) dx, \quad c \neq 0$$

برهان. در اثبات قضیه‌ای از این نوع، روش استدلال همواره یکی است. نخست قضیه برای تابعهای پله‌ای، سپس برای تابعهای بالائی، و سرانجام برای تابعهایی که انتگرال لبگ دارند تحقیق می‌شود. در هر قدم استدلال سراسر است، بنابراین از ذکر جزئیات صرف نظر می‌شود.

قضیه ۱۸.۱۵ فرض کنیم بازهٔ I اجتماع دو زیربازه، مثلاً $I = I_1 \cup I_2$ باشد، قسمی که I_1 و I_2 نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند.

(آ) هرگاه $f \in L(I)$ ، آنگاه $f \in L(I_1)$ ، $f \in L(I_2)$ و

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

(ب) فرض کنیم $f_1 \in L(I_1)$ ، $f_2 \in L(I_2)$ و تابع f بر I به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x \in I_1 \text{ اگر} \\ f_2(x) & , x \in I - I_1 \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت، $f \in L(I)$ و $\int_I f = \int_{I_1} f_1 + \int_{I_2} f_2$

برهان. می‌نویسیم $f = u - v$ که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$. چون $u = u^+ - u^-$ و $v = v^+ - v^-$ پس $f = u^+ + v^- - (u^- + v^+)$. اگر قضیهٔ ۱۵.۱۵ را در مورد هر یک از تابعهای نامنفی $u^+ + v^-$ و $u^- + v^+$ بکار ببریم، قسمت (آ) نتیجه می‌شود. اثبات قسمت (ب) به خواننده واگذار می‌گردد.

تیسره. قضیهٔ ۱۸.۱۵ را می‌توان برای بازه‌های متشکل از اجتماع تعدادی متناهی از بازه‌هایی که هیچ دو تایی آنها نقطهٔ درونی مشترک نداشته باشند وسعت داد. خواننده می‌تواند این قضیه را برای خود تنظیم نماید.

این بخش را با دو خاصیت تقریب، که بعداً مورد نیاز خواهند بود، خاتمه می‌دهیم. خاصیت نخستین این است که هر تابع مانند f که انتگرال لبگ داشته باشد مساوی فزونی یک تابع بالائی مانند u بر تابعی بالائی و نامنفی با انتگرال کوچک مانند v است. خاصیت دوم این که f مساوی مجموع یک تابع پله‌ای مانند s و تابعی انتگرال‌پذیر با انتگرال کوچک مانند g است. با بیان دقیقتر می‌توان گفت:

قضیهٔ ۱۹.۱۵ فرض کنیم $f \in L(I)$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. در این صورت:

(آ) تابعهایی مانند u و v در $U(I)$ وجود دارند قسمی که $f = u - v$ ، که در آن v نامنفی است. ه. بر I $\int_I v < \varepsilon$.

(ب) تابعی پله‌ای مانند s و تابعی مانند g در $L(I)$ وجود دارند قسمی که $f = s + g$ که در آن $\int_I |g| < \varepsilon$.

برهان. چون $f \in L(I)$ ، می‌توان نوشت $f = u_1 - v_1$ که در آن u_1 و v_1 در $U(I)$ باشند. فرض کنیم $\{t_n\}$ دنباله‌ای باشد که v_1 را تولید کند. چون $\int_I t_n \rightarrow \int_I v_1$ می‌توان N را بقسمی اختیار کرد که $0 \leq \int_I (v_1 - t_N) < \varepsilon$. حال قرار می‌دهیم $u = u_1 - t_N$ و $v = v_1 - t_N$. در این صورت، u و v هر دو در $U(I)$ هستند و $f = u - v = u_1 - v_1 = f$. همچنین، v نامنفی است. ه. بر I $\int_I v < \varepsilon$. از این (آ) ثابت می‌شود.

برای اثبات (ب) از قسمت (آ) استفاده نموده، u و v را در $U(I)$ قسمی اختیار می‌کنیم که $v \geq 0$ ، ه. بر I ،

$$0 \leq \int_I v < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } f = u - v$$

حال تابعی پله‌ای مانند s را چنان برمی‌گزینیم که $0 \leq \int_I (u - s) < \varepsilon/2$ در این صورت،

$$f = u - v = s + (u - s) - v = s + g,$$

که در آن $g = (u - s) - v$ از این روی، $g \in L(I)$ ، و

$$\int_I |g| \leq \int_I |u - s| + \int_I |v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

۸.۱۰ انتگرالگیری لبگ و مجموعه‌های دارای اندازه صفر

قضیه‌های این بخش نشان می‌دهند که رفتار تابعی که انتگرال لبگ دارد بر مجموعه‌ای دارای اندازه صفر به انتگرال آن تأثیری نمی‌گذارد.

قضیه ۲۰.۱۰ فرض کنیم تابع f بر I تعریف شده باشد. هرگاه $f = 0$ تقریباً همه جا بر I ، آنگاه $f \in L(I)$ و $\int_I f = 0$.

برهان. فرض کنیم به ازای هر x در I ، $s_n(x) = 0$. در این صورت، $\{s_n\}$ دنباله‌ای است صعودی از تابعهای پله‌ای که همه جا بر I به صفر همگرا است. از این روی، $\{s_n\}$ تقریباً همه جا بر I به f همگرا خواهد بود. چون $\int_I s_n = 0$ ، پس

دنباله $\{\int_I s_n\}$ همگرا است. بنا براین، f یک تابع بالائی است، در نتیجه $f \in L(I)$ و $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n = 0$.

قضیه ۲۱.۱۵ فرض کنیم تابعهای f و g بر I تعریف شده باشند. هرگاه $f \in L(I)$ و $f = g$ تقریباً همه جا بر I ، آنگاه $g \in L(I)$ و $\int_I f = \int_I g$.

پروهان. قضیه ۲۰.۱۵ را در مورد $f - g$ بکار می‌بریم. در این صورت، $f - g \in L(I)$ و $\int_I (f - g) = 0$ پس $f - g \in L(I)$ و $g = f - (f - g) \in L(I)$ و $\int_I g = \int_I f - \int_I (f - g) = \int_I f$.
مثال. تابع f را بر بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد،} \end{cases}$$

در این صورت، $f = 0$ تقریباً همه جا بر $[0, 1]$ ، پس f بر $[0, 1]$ انتگرال لبگ دارد و انتگرال لبگ آن مساوی صفر است. همان طور که در فصل ۷ خاطر نشان شد، این تابع بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد.

تبره. قضیه ۲۱.۱۵ تعریفی برای انتگرال تابعهایی که تقریباً همه جا بر I تعریف شده باشند پیشنهاد می‌کند. اگر g یک چنین تابعی باشد، و به ازای تابعی مانند $f \in L(I)$ ، $g(x) = f(x)$ تقریباً همه جا بر I ، می‌گوئیم که $g \in L(I)$ و

$$\int_I g = \int_I f.$$

۹.۱۰ قضیه‌های همگرایی یکنوای لوی

اینک به قضیه‌های همگرایی مربوط به انتگرالگیری جمله به جمله دنباله‌های یکنوا از تابعها می‌پردازیم. ما با سه روایت از قضیه معروف لوی آغاز می‌کنیم. نخستین روایت درباره دنباله‌هایی از تابعهای پله‌ای است، دومین روایت درباره دنباله‌هایی از تابعهای بالائی، و سومین درباره دنباله‌هایی است از تابعهایی که انتگرال لبگ دارند. هرچند این قضیه‌ها برای دنباله‌هایی صعودی بیان می‌شوند، نتیجه‌هایی نظیر آنها برای دنباله‌های نزولی نیز معتبر خواهند بود.

قضیه ۲۲.۱۵ (قضیه لوی برای تابعهای پله‌ای). فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای باشد بقسمی که

(آ) $\{s_n\}$ بر بازه I صعودی باشد، و

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$ وجود داشته باشد.

در این صورت، $\{s_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f در $U(I)$ همگرا است، و

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n.$$

پرهان. بی آن که به کلیت خللی وارد آید، می توان فرض کرد که تابعهای پله ای s_n نامنفی باشند. (اگر چنین نباشد، دنباله $\{s_n - s_1\}$ را به جای $\{s_n\}$ در نظر می گیریم. هرگاه قضیه برای $\{s_n - s_1\}$ درست باشد، آنگاه برای $\{s_n\}$ نیز درست خواهد بود.) فرض کنیم D مجموعه x هایی در I باشد که به ازای آنها $\{s_n(x)\}$ واگرا باشد، و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. ثابت می کنیم که D دارای اندازه صفر است. برای این کار نشان می دهیم که D را می توان با دسته ای شمارش پذیر از بازه ها پوشانید، که مجموع درازاهای آنها از ε کمتر باشد.

چون دنباله $\{\int_I s_n\}$ همگرا است، پس به پایای مثبتی مانند M کراندار است. فرض کنیم

$$t_n(x) = \left[\frac{\varepsilon}{2M} s_n(x) \right], \quad x \in I \text{ اگر}$$

که در آن $[y]$ بزرگترین عدد صحیح نایبتر از y را نشان می دهد. در این صورت، $\{t_n\}$ دنباله ای صعودی از تابعهای پله ای است و هر $t_n(x)$ عددی صحیح و نامنفی است.

هرگاه $\{s_n(x)\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{s_n(x)\}$ کراندار است، پس $\{t_n(x)\}$ کراندار است، و در نتیجه، چون هر $t_n(x)$ عددی صحیح است، پس به ازای هر n به قدر کافی بزرگ، $t_{n+1}(x) = t_n(x)$.

هرگاه $\{s_n(x)\}$ واگرا باشد، آنگاه $\{t_n(x)\}$ نیز واگرا است، و به ازای تعدادی نامتناهی از مقدارهای n ، $t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1$. قرار می دهیم

$$D_n = \{x \mid t_{n+1}(x) - t_n(x) \geq 1 \text{ و } x \in I\}.$$

در این صورت، D_n اجتماع تعدادی متناهی بازه است. مجموع درازاهای بازه های موجود در آن را به $|D_n|$ نشان می دهیم. چون

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

پس اگر ثابت کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| < \varepsilon$ ، نشان داده‌ایم که D دارای اندازه صفر است .

برای این مطلب اگر از تابع پله‌ای و نامنفی $t_{n+1} - t_n$ روی I انتگرال بگیریم، نامساویهای زیر نتیجه می‌شوند :

$$\int_I (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} (t_{n+1} - t_n) \geq \int_{D_n} 1 = |D_n| .$$

از این روی، به‌ازای هر $m \geq 1$ داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m |D_n| &\leq \sum_{n=1}^m \int_I (t_{n+1} - t_n) = \int_I t_{m+1} - \int_I t_1 \\ &\leq \int_I t_{m+1} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \int_I s_{m+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} . \end{aligned}$$

بنابراین، $\sum_{n=1}^{\infty} |D_n| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ ، پس D دارای اندازه صفر می‌باشد. پس ثابت شد که $\{s_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I همگرا است . فرض می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) & , \quad x \in I - D \\ 0 & , \quad x \in D \end{cases} \text{ اگر}$$

در این صورت، f همه‌جا بر I تعریف شده است و $s_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا بر I .
بنابراین، $f \in U(I)$ و $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$.

قضیه ۲۳.۱۵ (قضیه لوی برای تابعهای بالائی). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای بالائی باشد قسمی که

(آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر بازه I صعودی باشد ؛

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ وجود داشته باشد .

در این صورت، $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I به تابع حدی مانند f در $U(I)$ همگرا است ، و

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n .$$

برهان . به‌ازای هر k ، دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_{n,k}\}$ هست که f_k را تولید می‌کند. تابع پله‌ای جدید t_n را بر I با معادله زیر تعریف می‌کنیم :

$$t_n(x) = \max \{s_{n,1}(x), s_{n,2}(x), \dots, s_{n,n}(x)\} .$$

دنباله $\{t_n\}$ بر I صعودی است زیرا

$$\begin{aligned} t_{n+1}(x) &= \max \{s_{n+1,1}(x), \dots, s_{n+1,n+1}(x)\} \\ &\geq \max \{s_{n,1}(x), \dots, s_{n,n+1}(x)\} \\ &\geq \max \{s_{n,1}(x), \dots, s_{n,n}(x)\} = t_n(x). \end{aligned}$$

اما $s_{n,k}(x) \leq f_k(x)$ تقریباً همجا بر I صعودی است، پس

$$(10) \quad t_n(x) \leq \max \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} = f_n(x)$$

تقریباً همجا بر I . بنابراین، از قضیه ۶.۱۰ (ج) نتیجه می‌گیریم که

$$(11) \quad \int_I t_n \leq \int_I f_n.$$

اما، بنا بر (ب)، دنباله $\{\int_I f_n\}$ از بالا کراندار است، پس دنباله صعودی $\{\int_I t_n\}$ نیز از بالا کراندار بوده، در نتیجه همگرا خواهد بود. به موجب قضیه لیبی برای تابعهای پله‌ای، دنباله $\{t_n\}$ تقریباً همجا بر I به تابع حدی مانند f در $U(I)$ همگرا است، و $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I t_n$. اینک ثابت می‌کنیم که $f_n \rightarrow f$ تقریباً همجا بر I . از تعریف $t_n(x)$ نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \leq n$ و هر x در I ،

$$s_{n,k}(x) \leq t_n(x).$$

اگر $n \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت

$$(12) \quad f_k(x) \leq f(x) \text{ تقریباً همجا بر } I.$$

بنابراین، دنباله صعودی $\{f_k(x)\}$ تقریباً همجا بر I از بالا به $f(x)$ کراندار است، و در نتیجه این دنباله تقریباً همجا بر I به تابع حدی مانند g همگرا است که $g(x) \leq f(x)$ تقریباً همجا بر I . اما، بنا به رابطه (۱۰)، $t_n(x) \leq f_n(x)$ تقریباً همجا بر I ، پس اگر $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه می‌شود که $f(x) \leq g(x)$ تقریباً همجا بر I . با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) = \int_I f(x) \text{ تقریباً همجا بر } I.$$

سرانجام، نشان می‌دهیم که $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$. اگر در (۱۱) $n \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت

$$(13) \quad \int_I f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

حال، با استفاده دوباره از قضیه ۶.۱۰ (ج)، از رابطه (۱۲) انتگرال می‌گیریم،

نتیجه می‌شود که $\int_I f \leq \int_I f_k$. اگر $k \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_I f_k \leq \int_I f,$$

که این نامساوی و نامساوی (۱۳) برهان حکم را تمام می‌کنند .

تسره . رده تابعهای بالائی، یعنی $U(I)$. از رده تابعهای پله‌ای ، یعنی $S(I)$ ، با روشی ساخته شد که ما آن را P می‌نامیم . بنا بر قضیه لوی، اگر این روش بر عضوهای $U(I)$ اعمال شود ، تابعهای حاصل بازهم در $U(I)$ خواهند بود . قضیه زیر نشان می‌دهد که وقتی P بر عضوهای $L(I)$ اعمال گردد ، تابعهای حاصل باز در $L(I)$ خواهند بود .

قضیه ۳۴.۱۵ (قضیه لوی برای دنباله‌های توابعی که انتگرال لبگ دارند) . فرض کنیم

$\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد قسمی که

(آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I صعودی باشد ؛

و

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ وجود داشته باشد .

در این صورت ، $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا بر I به تابع حدی مانند f در $L(I)$ همگرا خواهد بود ، و

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n .$$

این قضیه را از قضیه‌ای هم‌ارز آن، که دربارهٔ رشته‌های توابع بیان می‌شود ،

نتیجه می‌گیریم .

قضیه ۳۵.۱۵ (قضیه لوی برای رشته‌های توابعی که انتگرال لبگ دارند) . فرض کنیم $\{g_n\}$

دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد قسمی که

(آ) هر g_n تقریباً همه‌جا بر I نامنفی باشد ؛

و

(ب) رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ همگرا باشد .

در این صورت ، رشتهٔ $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه‌جا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا خواهد بود ، و

$$(۱۴) \quad \int_I g = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n .$$

پرهان. چون $g_n \in L(I)$ ، بنا بر قضیه ۱۹.۱۰، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، می توان نوشت

$$g_n = u_n - v_n,$$

که در آن $u_n \in U(I)$ ، $v_n \in U(I)$ ، $v_n \geq 0$ تقریباً همه جا بر I ، و $\int_I v_n < \varepsilon$ ، u_n و v_n را متناظر با $\varepsilon = (1/2)^n$ اختیار می کنیم. در این صورت،

$$\int_I v_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{که در آن} \quad u_n = g_n + v_n$$

نامساوی بالا در مورد $\int_I v_n$ اطمینان می دهد که رشته $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I v_n$ همگرا است. حال گوئیم چون $u_n \geq 0$ تقریباً همه جا بر I ، پس مجموعهای جزئی

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

تشکیل دنباله $\{U_n\}$ از تابعهای بسالائی را می دهد که تقریباً همه جا بر I صعودی است. چون

$$\int_I U_n = \int_I \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_I u_k = \sum_{k=1}^n \int_I g_k + \sum_{k=1}^n \int_I v_k,$$

دنباله $\{\int_I U_n\}$ از انتگرالها همگرا است زیرا هر دو رشته

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k$$

همگرا هستند. بنا بر این، بنا بر قضیه لوی برای تابعهای بسالائی، دنباله $\{U_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند U در $U(I)$ همگرا خواهد بود، و

$$\int_I U = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I U_n.$$

اما

$$\int_I U_n = \sum_{k=1}^n \int_I u_k,$$

پس

$$\int_I U = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k.$$

بهین نحو، دنباله مجموعهای جزئی $\{V_n\}$ ، که به صورت

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

داده می‌شود، تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند V در $U(I)$ همگرا است، و

$$\int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I v_k.$$

بنابراین، $U - V \in L(I)$ و دنباله $\{U_n - V_n\} = \{\sum_{k=1}^n g_k\}$ تقریباً همه جا بر I به $U - V$ همگرا خواهد بود. فرض کنیم که $g = U - V$ در این صورت، $g \in L(I)$ و

$$\int_I g = \int_I U - \int_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I (u_k - v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k.$$

با این برهان قضیه ۲۵.۱۰ تمام می‌شود.

برهان قضیه ۲۴.۱۰ فرض کنیم $\{f_n\}$ در مفروضات قضیه ۲۴.۱۰ صدق کند. فرض می‌کنیم که $g_1 = f_1$ ، و به ازای $n \geq 2$ ، $g_n = f_n - f_{n-1}$ ، پس

$$f_n = \sum_{k=1}^n g_k.$$

با بکار بردن قضیه ۲۵.۱۰ در مورد $\{g_n\}$ ، نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا است، و معادله (۱۴) برقرار است. بنابراین، $g \rightarrow f_n$ تقریباً همه جا بر I و $\int_I g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ در روایتی از قضیه لوی برای رشته‌ها که ذیلاً گفته می‌شود، جمله‌های رشته نامنفی فرض نشده‌اند.

قضیه ۲۶.۱۰ فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L(I)$ باشد بقسمی که داشته

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I |g_n|$$

همگرا باشد. در این صورت، داشته $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابع مجموعی مانند g در $L(I)$ همگرا است، و

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

برهان. می‌نویسیم $g_n = g_n^+ - g_n^-$ و قضیه ۲۵.۱۰ را در مورد دنباله‌های $\{g_n^+\}$ و $\{g_n^-\}$ جداگانه بکار می‌بریم.

مثالهای زیرین کاربرد قضیه لوی در دنباله‌ها را تصور می‌سازند.

مثال ۱ فرض کنید به ازای $x > 0$ ، $f(x) = x^n$ ، و $f(0) = 0$. ثابت کنید

که اگر $s > -1$ ، انتگرال لبگ $\int_0^1 f(x) dx$ وجود دارد و مقدار آن مساوی $1/(s+1)$ است.

حل. هرگاه $s \geq 0$ ، f آنگاه f بر $[0, 1]$ کراندار است و انتگرال ریمان دارد، و انتگرال ریمان آن مساوی $1/(s+1)$ می باشد.

هرگاه $s < 0$ ، f آنگاه f بر $[0, 1]$ کراندار نیست، و در نتیجه بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان ندارد. دنباله‌ای از تابعها مانند $\{f_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^s & \text{اگر } x \geq 1/n \\ 0 & \text{اگر } 0 \leq x < 1/n \end{cases}$$

در این صورت، $\{f_n\}$ صعودی است و $f_n \rightarrow f$ همه جا بر $[0, 1]$. چون هر f_n بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان دارد، پس برای بازه دارای انتگرال لبگ است و

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_{1/n}^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} \left(1 - \frac{1}{n^{s+1}} \right).$$

اگر $s+1 > 0$ ، دنباله $\{f_n\}$ به $1/(s+1)$ همگرا خواهد بود. بنابراین، قضیه لوی برای دنباله‌ها نشان می‌دهد که $\int_0^1 f$ وجود دارد و مساوی $1/(s+1)$ است.

مثال ۲ با بحثی مشابه معلوم می‌شود که، به ازای هر عدد حقیقی $\gamma > 0$ ، انتگرال لبگ $\int_0^1 e^{-x} x^{\gamma-1} dx$ وجود دارد. این انتگرال بعداً در بحث تابع گاما مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۱۰.۱۰ قضیه همگرایی تسلطی لبگ

قضیه‌های لوی نتیجه‌های مهم متعدد دارند. اولین نتیجه قضیه همگرایی تسلطی لبگ است، که پایه نظریه انتگرالگیری لبگ می باشد.

قضیه ۲۷.۱۰ (قضیه همگرایی تسلطی لبگ). فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهایی باشد که بر بازه‌ای چون I انتگرال لبگ داشته باشند. همچنین،

(آ) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f همگرا باشد؛

و

(ب) تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر

$$n \geq 1$$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{ت. ه. بر } I.$$

در این صورت، $f \in L(I)$ ، دنباله $\{ \int_I f_n \}$ همگرا است، و

$$(15) \quad \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

نمونه. خاصیت (ب) را این طور توصیف می کنند که دنباله $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I تحت تسلط g است.

برهان. روش اثبات این است که دو دنباله مانند $\{g_n\}$ و $\{G_n\}$ ، یکی صعودی و دیگری نزولی، بقسمی پیدا می کنیم که

$$(16) \quad g_n(x) \leq f_n(x) \leq G_n(x),$$

و این دو دنباله تقریباً همه جا بر I به تابع حد f همگرا باشند. سپس با بکار بردن قضیه لوی نشان می دهیم که $f \in L(I)$ و $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_n$ که از این رابطه (۱۵) نتیجه خواهد شد.

برای ساختن $\{g_n\}$ و $\{G_n\}$ ، قضیه لوی را چندین بار برای دنباله های موجود در $L(I)$ بکار می بریم. نخست دنباله $\{G_{n,1}\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G_{n,1}(x) = \max \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}.$$

بنابر قضیه ۱۶.۱۰، هر تابع $G_{n,1} \in L(I)$. همچنین، دنباله $\{G_{n,1}\}$ بر I صعودی است. چون $|G_{n,1}(x)| \leq g(x)$ تقریباً همه جا بر I ، پس

$$(17) \quad \left| \int_I G_{n,1} \right| \leq \int_I |G_{n,1}| \leq \int_I g.$$

بنابراین، دنباله صعودی عددی $\{ \int_I G_{n,1} \}$ اربالا به $\int_I g$ کراندار بوده، در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_{n,1}$ وجود دارد. بنابر قضیه لوی، دنباله $\{G_{n,1}\}$ تقریباً همه جا بر I به تابعی مانند G_1 در $L(I)$ همگرا است، و

$$\int_I G_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_{n,1} \leq \int_I g.$$

بنابر (۱۷)، همچنین داریم که $\int_I g \leq \int_I G_1$ — توجه داشته باشید که هرگاه به ازای نقطه x در I ، $G_{n,1}(x) \rightarrow G_1(x)$ ، آنگاه نیز داریم

$$G_1(x) = \sup \{f_1(x), f_2(x), \dots\}.$$

بهین نحو، به ازای هر عدد ثابت $r \geq 1$ و هر $n \geq r$ ، قرار می دهیم

$$G_{n,r}(x) = \max \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\}$$

در این صورت، دنباله $\{G_{n,r}\}$ صعودی است، و تقریباً همهجا بر I به تابع حدی مانند G_r در $L(I)$ همگرا خواهد بود، بطوری که

$$-\int_I g \leq \int_I G_r \leq \int_I g.$$

همچنین، در نقطه‌هایی که $G_{n,r}(x) \rightarrow G_r(x)$ داریم،

$$G_r(x) = \sup \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots\},$$

پس

$$f_r(x) \leq G_r(x) \text{ ت. ه. بر } I.$$

اینک خاصیت‌های دنباله $\{G_n(x)\}$ را بررسی می‌کنیم. چون $A \subseteq B$ ایجاب می‌کند که $\sup A \leq \sup B$ ، دنباله $\{G_r(x)\}$ تقریباً همهجا بر I نزولی است، و در نتیجه تقریباً همهجا بر I همگرا خواهد بود. اکنون نشان می‌دهیم که هرگاه

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

آنگاه $G_n(x) \rightarrow f(x)$. گوئیم هرگاه (۱۸) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N وجود دارد قسمی که

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad n \geq N$$

از این روی، اگر $m \geq N$

$$f(x) - \varepsilon \leq \sup \{f_m(x), f_{m+1}(x), \dots\} \leq f(x) + \varepsilon.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که،

$$f(x) - \varepsilon \leq G_m(x) \leq f(x) + \varepsilon \text{ که } m \geq N \text{ ایجاب می‌کند}$$

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$(19) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x) = f(x) \text{ تقریباً همه جا بر } I.$$

از سوی دیگر، دنباله نزولی عددی $\{\int_I G_n\}$ از پائین به $\int_I g$ کراندار است، پس همگرا است. از رابطه (۱۹) و قضیه لوی معلوم می‌شود که $f \in L(I)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_n = \int_I f.$$

با بکار بردن استدلالی مشابه بالا در مورد دنباله

$$g_{n,r}(x) = \min \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots, f_n(x)\}, n \geq r,$$

نتیجه می شود که دنباله $\{g_{n,r}\}$ نزولی است و تقریباً همه جا به تابع حدی مانند g_r در $L(I)$ همگرا است، که در آن

$$g_r(x) = \inf \{f_r(x), f_{r+1}(x), \dots\} \text{ بر } I.$$

همچنین، تقریباً همه جا بر I ، $g_r(x) \leq f_r(x)$ ، صعودی است، $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n = \int_I f.$$

چون رابطه (۱۶) تقریباً همه جا بر I برقرار است، پس $\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq \int_I G_n$ حال اگر $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه می شود که دنباله $\{\int_I f_n\}$ همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

۱۱.۱۰ کاربرد های قضیه همگرایی تسلطی لبگ

اولین کاربرد این قضیه مربوط است به انتگرال گرفتن جمله به جمله از یک رشته، و آن را می توان لنگه قضیه لوی برای رشتهها بحساب آورد.

قضیه ۴۸.۱۰ فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله ای از تابعها در $L(I)$ باشد بقسمی که :

(آ) هر g_n تقریباً همه جا بر I نامنفی باشد ؛

(ب) رشته $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابعی چون g همگرا باشد، که از بالا به تابعی در $L(I)$ کراندار باشد .

در این صورت، $g \in L(I)$ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n$ همگرا است، و

$$\int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g_n.$$

برهان. فرض می کنیم

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x), x \in I$$

در این صورت، $f_n \rightarrow g$ تقریباً همه جا بر I ، و $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I تحت تسلط

تابعی در $L(I)$ است که g از بالا به آن کراندار است. بنابراین، بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لیگ، $g \in L(I)$ ، دنباله $\{\int_I f_n\}$ همگرا است، و $\int_I g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ از این حکم ثابت می شود.

کاربرد دیگر، که گاهی قضیه همگرایی کراندار لیگ نامیده می شود، مربوط است به بازه های کراندار.

قضیه ۲۹.۱۵ فرض کنیم I بازه ای کراندار باشد. همچنین، $\{f_n\}$ دنباله ای از تابعها در $L(I)$ باشد که تقریباً همه جا بر I همگرای کراندار باشد. یعنی، تابع حدی مانند f و عددی پایا و مثبت مانند M وجود داشته باشد بقسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ و } |f_n(x)| \leq M \text{ تقریباً همه جا بر } I.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f \text{ و } f \in L(I) \text{ در این صورت،}$$

پروهان. به ازای هر x در I ، قرار می دهیم $g(x) = M$ ، و قضیه ۲۷.۱۰ را بکار می بریم. چون I بازه کراندار است، پس $g \in L(I)$.

تفسیر. حالت خاصی از قضیه ۲۹.۱۵ قضیه آرزو است که قبلاً (قضیه ۱۲.۹) ذکر شده است. هرگاه $\{f_n\}$ دنباله ای از تابعهائی باشد که بر بازه فشرده $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشند و این دنباله بر این بازه همگرای کراندار باشد، آنگاه هر $f_n \in L([a, b])$ ، تابع حد $f \in L([a, b])$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

هرگاه (همان طور که در قضیه آرزو فرض شده بود) تابع حد f انتگرال ریمان داشته باشد، آنگاه انتگرال لیگ $\int_a^b f$ همان انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ خواهد بود. قضیه زیرین اغلب برای اثبات انتگرال لیگ داشتن تابعها بکار می رود.

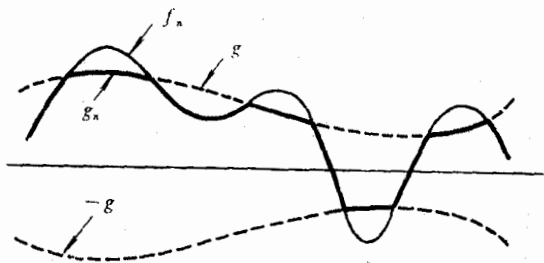
قضیه ۳۰.۱۵ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای باشد از تابعها در $L(I)$ که تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f همگرا باشد. همچنین، تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$ باشد بقسمی که

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ ت. ه. بر } I.$$

$$\text{در این صورت، } f \in L(I).$$

پروهان. دنباله ای جدید از تابعها مانند $\{g_n\}$ را بر I به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g_n = \max\{\min(f_n, g), -g\}.$$



شکل ۲.۱۰

تابع g_n از f_n به طور هندسی این طور بدست می آید که نمودار f_n را از بالا به وسیله g و از پایین به وسیله $-g$ قطع کنیم، بقسمی که در مثال مذکور در شکل ۲.۱۰ نشان داده شده است. در این صورت، $|g_n(x)| \leq g(x)$ تقریباً همه جا بر I ، و بسادگی می توان تحقیق کرد که $g_n \rightarrow f$ تقریباً همه جا بر I . بنابراین، بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لبگ، $f \in L(I)$.

۱۲.۱۰ انتگرالهای لبگ بر بازه های بی کران به عنوان حدود انتگرالها بر بازه های کراندار

قضیه ۳۱.۱۰ فرض کنیم f بر بازه نیمه نامتناهی $I = [a, +\infty[$ تعریف شده باشد. همچنین، به ازای هر $b \geq a$ ، f بر بازه فشرده $[a, b]$ انتگرال لبگ داشته باشد، و عدد پایا و مثبتی مانند M وجود داشته بقسمی که

$$(۲۰) \quad \int_a^b |f| \leq M, \quad b \geq a$$

در این صورت، $f \in L(I)$ ، حد $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f$ وجود دارد، و

$$(۲۱) \quad \int_a^{+\infty} f = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

برهان. فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله ای صعودی از اعداد های حقیقی باشد بقسمی که $b_n \geq a$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. دنباله $\{f_n\}$ را بر I به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b_n \\ 0 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

بنابر قضیه ۱۸.۱۰، هر $f_n \in L(I)$ ، و $f_n \rightarrow f$ بر I . از این روی، $|f_n| \rightarrow |f|$ بر I . ولی $|f_n|$ صعودی است، و بنابر (۲۰)، دنباله $\{\int_I |f_n|\}$ از بالا به M کراندار است. بنابراین، $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n|$ وجود دارد. بنابر قضیه لوی، تابع حد $|f| \in L(I)$. حال گوئیم چون به ازای هر n ، $|f_n| \leq |f|$ ، و $f_n \rightarrow f$ بر I ، پس بنابر قضیه همگرایی تسلطی لبگ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$ و $f \in L(I)$.
بنابراین، به ازای همه دنباله‌هائی مانند $\{b_n\}$ که به $+\infty$ صعود کنند،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^{+\infty} f.$$

از این برهان قضیه تمام می‌شود.

البته قضیه‌ای نظیر قضیه بالا برای بازه $[a, -\infty)$ وجود دارد که در صورتی که به ازای هر $c \leq a$ ، $\int_c^a |f| \leq M$ ، بدین نتیجه می‌رسد:

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f.$$

اگر به ازای همه عددهای حقیقی c و b با شرط $c \leq b$ ، داشته باشیم $\int_c^b |f| \leq M$ ، از دو قضیه بالا برمی‌آید که $f \in L(\mathbb{R})$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

مثال ۱ فرض می‌کنیم به ازای هر x در \mathbb{R} ، $f(x) = 1/(1+x^2)$. ثابت می‌کنیم که $f \in L(\mathbb{R})$ و $\int_{\mathbb{R}} f = \pi$. گوئیم f نامنفی است، و اگر $c \leq b$ ،

$$\int_c^b f = \int_c^b \frac{dx}{1+x^2} = \arctan b - \arctan c \leq \pi.$$

بنابراین، $f \in L(\mathbb{R})$ و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

مثال ۲ در این مثال حد طرف راست (۲۱) وجود دارد اما $f \notin L(I)$. فرض می‌کنیم که $I = [0, +\infty[$ ، و تابع f را بر I به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{اگر } n-1 \leq x < n, \quad n = 1, 2, \dots$$

اگر $b > 0$ ، قرار می‌دهیم $m = [b]$ ، یعنی بزرگترین عدد صحیح نایشتتر از b .

در این صورت،

$$\int_0^b f = \int_0^m f + \int_m^b f = \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(b-m)(-1)^{m+1}}{m+1}$$

وقتی که $b \rightarrow +\infty$ ، آخرین جمله طرف راست رابطه بالا به صفر می‌گراید، و در نتیجه

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2.$$

حال فرض می‌کنیم که $f \in L(I)$ و تناقضی بدست می‌آوریم. f_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)|, & 0 \leq x \leq n \\ 0, & x > n \end{cases}$$

به ازای $x \leq n$ ،
به ازای $x > n$ ،

در این صورت، $\{f_n\}$ صعودی است و $|f(x)| \rightarrow f_n(x)$ همه جا بر I . چون $f \in L(I)$ ، همچنین داریم $|f| \in L(I)$. اما $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ همه جا بر I ، پس، بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لبگ، دنباله $\{\int_I f_n\}$ همگرا است. ولی این یک تناقض است زیرا

$$\int_I f_n = \int_0^n |f| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$

۱۳.۱۰ انتگرالهای ریمان مجازی

تعریف ۳۳.۱۰ هرگاه به ازای هر $b \geq a$ تابع f بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد، و حد

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

نیز وجود داشته باشد، آنگاه گوئیم که f بر بازه $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارد، و انتگرال ریمان مجازی f با $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ یا $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ نشان داده می‌شود و با معادله زیرین تعریف می‌گردد:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

در مثال ۲ بخش پیشین، انتگرال ریمان مجازی $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ وجود دارد

اما f بر $[0, +\infty[$ انتگرال لیبگ ندارد. آن مثال را باید با قضیه زیرین مقابله و مقایسه کرد.

قضیه ۳۳.۱۵ فرض کنیم به ازای هر $b \geq a$ ، تابع f بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد. همچنین، عددی پایا و مثبت مانند M وجود داشته باشد بقسمی که

$$(۲۲) \quad \int_a^b |f(x)| dx \leq M, \quad b \geq a$$

به ازای هر $b \geq a$

در این صورت، f و $|f|$ هر دو بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارند. همچنین، f بر $[a, +\infty[$ انتگرال لیبگ دارد و انتگرال لیبگ f مساوی است با انتگرال ریمان مجازی f .

برهان. قرار می‌دهیم $F(b) = \int_a^b |f(x)| dx$. F تابعی است صعودی که از بالا به M کراندار است، پس $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$ وجود دارد. بنا براین، $|f|$ بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی خواهد داشت. چون

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|,$$

پس حد

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \{|f(x)| - f(x)\} dx$$

نیز وجود دارد؛ از این روی، $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد. این ثابت می‌کند که f بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارد. حال با استفاده از نامساوی (۲۲) و قضیه ۳۱.۱۵، می‌توان نتیجه گرفت که f بر $[a, +\infty[$ انتگرال لیبگ دارد و انتگرال لیبگ f مساوی است با انتگرال ریمان مجازی f .

تبره. نتایجی نظیر آنچه دیدیم برای انتگرالهای ریمان مجازی به شکل

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c^-} \int_a^b f(x) dx,$$

و

$$\int_c^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow c^+} \int_a^b f(x) dx$$

وجود دارند، که خواننده می‌تواند آنها را برای خود تنظیم نماید.

اگر هر دو انتگرال $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ و $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ وجود داشته باشند، گوئیم انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ وجود دارد، و مقدار آن مساوی مجموع دو انتگرال بالا تعریف می‌شود، یعنی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ وجود داشته باشد، مقدار آن نیز مساوی است با حد تقارنی

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b f(x) dx.$$

در هر حال، توجه به این نکته مهم است که ممکن است حد تقارنی وجود داشته باشد حتی اگر انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ وجود پیدا نکند (مثلاً، به ازای هر x ، فرض کنید که $f(x) = x$). در این حالت حد تقارنی مقدار عمده‌کشی $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ نامیده می‌شود. بنابراین، $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ دارای مقدار عمده‌کشی ۰ است، اما خود انتگرال وجود ندارد.

مثال ۱ فرض می‌کنیم $f(x) = e^{-x} x^{y-1}$ ، که در آن y عدد حقیقی ثابتی باشد. چون وقتی که $x \rightarrow +\infty$ ، $e^{-x/y} x^{y-1} \rightarrow 0$ ، عددی پایا مانند M وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر $x \geq 1$ ، $e^{-x/y} x^{y-1} \leq M$. چون

$$e^{-x} x^{y-1} \leq M e^{-x/y},$$

پس

$$\int_1^b |f(x)| dx \leq M \int_0^b e^{-x/y} dx = 2M(1 - e^{-b/y}) < 2M.$$

از این روی، به‌ازای هر عدد حقیقی y ، انتگرال $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx$ هم به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان یک انتگرال لِبِگ، وجود دارد.

مثال ۲ انتگرال تابع گاما. اگر انتگرال مثال ۱ را به انتگرال

$$\int_0^1 e^{-x} x^{y-1} dx$$

مذکور در مثال ۲ از بخش ۹.۱۰ اضافه کنیم، می‌بینیم که انتگرال لِبِگ

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx$$

به‌ازای هر عدد حقیقی $y > 0$ وجود دارد. تابع Γ که بدین‌صورت تعریف می‌شود

به تابع گاما معروف است. مثال ۴ در زیر رابطه آن را با تابع زتای ریمان نشان می‌دهد.

تصور. بسیاری از قضیه‌های فصل ۷ در مورد انتگرالهای ریمان را می‌توان به قضیه-هائی درباره انتگرالهای ریمان مجازی بدل کرد. برای مصور کردن روش سرراستی که با آن بتوان بعضی از این توسیعه‌ها را انجام داد، به دستور انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء توجه می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

چون b در سه جمله معادله بالا ظاهر شده است، وقتی که $b \rightarrow +\infty$ ، در این معادله سه حد ظاهر خواهند شد. اگر دوتا از این حدها وجود داشته باشند، سومی نیز وجود دارد و دستور زیر بدست می‌آید:

$$\int_a^{\infty} f(x)g'(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^{\infty} g(x)f'(x) dx.$$

قضیه‌های دیگر انتگرالهای ریمان را می‌توان تقریباً به همین روش به انتگرال-های ریمان مجازی وسعت داد. اما برای این کار نیازی به توضیح بیش از این نیست، زیرا که در هر مورد خاص، کافی است قضیه موردنظر را ابتدا در مورد بازه فشرده‌ای مانند $[a, b]$ بکار برد و سپس $b \rightarrow +\infty$.

مثال ۳ معادله تابعی $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$. اگر $0 < a < b$ ، با انتگرال-گیری به طریقه جزء به جزء بدست می‌آید:

$$\int_a^b e^{-x}x^y dx = a^ye^{-a} - b^ye^{-b} + y \int_a^b e^{-x}x^{y-1} dx.$$

اگر $a \rightarrow 0+$ و $b \rightarrow +\infty$ ، نتیجه می‌شود که $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.

مثال ۴ نمایش انتگرالی برای تابع زتای ریمان. تابع زتای ریمان ζ به ازای $s > 1$ با معادله

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

تعریف می‌شود. این مثال نشان می‌دهد که چگونه می‌توان قضیه همگرایی لوی برای

رشته‌ها را بکار برد تا نمایش انتگرالی زیر بدست آید :

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

انتگرال دستور بالا به‌عنوان انتگرال لبتگ وجود دارد .

در انتگرال برای $\Gamma(s)$ تغییر متغیر $t = nx$ با $n > 0$ را می‌دهیم ، نتیجه می‌شود که

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = n^s \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

از این روی، اگر $s > 0$ ،

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

اگر $s > 1$ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ همگرا است، پس

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx,$$

و رشته طرف راست رابطه بالا همگرا است. چون انتگرالده نامنفی است، بنابراین قضیه همگرایی لوی (قضیه ۲۵۰۱۰)، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1}$ تقریباً همه جا بر $[0, +\infty[$ به تابع مجموعی همگرا است، و این تابع مجموع بر این بازه انتگرال لبتگ دارد، و

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx.$$

اما اگر $x > 0$ ، داریم $1 > e^{-x} > 0$ ، و در نتیجه

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1},$$

زیرا رشته بالا یک رشته هندسی است. بنابراین،

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} = \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}$$

تقریباً همه جا بر $[0, +\infty[$ ، در حقیقت همه جا جز در 0 ، پس

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

۱۴.۱۰ تابعهای اندازه‌پذیر

هر تابع مانند f که بر بازه‌ای مانند I انتگرال لیگ داشته باشد، تقریباً همه جا بر I ، تابع حد دنباله‌ای است از تابعهای پله‌ای. اما! عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً، تابع پایای $f = 1$ بر خط حقیقی \mathbb{R} تابع حد دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای است، اما این تابع در $L(\mathbb{R})$ نیست. بنا بر این، رده‌ی تابعهای که حد دنباله‌هایی از تابعهای پله‌ای هستند از رده‌ی تابعهایی که انتگرال لیگ دارند وسیعتر است. تابعهای موجود در این رده‌ی وسیعتر تابعهای اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

تعریف ۳۴.۱۰ تابع f که بر I تعریف شده باشد اندازه‌پذیر می‌نامیم، می‌نویسیم $f \in M(I)$ ، در صورتی که دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ بر I وجود داشته باشد قسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \text{ تقریباً همه جا بر } I.$$

تصور. هرگاه f بر I اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f بر هر زیر بازه‌ی I نیز چنین است.

همان طور که قبلاً ذکر شد، هر تابع در $L(I)$ بر I اندازه‌پذیر است، ولی عکس این مطلب صحیح نیست. قضیه‌ی زیر عکس جزئی حکم بالا است.

قضیه ۳۵.۱۰ هرگاه $f \in M(I)$ و به‌ازای تابعی نامنفی مانند g در $L(I)$ ، $|f(x)| \leq g(x)$ تقریباً همه جا بر I آنگاه $f \in L(I)$.

پروهان. دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ هست قسمی که $s_n(x) \rightarrow f(x)$ تقریباً همه جا بر I . اینک با بکار بردن قضیه ۳۵.۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که

$$f \in L(I).$$

نتیجه ۱. هرگاه $f \in M(I)$ و $|f| \in L(I)$ ، آنگاه $f \in L(I)$.

نتیجه ۲. هرگاه f بر بازه‌ی کراندار I اندازه‌پذیر و کراندار باشد، آنگاه

$$f \in L(I).$$

خاصیتهای دیگر تابعهای اندازه‌پذیر در قضیه‌ی زیر داده شده‌اند.

قضیه ۳۶.۱۰ فرض کنیم تابع حقیقی φ بر \mathbb{R}^+ پیوسته باشد. اگر $f \in M(I)$ و $g \in M(I)$ ، تابع h در I با معادله‌ی زیرین تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \varphi[f(x), g(x)].$$

در این صورت، $h \in M(I)$ ، خصوصاً، $f + g$ ، $f \cdot g$ ، $|f|$ ، $\max(f, g)$ و

$\min(f, g)$ در $M(I)$ هستند. همچنین، اگر $f(x) \neq 0$ تقریباً همه جا بر I ،

$$\frac{1}{f} \in M(I).$$

پروهان. فرض کنیم $\{s_n\}$ و دنباله‌هایی از تابعهای پله‌ای را نشان دهند که $s_n \rightarrow g$ و $t_n \rightarrow f$ تقریباً همه جا بر I . در این صورت، تابع $u_n = \varphi(s_n, t_n)$ تابعی است پله‌ای و $u_n \rightarrow h$ تقریباً همه جا بر I . از این روی $h \in M(I)$. قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر حدود دنباله‌های توابع موجود در $M(I)$ را به این مجموعه بیفزائیم، $M(I)$ وسیعتر نخواهد شد.

قضیه ۳۷.۱۰ فرض کنیم f بر I تعریف شده باشد و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعهای اندازه‌پذیر بر I باشد، که $f_n(x) \rightarrow f(x)$ تقریباً همه جا بر I . در این صورت، f بر I اندازه‌پذیر است.

پروهان. تابع مثبت و دلخواهی مانند g در $L(I)$ ، مثلاً،

$$x \in I, \quad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم

$$F_n(x) = g(x) \frac{f_n(x)}{1 + |f_n(x)|}, \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } I,$$

در این صورت،

$$F_n(x) \rightarrow \frac{g(x)f(x)}{1 + |f(x)|} \quad \text{تقریباً همه جا بر } I.$$

فرض می‌کنیم که $F(x) = g(x)f(x)/\{1 + |f(x)|\}$. چون هر F_n بر I اندازه‌پذیر است و به ازای هر x ، $|F_n(x)| < g(x)$ ، پس، بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، هر $F_n \in L(I)$. همچنین، به ازای هر x در I ، $|F(x)| < g(x)$ ، پس، به موجب قضیه ۳۰.۱۰، $F \in L(I)$ ، و در نتیجه $F \in M(I)$. چون به ازای هر x در I ،

$$\begin{aligned} f(x)\{g(x) - |F(x)|\} &= f(x)g(x)\left\{1 - \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|}\right\} \\ &= \frac{f(x)g(x)}{1 + |f(x)|} = F(x), \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{F(x)}{g(x) - |F(x)|}$$

بنابراین، چون هر F, g ، و $|F|$ در $M(I)$ است و به ازای هر x در I ،

$$g(x) - |F(x)| > 0$$

پس $f \in M(I)$.

تصوره. تابعهائی هستند که اندازه ناپذیرند، ولی قضیه های قبل نشان می دهند که ساختن مثالهایی از آنها آسان نیست. اگر اعمال متداول در آنالیز بر تابعهای اندازه پذیر انجام شوند، حاصلها توابعی اندازه پذیر خواهند بود. بنابراین، هر تابعی که در عمل با آن مواجه می شویم محتملاً اندازه پذیر است. (برای مشاهده مثالی از تابعهای اندازه ناپذیر، ر. ک. تمرین ۰۳۷.۱۰)

۱۵.۱۰ پیوستگی تابعهائی که به وسیله انتگرالهای لبگ تعریف شده اند

فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی از دو متغیر حقیقی که بر یک زیرمجموعه \mathbb{R}^2 به شکل $X \times Y$ ، که در آن X و Y یک زیر بازه کلی \mathbb{R} است، تعریف شده باشد. بسیاری از تابعها در آنالیز به صورت انتگرالهایی به شکل

$$F(y) = \int_x f(x, y) dx$$

ظاهر می شوند. ما سه قضیه را مورد بحث قرار می دهیم که پیوستگی، مشتق پذیری، و انتگرال پذیری از انتگرالده f به تابع F را انتقال می دهند. اولین قضیه راجع به پیوستگی است.

قضیه ۳۸.۱۰ فرض کنیم X و Y دو زیر بازه \mathbb{R} باشند، و تابع f بر $X \times Y$ تعریف شده باشد و در شرطهای زیرین صدق کند:

(آ) به ازای هر y ثابت در Y ، تابع f_y که بر X با معادله

$$f_y(x) = f(x, y)$$

تعریف شده باشد بر X اندازه پذیر باشد؛

(ب) تابعی نامنفی مانند g در $L(X)$ باشد قسمتی که به ازای هر y در Y ،

$$|f(x, y)| \leq g(x) \quad \text{ت. ۰.۵ بر } X$$

(ج) به ازای هر y ثابت در Y ،

$$\lim_{t \rightarrow y} f(x, t) = f(x, y) \quad \text{ت. ۵. ۰ بر } X$$

در این صورت، انتگرال لیبگ $\int_X f(x, y) dx$ به ازای هر y در Y وجود دارد، وقایع F که با معادله

$$F(y) = \int_X f(x, y) dx$$

تعریف می شود بر Y پیوسته است. یعنی، اگر $y \in Y$

$$\lim_{t \rightarrow y} \int_X f(x, t) dx = \int_X \lim_{t \rightarrow y} f(x, t) dx$$

پوهان. چون f_y بر X اندازه پذیر است و تقریباً همه جا بر X تحت تسلط تابعی نامنفی مانند g در $L(X)$ است، پس بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، $f_y \in L(X)$. با بیان دیگر می توان گفت که، به ازای هر y در Y ، انتگرال لیبگ $\int_X f(x, y) dx$ وجود دارد.

حال y ثابتی در Y اختیار نموده، فرض می کنیم که $\{y_n\}$ دنباله ای از نقطه ها در Y باشد بسمی که $\lim y_n = y$. ثابت می کنیم که $\lim F(y_n) = F(y)$. قرار می دهیم $G_n(x) = f(x, y_n)$. هر $G_n \in L(X)$ ، و از فرض (ج) معلوم می شود که $G_n(x) \rightarrow f(x, y)$ تقریباً همه جا بر X . توجه داشته باشید که $F(y_n) = \int_X G_n(x) dx$. چون (ب) برقرار است، بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لیبگ، دنباله $\{F(y_n)\}$ همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \int_X f(x, y) dx = F(y).$$

مثال ۱ پیوستگی تابع گاما:

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} dx, \quad y > 0$$

قضیه ۳۸.۱۰ را با $X = [0, +\infty[$ و $Y =]0, +\infty[$ بکار می بریم. به ازای $y > 0$ ، انتگرالده، به عنوان تابعی از x ، تقریباً همه جا بر X پیوسته (و در نتیجه اندازه پذیر) است، پس (آ) برقرار است. به ازای هر $x > 0$ ثابت، انتگرالده، به عنوان تابعی از y ، بر Y پیوسته است، پس (ج) برقرار خواهد بود. بالاخره، صحت (ب) را تحقیق می کنیم، و این کار را نه بر Y بلکه بر هر زیربازه فشرده $[a, b]$ ، که در آن $0 < a < b$ ، انجام می دهیم. گوئیم به ازای هر y در $[a, b]$ ، انتگرالده تحت تسلط تابع زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1} & , 0 < x \leq 1 \text{ اگر} \\ Me^{-x/2} & , x \geq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

که در آن M پایای مثبتی است. بنا بر قضیه ۱۸.۱۰، تابع g بر X انتگرال لیبگ دارد، پس از قضیه ۳۸.۱۰ معلوم می‌شود که Γ بر $[a, b]$ پیوسته است. اما چون این مطلب برای هر زیر بازه $[a, b]$ درست است، پس Γ بر $]0, +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

مثال ۲ پیوستگی

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

به‌ازای $y > 0$ در این مثال فرض بر این است که خارج قسمت $(\sin x)/x$ به‌ازای $x = 0$ مساوی ۱ باشد. فرض می‌کنیم

$$Y =]0, +\infty[\text{ و } X = [0, +\infty[$$

شرطهای (آ) و (ج) قضیه ۳۸.۱۰ در این جا برقرار هستند. مانند مثال ۱، صحت شرط (ب) را بر هر زیر بازه مانند $Y_a = [a, +\infty[$ که در آن $a > 0$ ، تحقیق می‌کنیم. چون $|(\sin x)/x| \leq 1$ ، انتگرالده بر Y_a تحت تسلط تابع

$$g(x) = e^{-ax}, \quad x \geq 0,$$

است. چون g بر X انتگرال لیبگ دارد، پس به‌ازای هر $a > 0$ ، تابع F بر Y_a پیوسته است؛ از این روی F بر $]0, +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

برای آن که مورد استعمال دیگری از قضیه همگرایی تسلطی لیبگ را مصور کنیم ثابت می‌کنیم که وقتی که $y \rightarrow +\infty$ ، $F(y) \rightarrow 0$.

فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی باشد بقسمی که $y_n \geq 1$ ، و وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $y_n \rightarrow +\infty$ ، ثابت می‌کنیم که وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $F(y_n) \rightarrow 0$ فرض می‌کنیم

$$f_n(x) = e^{-xy_n} \frac{\sin x}{x}, \quad x \geq 0 \text{ هر به‌ازای}$$

در این صورت، $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ تقریباً همه جا بر $]0, +\infty[$ ، در حقیقت، به‌ازای هر x جز ۰. اما

اگر $y_n \geq 1$ ، به‌ازای هر $x \geq 0$ ، لازم می‌آید که $|f_n(x)| \leq e^{-x}$

و نیز، به ازای هر $b > 0$ ، هر f_n بر $[0, b]$ انتگرال ریمان دارد و

$$\int_0^b |f_n| \leq \int_0^b e^{-x} dx < 1.$$

بنابراین، به موجب قضیه ۳۳.۱۰، f_n بر $[0, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد. چون دنباله $\{f_n\}$ تحت تسلط تابع $g(x) = e^{-x}$ است و این تابع بر $[0, +\infty[$ انتگرال لبگ دارد، پس، بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لبگ، دنباله $\{f_n\}$ همگرا است و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0.$$

اما $\int_0^{+\infty} f_n = F(y_n) \rightarrow 0$ ، پس وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $F(y_n) \rightarrow 0$ از این روی، وقتی که $y \rightarrow +\infty$ ، $F(y) \rightarrow 0$.

تیسره. در اکثر مطالب زیر، با انتگرالهای سروکار خواهیم داشت که در آنها خارج قسمت $(\sin x)/x$ وجود دارد. فرض بر این است که همیشه به جای این خارج قسمت در $x = 0$ مقدار ۱ را قرار دهیم. بهمین نحو، به جای خارج قسمتی به شکل $(\sin xy)/x$ در $x = 0$ مقدار y ، یعنی حد آن وقتی که $x \rightarrow 0$ ، در نظر گرفته خواهد شد. به طور کلیتر، اگر انتگرالدهی در بعضی از نقطه‌های تنها در بازه انتگرالگیری دارای ناپیوستگیهای رفع شدنی باشد، قرار بر این است که با تعریف مجدد آن به طور مناسب در این نقطه‌های استثنائی این ناپیوستگیها را «از بین ببریم». در نقطه‌هایی که انتگرالده تعریف نشده باشد، مقدار آن صفر فرض می‌شود.

۱۶.۱۰ مشتقگیری زیر علامت انتگرال

قضیه ۳۹.۱۰ فرض کنیم X و Y دو زیربازه R باشند، و f را تابعی می‌انگاریم که بر $X \times Y$ تعریف شده باشد و در شرطهای زیرین صدق کند:

(آ) به ازای هر y ثابت در Y ، تابع f_y که بر X با معادله

$$f_y(x) = f(x, y)$$

تعریف شود بر X اندازه‌پذیر باشد، و به ازای a ی در Y ، $f_a \in L(X)$ ؛

(ب) به ازای هر نقطه درونی $X \times Y$ مانند (x, y) ، مشتق جزئی $D_y f(x, y)$ وجود داشته باشد؛

(ج) تابعی نامنفی مانند G در $L(X)$ باشد بقسمی که

$$|D_{\nu}f(x, y)| \leq G(x), \quad X \times Y$$

به ازای هر نقطه درونی $X \times Y$ ، انتگرال لیگ $\int_X f(x, y) dx$ وجود دارد، و تابع F که با معادله

$$F(y) = \int_X f(x, y) dx$$

تعریف شود در هر نقطه درونی Y مشتقپذیر است. بعلاوه، مشتق آن از دستور زیرین بدست می آید:

$$F'(y) = \int_X D_{\nu}f(x, y) dx.$$

تبره. گفته می شود که $F'(y)$ با مشتقگیری زیر علامت انتگرال بدست آمده است.

پوهان. ابتدا نامساوی زیر را ثابت می کنیم: به ازای هر نقطه درونی $X \times Y$ مانند (x, y)

$$(۲۳) \quad |f_y(x)| \leq |f_x(x)| + |y - a|G(x).$$

از قضیه مقدار میانگین معلوم می شود که مقداری مانند c بین a و y وجود دارد که به ازای آن

$$f(x, y) - f(x, a) = (y - a)D_{\nu}f(x, c).$$

چون $|D_{\nu}f(x, c)| \leq G(x)$ ، از رابطه بالا نتیجه می گیریم که

$$|f(x, y)| \leq |f(x, a)| + |y - a|G(x),$$

که همان رابطه (۲۳) است. چون f_y بر X اندازه پذیر است و تقریباً همه جا بر X تحت تسلط تابعی نامنفی در $L(X)$ است، بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، $f_y \in L(X)$. با بیان دیگر می توان گفت که به ازای هر y در Y ، انتگرال $\int_X f(x, y) dx$ وجود دارد.

حال دنباله ای مانند $\{y_n\}$ از نقطه ها در Y بقسمی اختیار می کنیم که هر $y_n \neq y$ اما $\lim y_n = y$. دنباله $\{q_n\}$ از تابعها بر X را با معادله زیرین تعریف می کنیم:

$$q_n(x) = \frac{f(x, y_n) - f(x, y)}{y_n - y}.$$

در این صورت، $q_n \in L(X)$ ، و در هر نقطه درونی X ، $D_\gamma f(x, y) \rightarrow q_n(x)$. از قضیه مقدار میانگین معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند c_n بین y و y_n هست که به ازای آن $q_n = D_\gamma f(x, c_n)$. از این، بنا بر (ج)، $|q_n(x)| \leq G(x)$ تقریباً همه جا بر X . قضیه همگرایی تسلطی لبگ نشان می‌دهد که دنباله $\{\int_X q_n\}$ همگرا است، انتگرال $\int_X D_\gamma f(x, y) dx$ وجود دارد، و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X q_n = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \int_X D_\gamma f(x, y) dx.$$

اما

$$\int_X q_n = \frac{1}{y_n - y} \int_X \{f(x, y_n) - f(x, y)\} dx = \frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y}.$$

چون به ازای هر دنباله مانند $\{y_n\}$ ، آخرین خارج قسمت مذکور در بالا به حدی می‌گراید، پس $F'(y)$ وجود دارد و

$$F'(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X q_n = \int_X D_\gamma f(x, y) dx.$$

مثال ۱ مشتق تابع گاما. به ازای هر $y > 0$ ، $\Gamma'(y)$ وجود دارد و از انتگرال

$$\Gamma'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \log x dx$$

بدست می‌آید، که با مشتقگیری زیر علامت انتگرال موجود برای تابع Γ حاصل شده است. این مطلب نتیجه‌ای است از قضیه ۳۹.۱۰ زیرا به ازای هر y در $[a, b]$ ، $0 < a < b$ ، مشتق جزئی $D_\gamma(e^{-x} x^{y-1})$ تقریباً همه جا تحت تسلط تابعی مانند g است که بر $[0, +\infty)$ انتگرال لبگ دارد. در واقع،

$$D_\gamma(e^{-x} x^{y-1}) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x} x^{y-1}) = e^{-x} x^{y-1} \log x, \quad x > 0$$

پس اگر $y \geq a$ ، مشتق جزئی (بجز در ۰) تحت تسلط تابع زیر است:

$$g(x) = \begin{cases} x^{a-1} |\log x|, & 0 < x \leq 1 \\ Me^{-x/2}, & x > 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

که در آن M عددی پایا و مثبت است. با آسانی می‌توان تحقیق کرد که g بر $[0, +\infty)$ انتگرال لبگ دارد.

مثال ۲ ادزیابی انتگرال

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx.$$

با بکار بردن قضیه ۳۹.۱۵، نتیجه می شود که

$$F'(y) = - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx \quad , \quad y > 0$$

(مانند مثال ۱، این مطلب را بر هر بازه $[a, +\infty[$ ، $a > 0$ ، ثابت می کنیم.) در این مثال، انتگرال ریمان $\int_0^b e^{-xy} \sin x dx$ را می توان با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی (با دو بار استفاده از انتگرال گیری به سه طریقه جزء به جزء) محاسبه نمود. در نتیجه، به ازای هر عدد حقیقی y ،

$$(۲۴) \quad \int_0^b e^{-xy} \sin x dx = \frac{e^{-by}(-y \sin b - \cos b)}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + y^2}.$$

حال با فرض $b \rightarrow +\infty$ ، معلوم می شود که

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1 + y^2} \quad , \quad y > 0$$

بنابراین، اگر $y > 0$ ، $F'(y) = -1/(1 + y^2)$ با انتگرال گیری از این معادله معلوم می شود که

به ازای $y > 0$ و $b > 0$

$$F(y) - F(b) = - \int_b^y \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan b - \arctan y.$$

حال فرض کنیم که $b \rightarrow +\infty$. در این صورت، $\arctan b \rightarrow \pi/2$ و $F(b) \rightarrow 0$ (ر.ک. مثال ۲، بخش ۱۵.۱۵)، پس

$$F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$$

با بیان دیگر می توان گفت که،

$$(۲۵) \quad \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan y \quad , \quad y > 0$$

معادله بالا به ازای $y = 0$ نیز معتبر است. یعنی، دستور زیر را داریم :

$$(۲۶) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

اما این رابطه را نمی‌توان با قراردادن $y = 0$ در (۲۵) بدست آورد، زیرا ثابت نشده است که F در صفر پیوسته است. در حقیقت، انتگرال موجود در (۲۶) به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود دارد، اما به‌عنوان یک انتگرال لِبگ وجود ندارد. (ر. ک. تمرین ۰۹۰۱۵)

مثال ۳ برهان دستود

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد که به‌ازای هر y حقیقی با معادله زیر تعریف شود:

$$(۲۷) \quad g_n(y) = \int_0^n e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx.$$

نخست می‌بینیم که وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $g_n(n) \rightarrow 0$ ، زیرا

$$|g_n(n)| \leq \int_0^n e^{-xn} dx = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} e^{-t} dt < \frac{1}{n}.$$

حال اگر از رابطه (۲۷) مشتق بگیریم و از (۲۴) استفاده کنیم، به‌ازای هر عدد حقیقی y خواهیم داشت

$$\begin{aligned} g_n'(y) &= - \int_0^n e^{-xy} \sin x dx \\ &= - \frac{e^{-ny}(-y \sin n - \cos n) + 1}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که

$$g_n'(y) \rightarrow -1/(1 + y^2), \quad \text{به‌ازای هر } y,$$

$$|g_n'(y)| \leq \frac{e^{-y}(y + 1) + 1}{1 + y^2}, \quad y \geq 0 \text{ هر}$$

بنابراین، تابع f_n ، که به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f_n(y) = \begin{cases} g_n'(y), & 0 \leq y \leq n \\ 0, & y > n \end{cases} \text{ اگر}$$

بر بازه $[0, +\infty[$ انتگرال لیبگ دارد و تحت تسلط تابع نامنفی

$$g(y) = \frac{e^{-y}(y+1) + 1}{1+y^2}$$

است. همچنین، g بر $[0, +\infty[$ انتگرال لیبگ دارد. چون

$$f_n(y) \rightarrow -1/(1+y^2) \text{ بر } [0, +\infty[$$

پس بنا بر قضیه همگرایی تسلطی لیبگ خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n = - \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{2}$$

اما

$$\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n g'_n(y) dy = g_n(n) - g_n(0).$$

اگر $n \rightarrow \infty$ ، نتیجه می‌شود که $g_n(0) \rightarrow \pi/2$.

حال اگر $b > 0$ و $n = [b]$ ، چنین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx + \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx \\ &= g_n(0) + \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

چون

$$0 \leq \left| \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_n^b \frac{1}{n} dx = \frac{b-n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

وقتی که $b \rightarrow +\infty$ ،

پس

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(0) = \frac{\pi}{2}.$$

این دستور در فصل ۱۱ در مطالعه رشته‌های فوریه مورد حاجت خواهد بود.

۱۷.۱۰ تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری

قضیه ۴۰.۱۰ فرض کنیم X و Y دو زیربازه R باشند، و تابع k تعریف شده بر $X \times Y$

بر این مجموعه پیوسته و کراندار باشد، مثلاً،

$$|k(x, y)| \leq M, \quad X \times Y \text{ در } (x, y) \text{ به ازای هر}$$

همچنین $f \in L(X)$ و $g \in L(Y)$ در این صورت:

(آ) به ازای هر y در Y ، انتگرال لپگ $\int_X f(x) k(x, y) dx$ وجود دارد، و تابع F تعریف شده بر Y با معادله

$$F(y) = \int_X f(x) k(x, y) dx$$

بر Y پیوسته است.

(ب) به ازای هر x در X ، انتگرال لپگ $\int_Y g(y) k(x, y) dy$ وجود دارد، و تابع G تعریف شده بر X با معادله

$$G(x) = \int_Y g(y) k(x, y) dy$$

بر X پیوسته است.

(ج) دو انتگرال لپگ $\int_X f(x) G(x) dx$ و $\int_Y g(y) F(y) dy$ وجود دارند و با هم مساویند. یعنی،

$$(28) \quad \int_X f(x) \left[\int_Y g(y) k(x, y) dy \right] dx \\ = \int_Y g(y) \left[\int_X f(x) k(x, y) dx \right] dy.$$

پروهان. به ازای هر y ثابت در Y ، قرار می‌دهیم $f_y(x) = f(x) k(x, y)$. در این صورت، f_y بر X اندازه‌پذیر است و در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$|f_y(x)| = |f(x) k(x, y)| \leq M |f(x)|, \quad X \text{ در } x \text{ به ازای هر}$$

و نیز، چون k بر $X \times Y$ پیوسته است،

$$\lim_{t \rightarrow y} f(x) k(x, t) = f(x) k(x, y), \quad X \text{ در } x \text{ به ازای هر}$$

بنابراین، قسمت (آ) از قضیه ۳۸۰۱۰ نتیجه می‌شود. با بیانی مشابه می‌توان (ب) را ثابت کرد.

حال توجه می‌کنیم که حاصل ضرب $f \cdot G$ بر X اندازه‌پذیر است و در

نامساوی

$$|f(x)G(x)| \leq |f(x)| \int_Y |g(y)| |k(x, y)| dy \leq M' |f(x)|$$

صدق می‌کند، که در آن $M' = M \int_Y |g(y)| dy$. پس، بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، $f \cdot G \in L(X)$ با بیانی مشابه معلوم می‌شود که $g \cdot F \in L(Y)$.

اینک رابطه (۲۸) را ثابت می‌کنیم. نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر f و g تابعهائی پله‌ای باشند، رابطه (۲۸) درست است. در این حالت، چون هر یک از تابعه‌های f و g در خارج بازه‌ای فشرده صفر می‌شود، پس هر یک بر آن بازه انتگرال ریمان دارد و رابطه (۲۸) بفوریت از قضیه ۴۲.۷ نتیجه خواهد شد.

حال با استفاده از قضیه ۱۹.۱۰ (ب)، هر یک از تابعه‌های f و g را به تابعی پله‌ای نزدیک می‌کنیم. اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، تابعهائی پله‌ای مانند s و t هستند که به ازای آنها

$$\int_X |f - s| < \varepsilon \quad \text{و} \quad \int_Y |g - t| < \varepsilon$$

بنا بر این،

$$(29) \quad \int_X f \cdot G = \int_X s \cdot G + A_1,$$

که در آن

$$|A_1| = \left| \int_X (f - s) \cdot G \right| \leq \int_X |f - s| \int_Y |g(y)| |k(x, y)| dy < \varepsilon M \int_Y |g|.$$

همچنین،

$$G(x) = \int_Y g(y)k(x, y) dy = \int_Y t(y)k(x, y) dy + A_2,$$

که در آن

$$|A_2| = \left| \int_Y (g - t)k(x, y) dy \right| \leq M \int_Y |g - t| < \varepsilon M.$$

بنا بر این،

$$\int_X s \cdot G = \int_X s(x) \left[\int_Y t(y)k(x, y) dy \right] dx + A_3,$$

که در آن

$$|A_2| = \left| A_2 \int_X s(x) dx \right| \leq \varepsilon M \int_X |s|$$

$$\leq \varepsilon M \int_X \{|s - f| + |f|\} < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_X |f|,$$

پس (۲۹) به صورت زیر درمی آید:

$$(۳۰) \quad \int_X f \cdot G$$

$$= \int_X s(x) \left[\int_Y t(y) k(x, y) dy \right] dx + A_1 + A_2.$$

به همین نحو، معلوم می شود که

$$(۳۱) \quad \int_Y g \cdot F$$

$$= \int_Y t(y) \left[\int_X s(x) k(x, y) dx \right] dy + B_1 + B_2,$$

که در آن

$$|B_1| < \varepsilon M \int_X |f|$$

$$|B_2| \leq \varepsilon M \int_Y |t| < \varepsilon^2 M + \varepsilon M \int_Y |g| \quad \text{و}$$

اما چون انتگرالهای مکرر طرفهای راست رابطه های (۳۰) و (۳۱) با یکدیگر متساویند، داریم

$$\left| \int_X f \cdot G - \int_Y g \cdot F \right| \leq |A_1| + |A_2| + |B_1| + |B_2|$$

$$< 2\varepsilon^2 M + 2\varepsilon M \left\{ \int_X |f| + \int_Y |g| \right\}.$$

چون نامساویهای بالا به ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، پس

$$\int_X f \cdot G = \int_Y g \cdot F,$$

یعنی رابطه مطلوب، صادق است.

تبره. در فصل ۱۵ با استفاده از انتگرالهای مضاعف روایت کلیتری از قضیه ۴۰.۱۰ ثابت خواهد شد. (ر. ک. قضیه ۰.۱۵).

۱۸.۱۰ مجموعه‌های اندازه‌پذیر بر خط حقیقی

تعریف ۴۱.۱۰ فرض کنیم یک زیرمجموعه ناتهی R مانند S داده شده باشد. تابع χ_S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x \in S \\ 0, & \text{اگر } x \in R - S \end{cases}$$

χ_S را تابع مشخص کننده S می‌نامند. اگر S تهی باشد، به ازای هر x تعریف می‌کنیم $\chi_S(x) = 0$.

قضیه ۴۲.۱۰ قراد می‌دهیم $+\infty, -\infty] \cdot R =$ در این صورت:

(آ) هرگاه S دارای اندازه صفر باشد، آنگاه $\chi_S \in L(R)$ و $\int_R \chi_S = 0$

(ب) هرگاه $\chi_S \in L(R)$ و $\int_R \chi_S = 0$ ، آنگاه S دارای اندازه صفر خواهد بود.

برهان. اگر در قضیه ۲۰.۱۰، f را مساوی χ_S بگیریم، قسمت (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب)، فرض می‌کنیم به ازای هر n ، $f_n = \chi_S$. در این صورت $|f_n| = \chi_S$ ، پس

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_R |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_R \chi_S = 0.$$

بنابر قضیه لوی برای رشته‌های همگرای مطلق، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ همه جا بر R ، بجز بر مجموعه‌ای مانند T دارای اندازه صفر، همگرا است. اگر $x \in S$ ، این رشته نمی‌تواند همگرا باشد زیرا هر جمله آن مساوی یک است. اگر $x \notin S$ ، رشته همگرا است زیرا هر جمله آن مساوی صفر است. از این روی $T = S$ ، پس S دارای اندازه صفر خواهد بود.

تعریف ۴۳.۱۰ یک زیرمجموعه R مانند S را اندازه‌پذیر نامیم در صورتی که تابع مشخص کننده χ_S اندازه‌پذیر باشد. هرگاه، علاوه بر این، χ_S بر R انتگرال لبگ داشته باشد، آنگاه اندازه مجموعه S را با $\mu(S)$ نشان می‌دهیم و با معادله

$$\mu(S) = \int_R \chi_S$$

تعریف می‌کنیم. اگر χ_S اندازه‌پذیر باشد ولی بر R انتگرال لبگ نداشته باشد، تعریف می‌کنیم $\mu(S) = +\infty$. تابع μ را که به این طریق تعریف می‌شود اندازه لبگ می‌نامند.

چند مثال

۱. قضیه ۴۲.۱۰ نشان می‌دهد که هر مجموعه مانند S دارای اندازه صفر اندازه پذیر است و $\mu(S) = 0$.

۲. هر بازه مانند I (کراندار یا بی‌کران) اندازه پذیر است. هرگاه I بازه‌ای کراندار با نقطه‌های انتهایی $a \leq b$ باشد، آنگاه $\mu(I) = b - a$. هرگاه I بازه‌ای بی‌کران باشد، آنگاه $\mu(I) = +\infty$.

۳. هرگاه A و B اندازه پذیر باشند و $A \subseteq B$ ، آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$.

قضیه ۴۴.۱۰ (آ) اگر S و T اندازه پذیر باشند، $S - T$ نیز اندازه پذیر است.

(ب) اگر S_1, S_2, \dots اندازه پذیر باشند، $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$ نیز چنین اند.

برهان. برای اثبات (آ)، ملاحظه می‌کنیم که تابع مشخص کننده $S - T$ مساوی $\chi_S - \chi_T$ است. برای اثبات (ب)، فرامی‌دهیم

$$U_n = \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad V_n = \bigcap_{i=1}^n S_i, \quad U = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i, \quad V = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i.$$

در این صورت،

$$\chi_{V_n} = \min(\chi_{S_1}, \dots, \chi_{S_n}) \quad \text{و} \quad \chi_{U_n} = \max(\chi_{S_1}, \dots, \chi_{S_n})$$

پس هر U_n و هر V_n اندازه پذیر است. همچنین، $\chi_{U_n} \leq \chi_U$ و $\chi_{V_n} \leq \chi_V$ پس $\chi_{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{V_n}$ و $\chi_{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{U_n}$ خواهد بود.

قضیه ۴۵.۱۰ هرگاه A و B دو مجموعه اندازه پذیر از هم جدا باشند، آنگاه

$$(۳۲) \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

برهان. فرامی‌دهیم $S = A \cup B$. چون A و B از هم جدا هستند، داریم

$$\chi_S = \chi_A + \chi_B.$$

فرض کنیم χ_S انتگرال پذیر باشد. چون χ_A و χ_B هر دو اندازه پذیرند و به ازای هر x ، $0 \leq \chi_A(x) \leq \chi_S(x)$ و $0 \leq \chi_B(x) \leq \chi_S(x)$ ، بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، هر دو تابع χ_A و χ_B انتگرال پذیر می‌باشند. بنابراین،

$$\mu(S) = \int_{\mathbb{R}} \chi_S = \int_{\mathbb{R}} \chi_A + \int_{\mathbb{R}} \chi_B = \mu(A) + \mu(B).$$

در این حالت رابطه (۳۲) برقرار است و دو طرف آن متناهی اند.

هرگاه X_S انتگرالپذیر نباشد، آنگاه دست کم یکی از دو تابع X_A یا X_B انتگرالپذیر نخواهد بود، که در این حالت (۳۲) برقرار است در حالی که دو طرف آن نامتناهی اند.

قضیه زیر را که توسیع قضیه ۴۵.۱۰ شمرده می شود می توان به استقرا ثابت کرد.

قضیه ۴۶.۱۰ هرگاه $\{A_1, \dots, A_n\}$ دسته ای متناهی از مجموعه های اندازه پذیر از هم جدا باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

بصره. این خاصیت را این طور توصیف می کنند که اندازه لبگ جمع پذیر متناهی است. در قضیه زیر ثابت می کنیم که اندازه لبگ جمع پذیر شمارش پذیر است.

قضیه ۴۷.۱۰ هرگاه $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته ای شمارش پذیر از مجموعه های اندازه پذیر از هم جدا باشد، آنگاه

$$(۳۳) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

برهان. قرار می دهیم $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ، $X_n = X_{T_n}$ ، $T_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ چون μ جمع پذیر متناهی است،

$$\mu(T_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i), \quad n \text{ به ازای هر } n$$

باید ثابت کنیم که وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\mu(T_n) \rightarrow \mu(T)$. ملاحظه می کنیم که چون $\mu(T_n) \leq \mu(T_{n+1})$ ، پس $\{\mu(T_n)\}$ دنباله ای صعودی است.

دو حالت در نظر می گیریم. هرگاه $\mu(T)$ متناهی باشد، آنگاه X_T و هر یک از X_n ها انتگرال پذیرند. همچنین، دنباله $\{\mu(T_n)\}$ از بالا به $\mu(T)$ کراندار است و در نتیجه همگرا است. پس، بنا بر قضیه همگرائی تسلطی لبگ، $\mu(T_n) \rightarrow \mu(T)$. هرگاه $\mu(T) = +\infty$ ، آنگاه X_T انتگرال پذیر نیست. از قضیه ۴۴.۱۰ نتیجه می شود که یا X_n انتگرال پذیر نیست یا هر X_n انتگرال پذیر است ولی $\mu(T_n) \rightarrow +\infty$. در هر صورت رابطه (۳۳) در حالی که دو طرف آن نامتناهی اند برقرار است.

برای مطالعه بیشتر درباره نظریه اندازه ها و رابطه آن با نظریه انتگرال گیری، خواننده می تواند به کتابهای مرجع مذکور در انتهای این فصل مراجعه نماید.

۱۹.۱۰ انتگرال لبگ روی زیرمجموعه های دلخواه R

تعریف. ۴۸.۱۰ فرض کنیم f بر یک زیرمجموعه R مانند S تعریف شده باشد. تابع جدید \bar{f} را بر R بدین صورت تعریف می‌کنیم:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \text{ اگر} \\ 0, & x \in R - S \text{ اگر} \end{cases}$$

اگر \bar{f} بر R انتگرال لبگ داشته باشد، گوئیم که f بر S انتگرال لبگ دارد و می‌نویسیم $f \in L(S)$. انتگرال f روی S با معادله زیرین تعریف می‌شود:

$$\int_S f = \int_R \bar{f}.$$

از این تعریف خاصیت‌های زیر بی‌درنگ نتیجه می‌شوند:

هرگاه $f \in L(S)$ ، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعه S مانند T ، $f \in L(T)$.

هرگاه S دارای اندازه متناهی باشد، آنگاه $\mu(S) = \int_S 1$.

قضیه زیر نشان می‌دهد که انتگرال لبگ جمعپذیر شمارشپذیر است. اثبات آن به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.

قضیه ۴۹.۱۰ فرض کنیم $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های از هم-جدا در R باشد، و $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. همچنین تابع f بر S تعریف شده باشد. (آ) هرگاه $f \in L(S)$ ، آنگاه به‌ازای هر i ، $f \in L(A_i)$ و

$$\int_S f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f.$$

(ب) هرگاه به‌ازای هر i ، $f \in L(A_i)$ و (دسته مذکور در (آ) همگرا باشد، آنگاه $f \in L(S)$ و معادله مذکور در (آ) برقرار خواهد بود.

۲۰.۱۰ انتگرال‌های لبگ تابع‌های مختلط

هرگاه تابع مختلط f بر بازه I تعریف شده باشد، آنگاه $f = u + iv$ ، که در آن u و v تابع‌های حقیقی‌اند. گوئیم f بر I انتگرال لبگ دارد در صورتی که u و v هر دو بر I انتگرال لبگ داشته باشند، و تعریف می‌کنیم

$$\int_I f = \int_I u + i \int_I v.$$

همچنین، f را بر I اندازه‌پذیر نامیم در صورتی که u و v هر دو در $M(I)$ باشند.

سادگی می توان تحقیق کرد که مجموع و حاصل ضرب تابعهای اندازه پذیر مختلط نیز تابعهای اندازه پذیرند. بعلاوه، چون

$$|f| = (u^2 + v^2)^{1/2},$$

بنا بر قضیه ۳۶.۱۰، اگر f اندازه پذیر باشد، $|f|$ نیز چنین است. بسیاری از قضیه های مربوط به انتگرالهای لبگ تابعهای حقیقی را می توان به تابعهای مختلط وسعت داد. اما، چون در هر مورد خاص، معمولاً کافی است بنویسیم $f = u + iv$ و قضیه ها را در مورد u و v بکاربریم، در این جا درباره این توسیعهها بحثی نخواهد شد. تنها مطلبی که لازم است به صراحت در این جا از آن یاد شود قضیه زیرین است.

قضیه ۵۰.۱۰ هرگاه تابع مختلط f بر I انتگرال لبگ داشته باشد، آنگاه $|f| \in L(I)$ و

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

برهان. می نویسیم $f = u + iv$ چون f اندازه پذیر است و

$$|f| \leq |u| + |v|,$$

بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، $|f| \in L(I)$.

قرار می دهیم $a = \int_I f$ در این صورت $a = re^{i\theta}$ ، که در آن $r = |a|$ می خواهیم ثابت کنیم که $r \leq \int_I |f|$. فرض کنیم

$$b = \begin{cases} e^{-i\theta}, & r > 0 \\ 1, & r = 0 \end{cases}$$

در این صورت، $|b| = 1$ و $|b| = 1$ و $r = ba = \int_I bf = \int_I bf$ حال می نویسیم $bf = U + iV$ که در آن U و V حقیقی اند. چون $\int_I bf$ حقیقی است، پس $\int_I bf = \int_I U$

$$r = \int_I bf = \int_I U \leq \int_I |U| \leq \int_I |bf| = \int_I |f|.$$

۲۱.۱۰ حاصل ضربهای داخلی و هنجها

در این بخش حاصل ضربهای داخلی و هنجها را معرفی می کنیم. این مفهوما نقش مهمی در نظریه رشته های فوریه، که در فصل ۱۱ مورد بحث قرار می گیرد، بهمه دارند.

تعریف ۵۱.۱۰ فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی در $L(I)$ باشند که حاصل ضرب

آنها $g \cdot f$ نیز در $L(I)$ باشد. در این صورت، انتگرال

$$(۳۴) \quad \int_I f(x) g(x) dx$$

را حاصل ضرب داخلی f و g نامیده، با نماد (f, g) نشان می‌دهند. اگر $f \in L(I)$ ، عدد نامنفی $\|f\|$ (با $(f, f)^{1/2}$) نشان داده، آن را هنج L^2 تابع f نامند.

تصوره. انتگرال (۳۴) مشابه مجموع $\sum_{k=1}^n x_k y_k$ است که در واقع حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ می‌باشد. مقدارهای تابعی $f(x)$ و $g(x)$ در (۳۴) نقش مؤلفه‌های x_k و y_k را دارند، و عمل انتگرالگیری به جای عمل جمع‌بندی بکار رفته است. هنج L^2 تابع f با درازای یک بردار مشابهت دارد.

اولین قضیه مذکور در زیر شرطی کافی برای این که یک تابع در $L(I)$ هنج L^2 داشته باشد بیان می‌کند.

قضیه ۵۲.۱۵ هرگاه $f \in L(I)$ و f تقریباً همه جا بر I کراندار باشد، آنگاه $f \in L^2(I)$.

برهان. چون $f \in L(I)$ ، پس f اندازه‌پذیر و در نتیجه f^2 بر I اندازه‌پذیر است و تقریباً همه جا بر I در نامساوی $|f(x)| \leq M$ صدق می‌کند، که در آن M کرانی بالائی برای $|f|$ است. حال، بنا بر قضیه ۳۵.۱۵، می‌توان نتیجه گرفت که $f^2 \in L(I)$.

۲۲.۱۵ مجموعه $L^2(I)$ از تابعهایی که مربعیایشان انتگرال‌پذیرند

تعریف ۵۲.۱۵ مجموعه همه تابعهای حقیقی اندازه‌پذیر مانند f بر I را که $f^2 \in L(I)$ نشان می‌دهیم. گوئیم هر تابع در $L^2(I)$ مربعش انتگرال‌پذیر است.

تصوره. مجموعه $L^2(I)$ نه از $L(I)$ بزرگتر است نه کوچکتر. مثلاً، تابع f که به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = x^{-1/2}, \quad 0 < x \leq 1, \quad f(0) = 0$$

در $L([0, 1])$ است اما در $L^2([0, 1])$ نیست. همچنین، تابع

$$g(x) = 1/x, \quad x \geq 1$$

در $L^2([1, +\infty[)$ است ولی در $L([1, +\infty[)$ نیست.

قضیه ۵۴.۱۰ هرگاه $f \in L^2(I)$ و $g \in L^2(I)$ آنگاه $f \cdot g \in L(I)$ و به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، $(af + bg) \in L^2(I)$.

پرهان. از اندازه پذیری f و g نتیجه می شود که $f \cdot g \in M(I)$. چون

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2},$$

بنابر قضیه ۳۵.۱۰، $f \cdot g \in L(I)$. همچنین، $(af + bg) \in M(I)$ و

$$(af + bg)^2 = a^2 f^2 + 2abf \cdot g + b^2 g^2,$$

پس $(af + bg) \in L^2(I)$.

بنابراین، حاصل ضرب داخلی (f, g) به ازای هر جفت از تابعهای f و g در $L^2(I)$ تعریف شده است. خاصیت‌های اساسی حاصل ضرب‌بهای داخلی و هنجارها در قضیه زیر توصیف می شوند.

قضیه ۵۵.۱۰ اگر $f, g, h \in L^2(I)$ باشند و c عددی حقیقی باشد:

$$(f, g) = (g, f) \quad (\text{آ}) \quad \text{تعمیض پذیری.}$$

$$(f + g, h) = (f, h) + (g, h) \quad (\text{ب}) \quad \text{خطی.}$$

$$(cf, g) = c(f, g) \quad (\text{ج}) \quad \text{شرکت پذیری.}$$

$$\|cf\| = |c| \|f\| \quad (\text{د}) \quad \text{همگنی.}$$

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{ه}) \quad \text{نامساوی کوشی - شوارتز.}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (\text{و}) \quad \text{نامساوی مثلثی.}$$

پرهان. قسمت‌های (آ) تا (د) نتیجه‌های فوری تعریف هستند. قسمت (ه) بی‌درنگ از نامساوی

$$\int_I \left[\int_I |f(x)g(y) - g(x)f(y)|^2 dy \right] dx \geq 0$$

نتیجه می شود. برای اثبات (و) می توان از قسمت (ه) و رابطه

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2(f, g) \end{aligned}$$

استفاده کرد.

تیسره. مفهوم حاصل ضرب داخلی را می توان برای تابعهای مختلطی مانند f که

$|f| \in L^2(I)$ وسعت داد. در این حالت، (f, g) با معادله زیرین تعریف می‌شود:

$$(f, g) = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx,$$

که در آن منظور از $\overline{g(x)}$ مزدوج مختلط $g(x)$ است. استفاده از مزدوج مختلط برای این است که حاصل ضرب داخلی f با خودش مقداری نامنفی باشد، یعنی، $(f, f) = \int_I |f|^2$. هیچ L^2 تابع f ، مانند قبل، عبارت است از

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}.$$

قضیه ۵۵.۱۰ برای تابعهای مختلط نیز معتبر است، بجز آن که در قسمت (آ)

باید نوشت

$$(۳۵) \quad (f, g) = \overline{(g, f)}.$$

از این تغییر نتیجه زیر که لنگه قسمت (ب) است بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} (f, g + h) &= \overline{(g + h, f)} = \overline{(g, f) + (h, f)} \\ &= \overline{(g, f)} + \overline{(h, f)} \\ &= (f, g) + (f, h). \end{aligned}$$

در قسمتهای (ج) و (د) پایای c می‌تواند مختلط باشد. از (ج) و (۳۵) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(f, cg) = \overline{c}(f, g).$$

نامساوی کشی - شوارتز و نامساوی مثلثی برای تابعهای مختلط نیز معتبرند.

۲۳.۱۰ مجموعه $L^2(I)$ به‌عنوان یک فضای نیمه متری

یادآوری می‌کنیم (تعریف ۳۲.۳) که یک فضای متری مجموعه‌ای است مانند T به‌انضمام تابعی نامنفی مانند d بر $T \times T$ که به‌ازای هر x, y, z در T دارای خاصیت‌های زیرین باشد:

$$۱. \quad d(x, x) = 0$$

$$۲. \quad \text{اگر } x \neq y, \quad d(x, y) > 0$$

$$۳. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$۴. \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

با تعریف فاصله $d(f, g)$ بین هر دو تابع مختلط در $L^2(I)$ با معادله

$$d(f, g) = \|f - g\| = \left(\int_I |f - g|^2 \right)^{1/2},$$

سعی می‌کنیم این مجموعه را تبدیل به یک فضای متری کنیم. این تابع دارای

خاصیتهای ۱، ۳، و ۴ هست، ولی خاصیت ۲ را ندارد. هر گاه f و g تابعهایی در $L^2(I)$ باشند و بر مجموعه‌ای ناتهی که دارای اندازه صفر است با یکدیگر متفاوت باشند آنگاه $f \neq g$ ، اما چون $f - g = 0$ تقریباً همه جا بر I ، پس

$$d(f, g) = 0.$$

تابعی مانند d که در شرطهای ۱، ۳، و ۴ صدق کند، ولی در ۲ صادق نباشد، یک نیمه‌متر نامیده می‌شود. مجموعه $L^2(I)$ ، به انضمام نیمه متر d ، را یک فضای نیمه متری می‌نامند.

۲۴.۱۰ قضیه همگرانی برای رشته‌های توابع در $L^2(I)$

قضیه همگرانی زیر مشابه قضیه لوی برای رشته‌ها (قضیه ۲۶.۱۰) است.

قضیه ۲۴.۱۰ فرض کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌ای از تابعها در $L^2(I)$ باشد بقسمی که رشته

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$$

همگرا باشد. در این صورت، رشته تابعهای $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابعی مانند g در $L^2(I)$ همگرا است، و

$$(۳۶) \quad \|g\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|.$$

پرهان. فرض کنیم که $M = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$. بنا بر توسیع نامساوی مثلثی به مجموعه‌های متناهی، خواهیم داشت

$$\left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|g_k\| \leq M.$$

از این نتیجه می‌شود که

$$(۳۷) \quad \int_I \left(\sum_{k=1}^n |g_k(x)| \right)^2 dx = \left\| \sum_{k=1}^n |g_k| \right\|^2 \leq M^2.$$

اگر $x \in I$ قرار می‌دهیم

$$f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^n |g_k(x)| \right)^2.$$

دنباله $\{f_n\}$ صعودی است، هر $f_n \in L(I)$ (زیرا هر $g_k \in L^2(I)$)، و از (۳۷) معلوم می‌شود که $\int_I f_n \leq M^2$. بنابراین، دنباله $\{\int_I f_n\}$ همگرا خواهد بود. بنا بر قضیه لوی برای دنباله‌ها (قضیه ۲۴.۱۰)، تابعی مانند f در $L(I)$ هست بقسمی که $f \rightarrow f_n$ تقریباً همه جا بر I ، و

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n \leq M^2.$$

بنابراین، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ تقریباً همه جا بر I همگرای مطلق است. فرض کنیم در نقطه هائی که در آنها حد زیر وجود داشته باشد،

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k(x).$$

و نیز فرض کنیم که

$$G_n(x) = \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) \right|^2.$$

در این صورت، هر $G_n \in L(I)$ و $|g(x)|^2 \rightarrow G_n(x)$ تقریباً همه جا بر I . بعلاوه،

$$G_n(x) \leq f_n(x) \leq f(x) \quad \text{ت. ه. ب. بر } I.$$

بنابراین، به موجب قضیه همگرایی تسلطی لیگ، $|g|^2 \in L(I)$ و

$$(38) \quad \int_I |g|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I G_n.$$

چون g اندازه پذیر است، پس معلوم می شود که $g \in L^2(I)$. همچنین، داریم

$$\int_I G_n \leq \int_I f_n \leq M^2 \quad \text{و} \quad \int_I G_n = \int_I \left| \sum_{k=1}^n g_k \right|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|^2$$

نتیجه آن که رابطه (38) ایجاب می کند که

$$\|g\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \right\|^2 \leq M^2,$$

و این، به نوبه خود، رابطه (36) را نتیجه می دهد.

۲۵.۱۰ قضیه ریس - فیشر

با استفاده از قضیه همگرایی که هم اکنون ثابت شد می توان اثبات کرد که هر دنباله کشی در فضای نیمه متری $L^2(I)$ به تابه می در $L^2(I)$ همگرا است. با بیان دیگری می توان گفت که، فضای نیمه متری $L^2(I)$ تام است. این نتیجه که به قضیه ریس - فیشر معروف است، نقشی مهم در نظریه رشته های فوریه دارد.

قضیه ۵۷.۱۰ فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای کشی از تابعهای مختلط در $L^2(I)$ باشد. یعنی، به ازای هر $\epsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N باشد بقسمی که

(۳۹) هرگاه $m \geq n \geq N$ ، آنگاه $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$.
 در این صورت، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست قسمتی که

$$(۴۰) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 .$$

برهان. اگر فرض (۳۹) را مکرر بکار بریم، می توان دنباله ای صعودی از عدد های صحیح مانند $n(1) < n(2) < \dots$ را بقسمی بدست آورد که

$$\text{هرگاه } m \geq n(k) \text{ ، آنگاه } \|f_m - f_{n(k)}\| < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

فرض کنیم که $g_1 = f_{n(1)}$ ، و به ازای $k \geq 2$ ، $g_k = f_{n(k)} - f_{n(k-1)}$. در این صورت، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|$ همگرا است، زیرا

$$\begin{aligned} \|f_{n(1)}\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n(k)} - f_{n(k-1)}\| &< \|f_{n(1)}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \|f_{n(1)}\| + 1 . \end{aligned}$$

هر g_n در $L^2(I)$ است. از این روی، بنا بر قضیه ۵۶.۱۰ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ تقریباً همه جا بر I به تابعی مانند f در $L^2(I)$ همگرا خواهد بود. برای اتمام برهان نشان می دهیم که وقتی که $m \rightarrow \infty$ ، $\|f_m - f\| \rightarrow 0$.
 برای این منظور نامساوی مثلثی را بکار برده، می نویسیم

$$(۴۱) \quad \|f_m - f\| \leq \|f_m - f_{n(k)}\| + \|f_{n(k)} - f\| .$$

اگر $m \geq n(k)$ ، جمله اول سمت راست نامساوی بالا از $1/\sqrt{k}$ کوچکتر است. برای تخمین جمله دوم ملاحظه می کنیم که

$$f - f_{n(k)} = \sum_{r=k+1}^{\infty} \{f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\}$$

و رشته $\sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\|$ همگرا است. بنابراین، با استفاده از نامساوی (۳۶) در قضیه ۵۶.۱۰ ، می توان نوشت

$$\|f - f_{n(k)}\| \leq \sum_{r=k+1}^{\infty} \|f_{n(r)} - f_{n(r-1)}\| < \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r-1}} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} .$$

از این روی، (۴۱) به صورت زیر درمی آید:

$$\|f_m - f\| \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} \quad , \quad m \geq n(k)$$

چون وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $n(k) \rightarrow \infty$ ، رابطه بالا نشان می دهد که وقتی که $m \rightarrow \infty$ ، $\|f_m - f\| \rightarrow 0$.

تبره. در طول اثبات بالا نشان داده شد که هر دنباله کشی از تابعها در $L^2(I)$ دارای زیردنباله‌ای است که تقریباً همه جا بر I نقطه‌وار به تابع حدی مانند f در $L^2(I)$ همگرا است. اما نمی‌توان نتیجه گرفت که دنباله $\{f_n\}$ خودش نیز تقریباً همه جا بر I نقطه‌وار به f همگرا است. (در بخش ۱۳.۹ مثال ناقضی آمده است.) اگر چه $\{f_n\}$ در فضای نیمه متری $L^2(I)$ به f همگرا است، اما این همگرایی همان همگرایی نقطه‌وار نیست.

تمرین

تابعهای بالایی

۱.۱۰ ثابت کنید که $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$ ، و

$$\max(f + h, g + h) = \max(f, g) + h,$$

$$\min(f + h, g + h) = \min(f, g) + h.$$

۲.۱۰ فرض کنید $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌های صعودی از تابعها بر بازه I باشند. قرار دهید $u_n = \max(f_n, g_n)$ و $v_n = \min(f_n, g_n)$.

(آ) ثابت کنید که $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ بر I صعودیند.

(ب) اگر $f_n \searrow f$ ت. ه. بر I و $g_n \searrow g$ ت. ه. بر I ، ثابت کنید که

$$u_n \searrow \max(f, g) \quad \text{و} \quad v_n \searrow \min(f, g) \quad \text{ت. ه. بر } I.$$

۳.۱۰ فرض کنید که $\{s_n\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای باشد که بر بازه I نقطه‌وار به تابع حدی مانند f همگرا باشد. اگر I بی‌کران باشد و $f(x) \geq 1$ تقریباً همه جا بر I ، ثابت کنید که دنباله $\{f|_I s_n\}$ واگرا است.

۴.۱۰ در این تمرین تابعی بالایی مانند f بر بازه $I = [0, 1]$ می‌سازیم که $f \notin U(I)$. برای این کار فرض کنیم که $\{r_1, r_2, \dots\}$ مجموعه عددهای گویا در بازه $[0, 1]$ را نشان دهد و $I_n = [r_n - 2^{-n}, r_n + 2^{-n}] \cap I$ تابع f را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر به‌ازای یک مقدار n ، $x \in I_n$ ، قرار می‌دهیم $f(x) = 1$ ، و در غیر این صورت $f(x)$ را مساوی صفر تعریف می‌کنیم.

(آ) فرض کنید اگر $x \in I_n$ ، $f_n(x) = 1$ ، و اگر $x \notin I_n$ ، $f_n(x) = 0$ ،

و نیز فرض کنید که $s_n = \max(f_1, \dots, f_n)$ نشان دهید که $\{s_n\}$

دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای است که f را تولید می‌کند. این مطلب

نشان می‌دهد که $f \in U(I)$.

(ب) ثابت کنید که $\int_I f \leq 2/3$.

(ج) اگر تابع پله‌ای s بر I در رابطه $s(x) \leq -f(x)$ صدق کند، نشان

دهید که $\int_I s \leq -1$ و در نتیجه $\int_I f \leq -1$.

(د) فرض کنید $f \in U(I)$ و با استفاده از (ب) و (ج) تناقضی بدست آورید.

تصور. در تمرینهای زیر، در هر نقطه که انتگرالده تعریف نشده باشد، مقدارش صفر فرض می‌شود.

قضیه‌های همگرایی

۵.۱۰ اگر $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx.$$

۶.۱۰ معادله‌های زیر را توجیه کنید:

$$\int_0^1 \log \frac{1}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx = 1 \quad (\text{آ})$$

$$(p > 0) \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \quad (\text{ب})$$

۷.۱۰ قضیه همگرایی تانری^۱ برای انتگرالهای ریمان را ثابت کنید: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله داده شده‌ای از تابعها باشد، و $\{p_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای حقیقی باشد بقسمی که وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $p_n \rightarrow +\infty$. همچنین فرض کنید

(آ) به ازای هر $b \geq a$ ، $f_n \rightarrow f$ به طور یکشکل بر $[a, b]$.

(ب) به ازای هر $b \geq a$ ، f_n بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشد.

(ج) تابعی نامنفی مانند g باشد که بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی داشته باشد و $|f_n(x)| \leq g(x)$ تقریباً همه جا بر $[a, +\infty[$.

در این صورت، f و $|f|$ هر دو بر $[a, +\infty[$ انتگرال ریمان مجازی دارند، دنباله $\{\int_a^{p_n} f_n\}$ همگرا است، و

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{p_n} f_n(x) dx.$$

(د) با استفاده از قضیه تانری ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx, \quad p > -1$$

۸۰۱۰ لم فاتو را ثابت کنید: فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله داده شده‌ای از تابعهای نامنفی در $L(I)$ باشد بقسمی که (\bar{A}) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر I به تابع حدی مانند f همگرا باشد، و (ب) به ازای عددی مانند $A > 0$ و هر $n \geq 1$ $\int_I f_n \leq A$. در این صورت، تابع حد $f \in L(I)$ و $\int_I f \leq A$ همگرا باشد. (با قضیه ۲۴.۱۰ مقایسه کنید.)

داهمنائی. قرار دهید $\{g_n(x) = \inf \{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}$ در این صورت، $f \nearrow g_n$ بر I و $\int_I g_n \leq \int_I f_n \leq A$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n$ وجود دارد و از A نایبتر است. حال قضیه ۲۴.۱۰ را بکار برید.

انتگرالهای ریمان مجازی

۹۰۱۰ (آ) اگر $p > 1$ ثابت کنید که انتگرال $\int_1^{+\infty} x^{-p} \sin x dx$ هم به عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به عنوان انتگرال لیبگ وجود دارد.

داهمنائی. انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء را بکار برید.
 (ب) اگر $0 < p \leq 1$ ، ثابت کنید که انتگرال مذکور در (آ) به عنوان انتگرال ریمان مجازی وجود دارد ولی به عنوان انتگرال لیبگ وجود ندارد.
 داهمنائی. فرض کنید

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{2x}, & n\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq n\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad n=1, 2, \dots \\ 0 & \text{در غیر این صورت,} \end{cases}$$

و نشان دهید که

$$\int_1^{n\pi} x^{-p} |\sin x| dx \geq \int_1^{n\pi} g(x) dx \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

۱۰۰۱۰ (آ) با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ و دستور $\int_0^{\infty} \sin x/x dx = \pi/2$ ، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(ب) با انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء در (آ) دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(ج) با استفاده از اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ و قسمت (ب)، دستور زیر را بدست آورید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(د) با استفاده از نتیجه (ج)، دستور زیر را بدست آورید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^6 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{3}.$$

۱۱.۱۰ اگر $a > 1$ ، ثابت کنید به ازای هر q و $p < -1$ ، یا به ازای $q < -1$ و $p = -1$ ، انتگرال $\int_0^{+\infty} x^p (\log x)^q dx$ هم به عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به عنوان انتگرال لبگ وجود دارد.

۱۲.۱۰ ثابت کنید هر یک از انتگرالهای زیر، هم به عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به عنوان انتگرال لبگ، وجود دارد.

$$(A) \int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \quad (B) \int_0^{\infty} x^p e^{-x^q} dx \quad (p > 0, q > 0)$$

۱۳.۱۰ تعیین کنید کدام یک از انتگرالهای زیر، به عنوان انتگرال ریمان مجازی یا به عنوان انتگرال لبگ، وجود دارد.

$$(A) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad (B) \int_0^{\infty} e^{-(t^2+t^{-2})} dt$$

$$(C) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \frac{1}{x} dx \quad (D) \int_1^{\infty} \frac{\log x}{x(x^2-1)^{1/2}} dx$$

$$(E) \int_0^{\infty} e^{-x} \log(\cos^2 x) dx \quad (F) \int_0^1 \log x \sin \frac{1}{x} dx$$

۱۴.۱۰ آن مقادیرهای p و q را تعیین کنید که به ازای آنها انتگرالهای لبگ زیرین وجود داشته باشند.

$$\int_0^{\infty} x^x e^{-x^p} dx \quad (\text{ب}), \int_0^1 x^p (1-x^2)^q dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^p)}{x^q} dx \quad (\text{د}), \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{1-x} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_{\pi}^{\infty} (\log x)^p (\sin x)^{-1/2} dx \quad (\text{و}), \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx \quad (\text{ه})$$

۱۵.۱۰ ثابت کنید که انتگرالهای ریمان مجازی زیرین مساوی مقادیرهای داده شده‌اند (m و n عددهای صحیح مثبتی می‌باشند).

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x} dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad (\text{آ})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^{n+1}} dx = n^{-2} \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\infty} x^n (1+x)^{-n-m-1} dx = \frac{n!(m-1)!}{(m+n)!} \quad (\text{ج})$$

۱۶.۱۰ فرض کنید تابع داده شده f بر بازه $[0, 1]$ انتگرال ریمان داشته باشد، f متناوب با دوره تناوب ۱ باشد، و $\int_0^1 f(x) dx = 0$. ثابت کنید که اگر $s > 0$ ، انتگرال ریمان مجازی $\int_0^{+\infty} x^{-s} f(x) dx$ وجود دارد. (اهنمائی). فرض کنید که $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ و بنویسید $\int_0^x x^{-s} f(x) dx = \int_0^x x^{-s} dg(x)$

۱۷.۱۰ فرض کنید به ازای هر $a > 0, b > a$ بر $[a, b]$ باشد. تابع g را با معادله زیر تعریف کنید: اگر $x > 0$ ، $xg(x) = \int_0^x f(t) dt$. فرض کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ وجود داشته، مقدار آن B باشد. اگر a و b عددهای مثبت ثابتی باشند، ثابت کنید که

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx = g(b) - g(a) + \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx = B \log \frac{b}{a} \quad (\text{ب})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = B \log \frac{a}{b} + \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt \quad (\text{ج})$$

(د) فرض کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{\infty} f(t) t^{-2} dt$ وجود داشته، مقدار آن A

باشد. ثابت کنید که

$$\int_0^1 \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = A \log \frac{b}{a} - \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt.$$

(ه) از تلفیق (ج) و (د) نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (B - A) \log \frac{a}{b}$$

و با استفاده از این نتیجه انتگرالهای زیر را ارزیابی کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

انتگرالهای لبك

۱۸۰۱۰ ثابت کنید هر یک از انتگرالهای لبك زیرین وجود دارد.

$$(\text{آ}) \int_0^1 \frac{x \log x}{(1+x)^2} dx$$

$$(\text{ب}) \int_0^1 \frac{x^p - 1}{\log x} dx \quad (p > -1)$$

$$(\text{ج}) \int_0^1 \log x \log(1+x) dx$$

$$(\text{د}) \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{(1-x)^{1/2}} dx$$

۱۹۰۱۰ فرض کنید f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، $f(0) = 0$ و $f'(0)$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که انتگرال لبك $\int_0^1 f(x) x^{-3/2} dx$ وجود دارد.

۲۰۰۱۰ ثابت کنید انتگرالهای مذکور در (آ) و (ج) به‌عنوان انتگرالهای لبك وجود دارند ولی انتگرالهای (ب) و (د) وجود ندارند.

$$(\text{آ}) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2 \sin^2 x} dx \quad (\text{ب}) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2 \sin^2 x} dx$$

$$(\text{ج}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \sin^2 x} \quad (\text{د}) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \sin^2 x}$$

داهمنانی. برای این انتگرالها کرانهائی بالائی و پائینی روی همسایگیهای

مناسبتی از نقطه‌های $n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) بدست آورید.

تابعانی که با انتگرالها تعریف می‌شوند

۲۱.۱۰ برای هر یک از انتگرالهای زیرین مجموعه S از عددهای حقیقی را بقسمی بیابید که به‌ازای هر y عضو S ، آن انتگرال به‌عنوان انتگرال لبگ وجود داشته باشد.

$$\int_0^{\infty} (x^2 + y^2)^{-1} dx \quad (\text{ب}), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy dx \quad (\text{د}), \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 xy}{x^2} dx \quad (\text{ج})$$

۲۲.۱۰ فرض کنید اگر $y \in \mathbb{R}$ ، $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy dx$ نشان دهید که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(y) + 2yF(y) = 0$ صدق می‌کند و از آن نتیجه بگیرید که $F(y) = (1/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ (از تساوی $(1/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = (1/\sqrt{\pi}) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ استفاده کنید).

۲۳.۱۰ فرض کنید اگر $y > 0$ ، $F(y) = \int_0^{\infty} \sin xy / x(x^2 + 1) dx$ نشان دهید که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F''(y) - F(y) + \pi/2 = 0$ صدق می‌کند و از این نتیجه بگیرید که $F(y) = (1/2)\pi(1 - e^{-y})$. با استفاده از این نتیجه بگیرید که به‌ازای $y > 0$ و $a > 0$ ، معادله‌های زیر معتبرند:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-ay}),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-ay}}{2a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin xy}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ay};$$

می‌توانید تساوی

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

را بکار برید.

۲۴.۱۰ فرض کنید f به یکی از دو صورت زیر باشد:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{ب}) \quad , \quad f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^2} \quad (\text{آ})$$

در هر مورد نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x, y) dx \right] dy \neq \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} f(x, y) dy \right] dx.$$

۲۵.۱۰ نشان دهید که در انتگرالهای زیرین نمی توان ترتیب عمل انتگرالگیری را عوض کرد:

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^2} dx \right] dy \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\infty} (e^{-xy} - 2e^{-2xy}) dy \right] dx \quad (\text{ب})$$

۲۶.۱۰ فرض کنید اگر $(x, y) \neq (0, 0)$

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} dt / [(1 + x^2 t^2)(1 + y^2 t^2)].$$

نشان دهید (با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی) که

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \pi (x + y)^{-1}.$$

با ارزیابی انتگرال مکرر $\int_0^{\infty} [\int_0^1 f(x, y) dx] dy$ دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\arctan x)^2}{x^2} dx = \pi \log 2.$$

۲۷.۱۰ فرض کنید اگر $y \geq 0$ نشان دهید $f(y) = \int_0^{\infty} \sin x \cos xy / x dx$.

(با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی) که اگر $0 \leq y < 1$

$f(y) = \pi/2$ و اگر $y > 1$ ، $f(y) = 0$. با ارزیابی انتگرال $\int_0^a f(y) dy$

دستور زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin x}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi a}{2} , & 0 \leq a \leq 1 \text{ اگر} \\ \frac{\pi}{2} , & a \geq 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

۲۸.۱۰ (آ) اگر $s > 0$ و $a > 0$ ، نشان دهید که رشته

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{x^s} dx$$

همگرا است و ثابت کنید که

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_a^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{x^s} dx = 0.$$

(ب) فرض کنید که $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n\pi x)/n$. نشان دهید که اگر

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^s} dx = (2\pi)^{s-1} \zeta(2-s) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^s} dt, \quad 0 < s < 1$$

که در آن ζ تابع زتای ریمان است.

(آ ۲۹.۱۰) دستور زیر را، که مشتق m تابع گاما را بدست می‌دهد، ثابت کنید:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n dt \quad (x > 0).$$

(ب) وقتی که $x = 1$ ، ثابت کنید که رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^1 (t^n + (-1)^n e^{-1/t}) e^{-t} t^{-2} (\log t)^n dt.$$

(ج) با استفاده از (ب)، نشان دهید که $\Gamma^{(n)}(1)$ و $(-1)^n$ هم علامتند.

در تمرینهای ۳۰.۱۰ و ۳۱.۱۰، Γ تابع گاما را نشان می‌دهد.

۳۰.۱۰ با استفاده از تساوی $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = (1/\sqrt{\pi})\sqrt{\pi}$ ، ثابت کنید که

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. ثابت کنید که $\Gamma(n+1) = n!$ ، و اگر $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\Gamma(n+1/2) = (2n)! \sqrt{\pi} / 4^n n!$$

(آ ۳۱.۱۰) نشان دهید که به ازای $x > 0$ ، نمایش رشته‌ای زیر وجود دارد:

$$\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

که در آن $c_n = (1/n!) \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} (\log t)^n dt$. (دهنمایی: بنویسید

$$\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$$

و سپس در هر یک از انتگرالها بسط مناسبی به صورت رشته توانی را

بکار برید.

ب) نشان دهید که رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ به ازای هر عدد مختلط z و رشته $\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n/n!]/(n+z)$ به ازای هر عدد مختلط $z \neq 0, -1, -2, \dots$ همگرا است.

۳۲.۱۰ فرض کنید به ازای هر $b > 0$ ، تابع f بر $[0, b]$ با تغییر کراندار باشد، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وجود داشته باشد. این حد را با $f(\infty)$ نشان داده، ثابت کنید که

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx = f(\infty).$$

داهنمائی. انتگرالگیری به طریقه جزء به جزء را بکار برید.

۳۳.۱۰ فرض کنید f بر بازه $[0, 1]$ با تغییر کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y \int_0^1 x^{y-1} f(x) dx = f(0^+).$$

تابعهای اندازه پذیر

۳۴.۱۰ اگر f بر بازه I انتگرال لبگ داشته باشد و $f'(x)$ تقریباً همه جا بر I وجود داشته باشد، ثابت کنید که f' بر I اندازه پذیر است.

۳۵.۱۰ (آ) فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله ای از تابعهای پله ای باشد بقسمی که $s_n \rightarrow f$ همه جا بر R . ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی a ،

$$f^{-1}([a, +\infty[) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} s_k^{-1} \left(\left] a + \frac{1}{n}, +\infty \right[\right).$$

ب) اگر f بر R اندازه پذیر باشد، ثابت کنید که به ازای هر زیرمجموعه باز R مانند A ، مجموعه $f^{-1}(A)$ اندازه پذیر است.

۳۶.۱۰ در این تمرین مجموعه ای در R می سازیم که اندازه ناپذیر باشد. اگر x و y عددهائی حقیقی در بازه $[0, 1]$ باشند، گوئیم x و y هم ارزند، و می نویسیم $y \sim x$ در صورتی که $x - y$ گویا باشد. رابطه \sim یک رابطه هم ارزی است، و بازه $[0, 1]$ را می توان به صورت اجتماعی از زیرمجموعه های از هم جدا (به نام رده های هم ارزی) بیان کرد که هیچ دو نقطه متمایزی در هر یک از آنها با یکدیگر هم ارز نیستند. از هر یک از رده های هم ارزی نقطه ای اختیار نموده، فرض می کنیم که E مجموعه چنین نقاطی باشد. با فرض اندازه پذیر بودن E تناقضی بدست می آوریم. فرض

کنیم که $A = \{r_1, r_2, \dots\}$ مجموعه عددهای گویای موجود در $[-1, 1]$ را نشان دهد و $E_n = \{r_n + x \mid x \in E\}$.

(آ) ثابت کنید هر E_n اندازه پذیر است و $\mu(E_n) = \mu(E)$.

(ب) ثابت کنید $\{E_1, E_2, \dots\}$ دسته ای از مجموعه های از هم جدا است که اجتماع آنها حاوی $[0, 1]$ و محتوا در $[-1, 2]$ است.

(ج) با استفاده از قسمتهای (آ) و (ب) و همچنین خاصیت جمع پذیری شمارش پذیر اندازه لبگ، تناقضی بدست آورید.

۳۷.۱۰ به تمرین ۳۶.۱۰ بازگردید و ثابت کنید که تابع مشخص کننده X_E اندازه پذیر نیست. فرض کنید که $f = X_E - X_{I-E}$ ، که در آن $I = [0, 1]$. ثابت کنید که $|f| \in L(I)$ اما $f \notin M(I)$. (این مطلب را با نتیجه ۱ از قضیه ۳۵.۱۰ مقایسه کنید.)

تابعهایی که مربعیایشان انتگرال پذیرند

از تمرین ۳۸.۱۰ تا ۴۲.۱۰ فرض بر این است که همه تابعها در $L^2(I)$ باشند. هیچ L^2 تابع f ، یعنی $\|f\|$ ، با دستور $\|f\| = (\int_I |f|^2)^{1/2}$ تعریف شده است.

۳۸.۱۰ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ ، ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

۳۹.۱۰ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ تقریباً همه جا بر I ، ثابت کنید که $f(x) = g(x)$ تقریباً همه جا بر I .

۴۰.۱۰ اگر $f_n \rightarrow f$ به طور یک شکل بر بازه فشرده I ، و هر f_n بر I پیوسته باشد، ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

۴۱.۱۰ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ ، ثابت کنید به ازای هر g در $L^2(I)$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n \cdot g = \int_I f \cdot g$.

۴۲.۱۰ اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0$ ، ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n \cdot g_n = \int_I f \cdot g$.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

10.1 Asplund, E., and Bungart, L., *A First Course in Integration*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

- 10.2 Bartle, R., *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.
- 10.3 Burkill, J. C., *The Lebesgue Integral*. Cambridge University Press, 1951.
- 10.4 Halmos, P., *Measure Theory*. Van Nostrand, New York, 1950.
- 10.5 Hawkins, T., *Lebesgue's Theory of Integration: Its Origin and Development*. University of Wisconsin Press, Madison, 1970.
- 10.6 Hildebrandt, T. H., *Introduction to the Theory of Integration*. Academic Press, New York, 1963.
- 10.7 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.
- 10.8 Korevaar, J., *Mathematical Methods*, Vol. 1. Academic Press, New York, 1968.
- 10.9 Munroe, M. E., *Measure and Integration*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, 1971.
- 10.10 Riesz, F., and Sz.-Nagy, B., *Functional Analysis*. L. Boron, translator. Ungar, New York, 1955.
- 10.11 Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 2nd. ed. McGraw-Hill, New York, 1964.
- 10.12 Shilov, G. E., and Gurevich, B. L., *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- 10.13 Taylor, A. E., *General Theory of Functions and Integration*. Blaisdell, New York, 1965.
- 10.14 Zaanen, A. C., *Integration*. North-Holland, Amsterdam, 1967.

رشته‌های فوریه و انتگرالهای فوریه

۱۰۱۱ مقدمه

در سال ۱۸۵۷ فوریه ادعا کرد که هر تابع «دلخواه» را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سینوس و کسینوس بیان کرد. ادعای این مطلب در آن زمان باعث حیرت معاصران فوریه گردید. امروزه، یک چنین ترکیبهای خطی را رشته‌های فوریه می‌نامند. رشته‌های فوریه در تحلیل بعضی از پدیده‌های متناوب (مانند ارتعاشات، حرکت سیاره‌ها، و حرکت موج)، که در فیزیک و مهندسی مورد مطالعه‌اند، از وسایل ضروری بشمار می‌آیند. همچنین بسیاری از سؤالهای مهم ریاضی بر اثر مطالعه رشته‌های فوریه بوجود آمده‌اند. در واقع، قسمت اعظم گسترش آنالیز ریاضی نوین نتیجه کوششهایی است که برای جواب دادن به این سؤالها شده است. برای مطالعه شرحی مختصر اما عالی درباره تاریخ این مبحث، و همچنین اثر آن در گسترش ریاضیات، به کتاب مرجع ۱۰۱۱ مراجعه نمایید.

۲۰۱۱ دستگاههای توابع متعامد

مسئله‌های اساسی نظریه رشته‌های فوریه را می‌توان در قالب یک نظام کلیتر، به نام نظریه تابعهای متعامد، به بهترین وجه توصیف کرد. بنا بر این، ما این فصل را با معرفی اصطلاحاتی چند مربوط به تابعهای متعامد آغاز می‌کنیم.

تبره . در این جا هم، مانند فصل قبل، فرض بر این است که تابعها بر یک زیربازه کلی R مانند I تعریف شده باشند. این بازه ممکن است کراندار، بی‌کران،

باز، بسته، یا نیمباز باشد. مجموعه همه تابعهای مختلط مانند f را که بر I اندازه‌پذیر باشند و $|f|^2 \in L(I)$ با $L^2(I)$ نشان می‌دهیم. حاصل ضرب داخلی (f, g) دو چنین تابع، که به صورت

$$(f, g) = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$$

تعریف می‌شود، همواره وجود دارد. عدد نامنفی $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ هنج L^2 تابع f می‌باشد.

تعریف ۱۰۱۱ فرض کنیم $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ دسته‌ای از تابعها در $L^2(I)$ باشد. اگر

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0, \quad m \neq n$$

وقتی که

دسته S را یک دستگاه متعامد بر I می‌نامیم. هرگاه، علاوه بر این، هر φ_n دارای هنج ۱ باشد، آنگاه گوئیم که S یک دستگاه متعامد بهنجار بر I است.

تبره. هر دستگاه متعامد را که در آن هر $\|\varphi_n\| \neq 0$ می‌توان با تقسیم کردن هر φ_n به هنج خود به یک دستگاه متعامد بهنجار تبدیل نمود.

دستگاه مثلثاتی خاص $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ، که در آن

$$(1) \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

به‌ازای

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{و} \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

بیش از هر دستگاه دیگر مورد توجه ما است. با آسانی می‌توان تحقیق کرد که S بر هر بازه به درازای 2π متعامد بهنجار است. (ر.ک. تمرین ۱۰۱۱). دستگاه (۱) از تابعهای حقیقی تشکیل شده است. اما تابعهای

$$\varphi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\cos nx + i \sin nx}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

بر هر بازه به درازای 2π دستگاهی متعامد بهنجار از تابعهای مختلط بوجود خواهند آورد.

۳۰۱۱ قضیه بهترین تقریب

یکی از مسأله‌های اساسی در نظریه تابعهای متعامد این است که چگونه تابع

داده شده f در $L^2(I)$ را به بهترین وجه ممکن به ترکیبی خطی از عنصرهای دستگاهی متعامد بهنجار نزدیک نماییم. با بیان دقیقتر، فرض کنیم که $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و قرار می‌دهیم

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x),$$

که در آن b_0, b_1, \dots, b_n ، و عددهای مختلط دلخواهی می‌باشند. از هنج $\|f - t_n\|$ برای اندازه‌گیری خطای حاصل از تقریب f به t_n استفاده می‌کنیم. می‌خواهیم پایاهای b_0, b_1, \dots, b_n بقسمی اختیار شوند که این خطا تا حد ممکن کوچک باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که می‌توان این پایاها را بقسمی اختیار کرد که این خطا مینیمم باشد. بعلاوه این انتخاب منحصر بفرد نیز هست.

برای مشاهده علت برقراری نتیجه‌های قضیه زیر، مناسبترین حالت را در نظر می‌گیریم. هرگاه f قبلاً ترکیبی خطی از $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ باشد، مثلاً،

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k,$$

آنگاه با انتخاب $t_n = f$ ، $\|f - t_n\|$ مساوی صفر خواهد شد. می‌توان پایاهای c_0, c_1, \dots, c_n را به صورت زیر تعیین کرد: به‌ازای $0 \leq m \leq n$ ، حاصل ضربهای داخلی (f, φ_m) را تشکیل می‌دهیم. چون اگر $k \neq m$ ، $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ و $(\varphi_m, \varphi_m) = 1$ ، پس با استفاده از خواص حاصل ضربهای داخلی داریم

$$(f, \varphi_m) = \left(\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k, \varphi_m \right) = \sum_{k=0}^n c_k (\varphi_k, \varphi_m) = c_m.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، در مناسبترین حالت، به‌ازای $0, 1, \dots, n$ ، m داریم $c_m = (f, \varphi_m)$. قضیه زیر نشان می‌دهد که انتخاب پایاها به‌صورت بالا برای همه تابعها در $L^2(I)$ بهترین انتخاب خواهد بود.

قضیه ۲۰۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و $f \in L^2(I)$ دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ از تابعها بر I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x), \quad t_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(x),$$

که در آنها

$$(۲) \quad c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

و b_0, b_1, b_2, \dots عددهای مختلط دلخواهی باشند. در این صورت، به ازای هر n داریم

$$(۳) \quad \|f - s_n\| \leq \|f - t_n\|.$$

بعلاوه، رابطه (۳) وقتی، و فقط وقتی، به صورت تساوی است که

$$b_k = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

برهان. نامساوی (۳) را از معادله

$$(۴) \quad \|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |b_k - c_k|^2$$

نتیجه می‌گیریم. واضح است که (۴) رابطه (۳) را ایجاب می‌کند زیرا طرف راست (۴) وقتی کمترین مقدار خود را می‌گیرد که به ازای هر $k, b_k = c_k$ برای اثبات (۴)،

می‌نویسیم

$$\|f - t_n\|^2 = (f - t_n, f - t_n) = (f, f) - (f, t_n) - (t_n, f) + (t_n, t_n).$$

با استفاده از خواص حاصل ضربهای داخلی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (t_n, t_n) &= \left(\sum_{k=0}^n b_k \varphi_k, \sum_{m=0}^n b_m \varphi_m \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n b_k \bar{b}_m (\varphi_k, \varphi_m) = \sum_{k=0}^n |b_k|^2, \end{aligned}$$

$$(f, t_n) = \left(f, \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k \right) = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k c_k.$$

همچنین، $(t_n, f) = \overline{(f, t_n)} = \sum_{k=0}^n b_k \bar{c}_k$ ، و در نتیجه

$$\begin{aligned} \|f - t_n\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^n b_k \bar{c}_k + \sum_{k=0}^n |b_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + \sum_{k=0}^n |b_k - c_k|^2. \end{aligned}$$

۴.۱۱ رشته فوریه یک تابع نسبت به یک دستگاه متعامد بهنجار

تعریف ۳.۱۱ فرض کنیم $S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد و $f \in L^2(I)$ منظور از نماد

$$(۵) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

یعنی عددهای c_0, c_1, c_2, \dots که با دستورهای

$$(۶) \quad c_n = (f, \varphi_n) = \int_I f(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

مشخص می‌شوند. (دشته مذکور در (۵) را دشته فوریۀ f نسبت به S ، و عددهای c_0, c_1, c_2, \dots را ضریبهای فوریۀ f نسبت به S می‌نامند.

بصره. در حالتی که $I = [0, 2\pi]$ و S دستگاه تابعهای مثلثاتی توصیف شده در (۱) باشد، این رشته مختصراً (دشته فوریۀ تولید شده به وسیله f نامیده می‌شود. در این حالت رابطه (۵) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

که ضریبهای موجود در آن از دستورهای زیر بدست می‌آیند:

$$(۷) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt.$$

در این حالت، اگر $f \in L([0, 2\pi])$ ، انتگرالهائی که a_n و b_n به وسیله آنها تعریف می‌شوند وجود دارند.

۵.۱۱ خواص ضریبهای فوریه

قضیه ۴.۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ بر I متعامد بهنجار باشد، و $f \in L^2(I)$. همچنین فرض می‌کنیم که

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

در این صورت،

(آ) دشته $\sum |c_n|^2$ همگرا است و در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$(۸) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{نامساوی بسل}).$$

(ب) معادله

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \|f\|^2 \quad (\text{دستور پارسوال})$$

وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0,$$

که در آن $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی (شستهٔ مورد نظر است که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x).$$

برهان. چون طرف چپ رابطهٔ (۴) نامنفی است، پس بنا فرض $b_k = c_k$ در آن خواهیم داشت

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2,$$

که از آن (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ب)، دوباره در (۴) قرار می‌دهیم $b_k = c_k$ خواهیم داشت

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2,$$

که از این معادله قسمت (ب) بی‌درنگ نتیجه خواهد شد.

به‌عنوان نتیجه‌ای دیگر از قسمت (آ) در قضیهٔ ۴.۱۱، ملاحظه می‌شود که چون $\sum |c_n|^2$ همگرا است، پس وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، دنبالهٔ ضریبهای فوریه، یعنی c_n ، به صفر می‌گراید. در حالت خاص، وقتی که $\varphi_n(x) = e^{inx} / \sqrt{2\pi}$ و $I = [0, 2\pi]$ خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0,$$

که از آن دستورهای مهم زیر بدست خواهند آمد:

$$(۹) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

این دستورها حالت‌های خاص لم ریمان - لیگ (قضیهٔ ۶.۱۱) نیز می‌باشند.

تیسره. دستور پارسوال، یعنی

$$\|f\|^2 = |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots,$$

مشابه دستور

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

برای درازای بردار $x = (x_1, \dots, x_n)$ در \mathbb{R}^n است. هر یک از این دو دستور را می توان به عنوان تعمیمی از قضیه فیثاغورس برای مثلثهای قائم الزاویه در نظر گرفت.

۶.۱۱ قضیه ریس - فیشر

عکس قسمت (آ) در قضیه ۴.۱۱ به نام قضیه ریس - فیشر معروف است.

قضیه ۵.۱۱ فرض کنیم $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ بر I متعامد بهنجاد باشد. همچنین $\{c_n\}$ دنباله ای از عددهای مختلط باشد بقسمی که $\sum |c_k|^2$ همگرا باشد. در این صورت، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست بقسمی که

$$(f, \varphi_k) = c_k, \quad k \geq 0$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \quad (\text{ب})$$

پرهان. قرار می دهیم

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x).$$

ثابت می کنیم که تابعی مانند f در $L^2(I)$ وجود دارد بقسمی که $(f, \varphi_k) = c_k$ و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0.$$

در این صورت، از قسمت (ب) قضیه ۴.۱۱ قسمت (ب) قضیه ۵.۱۱ نتیجه خواهد شد.

ابتدا توجه می کنیم که $\{s_n\}$ در فضای نیمه متری $L^2(I)$ دنباله ای است کشی، زیرا که اگر $m > n$ داریم

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \sum_{k=n+1}^m \sum_{r=n+1}^m c_k \bar{c}_r (\varphi_k, \varphi_r) \\ &= \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2, \end{aligned}$$

اگر n و m به قدر کافی بزرگ باشند، آخرین مجموع مذکور در بالا را می توان از ε کوچکتر کرد. بنا بر قضیه ۵.۷.۱، تابعی مانند f در $L^2(I)$ هست بقسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - f\| = 0.$$

برای اثبات $(f, \varphi_k) = c_k$ ملاحظه می کنیم که اگر $n \geq k$ ، $(s_n, \varphi_k) = c_k$ پس، با استفاده از نامساوی کشی - شوارتز، داریم

$$\begin{aligned} |c_k - (f, \varphi_k)| &= |(s_n, \varphi_k) - (f, \varphi_k)| \\ &= |(s_n - f, \varphi_k)| \leq \|s_n - f\|. \end{aligned}$$

چون وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\|s_n - f\| \rightarrow 0$ ، پس قسمت (آ) برقرار است.

تصره. اثبات قضیه بالا به این واقعیت بستگی دارد که فضای نیمه متری $L^2(I)$ تام است. برای تابعهایی که مربعهایشان انتگرال ریمن داشته باشند قضیه‌ای نظیر قضیه بالا وجود ندارد.

۷.۱۱ مسأله‌های همگرایی و نمایش برای رشته‌های مثلثاتی

فرض کنیم f بر بازه $I = [0, 2\pi]$ انتگرال لبگ داشته باشد. رشته فوریه مثلثاتی که به وسیله تابع f تولید شده باشد، یعنی

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

را در نظر می‌گیریم. در این جا دو سؤال پیش می‌آیند: آیا این رشته در نقطه‌ای مانند x در I همگرا است؟ اگر این رشته در x همگرا باشد، آیا مجموع آن مساوی $f(x)$ خواهد بود؟ سؤال اول را مسأله همگرایی، و سؤال دوم را مسأله نمایش، می‌نامند. در حالت کلی، جواب هر دو سؤال «منفی» است. در واقع، تابعهایی هستند که انتگرال لبگ دارند ولی رشته‌های فوریه آنها هم‌جا و اگر است، و تابعهایی پیوسته وجود دارند که رشته‌های فوریه آنها بر مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر واگرا است.

از زمان فوریه تاکنون نوشته‌های زیادی درباره این مسأله‌ها بطبع رسیده است. منظور اکثر این تحقیقات پیدا کردن شرطهای کافی بوده است که f احراز کند تا رشته فوریه آن در سراسر بازه یا در نقطه‌هایی خاص در آن همگرا باشد. بعداً ثابت می‌کنیم که همگرایی یا واگرایی رشته در نقطه‌ای خاص فقط به رفتار تابع در یکی از همسایگیهای کوچک و دلخواه آن نقطه بستگی دارد. (ر. ک. قضیه ۱۱.۱۱، یعنی قضیه تمرکز ریمن.)

کوششهای فوریه و دیریکله در اوایل قرن نوزدهم میلادی، و پس از آن کارهای ریمن، لب شیتس، هاینه، کانتور، دو بوآ-ریموند، دینی^۲، ژردان^۳، و دولا واله پوسن^۴ در نیمه دوم آن قرن، منجر به کشف شرطهای کافی با میدانهای عمل وسیع برای همگرایی رشته‌ها، در نقطه‌هایی خاص یا، به طور کلی، در سراسر بازه گردیدند.

1. Du Bois-Reymond

2. Dini

3. Jordan

4. De la Vallée-Poussin

پس از آن که لبگ در ۱۹۰۲ نظریهٔ عمومی اندازه‌ها و انتگرالگیری خود را کشف کرد، میدان پژوهش بسیار وسعت یافت و نام‌هایی که از آن پس در این زمینه برده می‌شوند عبارتند از فجر، هابسن^۱، یانگ، هاردی، و لیتل‌وود^۲. فجر، در ۱۹۰۳، نشان داد که اگر به جای دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشته، یعنی $\{s_n\}$ ، دنبالهٔ میانگینهای حسابی جمله‌های آن، یعنی $\{\sigma_n\}$ ، که به وسیلهٔ رابطهٔ

$$\sigma_n(x) = \frac{s_2(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}$$

تعریف می‌شود، در نظر گرفته شود، رشته‌های فوریهٔ واگرا نیز ممکن است مفید واقع شوند. فجر قضیهٔ قابل ملاحظهٔ زیر را ثابت کرد: هرگاه در نقطهٔ x در $[0, 2\pi]$ ، $f(x+)$ و $f(x-)$ وجود داشته باشند، آنگاه دنبالهٔ $\{\sigma_n(x)\}$ همگرا است و حد آن مساوی $[f(x+) + f(x-)]/2$ است؛ تنها قید بر f این است که f بر $[0, 2\pi]$ انتگرال لبگ داشته باشد (قضیهٔ ۱۵.۱۱). همچنین ثابت کرد که از یک رشتهٔ فوریه، همگرا یا واگرا، می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت (قضیهٔ ۱۶.۱۱). مهمترین نتیجه‌ای که دربارهٔ رشته‌های فوریه اخیراً ثابت شده است مطلبی است که توسط لنارت کارلسون^۳ ریاضیدان سوئدسی بدست آمده است. این دانشمند ثابت کرده است که رشتهٔ فوریهٔ هر تابع در $L^2(I)$ تقریباً همه جا بر I همگرا است^۴.

در این فصل بعضی از شرطهای کافی برای همگرایی رشته‌های فوریه در یک نقطهٔ خاص را نتیجه گرفته، سپس قضیه‌های فجر را ثابت می‌کنیم. این مطالب به دو دستور حدی اساسی بستگی دارند که ابتدا مورد بحث قرار خواهند گرفت. این دستورهای حدی، که در نظریهٔ انتگرالهای فوریه نیز مورد استعمال دارند، با انتگرالهای سروکار دارند که تابع یک پرمای حقیقی α هستند، و ما به رفتار این انتگرالها وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$ علاقمند هستیم. اولین دستور، تعمیم رابطه‌های (۹) است، و به لم ریمان-لبگ معروف است.

۸.۱۱ لم ریمان - لبگ

قضیهٔ ۶.۱۱ فرض کنیم که $f \in L(I)$. در این صورت، به‌ازای هر عدد حقیقی β ،

$$(۱۰) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt = 0.$$

1. Hobson

2. Littlewood

3. Lennart Carleson

4. Acta Mathematica, 116 (1966), pp. 135-157.

برهان. اگر f تابع مشخص کننده بازه فشرده $[a, b]$ باشد، نتیجه واضح است زیرا اگر $\alpha > 0$ ،

$$\left| \int_a^b \sin(\alpha t + \beta) dt \right| = \left| \frac{\cos(\alpha a + \beta) - \cos(\alpha b + \beta)}{\alpha} \right| \leq \frac{2}{\alpha}.$$

و نیز اگر f بر بازه باز $[a, b]$ پایا، و در خارج $[a, b]$ مساوی صفر باشد، باز نتیجه، بی توجه به نحوه تعریف $f(a)$ و $f(b)$ ، حاصل است. بنابراین، اگر f تابعی پله‌ای باشد، رابطه (۱۰) معتبر خواهد بود. حال بسادگی می‌توان رابطه (۱۰) را برای هر تابعی مانند f که انتگرال لیگ داشته باشد ثابت نمود.

اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، (بموجب قضیه ۱۹.۱۰ (ب)) تابعی پله‌ای مانند s وجود دارد بقسمی که $\int_I |f - s| < \varepsilon/2$ چون (۱۰) برای هر تابع پله‌ای برقرار است، پس عدد مثبتی مانند M وجود دارد بقسمی که

$$\left| \int_I s(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha \geq M \quad \text{اگر}$$

بنابراین، اگر $\alpha \geq M$

$$\begin{aligned} & \left| \int_I f(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \\ & \leq \left| \int_I (f(t) - s(t)) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \\ & \quad + \left| \int_I s(t) \sin(\alpha t + \beta) dt \right| \\ & \leq \int_I |f(t) - s(t)| dt + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بدین ترتیب صحت لم ریمان - لیگ ثابت می‌شود.

مثال. با فرض $\beta = 0$ و $\beta = \pi/2$ ، معلوم می‌شود که اگر $f \in L(I)$ ،

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_I f(t) \sin \alpha t dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_I f(t) \cos \alpha t dt = 0.$$

به‌عنوان کاربرد از لم ریمان - لیگ، نتیجه زیر را می‌گیریم که در بحث ما درباره انتگرالهای فوریه مورد حاجت خواهد بود.

قضیه ۷.۱۱. اگر $f \in L(-\infty, +\infty)$ ، رابطه

$$(11) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos \alpha t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t} dt$$

در صورتی برقرار است که انتگرال لبگ طرف راست آن وجود داشته باشد.

پرهان. به ازای هر مقدار ثابت α ، انتگرال طرف چپ رابطه (۱۱) به عنوان انتگرال لبگ وجود دارد زیرا خارج قسمت $(1 - \cos \alpha t)/t$ بر بازه $]-\infty, +\infty[$ پیوسته و کراندار است. (در $t = 0$ مقدار این خارج قسمت مساوی حد آن وقتی که $t \rightarrow 0$ ، یعنی ۰، تعریف می‌شود.) از این روی، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos \alpha t}{t} dt &= \int_0^{\infty} f(t) \frac{1 - \cos \alpha t}{t} dt \\ &+ \int_{-\infty}^0 f(t) \frac{1 - \cos \alpha t}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} [f(t) - f(-t)] \frac{1 - \cos \alpha t}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t} dt \\ &- \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(-t)}{t} \cos \alpha t dt. \end{aligned}$$

وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$ ، بنا بر لم ریمان - لبگ، انتگرال آخری به صفر می‌گراید، و قضیه برقرار خواهد بود.

۹.۱۱ انتگرالهای دیریکله

انتگرالهای به شکل $\int_0^{\delta} g(t) (\sin \alpha t)/t dt$ (به نام انتگرالهای دیریکله) نقش مهمی در نظریه رشته‌های فوریه و همچنین نظریه انتگرالهای فوریه بعهده دارند. در این انتگرالها فرض بر این است که تابع g در انتگرالده دارای حد دست راستی $g(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t)$ متناهی می‌باشد. در مورد این انتگرالها می‌خواهیم شرطهای دیگری برای g پیدا کنیم که معتبر بودن معادله زیر را تضمین نمایند:

$$(12) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = g(0+).$$

برای این که بفهمیم چرا باید منتظر باشیم که دستوری مانند (۱۲) برقرار باشد، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که g بر $[0, \delta]$ تابعی پایا ($g(t) = g(0+)$)

باشد. در این صورت، (۱۲) نتیجه‌ای است بدیهی از دستور $\int_0^\infty (\sin t)/t dt = \pi/2$ (ر. ک. مثال ۳، بخش ۱۶.۱۰)، زیرا

$$\int_0^\delta \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \int_0^{\alpha \delta} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \rightarrow +\infty$$

به‌طور کلیتر، اگر $g \in L([0, \delta])$ ، و اگر $0 < \varepsilon < \delta$ ، بنا بر لم ریمان - لِبگ،

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = 0.$$

از این روی، معتبر بودن (۱۲) کاملاً به (فصل) موضعی g در نزدیکی 0 بستگی دارد. چون وقتی که t نزدیک به 0 باشد، $g(t)$ نزدیک به $g(0+)$ است، امید هست که بی‌گذاشتن قیدهای زیادی دیگری بر g بتوان رابطه (۱۲) را ثابت کرد. بنظر می‌رسد که پیوستگی g در 0 یقیناً برای حصول اطمینان در وجود حد در (۱۲) کافی باشد. دیریکله نشان داد که اگر g علاوه بر پیوستگی بر $[0, \delta]$ تعدادی متاهی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد، پیوستگی آن بر $[0, \delta]$ برای اثبات (۱۲) کافی خواهد بود. بعداً ژردان (۱۲) را با قید کمتری برای g ، و فقط با شرط آن که g بر $[0, \delta]$ با تغییرکراندار باشد، ثابت نمود. اما، همهٔ کوششها برای اثبات (۱۲) تنها با شرط پیوستگی g بر $[0, \delta]$ با شکست مواجه شده‌اند. در حقیقت، دو بوآ-ریموند مثالی از یک تابع پیوسته مانند g کشف کرد که به‌ازای آن حد مذکور در (۱۲) وجود ندارد. در این جا نتیجهٔ ژردان، و یک قضیهٔ مربوط به آن، که به دینی تعلق دارد، مورد بحث قرار خواهند گرفت.

قضیهٔ ۸.۱۱ (ژردان). هرگاه g بر $[0, \delta]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه

$$(13) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = g(0+).$$

برهان. کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن g بر $[0, \delta]$ صعودی است. اگر $0 < h < \delta$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt &= \int_0^h \left[g(t) - g(0+) \right] \frac{\sin \alpha t}{t} dt \\ &\quad + g(0+) \int_0^h \frac{\sin \alpha t}{t} dt + \int_h^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt \\ (14) \quad &= I_1(\alpha, h) + I_2(\alpha, h) + I_3(\alpha, h). \end{aligned}$$

چون انتگرال $\int_h^{\delta} g(t)/t dt$ وجود دارد، می‌توانیم لم ریمان - لِبگ را در مورد $I_1(\alpha, h) \rightarrow 0, \alpha \rightarrow +\infty$ که وقتی که بدست آوریم و همچنین، وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$

$$I_1(\alpha, h) = g(0+) \int_0^h \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

$$= g(0+) \int_0^{h\alpha} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2} g(0+).$$

حال، $M > 0$ را بقسمی اختیار می‌کنیم که به‌ازای هر $b \geq a \geq 0$ ، $|\int_a^b (\sin t)/t dt| < M$ از این جا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $b \geq a \geq 0$ اگر $\alpha > 0$ ، $|\int_a^b (\sin \alpha t)/t dt| < M$ حال فرص‌کنیم که $\varepsilon > 0$ داده شده باشد و h را در $[\delta, \infty)$ بقسمی اختیار می‌کنیم که

$$|g(h) - g(0+)| < \varepsilon/(3M).$$

چون

$$g(t) - g(0+) \geq 0, 0 \leq t \leq h$$

پس می‌توان قضیهٔ بونه (قضیهٔ ۳۷.۷) را در مورد $I_1(\alpha, h)$ بکار برده، نوشت

$$I_1(\alpha, h) = \int_0^h [g(t) - g(0+)] \frac{\sin \alpha t}{t} dt$$

$$= [g(h) - g(0+)] \int_c^h \frac{\sin \alpha t}{t} dt,$$

که در آن $c \in [0, h]$ از تعریف h نتیجه می‌شود که

$$(15) \quad |I_1(\alpha, h)| = |g(h) - g(0+)| \left| \int_c^h \frac{\sin \alpha t}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3M} M = \frac{\varepsilon}{3}.$$

برای همین h, A را می‌توان بقسمی اختیار کرد که به‌ازای $\alpha \geq A$

$$(16) \quad \left| I_1(\alpha, h) - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{و} \quad |I_1(\alpha, h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

در این صورت، به‌ازای $\alpha \geq A$ می‌توان (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) را تلفیق نموده نتیجه گرفت که

$$\left| \int_0^{\delta} g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt - \frac{\pi}{2} g(0+) \right| < \varepsilon.$$

پس رابطهٔ (۱۳) برقرار است.

شرط متفاوت دیگری برای معتبر بودن (۱۳)، که به وسیلهٔ دینی کشف شده است، به صورت زیر است:

قضیهٔ ۹.۱۱ (دینی). فرض کنیم $g(0+)$ وجود داشته باشد، و به ازای δ مثبتی، انتگرال لیبگ

$$\int_0^\delta \frac{g(t) - g(0+)}{t} dt$$

وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = g(0+).$$

پوهان. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt &= \int_0^\delta \frac{g(t) - g(0+)}{t} \sin \alpha t dt \\ &+ g(0+) \int_0^\delta \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$ ، اولین جملهٔ سمت راست دستور بالا به صفر می‌گراید (بنا

بر لم ریمان - لیبگ)، دومین جمله به $\frac{1}{\pi} \int_0^\delta \sin t dt$ گرایش پیدا می‌کند.

تبره. اگر به ازای هر a مثبت کوچکتر از δ ، $g \in L([a, \delta])$ ، با سانس می‌توان نشان داد که هر گاه g در نقطهٔ 0 در شرط لیب شیتس «دست راستی» صدق کند، آنگاه شرط دینی برقرار است. شرط لیب شیتس دست راستی در نقطهٔ 0 یعنی، دو عدد پایا و مثبت M و p وجود داشته باشند بقسمی که

$$|g(t) - g(0+)| < M t^p, \quad t \in]0, \delta]$$

(ر. ک. تمرین ۰۱۱-۰۲۱). بخصوص، وقتی که g در 0 مشتق دست راستی داشته باشد، شرط لیب شیتس با $p = 1$ برقرار است. مطلب جالب توجه این است که تابعهائی هستند که در شرط دینی صدق می‌کنند ولی در شرط ژردان صدق نمی‌کنند. همچنین، تابعهائی هستند که شرط ژردان برای آنها برقرار است ولی شرط دینی نیست. (ر. ک. کتاب مرجع ۰۱۱-۰۱۵)

۱۰.۱۱ نمایش مجموعه‌های جزئی یک رشته فوریه به صورت انتگرال

تابع f را متناوب با دورهٔ تناوب $0 \neq p$ نامیم در صورتی که f بر \mathbb{R} تعریف شده

باشد، و به ازای هر x ، $f(x+p) = f(x)$ ، قضیه زیرین مجموعه‌های جزئی یک رشته فوریه را بر حسب تابع زیر بیان می‌کند.

$$(17) \quad D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin t/2}, & \text{اگر } t \neq 2m\pi \text{ (عددی است صحیح } m) \\ n + \frac{1}{2}, & \text{اگر } t = 2m\pi \text{ (عددی است صحیح } m) \end{cases}$$

این دستور در بخش ۱۶۰۸، که مربوط به مجموعه‌های جزئی رشته هندسی بود، مورد بحث قرار گرفت. تابع D_n را هسته دبریکله می‌نامند.

قضیه ۱۰.۱۱ فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f متناوب با دوره تناوب 2π باشد. همچنین $\{s_n\}$ دنباله مجموعه‌های جزئی رشته فوریه‌ای که به وسیله f تولید می‌شود باشد، یعنی

$$(18) \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n=1, 2, \dots)$$

در این صورت نمایش انتگرالی زیرین وجود دارد:

$$(19) \quad s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt.$$

برهان. ضربهای فوریه f با انتگرالهای (۷) داده شده‌اند. اگر این انتگرالها را در (۱۸) قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x) dt.$$

چون f و D_n هر دو متناوب با دوره تناوب 2π هستند، می‌توان بازه انتگرالگیری را با $[x-\pi, x+\pi]$ عوض کرد و سپس انتقال $u = t-x$ را بجا آورد تا

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du$$

حاصل شود. با استفاده از معادله $D_n(-u) = D_n(u)$ ، رابطه (۱۹) بدست می‌آید.

۱۱.۱۱ قضیه تمرکز ریمان

بنابردستور (۱۹)، رشته فوریه‌ای که به وسیله f تولید می‌شود وقتی، و فقط وقتی، در نقطه x همگرا است که حد زیرین وجود داشته باشد:

$$(۲۰) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt,$$

که در این صورت مقدار این حد مساوی مجموع رشته خواهد بود. انتگرال بالا اساساً یک انتگرال دیریکله از نوعی است که در بخش قبل درباره آن بحث شد، با این تفاوت که در مخرج بجای t جمله $2 \sin \frac{1}{2}t$ ظاهر شده است. اما، لم ریمان - لیگ نشان می‌دهد که تعویض $2 \sin \frac{1}{2}t$ با t در (۲۰) تأثیری در موجودیت یا مقدار این حد نخواهد داشت. با بیان دقیقتر می‌توان گفت که، بنا بر لم ریمان - لیگ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0,$$

زیرا تابع F که با معادله‌های زیر تعریف می‌شود:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}t}, & 0 < t \leq \pi \text{ اگر} \\ 0, & t = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

بر بازه $[0, \pi]$ پیوسته است. بنابراین، مسأله همگرایی برای رشته‌های فوریه منجر به پیدا کردن شرطهایی برای f می‌شود که وجود حد زیرین را تضمین نمایند:

$$(۲۱) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt.$$

اگر بار دیگر از لم ریمان - لیگ استفاده کنیم، معلوم می‌شود که در رابطه (۲۱) می‌توان به جای انتگرال \int_0^{π} انتگرال \int_{δ}^{π} را قرار داد که در آن عدد مثبتی

کوچکتر از π باشد، زیرا وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ به صفر می‌گراید. بنابراین، می‌توان نتیجه‌های بخش قبل را با هم به صورت قضیه زیرین بیان نمود:

قضیه ۱۱.۱۱ فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f دارای دوره تناوب 2π باشد. در این صورت، رشته فوریه تولید شده به وسیله f وقتی، و فقط وقتی، در نقطه معلوم x همگرا است که به ازای عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$ ، حد زیرین وجود داشته باشد:

$$(۲۲) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{4})t}{t} dt,$$

که در این صورت مقدار این حد مساوی مجموع (رشته فوریه) خواهد بود.

این قضیه به قضیه تمرکز دیمان معروف است. بنا بر این قضیه، همگرایی یا واگرایی یک رشته فوریه در یک نقطه خاص کاملاً به رفتار f در همسایگی کوچک و دلخواهی از آن نقطه بستگی دارد. این مطلب، با توجه به این واقعیت که ضریبهای رشته فوریه به مقدارهای تابع در سراسر بازه $[0, 2\pi]$ بستگی دارند، تا حدی تعجب‌آور است.

۱۲.۱۱ شرطهای کافی برای همگرایی یک رشته فوریه در یک نقطه مخصوص

فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f دارای دوره تناوب 2π باشد. نقطه ثابتی مانند x در $[0, 2\pi]$ ، و عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$ را اختیار می‌کنیم. فرض کنیم

$$g(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}, \quad t \in [0, \delta]$$

و در صورت وجود حد زیر،

$$s(x) = g(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

توجه کنید که اگر f در x پیوسته باشد، $s(x) = f(x)$.

اگر قضیه ۱۱.۱۱ را، بترتیب، با قضیه‌های ۸.۱۱ و ۹.۱۱ تلفیق نماییم، این شرطهای کافی برای همگرایی یک رشته فوریه بدست می‌آیند:

قضیه ۱۲.۱۱ (آرمون زردان). هر گاه به ازای یک $\delta < \pi$ ، f بر بازه فشرده $[x - \delta, x + \delta]$ با تغییر کراندار باشد، آنگاه $s(x)$ وجود دارد و رشته فوریه‌ای که به وسیله f تولید شود به $s(x)$ همگرا خواهد بود.

قضیه ۱۳.۱۱ (آرمون دینی). هر گاه $s(x)$ وجود داشته باشد و به ازای δ ای که

$\delta < \pi$ ، انتگرال لبگ

$$\int_0^{\delta} \frac{g(t) - s(x)}{t} dt$$

وجود داشته باشد، آنگاه رشته فوریه تولید شده به وسیله f به $s(x)$ همگرا است.

۱۳۰۱۱ مجموعه پذیری جزاروی رشته‌های فوریه

در مطالعه همگرایی رشته فوریه تولید شده به وسیله f ، پیوستگی f فرض خیلی ثمربخشی نیست. به سال ۱۸۷۳، دو بوآریموند تابعی مثال زد، که در سراسر بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است، ولی رشته فوریه آن بیک زیرمجموعه شمارش ناپذیر $[0, 2\pi]$ همگرا نمی‌تواند بود. از سوی دیگر، فرض پیوستگی برای اثبات مجموعه پذیری جزاروی رشته کافی است. در این جا این نتیجه (که منسوب به فجر است) و بعضی از نتیجه‌های آن مورد بحث قرار خواهند گرفت.

اولین وظیفه ما این است که برای میانگینهای حسابی مجموعه‌های جزئی یک رشته فوریه نمایشی به صورت انتگرال بدست آوریم.

قضیه ۱۴۰۱۱ فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f متناوب با دوره تناوب 2π باشد. همچنین s_n مجموع جزئی n رشته فوریه تولید شده به وسیله f نشان دهد و

$$(23) \quad \sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

در این صورت، نمایش انتگرالی زیر وجود دارد:

$$(24) \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} dt.$$

پوهان. اگر نمایش انتگرالی برای $s_n(x)$ مذکور در رابطه (۱۹) را بکار بریم و مجموعی که با آن $\sigma_n(x)$ تعریف می‌شود تشکیل دهیم، به دلیل دستور (۱۶)، بخش ۱۶.۸، بی‌درنگ نتیجه مورد نظر حاصل خواهد شد.

تصویر. اگر قضیه ۱۴۰۱۱ را در مورد تابع پایانی که در هر نقطه مقدارش ۱ است بکار بریم، معلوم می‌شود که به ازای هر n ، $\sigma_n(x) = s_n(x) = 1$ و در نتیجه رابطه (۲۴) به صورت زیرین درمی‌آید:

$$(25) \quad \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} nt}{\sin^2 \frac{1}{2} t} dt = 1.$$

بنابراین، به ازای هر s داده شده‌ای، می‌توان (۲۵) را با (۲۴) تلفیق نمود و نوشت

$$(۲۶) \quad \sigma_n(x) - s = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s \right\} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t} dt.$$

اگر بتوان s را بقسمی اختیار کرد که وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، انتگرال طرف راست (۲۶) به صفر بگراید، در این صورت، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sigma_n(x) \rightarrow s$ ، قضیه زیر نشان می‌دهد که برای این کار کافی است که $s = [f(x+) + f(x-)]/2$.

قضیه ۱۵.۱۱ (فجر). فرض کنیم که $f \in L([0, 2\pi])$ و f متناوب با دوره تناوب 2π باشد. تابع s را با معادله زیرین، در نقطه‌هایی که حد وجود داشته باشد، تعریف می‌کنیم:

$$(۲۷) \quad s(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}.$$

در این صورت، به ازای هر x که $s(x)$ تعریف شده باشد، دشته فوریه تولید شده به وسیله f مجموعپذیر جزا دو است و مجموع از نوع $(C, 1)$ آن $s(x)$ است. یعنی،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = s(x),$$

که در آن $\{\sigma_n\}$ دنباله میانگینهای حسابی است که با (۲۳) تعریف می‌شود. بعلاوه، هرگاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه دنباله $\{\sigma_n\}$ بر $[0, 2\pi]$ به طرد یکشکل به f همگرا خواهد بود.

برهان. هر جا که $s(x)$ تعریف شده باشد، قرار می‌دهیم

$$g_x(t) = [f(x+t) + f(x-t)]/2 - s(x).$$

در این صورت، وقتی که $t \rightarrow 0+$ ، $g_x(t) \rightarrow 0$. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد مثبتی مانند $\delta < \pi$ هست بقسمی که به ازای $0 < t < \delta$ ، $|g_x(t)| < \varepsilon/2$. توجه کنید که δ به x و ε هر دو بستگی دارد. اما، هرگاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته یکشکل است، و در نتیجه δ ای هست که برای همه نقطه‌ها مانند x در $[0, 2\pi]$ دارای خاصیت بالا است. حال از رابطه (۲۶) استفاده نموده، بازه انتگرالگیری را به دو زیربازه $[0, \delta]$ و $[\delta, \pi]$ تقسیم می‌کنیم. بر $[0, \delta]$ ، بنا بر (۲۵)، داریم

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^\delta g_x(t) \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{1}{2}nt}{\sin^2 \frac{1}{2}t} dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

بر $[\delta, \pi]$ داریم

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\pi} g_x(t) \frac{\sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} nt}{\sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} t} dt \right| \leq \frac{1}{n\pi \sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} \delta} \int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| dt$$

$$\leq \frac{I(x)}{n\pi \sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} \delta},$$

که در آن $I(x) = \int_{\delta}^{\pi} |g_x(t)| dt$ حال N را بقسمی اختیار می‌کنیم که
 $I(x)/(N\pi \sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} \delta) < \varepsilon/2$ ، اگر $n \geq N$

$$|\sigma_n(x) - s(x)| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\pi} g_x(t) \frac{\sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} nt}{\sin^{\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\nu} t} dt \right| < \varepsilon.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $\sigma_n(x) \rightarrow s(x)$

هرگاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، آنگاه، بنا بر خاصیت تناوب، f بر \mathbb{R} کراندار است و عددی مانند M هست بقسمی که به ازای هر x و هر t ، $|g_x(t)| \leq M$ ، و در نتیجه در بحث بالا می‌توان به جای $I(x)$ مقدار πM را قرار داد. در این صورت، N که بدست می‌آید از x مستقل است، و در نتیجه $f = s = \sigma_n \rightarrow s$ به‌طور یکشکل بر $[0, 2\pi]$.

۱۴.۱۱ نتیجه‌های قضیه فجر

قضیه ۱۴.۱۱ فرض کنیم تابع f بر $[0, 2\pi]$ متناوب، با دوره تناوب 2π ، باشد. همچنین $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی رشتهٔ فوریه‌ای دانشان دهد که به وسیلهٔ f تولید می‌شود، یعنی

$$(۲۸) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

در این صورت:

$$(آ) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f \quad \text{بر } [0, 2\pi] \text{ است.}$$

$$(ب) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{(دستور پاراسوال)}$$

(ج) از رشتهٔ فوریه می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، یعنی، به ازای هر x ،

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt,$$

د حتی اگر رشتهٔ فوریه (۲۸) واگرا باشد، رشتهٔ حاصل از انتگرالگیری بر هر بازه

همگرای یکشکل است.

(د) هرگاه دشته فوریه (۲۸) در نقطه‌ای مانند x همگرا باشد، آنگاه این دشته به $f(x)$ همگرا خواهد بود.

برهان. با بکار بردن دستور (۳) در قضیه ۲۰۱۱، با

$$t_n(x) = \sigma_n(x) = (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} s_k(x),$$

این نامساوی بدست می‌آید:

$$(۲۹) \int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx.$$

اما، چون $f \rightarrow \sigma_n$ به‌طور یکشکل بر $[0, 2\pi]$ ، پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = f$ بر $[0, 2\pi]$ است، و (آ) از (۲۹) نتیجه می‌شود. بنابراین قضیه ۴۰۱۱، قسمت (ب) از قسمت (آ) بدست می‌آید. بنابراین قضیه ۱۸۰۹، قسمت (ج) نیز از (آ) نتیجه می‌شود. بالاخره، هرگاه، به‌ازای x ، $\{s_n(x)\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{\sigma_n(x)\}$ نیز باید به‌همان حد بگراید. اما، چون $f(x) \rightarrow \sigma_n(x)$ ، پس $f(x) \rightarrow s_n(x)$ یعنی (د) برقرار است.

۱۵۰۱۱ قضیه تقریب وایراشتراس

با استفاده از قضیه فجر نیز می‌توان یکی از قضیه‌های مشهور وایراشتراس را ثابت کرد. این قضیه بدین صورت است که هر تابع پیوسته بر بازه‌ای فشرده را می‌توان به‌طور یکشکل به یک چند جمله‌ای نزدیک کرد. با بیان دقیقتر، می‌توان گفت که:

قضیه ۱۷۰۱۱ فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازه فشرده $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یک چند جمله‌ای مانند p (که ممکن است به ϵ بستگی داشته باشد) وجود دارد قسمی که

$$(۳۰) \quad |f(x) - p(x)| < \epsilon \quad \text{به‌ازای هر } x \text{ در } [a, b].$$

برهان. اگر $t \in [0, \pi]$ ، قرار می‌دهیم $g(t) = f[a + t(b-a)/\pi]$ ؛ اگر $t \in [\pi, 2\pi]$ ، قرار می‌دهیم $g(t) = f[a + (2\pi - t)(b-a)/\pi]$ ، و g را در خارج $[0, 2\pi]$ قسمی تعریف می‌کنیم که دارای دوره تناوب 2π باشد. به‌ازای ϵ داده شده در قضیه، می‌توان با بکار بردن قضیه فجر تابعی مانند σ قسمی پیدا کرد که با معادله‌ای به شکل

$$\sigma(t) = A_0 + \sum_{k=1}^N (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

تعریف شده باشد، و به‌ازای هر t در $[0, 2\pi]$ ، $|g(t) - \sigma(t)| < \varepsilon/2$ (توجه کنید که N ، و در نتیجه σ ، به ε بستگی دارد.) چون σ مجموع تعدادی متناهی تابع مثلثاتی است، پس دارای بسطی به‌صورت رشته توانی حول مبدأ است، که این بسط بر هر بازه متناهی همگرای یکشکل است. مجموعهای جزئی این بسط دنباله‌ای از چند جمله‌ایها، مثلاً $\{p_n\}$ ، را بوجود می‌آورند، بقسمی که $p_n \rightarrow \sigma$ به‌طور یکشکل بر $[0, 2\pi]$ ، از این روی، برای همان ε ، m هست که

$$|p_m(t) - \sigma(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \text{ در } [0, 2\pi]$$

بنابراین،

$$(31) \quad |p_m(t) - g(t)| < \varepsilon, \quad t \text{ در } [0, 2\pi]$$

حال چند جمله‌ای p را با دستور $p(x) = p_m[\pi(x-a)/(b-a)]$ تعریف می‌کنیم. در این صورت، اگر $t = \pi(x-a)/(b-a)$ ، نامساوی (31) به (30) تبدیل خواهد شد.

۱۶.۱۱ شکلهای دیگر رشته فوریه

با استفاده از دستورهای

$$2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx} \quad \text{و} \quad 2i \sin nx = e^{inx} - e^{-inx}$$

رشته فوریه تولید شده به‌وسیله f را می‌توان برحسب نماهای مختلط به‌صورت زیر درآورد:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \beta_n e^{-inx}), \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_n = (a_n - ib_n)/2$ و $\beta_n = (a_n + ib_n)/2$. اگر قرار دهیم $\alpha_{-n} = \beta_n$ و $\alpha_0 = a_0/2$ ، می‌توان شکل نمائی را به‌صورت ساده‌تر زیر نوشت:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}.$$

در این صورت، دستورهای (۷) برای ضریبها به شکل زیر درمی‌آیند:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (n = 0, \pm 1, 2, \dots).$$

اگر f دارای دوره تناوب 2π باشد، بازه انتگرالگیری را می توان با هر بازه دیگر به درازای 2π عوض کرد.

کلیتر بگوئیم، اگر $f \in L([0, p])$ و f دارای دوره تناوب p باشد، منظور از

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{p} \right)$$

این است که ضریبهای موجود در آن از دستورهای زیرین بدست می آیند:

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi nt}{p} dt,$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi nt}{p} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

به شکل نمائی می توان نوشت

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx/p},$$

که در آن

$$\alpha_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) e^{-2\pi int/p} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

با تغییر مناسب مقیاس، همه قضیههای همگرایی برای رشته فوریه با دوره تناوب 2π را می توان برای حالتی که در آن دوره تناوب عدد دلخواه p است نیز بکار برد.

۱۷.۱۱ قضیه انتگرال فوریه

فرض متناوب بودن، که در همه قضیههای همگرایی مربوط به رشتههای فوریه ظاهر می شود، قبلی است که آن قدر که در ابتدا ممکن است بنظر برسد جدی نیست. اگر تابعی اول بر یک بازه متناهی، مثلاً $[a, b]$ ، تعریف شده باشد، همواره می توان با تحمیل نوعی شرط تناوب، تعریف f را در خارج $[a, b]$ وسعت داد. مثلاً، اگر $f(a) = f(b)$ می توانیم با شرط آن که معادله $f(x+p) = f(x)$ که در آن $p = b - a$ ، به ازای هر مقدار x صادق باشد، f را همه جا بر $]-\infty, +\infty[$ تعریف کنیم. (همیشه می توان، در صورت لزوم، با تغییر مقدار تابع در یکی از نقطههای انتهائی بازه، شرط $f(a) = f(b)$ را تأمین کرد. این تغییر در موجودیت

و یا مقادیر انتگرالهائی که برای محاسبه ضریبهای فوریه f بکار می‌روند تأثیری ندارد. اما، اگر تابع داده شده از اول همه جا بر $+\infty$ ، $-\infty$ [تعریف شده باشد و متناوب نباشد، امیدی نیست که بتوان رشته فوریه‌ای بدست آورد که همه جا بر $+\infty$ ، $-\infty$ [آن تابع را نمایش دهد. با وجود این، در چنین حالتی، گاه می‌توان تابع را به جای نمایش دادن با رشته‌ای نامتناهی با انتگرالی نامتناهی نمایش داد. این انتگرالها، که از بسیاری جهات مشابه رشته‌های فوریه هستند، به انتگرالهای فوریه موسومند، و قضیه‌ای که شرطهای کافی برای نمایش تابعی به صورت این چنین انتگرالها را بیان کند قضیه انتگرال فوریه نامیده می‌شود. ابزارهای اساسی که در این نظریه بکار می‌روند، مانند مورد رشته‌های فوریه، عبارتند از انتگرالهای دیریکله و لم ریمان - لبگ.

قضیه ۱۸.۱۱ (قضیه انتگرال فوریه). فرض کنیم که $f \in L[-\infty, +\infty]$ همچنین نقطه‌ای در \mathbf{R} مانند x ، و بازه‌ای مانند $[x - \delta, x + \delta]$ حول x وجود داشته باشد بقسمی که

(آ) f بر بازه $[x - \delta, x + \delta]$ با تغییر کراننداد باشد،
یا

(ب) هر دو حد $f(x+)$ و $f(x-)$ در هر دو انتگرال لبگ

$$\int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x-)}{t} dt \quad \text{و} \quad \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} dt$$

وجود داشته باشند.

در این صورت، دستور

(۲۲)

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u) \cos v(u-x) du \right] dv$$

برقرار است، که در آن یک انتگرال ریمان مجازی است.

برهان. ابتدا دستور زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(۲۳) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x+t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

برای این منظور می‌نویسیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^0 + \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}$$

وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$ ، اولین و چهارمین انتگرال طرف راست رابطه بالا، بنا بر لم ریمان - لِبگ، به صفر می‌گرایند. در مورد انتگرال سوم، می‌توان قضیه ۸.۱۱ یا قضیه ۹.۱۱ (بسته به آن که کدام یک از شرطهای (آ) یا (ب) برقرار باشد) را بکار برد، در نتیجه خواهیم داشت

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} f(x+t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt = \frac{f(x+)}{2}$$

بهین نحو، وقتی که $\alpha \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\delta}^0 f(x+t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt = \int_0^{\delta} f(x-t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt \rightarrow \frac{f(x-)}{2}$$

پس دستور (۳۳) برقرار است. با انجام یک انتقال، نتیجه می‌شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin \alpha (u-x)}{u-x} du,$$

و اگر از دستور مقدماتی

$$\frac{\sin \alpha (u-x)}{u-x} = \int_0^{\alpha} \cos v (u-x) dv$$

استفاده کنیم، رابطه حد موجود در (۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(34) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[\int_0^{\alpha} \cos v (u-x) dv \right] du = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

اما دستوری که می‌خواهیم ثابت کنیم (۳۴) است که در آن فقط ترتیب انتگرالگیری معکوس شده است. چون نابع کسینوس همه جا پیوسته و کراندار است، بنا بر قضیه ۴۰.۱۰، به‌ازای هر $\alpha > 0$ داریم

$$\int_0^{\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos v (u-x) du \right] dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\alpha} f(u) \cos v (u-x) dv \right] du$$

چون حد مذکور در (۳۴) وجود دارد، پس ثابت می‌شود که

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos v(u-x) du \right] dv = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

بنابر قضیه ۴۰.۱۰، انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos v(u-x) du$ تابعی پیوسته از v بر $[0, \alpha]$ است، پس انتگرال \int_0^{α} موجود در (۳۲) به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی وجود دارد. این انتگرال ممکن است به‌عنوان یک انتگرال لیبگ وجود نداشته باشد.

۱۸.۱۱ شکل نمائی قضیه انتگرال فوریه

قضیه ۱۹.۱۱ هر گاه f در فرضهای قضیه انتگرال فوریه صدق کند، آنگاه

$$(۳۵) \quad \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iv(u-x)} du \right] dv.$$

برهان. قرار می‌دهیم $F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos v(u-x) du$ در این صورت، F بر $]-\infty, +\infty[$ پیوسته است، $F(v) = F(-v)$ ، و در نتیجه

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} F(v) dv = \int_0^{\alpha} F(-v) dv = \int_0^{\alpha} F(v) dv.$$

بنابراین، (۳۲) بدین صورت درمی‌آید:

$$(۳۶) \quad \begin{aligned} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} F(v) dv \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} F(v) dv. \end{aligned}$$

حال تابع G را بر $]-\infty, +\infty[$ با معادله

$$G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin v(u-x) du$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، G هم‌جا پیوسته است و $G(v) = -G(-v)$. از این روی، به‌ازای هر α ، $\int_{-\alpha}^{\alpha} G(v) dv = 0$ ، پس $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} G(v) dv = 0$ از تلفیق این نتیجه با (۳۶) خواهیم داشت

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \{F(v) + iG(v)\} dv,$$

که همان دستور (۳۵) می‌باشد.

۱۹.۱۱ تبدیلهای انتگرالی

در آنالیز بسیاری از تابعها را می توان به عنوان انتگرالهای لبگ یا انتگرالهای ریمان مجازی به شکل زیر بیان نمود:

$$(۳۷) \quad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(x) dx.$$

تابعی مانند g که با معادله‌ای از نوع بالا (که در آن y ممکن است عددی حقیقی یا مختلط باشد) تعریف شود، یک تبدیل انتگرالی f نامیده می شود. تابع K ظاهر شده در انتگرالده را هسته تبدیل می نامیم.

تبدیلهای انتگرالی هم در ریاضیات محض و هم کاربردها مورد استفاده بسیار دارند. مخصوصاً در حل بعضی از مسائل با مقدار کرانه‌ای، و همچنین بعضی از معادلات انتگرال، مفید هستند. بعضی از تبدیلهایی که بیشتر بکار می روند در زیر نشان داده می شوند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx \quad \text{(تبدیل فوریه نمایی);}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos xy f(x) dx \quad \text{(تبدیل کسینوسی فوریه);}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin xy f(x) dx \quad \text{(تبدیل سینوسی فوریه);}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} f(x) dx \quad \text{(تبدیل لاپلاس);}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{y-1} f(x) dx \quad \text{(تبدیل ملین).}$$

چون $e^{-ixy} = \cos xy - i \sin xy$ ، تبدیلهای سینوسی و کسینوسی صرفاً حالت‌های خاصی از تبدیل فوریه نمایی می باشند که در آنها تابع f بر قسمت منفی محور حقیقی مساوی صفر می شود. تبدیل لاپلاس نیز با تبدیل فوریه نمایی بستگی دارد. اگر y عدد مختلطی باشد، مثلاً $y = u + iv$ ، که در آن u و v حقیقی هستند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv} e^{-xu} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv} \varphi_u(x) dx, \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{F}_u(x) = e^{-ix} f(x)$. بنا بر این، تبدیل لاپلاس را نیز می‌توان حالت خاصی از تبدیل فوریه نمائی تلقی کرد.

تبره. گاهی معادله‌ای مانند (۳۷) را به شکل خلاصه‌تر $g = \mathcal{K}f$ یا $g = \mathcal{K}(f)$ می‌نویسند، که در آن \mathcal{K} «عملگر» را نشان می‌دهد که f را به g تبدیل می‌کند. چون این معادله برحسب انتگرال بیان شده است، عملگر \mathcal{K} را یک عملگر انتگرالی می‌نامند. واضح است که \mathcal{K} یک عملگر خطی نیز هست. یعنی، اگر a_1 و a_2 پایا باشند،

$$\mathcal{K}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \mathcal{K} f_1 + a_2 \mathcal{K} f_2.$$

عملگری که با تبدیل فوریه تعریف می‌شود غالباً با \mathcal{F} ، و عملگر مربوط به تبدیل لاپلاس را با \mathcal{L} نشان می‌دهند.

شکل نمائی قضیه انتگرال فوریه را می‌توان برحسب تبدیلهای فوریه به‌صورت زیر بیان کرد. فرض کنیم g تبدیل فوریه f را نشان دهد، یعنی

$$(۳۸) \quad g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it u} dt.$$

در این صورت، دستور (۳۵) در نقطه‌های پیوستگی f به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(۳۹) \quad f(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} g(u) e^{ixu} du,$$

و این را دستور معکوس کردن برای تبدیلهای فوریه می‌نامند. این دستور مبین آن است که یک تابع پیوسته مانند f که در شرطهای قضیه انتگرال فوریه صدق کند، به‌طور منحصر بفرد با تبدیل فوریه خود، یعنی g ، مشخص خواهد شد.

تبره. اگر \mathcal{F} عملگری را نشان دهد که به‌وسیله رابطه (۳۸) مشخص می‌شود، عملگری را که با (۳۹) تعریف شود معمولاً با \mathcal{F}^{-1} نمایش می‌دهند. معادله‌های (۳۸) و (۳۹) را می‌توان به صورت نمادی $g = \mathcal{F}^{-1} f$ و $f = \mathcal{F} g$ بیان کرد. دستور معکوس کردن به ما می‌گوید که چگونه معادله $g = \mathcal{F} f$ را برای f برحسب g حل کنیم.

پیش از ادامه مطالعه تبدیلهای فوریه، مفهوم جدید پیچش دو تابع را معرفی می‌کنیم. این مفهوم را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از تبدیل انتگرالی که در آن هسته، یعنی $K(x, y)$ ، فقط به تفاضل $x - y$ بستگی دارد تفسیر نمود.

تعریف ۲۰.۱۱ فرض کنیم دو تابع داده شده f و g هر دو بر $]-\infty, +\infty[$ انتگرال لبگ داشته باشند. همچنین K مجموعه x هائی را نشان دهد که به ازای آنها انتگرال لبگ

$$(۴۰) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt$$

وجود داشته باشد. این انتگرال تابعی مانند h را بر K تعریف می کند که پیچش f و g نامیده می شود. این تابع را با نماد $f * g$ نیز نشان می دهیم.

تصوره. باسانی (به وسیله انتقال) می توان دید که هر جا انتگرال (۴۰) وجود داشته باشد، $f * g = g * f$.

حالت خاص ولی مهم وقتی است که f و g هر دو بر قسمت منفی محور حقیقی صفر شوند. در این حالت، اگر $x > t$ و $g(x-t) = 0$ ، و (۴۰) به صورت

$$(۴۱) \quad h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$$

درمی آید. در این حالت واضح است که پیچش در هر نقطه بازه ای چون $[a, b]$ در صورتی قابل تعریف است که f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرال ریمان داشته باشند. اما، اگر فقط فرض کنیم که f و g بر $[a, b]$ انتگرال لبگ دارند، لازم نیست مطلب چنین باشد. مثلاً،

$$\text{اگر } 0 < t < 1, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{و} \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

و اگر $t \leq 0$ یا $t \geq 1$ ، $f(t) = g(t) = 0$. در این صورت، f در $t = 0$ و ناپوستگی نامتناهی دارد. با وجود این، انتگرال لبگ $\int_0^1 t^{-1/2} dt = \int_0^1 f(t) dt$ وجود دارد. همچنین، با آن که g در $t = 1$ دارای ناپوستگی نامتناهی است، ولی انتگرال لبگ $\int_0^1 (1-t)^{-1/2} dt = \int_0^1 g(t) dt$ وجود دارد. اما، اگر انتگرال پیچش این دو تابع را که در رابطه (۴۰) گفته شد به ازای $x = 1$ تشکیل دهیم، نتیجه می شود که

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(1-t) dt = \int_0^1 t^{-1} dt.$$

دیده می شود که دو ناپوستگی f و g با هم «یکی شده» و به یک ناپوستگی از نوعی بدل شده اند که انتگرال پیچش وجود ندارد.

این مثال نشان می‌دهد که، حتی وقتی که f و g هر دو بر $]-\infty, +\infty[$ انتگرال لیگ داشته باشند، ممکن است نقطه‌هائی روی محور حقیقی باشند که در آنها انتگرال (۴۰) وجود نداشته باشد. این نقطه‌ها را نقطه‌های «استثنائی» h می‌نامیم. بسادگی می‌توان نشان داد که این گونه نقطه‌های استثنائی وجود پیدا نمی‌کنند مگر وقتی که f و g ، هر دو، ناپیوستگی نامتناهی داشته باشند. به بیان دقیقتر، قضیه زیرین وجود دارد:

قضیه ۲۱.۱۱ $R =]-\infty, +\infty[$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f \in L(R)$ ، $g \in L(R)$ و f یا g بر R کراندار باشد. در این صورت، انتگرال پیچش، یعنی

$$(۴۲) \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt,$$

به‌ازای هر x در R وجود دارد، و تابع h که بدین ترتیب تعریف می‌شود بر R کراندار است. هرگاه، علاوه بر این، تابع کراندار f یا g بر R پیوسته باشد، آنگاه h نیز بر R پیوسته است و $h \in L(R)$.

برهان. چون $f * g = g * f$ ، کافی است حالتی را در نظر بگیریم که در آن g کراندار باشد. فرض کنیم که $|g| \leq M$. در این صورت،

$$(۴۳) \quad |f(t) g(x-t)| \leq M |f(t)|.$$

می‌توان تحقیق کرد که به‌ازای هر x ، حاصل ضرب $f(t)g(x-t)$ به‌عنوان تابعی از t بر R اندازه پذیر است، از این روی، بنا بر قضیه ۳۵.۱۰، انتگرال مذکور برای $h(x)$ وجود خواهد داشت. همچنین نامساوی (۴۳) نشان می‌دهد که $|h(x)| \leq M \int |f|$ ، پس h بر R کراندار است.

حال هرگاه g بر R پیوسته هم باشد، آنگاه، بنا بر قضیه ۴۰.۱۰، h بر R پیوسته است. اینک، به‌ازای هر بازه فشرده مانند $[a, b]$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b |h(x)| dx &\leq \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_a^b |g(x-t)| dx \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left[\int_{a-t}^{b-t} |g(y)| dy \right] dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy, \end{aligned}$$

پس، بنا بر قضیه ۳۱.۱۰، $h \in L(\mathbb{R})$.

قضیه ۲۲.۱۱ $[-\infty, +\infty[$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f \in L^2(\mathbb{R})$ و $g \in L^2(\mathbb{R})$. در این صورت، انتگرال پیچش مذکور در (۴۲) به‌ازای هر x در \mathbb{R} وجود دارد و تابع h بر \mathbb{R} کراندار است.

برهان. به ازای x ثابت، قرار می‌دهیم $g_x(t) = g(x-t)$. g_x بر \mathbb{R} اندازه‌پذیر است و $g_x \in L^2(\mathbb{R})$ ، پس از قضیه ۵۴.۱۰ نتیجه می‌شود که $f \cdot g_x \in L(\mathbb{R})$. با بیان دیگری می‌توان گفت که، انتگرال پیچش $h(x)$ وجود دارد. چون $h(x)$ به‌صورت حاصل‌ضرب داخلی است، یعنی $h(x) = (f, g_x)$ ، پس به موجب نامساوی کوشی-شوارتز خواهیم داشت

$$|h(x)| \leq \|f\| \|g_x\| = \|f\| \|g\|,$$

بنابراین، h بر \mathbb{R} کراندار خواهد بود.

۲۱.۱۱ قضیه پیچش برای تبدیلهای فوریه

قضیه زیر نشان می‌دهد که تبدیل فوریه پیچش $f * g$ مساوی حاصل‌ضرب تبدیلهای فوریه f و g است. به زبان عملگرها،

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

قضیه ۲۲.۱۱ $[-\infty, +\infty[$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f \in L(\mathbb{R})$ ، $g \in L(\mathbb{R})$ ، و دست کم یکی از دو تابع f یا g بر \mathbb{R} پیوسته و کراندار باشد. همچنین $h = f * g$. در این صورت، به‌ازای هر عدد حقیقی مانند u ،

$$(44) \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixu} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itu} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iyu} dy \right).$$

انتگرال طرف چپ هم به‌عنوان یک انتگرال لبگ و هم به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود دارد.

برهان. فرض کنیم g بر \mathbb{R} پیوسته و کراندار باشد. همچنین $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله صودی از اعدادهای حقیقی مثبت باشند یقینی که $a_n \rightarrow +\infty$ و $b_n \rightarrow +\infty$. دنباله $\{f_n\}$ از تابعها را بر \mathbb{R} به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_n(t) = \int_{-a_n}^{b_n} e^{-itx} g(x-t) dx.$$

چون به‌ازای هر بازه فشرده مانند $[a, b]$ ،

$$\int_a^b |e^{-iux} g(x-t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g|,$$

پس، بنا به قضیه ۳۱.۱۰،

$$(۴۵) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t) dx \quad t, \text{ به‌ازای هر عدد حقیقی مانند } t,$$

با استفاده از انتقال $y = x - t$ ، خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} g(x-t) dx = e^{-iut} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y) dy,$$

و از رابطه (۴۵) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر t ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t) f_n(t) = f(t) e^{-iut} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y) dy \right).$$

حال چون f_n بنا بر قضیه ۳۸.۱۰ بر \mathbf{R} پیوسته است، حاصل ضرب $f \cdot f_n$ بر \mathbf{R} اندازه پذیر است. چون

$$|f(t) f_n(t)| \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |g|,$$

حاصل ضرب $f \cdot f_n$ بر \mathbf{R} انتگرال لبگ دارد، و قضیه همگرایی تسلطی لبگ نشان می‌دهد که

$$(۴۶) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y) dy \right).$$

اما

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} g(x-t) dx \right] dt.$$

چون تابع k ، که با معادله $k(x, t) = g(x-t)$ تعریف می‌شود، بر \mathbf{R}^2 پیوسته و کراندار است و انتگرال $\int_a^b e^{-iux} dx$ به‌ازای هر بازه فشرده‌ای مانند $[a, b]$ وجود دارد، پس بنا بر قضیه ۴۰.۱۰ می‌توان ترتیب عمل انتگرالگیری را معکوس کرد و نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f_n(t) dt &= \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \right] dx \\ &= \int_{-a_n}^{b_n} e^{-iux} h(x) dx. \end{aligned}$$

بنابراین، از (۴۶) معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a_n}^{b_n} h(x) e^{-iux} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iuy} dy \right),$$

یعنی (۴۴) برقرار است. انتگرال طرف چپ این رابطه به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی نیز وجود دارد زیرا انتگرالده آن بر \mathbf{R} پیوسته و کراندار است و به‌ازای هر

$$\int_a^b |h(x) e^{-iux}| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h|, [a, b]$$

به‌عنوان کاربرد از قضیه پیچش، خاصیت زیرین را برای تابع گاما بدست

می‌آوریم.

مثال. اگر $p > 0$ و $q > 0$ ، دستور زیرین برقرار است:

$$(۴۷) \quad \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

انتگرال طرف چپ دستور بالا را تابع بتا می‌نامند و معمولاً به $B(p, q)$ نشان می‌دهند. برای اثبات (۴۷) فرض می‌کنیم

$$f_p(t) = \begin{cases} t^{p-1} e^{-t} & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases}$$

در این صورت، $f_p \in L(\mathbf{R})$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) dt = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p)$ فرض کنیم که $h = f_p * f_q$. با فرض $u = 0$ در دستور پیچش، یعنی دستور (۴۴)، معلوم می‌شود که اگر $p > 1$ یا $q > 1$

$$(۴۸) \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_q(y) dy = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

حال انتگرال طرف چپ (۴۸) را به طریقی دیگر محاسبه می‌کنیم. چون f_p و f_q هر دو، بر قسمت منفی محور حقیقی صفر می‌شوند، پس

$$h(x) = \int_0^x f_p(t) f_q(x-t) dt = \begin{cases} e^{-x} \int_0^x t^{p-1} (x-t)^{q-1} dt, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

تغییر متغیر $t = ux$ ، به‌ازای $x > 0$ ، نتیجه می‌دهد که

$$h(x) = e^{-x} x^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du = e^{-x} x^{p+q-1} B(p, q).$$

بنابراین، $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = B(p, q) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} x^{p+q-1} dx = B(p, q) \Gamma(p+q)$ ،
 که اگر آن را در (۴۸) قرار دهیم، رابطه (۴۷) به‌ازای $p > 1$ یا $q > 1$ ثابت می‌شود. برای بدست آوردن نتیجه به‌ازای $p > 0$ و $q > 0$ رابطه
 $pB(p, q) = (p+q)B(p+1, q)$ را بکار برید.

۲۲.۱۱ دستور جمع‌بندی پواسن^۱

این فصل را با بحثی از رابطه‌ای مهم به‌نام دستور جمع‌بندی پواسن، که دارای کاربردهای بسیار است، خاتمه می‌دهیم. این دستور را می‌توان به راه‌های مختلف بیان کرد. شکل زیرین برای کاربردهائی که مورد نظر ما است مناسب است.

قضیه ۲۴.۱۱ فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی بقسمی که انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد. همچنین f بر $]-\infty, 0[$ صعودی، و بر $]+ \infty, 0[$ نزولی باشد. در این صورت،

$$(۴۹) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{f(m+) + f(m-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt,$$

و هر دو دشته مذکور در بالا همگرای مطلق هستند.

پروان. برای اثبات از بسط فوریه تابع F که با رشته

$$(۵۰) \quad F(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m+x)$$

تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که این رشته به‌ازای هر x حقیقی، همگرای مطلق، و بر بازه $]+0, 1[$ همگرای یکشکل است.

چون f بر $]+0, +\infty[$ نزولی است، به‌ازای $x \geq 0$ ، رابطه

$$\sum_{m=0}^N f(m+x) \leq f(0) + \sum_{m=1}^N f(m) \leq f(0) + \int_0^{\infty} f(t) dt$$

را داریم. بنا بر این، بنا بر آزمون M و ایزاشتراس (قضیه ۹.۶)، رشته $\sum_{m=0}^{\infty} f(m+x)$ بر $]+0, +\infty[$ همگرای یکشکل است. با بیانی مشابه معلوم می‌شود که رشته $\sum_{m=-1}^{-\infty} f(m+x)$ بر $]-\infty, 1[$ همگرای یکشکل خواهد بود. بنا بر این، رشته مذکور در (۵۰) به‌ازای هر x همگرا است و بر

$$]-\infty, 1[\cap]0, +\infty[=]0, 1[$$

همگرای یکشکل است.

تابع مجموع F متناوب، با دوره تناوب ۱، است. در واقع،

$$F(x+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m+x+1),$$

و این رشته صرفاً یک تجدید آرایش رشته (δ_0) است. چون همه جمله‌های آن نامنفی هستند، پس به همان مجموع رشته (δ_0) همگرا خواهد بود. از این روی

$$F(x+1) = F(x).$$

اینک نشان می‌دهیم که F بر هر بازه فشرده با تغییر کراندار است. هرگاه $0 \leq x \leq 1/2$ ، آنگاه به ازای $m \geq 0$ ، $f(m+x)$ تابعی است نزولی از x ، و به ازای $m < 0$ ، تابعی صعودی از x است. بنابراین،

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m+x) - \sum_{m=-\infty}^{-1} \{-f(m+x)\},$$

پس F به صورت تفاضل دو تابع نزولی است. بنابراین، F بر $[0, 1/2]$ با تغییر کراندار خواهد بود. با بیانی مشابه معلوم می‌شود که F بر $[0, 1/2]$ نیز با تغییر کراندار است. بنابر تناوب، F بر هر بازه فشرده با تغییر کراندار خواهد بود. حال رشته فوریه تولید شده به وسیله F (به شکل نمائی) را در نظر می‌گیریم،

یعنی

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{\gamma \pi i n x}.$$

چون F بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است، پس F بر $[0, 1]$ انتگرال ریمان دارد، و ضریبهای فوریه از دستور

$$(51) \quad \alpha_n = \int_0^1 F(x) e^{-\gamma \pi i n x} dx$$

بدست می‌آیند. همچنین، از این که F بر هر بازه فشرده با تغییر کراندار است، بنابر آزمون ژردان، معلوم می‌شود که رشته فوریه به ازای هر x همگرا است و

$$(52) \quad \frac{F(x+) + F(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\gamma \pi i n x}.$$

برای بدست آوردن دستور جمع‌بندی پواسن، ضریبهای α_n را به شکل دیگری بیان می‌کنیم. با استفاده از (50) در (51) و جمله به جمله انتگرال گرفتن (که بخاطر همگرایی یکشکل امکان‌پذیر است) خواهیم داشت

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(m+x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

از تغییر متغیر $t = m + x$ نتیجه می‌شود که

$$\alpha_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt,$$

زیرا $e^{2\pi i m n} = 1$ با استفاده از این در (۵۲) خواهیم داشت

$$(۵۳) \quad \frac{F(x+) + F(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt \right\} e^{2\pi i n x}.$$

وقتی که $x = 0$ ، رابطه (۵۳) به دستور (۴۹) تحویل می‌شود. تبصره. در قضیه ۲۴۰.۱۱ پیوستگی f الزامی نیست. اما، هرگاه f در هر عدد صحیح پیوسته باشد، آنگاه هر جمله $f(m+x)$ در رشته (۵۰) در $x = 0$ پیوسته است و در نتیجه، بنا برهمگرایی یکشکل، تابع مجموع F نیز در 0 پیوسته خواهد بود. در این حالت، (۴۹) به صورت زیرین درمی‌آید:

$$(۵۴) \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

شرط یکنوا بودن f را می‌توان ضعیفتر اختیارکرد. مثلاً، چون هر عضو (۴۹) به طور خطی به f بستگی دارد، بنا براین، هرگاه قضیه برای f_1 و f_2 درست باشد، آنگاه برای هر ترکیب خطی از آنها مانند $a_1 f_1 + a_2 f_2$ نیز چنین خواهد بود. در حالت خاص، اگر $f = u + iv$ تابع مختلطی باشد و دستور (۴۹) برای u و v جداگانه برقرار باشد، این دستور برای f نیز برقرار خواهد بود.
مثال ۱. دستور تبدیل برای تابع θ تابع θ ، یعنی θ ، به ازای هر $x > 0$ با معادله

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

تعریف می‌شود. دستور پواسن را بکار می‌بریم تا معادله تبدیل

$$(۵۵) \quad \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

بدست آید.

به ازای $\alpha > 0$ ثابت و هر x حقیقی، قرار می‌دهیم $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. این تابع در همه مفروضات قضیه ۲۴۰.۱۱ صدق می‌کند و همه جا پیوسته است. بنا براین،

بنا بر دستور پواسن، خواهیم داشت

$$(۵۶) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t} dt.$$

طرف چپ معادله بالا مساوی $\theta(\alpha/\pi)$ است. انتگرال طرف راست برابر است با

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t} dt &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} \cos 2\pi n t dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2\pi n x}{\sqrt{\alpha}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} F\left(\frac{\pi n}{\sqrt{\alpha}}\right), \end{aligned}$$

که در آن

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy dx.$$

اما $F(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} e^{-y^2}$ (ر. ک. تمرین ۲۲۰۱۰)، پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{2\pi i n t} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\pi^2 n^2 / \alpha}.$$

با استفاده از این رابطه در (۵۶) و فرض $\alpha = \pi x$ ، دستور (۵۵) نتیجه خواهد شد.

مثال ۲. تجزیه $\coth x$ به کسرهای جزئی. کتانژانت هذلولوی، یعنی $\coth x$ ، بدای $x \neq 0$ با این معادله تعریف می‌شود:

$$\coth x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

با استفاده از دستور پواسن رابطه زیرین را، که به تجزیه به کسرهای جزئی معروف است، بدست می‌آوریم:

$$(۵۷) \quad \coth x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \pi^2 n^2}, \quad x > 0$$

بدای $x > 0$ ثابتی، فرض می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

واضح است که f در مفروضات قضیه ۲۴.۱۱ صدق می‌کند. همچنین، f همه جا، بجز در 0 ، پیوسته است، و در صفر 1 و $f(0+) = 1$ و $f(0-) = 0$ است. پس، بنا بر دستور پواسن،

$$(58) \quad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t - 2\pi i n t} dt.$$

مجموع طرف چپ عبارت است از یک رشته هندسی با مجموع $1/(e^\alpha - 1)$ ، و انتگرال طرف راست مساوی $1/(\alpha + 2\pi i n)$ می‌باشد. بنا بر این، (58) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha + 2\pi i n} + \frac{1}{\alpha - 2\pi i n} \right),$$

که اگر در آن α را به $2x$ تعویض کنیم، رابطه (57) حاصل خواهد شد.

تمرین

دستگاههای متعامد

۱.۱۱ تحقیق کنید که دستگاه مثلثاتی مذکور در (۱) بر $[0, 2\pi]$ متعامد بهنجار است.

۲.۱۱ دسته‌ای متناهی از تابعها مانند $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ را بر $[a, b]$ مستقل خطی نامیم در صورتی که هرگاه

$$\sum_{k=0}^m c_k \varphi_k(x) = 0, \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } [a, b],$$

آنگاه $c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0$. یک دسته نامتناهی از تابعها را بر $[a, b]$ مستقل خطی نامیم در صورتی که هر زیرمجموعه متناهی آن بر $[a, b]$ مستقل خطی باشد. ثابت کنید هر دستگاه که بر $[a, b]$ متعامد بهنجار باشد، بر این بازه مستقل خطی است.

۳.۱۱ در این تمرین فرایند گرام-اشمیت را که برای تبدیل یک دستگاه مستقل خطی به دستگاهی متعامد بکار می‌رود توصیف می‌نمائیم. فرض کنیم که $\{f_0, f_1, \dots\}$ یک دستگاه مستقل خطی بر $[a, b]$ باشد (همان طور که در تمرین ۲.۱۱ تعریف شده است). دستگاه جدید $\{g_0, g_1, \dots\}$ را به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g_0 = f_0, g_{r+1} = f_{r+1} - \sum_{k=1}^r a_k g_k$$

که در آن اگر $\|g_k\| \neq 0$ ، $\|g_k\| = 0$ اگر $a_k = (f_{r+1}, g_k) / (g_k, g_k)$ و اگر $\|g_k\| = 0$ ، $a_k = 0$. ثابت کنید به‌ازای هر $n \geq 0$ ، g_{n+1} بر هر یک از g_0, \dots, g_n عمود است.

۴.۱۱ به تمرین ۳.۱۱ بازمی‌گردیم. قرار دهید $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$. فرایند گرام - اشمیت را در مورد دستگاه چند جمله‌ایهای $\{1, t, t^2, \dots\}$ بازه $[-1, 1]$ بکار برده، نشان دهید که

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad g_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \\ g_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}.$$

۵.۱۱ (آ) فرض کنید $f \in R$ بر $[0, 2\pi]$ باشد، که در آن f حقیقی و دارای دوره تناوب 2π باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، تابعی پیوسته مانند g با دوره تناوب 2π هست بقسمی که $\|f - g\| < \varepsilon$ (داهمنائی). یک‌ا‌فزار $[0, 2\pi]$ مانند P_ε را بقسمی اختیار کنید که f در شرط ریمان $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ صدق کند، و سپس تابع خطی قطعه‌وار g را بقسمی بسازید که با f در هر نقطه P_ε یکی باشد.

(ب) با استفاده از قسمت (آ) نشان دهید که اگر f بر $[0, 2\pi]$ انتگرال ریمان داشته باشد، در قضیه ۱۶.۱۱ قسمت‌های (آ)، (ب)، و (ج) همه برقرارند.

۶.۱۱ در این تمرین فرض بر این است که همه تابعها بر بازه‌ای فشرده مانند $[a, b]$ پیوسته می‌باشند. فرض کنید که $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ دستگاهی متعامد بهنجار بر $[a, b]$ باشد.

(آ) ثابت کنید که سه گزاره زیرین هم‌ارزند.

(۱) هر گاه به‌ازای هر n ، $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$ ، آنگاه $f = g$. (یعنی دو تابع پیوسته متمایز نمی‌توانند دارای ضریبهای فوریه مساوی باشند.)

(۲) هر گاه به‌ازای هر n ، $(f, \varphi_n) = 0$ ، آنگاه $f = 0$. (یعنی تنها تابع پیوسته‌ای که بر هر φ_n عمود است تابع صفر است.)

(۳) هر گاه T مجموعه‌ای متعامد بهنجار بر $[a, b]$ باشد بقسمی که

$\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\} \subseteq T$ ، آنگاه $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\} = T$ (یعنی یک مجموعه متعامد بهنجار را نمی‌توان وسعت داد). این خاصیت را این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ ماکزیمال یا تام است.

(ب) فرض کنید به‌ازای هر عدد صحیح n ، $\varphi_n(x) = e^{inx} / \sqrt{2\pi}$ ، و تحقیق کنید که مجموعه $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بر هر بازه به درازای 2π تام است.

۷.۱۱ اگر $x \in \mathbb{R}$ و $n = 1, 2, \dots$ ، قرار می‌دهیم $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ و تعریف می‌کنیم

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} n!} f_n^{(n)}(x).$$

واضح است که φ_n یک چند جمله‌ای است. φ_n را چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه n می‌نامند. چند تای اول عبارتند از

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x, & \varphi_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ \varphi_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, & \varphi_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

خاصیت‌های زیرین را در مورد چند جمله‌ای‌های لژاندر نتیجه بگیرید:

$$\cdot \varphi_n'(x) = x \varphi_{n-1}'(x) + n \varphi_{n-1}(x) \quad (\text{آ})$$

$$\cdot \varphi_n(x) = x \varphi_{n-1}(x) + \frac{x^2 - 1}{n} \varphi_{n-1}'(x) \quad (\text{ب})$$

$$\cdot (n+1) \varphi_{n+1}(x) = (2n+1)x \varphi_n(x) - n \varphi_{n-1}(x) \quad (\text{ج})$$

(د) φ_n در معادله دیفرانسیل $[(1-x^2)y']' + n(n+1)y = 0$ صدق می‌کند.

(ه) $[(1-x^2)\Delta(x)]' + [m(m+1) - n(n+1)]\varphi_m(x)\varphi_n(x) = 0$ که در آن $\Delta = \varphi_n \varphi_m' - \varphi_m \varphi_n'$

(و) مجموعه $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ بر $[-1, 1]$ متعامد است.

$$\cdot \int_{-1}^1 \varphi_n^2 dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 \varphi_{n-1}^2 dx \quad (\text{ز})$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \varphi_n^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (\text{ح})$$

تیسر. اگر فرایند گرام-اشمیت را در مورد دستگاه $\{1, t, t^2, \dots\}$ بر بازه $[1, -1]$ بکار ببریم، چند جمله‌ایهای

$$g_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \varphi_n(t)$$

حاصل می‌شوند. (ر. ک. تمرین ۰۴-۱۱)

رشته‌های فوریه مثلثاتی

۸-۱۱ فرض کنید که $f \in L([-\pi, \pi])$ و f دارای دوره تناوب 2π باشد. نشان دهید که، با شرطهای مذکور در زیر، رشته فوریه تولید شده به وسیله f دارای شکلهای خاص زیرین است:

(آ) هرگاه به ازای $0 < x < \pi$ ، $f(-x) = f(x)$ ، آنگاه

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad \text{که در آن } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

(ب) هرگاه به ازای $0 < x < \pi$ ، $f(-x) = -f(x)$ ، آنگاه

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad \text{که در آن } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

در تمرینهای ۹-۱۱ تا ۱۵-۱۱، نشان دهید که هر یک از بسطها در بردی که معین شده است معتبر است. پیشنهاد. تمرین ۸-۱۱ و قضیه ۱۶-۱۱ (ج) را هر کجا که ممکن بود بکار ببرید.

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{اگر } 0 < x < 2\pi \quad (9-11 \text{ آ})$$

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{اگر } 0 \leq x \leq 2\pi \quad (9-11 \text{ ب})$$

تیسر. رابطه اخیر به ازای $x = 0$ تبدیل به $\zeta(2) = \pi^2/6$ می‌گردد.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad \text{اگر } 0 < x < \pi \quad (10-11 \text{ آ})$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad \text{اگر } 0 \leq x \leq \pi \quad (10-11 \text{ ب})$$

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} \quad \text{اگر } -\pi < x < \pi \quad (11-11 \text{ آ})$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{ب)}$$

$$x^2 = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right), \quad 0 < x < 2\pi \quad \text{اگر } ۱۲.۱۱$$

$$\cos x = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{2n^2 - 1}, \quad 0 < x < \pi \quad \text{اگر } ۱۳.۱۱ \quad \text{آ)}$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^2 - 1}, \quad 0 < x < \pi \quad \text{اگر } \text{ب)}$$

$$, -\pi < x < \pi \quad \text{اگر } ۱۴.۱۱ \quad \text{آ)}$$

$$x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2 - 1}.$$

$$, -\pi \leq x \leq \pi \quad \text{اگر } \text{ب)}$$

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - 1}.$$

$$\text{اگر } x \neq 2k\pi \quad \text{اگر } ۱۵.۱۱ \quad \text{آ)}$$

$$\log \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

$$, x \neq (2k+1)\pi \quad \text{اگر } \text{ب)}$$

$$\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n}.$$

$$, x \neq k\pi \quad \text{اگر } \text{ج)}$$

$$\log \left| \tan \frac{x}{2} \right| = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

$$\text{آ)} ۱۶.۱۱ \quad \text{تابع پیوسته‌ای بر } [-\pi, \pi] \text{ بیابید که رشته فوریه}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2} \sin nx \text{ را تولید کند. سپس، با استفاده از دستور}$$

$$\zeta(6) = \pi^6/945 \text{ ثابت کنید که } \zeta(6) = \pi^6/945$$

$$\text{ب)} \text{ با استفاده از رشته فوریه‌ای مناسب و دستور پارسوال، نشان دهید که}$$

$$\zeta(4) = \pi^4/90$$

$$۱۷.۱۱ \quad \text{فرض کنید } f \text{ بر } [0, 2\pi] \text{ دارای مشتق پیوسته باشد، همچنین}$$

و $f(0) = f(2\pi)$ و $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. ثابت کنید که $\|f'\| \geq \|f\|$ ، و تساوی در آن وقتی، و فقط وقتی، برقرار است که $f(x) = a \cos x + b \sin x$ دانه‌مائی. از دستور پارسوال استفاده کنید.

۱۸.۱۱ دنباله $\{\bar{B}_n\}$ از تابعهای متناوب (با دوره تناوب ۱) بر \mathbf{R} به صورت زیر تعریف شده است:

$$\bar{B}_{2n}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{k^{2n}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\bar{B}_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kx}{k^{2n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

\bar{B}_n را تابع برنولی از مرتبه n می‌نامند. نشان دهید که:

(آ) اگر x عددی صحیح نباشد، $\bar{B}_1(x) = x - [x] - 1/2$ بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x است.

(ب) اگر $n \geq 1$ ، $\int_0^1 \bar{B}_n(x) dx = 0$ ، و اگر $n \geq 2$ ، $\bar{B}'_n(x) = n\bar{B}_{n-1}(x)$.

(ج) اگر $0 < x < 1$ ، $\bar{B}_n(x) = P_n(x)$ ، که در آن P_n چند جمله‌ای برنولی n م است. (برای تعریف P_n ، ر. ک. تمرین ۰۳۸.۹)

$$(d) \quad (n = 1, 2, \dots), \bar{B}_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \neq 0}^{\infty} \frac{e^{\gamma \pi i k x}}{k^n}$$

۱۹.۱۱ فرض کنید f تابعی باشد با دوره تناوب 2π که بر $[-\pi, \pi]$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi$$

$$f(x) = -1, \quad -\pi < x < 0$$

و اگر $x = 0$ یا $x = \pi$ ، $f(x) = 0$.

(آ) نشان دهید که

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad \text{به‌ازای هر } x$$

رشته بالا مثالی از رده‌ای از رشته‌های فوریه است که دارای خاصیت غریبی به نام پدیده گیبس^۱ می‌باشند. این تمرین برای مصور ساختن این پدیده طرح شده است. در آنچه

بعد از این در این تمرین می‌آید، $s_n(x)$ مجموع جزئی m رشته مذکور در قسمت (آ) را نشان می‌دهد.

(ب) نشان دهید که

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt.$$

(ج) اگر $x_m = \frac{1}{2} m\pi/n$ ($m = 1, 2, \dots, 2n - 1$)، نشان دهید که s_n در بازه $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ ، در نقطه‌های $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ ماکزیمم موضعی، و در $x_2, x_4, \dots, x_{2n-2}$ مینیمم موضعی دارد.

(د) نشان دهید که $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ ماکزیمم عددهای

$$s_n(x_m) \quad (m = 1, 2, \dots, 2n - 1)$$

می‌باشد.

(ه) $s_n(\frac{1}{2}\pi/n)$ را به عنوان یک مجموع ریمان تعبیر نموده، ثابت کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

مقدار حد بالا تقریباً ۱٫۱۷۹ است. بنابراین، اگر چه f در مبدأ جهشی مساوی ۲ دارد، ولسی نمودارهای خمهای تقریبی s_n در حوالی مبدأ به پاره خطی عمودی به‌درزای ۲٫۳۵۸ نزدیک می‌شوند. این خاصیت را پدیده گپس می‌نامند.

۲۰۱۱ اگر $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ بر $[0, 2\pi]$ با تغییر کراندار باشد، نشان دهید که $a_n = O(1/n)$ و $b_n = O(1/n)$. $f = g - h$ بنویسید که در آن g و h بر $[0, 2\pi]$ صعودی باشند. در این صورت،

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} g(x) d(\sin nx) - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} h(x) d(\sin nx).$$

حال قضیه ۳۱٫۷ را بکار ببرید.

۲۱۰۱۱ فرض کنید به‌ازای هر a در $[0, \delta]$ ، $g \in L([a, \delta])$ ، و g در شرط لیب‌شیتس «دست راستی» در 0 صدق کند. (ر. ک. به تبصره بعد از قضیه ۰۹۰۱۱) نشان دهید که انتگرال لیبگ $\int_0^{\delta} |g(t) - g(0+)|/t dt$ وجود دارد.

۲۲۰۱۱ با استفاده از تمرین ۲۱۰۱۱، ثابت کنید که مشتق‌پذیری f در یک نقطه همگرایی رشته فوریه آن را در این نقطه ایجاب می‌کند.

۲۳.۱۱ فرض کنید g بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، و به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ به ازای $\int_0^1 t^n g(t) dt = 0$ نشان دهید که:

(آ) به ازای هر چند جمله‌ای مانند P ، $\int_0^1 g(t)^2 dt = \int_0^1 g(t)(g(t) - P(t)) dt$

(ب) $\int_0^1 g(t)^2 dt = 0$ دهنمائی. از قضیه ۱۷.۱۱ استفاده کنید.

(ج) به ازای هر t در $[0, 1]$ ، $g(t) = 0$.

۲۴.۱۱ با استفاده از قضیه تقریب و ایراشتراس، هر یک از گزاره‌های زیرین را ثابت کنید.

(آ) هر گاه f بر $[1, +\infty[$ پیوسته باشد، و وقتی که $x \rightarrow +\infty$

$f(x) \rightarrow a$ ، آنگاه f را می‌توان بر $[1, +\infty[$ به‌طور یک‌شکل به

تابعی مانند g به‌شکل $g(x) = p(1/x)$ نزدیک کرد، که در آن p یک

چند جمله‌ای باشد.

(ب) هر گاه f بر $[0, +\infty[$ پیوسته باشد، و وقتی که $x \rightarrow +\infty$

$f(x) \rightarrow a$ ، آنگاه f را می‌توان بر $[0, +\infty[$ به‌طور یک‌شکل به

تابعی مانند g به‌شکل $g(x) = p(e^{-x})$ نزدیک کرد، که در آن p یک

چند جمله‌ای باشد.

۲۵.۱۱ فرض کنید $f(x) \sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

و $\{\sigma_n\}$ دنباله میانگینهای حسابی مجموعهای جزئی این رشته (که با رابطه (۲۳)

داده شده‌اند) باشد. نشان دهید که:

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (\text{ب})$$

$$- \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

(ج) هر گاه f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته، و دارای دوره تناوب 2π باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 (a_k^2 + b_k^2) = 0.$$

۲۶.۱۱ فرض کنید f بر $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، و تابعی باشد متناوب با دوره

تناوب 2π . رشته فوریه تولید شده به وسیله f (به شکل نمائی)، یعنی

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx},$$

را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که $f' \in R$ بر $[0, 2\pi]$ باشد.

(آ) ثابت کنید که رشته $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |\alpha_n|^2$ همگرا است؛ سپس، با استفاده از نامساوی کوشی - شوارتز، نتیجه بگیرید که $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|$ همگرا است.

(ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که رشته $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx}$ بر $[0, 2\pi]$ به طور یکشکل به تابع مجموع پیوسته‌ای مانند g همگرا است. سپس ثابت کنید که $f = g$.

انتگرالهای فوریه

۲۷.۱۱ اگر f در مفروضات قضیه انتگرال فوریه صدق کند، نشان دهید که:

(آ) هرگاه f زوج باشد، یعنی به ازای هر t ، $f(-t) = f(t)$ ، آنگاه

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \cos vx \left[\int_0^\infty f(u) \cos vu \, du \right] dv.$$

(ب) هرگاه f فرد باشد، یعنی به ازای هر t ، $f(-t) = -f(t)$ ، آنگاه

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha \sin vx \left[\int_0^\infty f(u) \sin vu \, du \right] dv.$$

با استفاده از قضیه انتگرال فوریه، انتگرالهای مجازی موجود در تمرینهای ۲۸.۱۱ تا ۳۰.۱۱ را محاسبه کنید. پیشنهاد. در مواقع امکان‌پذیر تمرین ۲۷.۱۱ را بکار برید.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin v \cos vx}{v} dv = \begin{cases} 1 & , \quad -1 < x < 1 & \text{اگر} \\ 0 & , \quad |x| > 1 & \text{اگر} \\ \frac{1}{2} & , \quad |x| = 1 & \text{اگر} \end{cases} \quad 28.11$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-|a|b} \quad , \quad b > 0 \quad \text{اگر} \quad 29.11$$

دائمی. تمرین ۲۷.۱۱ را با $f(u) = e^{-b|u|}$ بکار برید.

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1 + x^2} dx = \frac{a}{|a|} \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \quad , \quad a \neq 0 \quad \text{اگر} \quad 30.11$$

(آ) ثابت کنید که ۳۱.۱۱

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = 2 \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx.$$

ب) با تغییر متغیری مناسب در (آ)، دستور دو جزئی زیر را برای تابع گاما بدست آورید:

$$\Gamma(2p)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

تبره... در تمرین ۳۰.۱۰ نشان داده شد که $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

۳۲.۱۱ اگر به ازای هر x ، $f(x) = e^{-x^2/2}$ و $g(x) = xf(x)$ ثابت کنید که

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx, \quad g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \sin xy dx.$$

۳۳.۱۱ در این تمرین دستور جمع بندی پواسن به شکلی دیگر توصیف می شود.

فرض کنید f بر $[0, +\infty[$ نامنفی، نزولی، و پیوسته باشد، و انتگرال

$\int_0^{\infty} f(x) dx$ به عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد. قرار دهید

$$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx.$$

اگر α و β عددهائی مثبت باشند بقسمی که $\alpha\beta = 2\pi$ ، ثابت کنید که

$$V\alpha \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{m=1}^{\infty} f(m\alpha) \right\} = V\beta \left\{ \frac{1}{2} g(0) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n\beta) \right\}.$$

۳۴.۱۱ ثابت کنید که دستور تبدیل (۵۵) برای $\theta(x)$ را می توان به شکل

زیر درآورد:

$$V\alpha \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha^2 m^2/2} \right\} = V\beta \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta^2 n^2/2} \right\},$$

که در آن $\alpha > 0$ و $\alpha\beta = 2\pi$.

۳۵.۱۱ اگر $s > 1$ ، ثابت کنید که

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{s/2-1} dx$$

و دستور زیر را از آن نتیجه بگیرید:

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{s/2-1} dx,$$

که در آن $\psi(x) = \theta(x) - 1$. با استفاده از این و دستور تبدیل برای $\theta(x)$ ، ثابت کنید که

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} (x^{s/2-1} + x^{(1-s)/2-1}) \psi(x) dx.$$

تبدیل‌های لاپلاس

فرض می‌کنیم که c عدد مثبتی باشد قسمتی که انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t)| dt$ به‌عنوان یک انتگرال ریمان مجازی وجود داشته باشد. همچنین $z = x + iy$ ، که در آن $x > c$ ، بسادگی می‌توان نشان داد که انتگرال

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

هم به‌عنوان انتگرال ریمان مجازی و هم به‌عنوان انتگرال لبگ وجود دارد. تابع F که به این طریق تعریف شد به تبدیل لاپلاس f معروف است، و با $\mathcal{L}(f)$ نشان داده می‌شود. تمرینهای زیرین بعضی از خاصیت‌های تبدیلهای لاپلاس را نشان می‌دهند.

۳۶.۱۱ در جدول تبدیلهای لاپلاس زیرین صحت هر خط را تحقیق کنید.

$f(t)$	$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$	$z = x + iy$
$e^{\alpha t}$	$(z - \alpha)^{-1}$	$(x > \alpha)$
$\cos \alpha t$	$z / (z^2 + \alpha^2)$	$(x > 0)$
$\sin \alpha t$	$\alpha / (z^2 + \alpha^2)$	$(x > 0)$
$t^p e^{\alpha t}$	$\Gamma(p + 1) / (z - \alpha)^{p+1}$	$(x > \alpha, p > 0)$

۳۷.۱۱ نشان دهید که اگر دو تابع f و g ، هر دو، بر قسمت منفی محور حقیقی صفر شوند، پیچش $h = f * g$ به‌شکل زیر خواهد بود:

$$h(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx.$$

با استفاده از قضیه پیچش برای تبدیلهای فوریه، ثابت کنید که

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

۳۸.۱۱ فرض کنید f بر $+\infty[0, +\infty[$ پیوسته باشد، و به‌ازای $z = x + iy$ ، که در آن $0 < x < c$ ، قرار دهید $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$. اگر $s > c$

و $a > 0$ ، ثابت کنید که:

(آ) $F(s + a) = a \int_0^{\infty} g(t) e^{-at} dt$ ، که در آن $g(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$

(ب) هر گاه به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $F(s + na) = 0$ ، آنگاه به ازای

$f(t) = 0$ ، $t > 0$ ، دانهائی. از تمرین ۲۳.۱۱ استفاده کنید.

(ج) هر گاه h بر $0, +\infty$ پیوسته باشد و f و h دارای یک تبدیل لاپلاس

باشند، آنگاه به ازای هر $t > 0$ ، $f(t) = h(t)$.

۳۹.۱۱ به ازای $z = x + iy$ ، که در آن $x > c > 0$ ، قرار دهید

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

فرض کنید f در نقطه‌ای مانند t در یکی از شرطهای «موضعی» (آ) یا (ب) مذکور در قضیه انتگرال فوریه صدق کند (قضیه ۱۸.۱۱). ثابت کنید به ازای هر $a > c$

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T e^{(a+iv)t} F(a + iv) dv.$$

این رابطه را دستود معکوس کردن برای تبدیلیهای لاپلاس می‌نامند. حد مذکور در طرف راست معمولاً به کمک حساب باقیمانده‌ها، که در بخش ۲۶.۱۶ توصیف شده است، ارزیابی می‌شود. دانهائی. فرض کنید به ازای $t \geq 0$ ، $g(t) = e^{-at} f(t)$ و به ازای $t < 0$ ، $g(t) = 0$ ، و سپس قضیه ۱۹.۱۱ را در مورد g بکار برید.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 11.1 Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3rd ed. Macmillan, London, 1930.
- 11.2 Edwards, R. E., *Fourier Series, A Modern Introduction*, Vol. 1. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1967.
- 11.3 Hardy, G. H., and Rogosinski, W. W., *Fourier Series*. Cambridge University Press, 1950.
- 11.4 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, Vol. 1, 3rd ed. Cambridge University Press, 1927.
- 11.5 Indritz, J., *Methods in Analysis*. Macmillan, New York, 1963.
- 11.6 Jackson, D., *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. Carus Monograph No. 6. Open Court, New York, 1941.

- 11.7 Rogosinski, W. W., *Fourier Series*. H. Cohn and F. Steinhardt, translators. Chelsea, New York, 1950.
- 11.8 Titchmarsh, E. C., *Theory of Fourier Integrals*. Oxford University Press, 1937.
- 11.9 Wiener, N., *The Fourier Integral*. Cambridge University Press, 1933.
- 11.10 Zygmund, A., *Trigonometrical Series*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1968.

حساب دیفرانسیل چند متغیره

۱۰۱۴ مقدمه

در فصل ۵، باختصار، درباره مشتقات جزئی تابعهای از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^1 بحث شد. همچنین مشتقات توابع برداری از \mathbb{R}^1 به \mathbb{R}^n نیز معرفی گردید. در این فصل نظریه مشتق را برای تابعهای از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m وسعت می‌دهیم.

همان‌طور که در بخش ۱۴.۵ متذکر شدیم، مشتق جزئی تعمیمی تا حدی نارضایتبخش از مشتق معمولی است، زیرا که از وجود همه مشتقات جزئی، یعنی $D_1 f, \dots, D_n f$ ، در یک نقطه لزوماً نمی‌توان پیوستگی f را در آن نقطه نتیجه گرفت. مشکل مشتقات جزئی در این است که، برای بدست آوردن هریک از آنها، تابع چند متغیره در یک لحظه به‌عنوان تابعی از یک متغیر در نظر گرفته می‌شود. مشتق جزئی میزان تغییر یک تابع را در جهت هریک از محورهای مختصات توصیف می‌کند. در تعمیم مختصری از این، به نام مشتق جهتی، میزان تغییر یک تابع در جهت دلخواه مطالعه می‌شود. این تعمیم هم در مورد تابعهای حقیقی و هم در مورد تابعهای برداری وجود دارد.

۲.۱۲ مشتق جهتی

فرض کنیم S یک زیر مجموعه \mathbb{R}^n ، و $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی باشد که بر S تعریف شده است و مقادیر آن در \mathbb{R}^m می‌باشند. از نقطه‌ای مانند c در S در امتداد پاره خطی به نقطه $c + u$ نزدیک c ، که در آن $u \neq 0$ ، حرکت می‌کنیم. می‌خواهیم

در این حرکت چگونگی تغییرات f را مطالعه کنیم. هر نقطه بر این پاره خط را می توان با $c + hu$ نشان داد، که در آن h حقیقی است. بردار u جهت پاره خط را نشان می دهد. فرض کنیم که c یک نقطهٔ درونی S باشد. در این صورت، یک گوی n بعدی مانند $B(c; r)$ جزء S وجود دارد، و اگر h به قدر کافی کوچک باشد، پاره خطی که c را به $c + hu$ وصل می کند در $B(c; r)$ ، و در نتیجه در S قرار خواهد داشت.

تعریف ۱۰۱۲ مشتق جهتی f در نقطهٔ c در جهت u را با نماد $f'(c; u)$ نشان می دهیم و با معادله

$$(۱) \quad f'(c; u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h}$$

تعریف می کنیم، در صورتی که حد طرف راست وجود داشته باشد.

تفسیر. برخی از نویسندگان خواستار قید $\|u\| = 1$ هستند، ولی ما در این جا این قید را نمی پذیریم.

چند مثال

۱. تعریف مذکور در (۱) به ازای $u = 0$ نیز با معنی است. در این حالت به ازای هر c در S ، $f'(c; 0)$ وجود دارد و مساوی 0 است.

۲. هرگاه $u = u_k$ بردار مختصات یکه k ام باشد، آنگاه $f'(c; u_k)$ را یک مشتق جزئی نامیده به $D_k f(c)$ نشان می دهیم. در حالتی که f حقیقی باشد، این تعریف با تعریف داده شده در فصل ۵ مطابقت دارد.

۳. هرگاه $f = (f_1, \dots, f_m)$ ، آنگاه $f'(c; u)$ وقتی، و فقط وقتی، وجود دارد که به ازای هر $k = 1, 2, \dots, m$ ، $f'_k(c; u)$ وجود داشته باشد، که در آن صورت

$$f'(c; u) = (f'_1(c; u), \dots, f'_m(c; u)).$$

در حالت خاص، وقتی که $u = u_k$ ، خواهیم داشت

$$(۲) \quad D_k f(c) = (D_k f_1(c), \dots, D_k f_m(c)).$$

۴. هرگاه $F(t) = f(c + tu)$ ، آنگاه $F'(0) = f'(c; u)$ به طور کلیتر، $F'(t) = f'(c + tu; u)$ در صورتی که یکی از دو مشتق مذکور در دو طرف این رابطه وجود داشته باشد.

۵. هرگاه $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ ، آنگاه

$$F(t) = f(\mathbf{c} + t\mathbf{u}) = (\mathbf{c} + t\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{c} + t\mathbf{u}) \\ = \|\mathbf{c}\|^2 + 2t\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + t^2 \|\mathbf{u}\|^2,$$

پس $F'(t) = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} + 2t \|\mathbf{u}\|^2$ ؛ از این روی $F'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}$.

۶. تابعهای خطی. تابع $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را خطی نامند در صورتی که به ازای هر \mathbf{x} و \mathbf{y} در \mathbb{R}^n و هر جفت اسکالر مانند a و b ، رابطه

$$\mathbf{f}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}) + b\mathbf{f}(\mathbf{y})$$

برقرار باشد. اگر \mathbf{f} خطی باشد، خارج قسمت مذکور در طرف راست (۱) به

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) \text{ خلاصه می‌شود، در نتیجه به ازای هر } \mathbf{c} \text{ و هر } \mathbf{u} \text{، } \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

۳۰۱۲ مشتقهای جهتی و پیوستگی

هرگاه به ازای هر \mathbf{u} ، $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود داشته باشد، آنگاه بالاخص همه مشتقهای جزئی، یعنی $D_1 \mathbf{f}(\mathbf{c}), \dots, D_n \mathbf{f}(\mathbf{c})$ ، نیز وجود دارند. اما، عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً، تابع حقیقی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ را، که به صورت زیر تعریف شود

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{اگر } x = 0 \text{ یا } y = 0 \\ 1 & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم. در این تابع $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 1$ با وجود این، هرگاه بردار دلخواه $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ را، که در آن $a_1 \neq 0$ و $a_2 \neq 0$ ، اختیار کنیم، آنگاه

$$\frac{f(\mathbf{0} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{h} = \frac{f(h\mathbf{u})}{h} = \frac{1}{h},$$

و این وقتی که $h \rightarrow 0$ ، به حدی نمی‌گراید.

واقعیتی تا حدی شگفت‌انگیز این است که تابعهایی مانند \mathbf{f} وجود دارند که در آنها به ازای هر \mathbf{u} ، مشتق جهتی $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود دارد و متاهی است ولی \mathbf{f} در نقطه \mathbf{c} پیوسته نیست. مثلاً، فرض کنیم

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 / (x^2 + y^2) & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

همچنین $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$ برداری دلخواه در \mathbb{R}^2 باشد. در این صورت،

$$\frac{f(\mathbf{o} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{o})}{h} = \frac{f(ha_1, ha_2)}{h} = \frac{a_1 a_2^2}{a_1^2 + h^2 a_2^2},$$

و در نتیجه

$$f'(\mathbf{o}; \mathbf{u}) = \begin{cases} a_2^2/a_1 & , a_1 \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & , a_1 = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

بنابراین، به ازای هر \mathbf{u} ، $f'(\mathbf{o}; \mathbf{u})$ وجود دارد. از سوی دیگر، تابع f در هر نقطه از سهمی $x = y^2$ (جز در مبدأ) مقدارش $1/2$ است. چون $f(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = 0$ ، پس f در (\mathbf{o}, \mathbf{o}) پیوسته نیست.

پس ملاحظه می‌شود که حتی از وجود همه مشتقات جهتی یک تابع در یک نقطه نمی‌توان پیوستگی آن در این نقطه را نتیجه گرفت. بدین دلیل، مشتقات جهتی نیز مانند مشتقات جزئی نوعی توسیع رضایت بخشی از مفهوم یک بعدی مشتق نیستند. حال تعمیم مناسبتری از مفهوم مشتق را در نظر می‌گیریم که پیوستگی تابع را نتیجه بخشد، و درعین حال، قضیه‌های عمده نظریه مشتقات یک بعدی را به تابعهای چند متغیره وسعت دهد. این تعمیم را مشتق کل می‌نامند.

۴.۱۲ مشتق کل

در حالت یک بعدی، تابعی مانند f را که در نقطه c مشتق داشته باشد می‌توان در حوالی c به یک چند جمله‌ای خطی نزدیک کرد. در واقع، اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، فرض می‌کنیم

$$(۳) \quad E_c(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \quad , h \neq 0 \text{ اگر}$$

و $E_c(0) = 0$. در این صورت داریم

$$(۴) \quad f(c+h) = f(c) + f'(c)h + hE_c(h),$$

که این معادله به ازای $h = 0$ نیز برقرار است. این معادله را دستود تولید مرتبه اول برای تقریب $f(c)$ به $f(c+h)$ می‌نامند. خطای مرتکب شده در این کار مساوی $hE_c(h)$ خواهد بود. از (۳) نتیجه می‌شود که وقتی که $h \rightarrow 0$ ، $E_c(h) \rightarrow 0$ ، گوئیم وقتی که $h \rightarrow 0$ ، خطای $hE_c(h)$ از مرتبه کوچکتر از h است.

حال به دو خاصیت دستور (۴) توجه می‌کنیم. اولین خاصیت این است که

$f'(c)h$ تابعی است خطی از h . یعنی، هر گاه بنویسیم $T_c(h) = f'(c)h$ ، آنگاه

$$T_c(ah_1 + bh_2) = aT_c(h_1) + bT_c(h_2).$$

خاصیت دوم این است که وقتی که $h \rightarrow 0$ ، جمله خطا، یعنی $hE_c(h)$ ، از مرتبه کوچکتر از h است. حال مشتق کل تابع f از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m را بقسمی تعریف می‌کنیم که این دو خاصیت را حفظ نماید.

فرض کنیم $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی باشد که بر مجموعه S در \mathbb{R}^n تعریف شده باشد و مقادیر آن در \mathbb{R}^m باشند. همچنین c یک نقطه درونی S ، و $B(c; r)$ گوی n بعدی در داخل S باشد. بعلاوه، v نقطه‌ای در \mathbb{R}^n باشد بقسمی که $\|v\| < r$ ، پس

$$c + v \in B(c; r).$$

تعریف ۳.۱۲ تابع f را در نقطه c مشتقپذیر نامیم در صورتی که تابعی خطی مانند $T_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$(۵) \quad f(c + v) = f(c) + T_c(v) + \|v\| E_c(v),$$

که در آن وقتی که $v \rightarrow 0$ ، $E_c(v) \rightarrow 0$.

تفسیر. معادله (۵) را دستور تیلور مرتبه اول می‌نامند. این معادله باید به‌ازای هر v در \mathbb{R}^n که $\|v\| < r$ برقرار باشد. تابع خطی T_c را مشتق کل f در c می‌نامند. معادله (۵) را به شکل زیر نیز می‌نویسیم:

$$f(c + v) = f(c) + T_c(v) + o(\|v\|), \quad v \rightarrow 0$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که مشتق کل، در صورت وجود، منحصر بفرد است. همچنین این قضیه مشتق کل را به مشتقات جهتی مربوط می‌کند.

قضیه ۳.۱۳ فرض کنیم f در نقطه c مشتقپذیر، و مشتق کل آن T_c باشد. در این صورت، به‌ازای هر u در \mathbb{R}^n مشتق جهتی $f'(c; u)$ وجود دارد و

$$(۶) \quad T_c(u) = f'(c; u).$$

پرهان. هرگاه $v = 0$ ، آنگاه $f'(c; 0) = 0$ و $T_c(0) = 0$. بنا بر این می‌توان فرض کرد که $v \neq 0$. اگر در دستور تیلور، یعنی دستور (۵)، فرض کنیم که $hu = v$ ، که در آن $h \neq 0$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(c + hu) - f(c) &= T_c(hu) + \|hu\| E_c(v) \\ &= hT_c(u) + |h| \|u\| E_c(v). \end{aligned}$$

حال با تقسیم دو طرف رابطه بالا به h و فرض این که $h \rightarrow 0$ ، رابطه (۶) بدست می آید.
قضیه ۴.۱۲ هرگاه f در c مشتقپذیر باشد، آنگاه f در c پیوسته است.

برهان. در دستور تیلور (۵) فرض می کنیم که $v \rightarrow 0$. جمله خطا، یعنی $0 \rightarrow \|v\| E_c(v)$ ؛ جمله خطی $T_c(v)$ نیز به 0 می گراید، زیرا که هرگاه $v = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$ ، که در آن u_1, \dots, u_n بردارهای مختصات یکه باشند، آنگاه بنا بر خاصیت خطی بودن،

$$T_c(v) = v_1 T_c(u_1) + \dots + v_n T_c(u_n),$$

و در این تساوی وقتی که $v \rightarrow 0$ ، هر یک از جمله های طرف راست به 0 می گراید. تبصره. مشتق کل، یعنی T_c ، را با $f'(c)$ نیز نشان می دهند تا به نماد بکار برده شده در نظریه یک بعدی شبیه باشد. با این نماد، دستور تیلور (۵) به شکل زیر درمی آید:

$$(۷) \quad f(c + v) = f(c) + f'(c)(v) + \|v\| E_c(v),$$

که در آن وقتی که $v \rightarrow 0$ ، $E_c(v) \rightarrow 0$. در هر حال، باید توجه داشت که $f'(c)$ یک تابع خطی است، نه یک عدد. این تابع همه جا بر R^n تعریف شده است؛ و بردار $f'(c)(v)$ عبارت است از مقدار $f'(c)$ در v .

مثال. هرگاه f خود یک تابع خطی باشد، آنگاه $f(c + v) = f(c) + f(v)$ پس به ازای هر c ، $f'(c)$ وجود دارد و مساوی f است. با بیان دیگر می توان گفت که مشتق کل یک تابع خطی مساوی خود آن تابع است.

۵.۱۲ بیان مشتق کل بر حسب مشتقات جزئی

قضیه زیر نشان می دهد که بردار $f'(c)(v)$ ترکیبی است خطی از مشتقات جزئی f .

قضیه ۵.۱۲ فرض کنیم $f: S \rightarrow R^m$ در یک نقطه c درونی $S \subseteq R^n$ مانند c مشتقپذیر باشد. هرگاه $v = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$ که در آن u_1, \dots, u_n بردارهای مختصات یکه در R^n باشند، آنگاه

$$f'(c)(v) = \sum_{k=1}^n v_k D_k f(c).$$

خصوصاً، اگر f حقیقی ($m = 1$) باشد، داریم

$$(۸) \quad f'(c)(v) = \nabla f(c) \cdot v,$$

طرف راست این رابطه حاصل ضرب نقطه‌ای v است در بردار

$$\nabla f(\mathbf{c}) = (D_1 f(\mathbf{c}), \dots, D_n f(\mathbf{c})).$$

برهان. با استفاده از خاصیت خطی $f'(\mathbf{c})$ می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{c})(\mathbf{v}) &= \sum_{k=1}^n f'(\mathbf{c})(v_k \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^n v_k f'(\mathbf{c})(\mathbf{u}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n v_k f'(\mathbf{c}; \mathbf{u}_k) = \sum_{k=1}^n v_k D_k f(\mathbf{c}). \end{aligned}$$

تبره. بردار $\nabla f(\mathbf{c})$ در (۸) را بردار گرادیان f در \mathbf{c} می‌نامند. این بردار در هر نقطه که مشتقهای جزئی f ، یعنی $D_1 f, \dots, D_n f$ ، وجود داشته باشند تعریف شده است. حال دستور تیلور برای تابع حقیقی f به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{c}) + \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|), \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}$$

۶.۱۲ کاربردی در تابعهای مختلط

فرض کنیم $f = u + iv$ نشان می‌دهد که شرطی لازم برای آن که f در نقطه‌ای مانند c مشتق داشته باشد آن است که چهار مشتق جزئی $D_1 u, D_1 v, D_2 u, D_2 v$ در c وجود داشته باشند و در معادله‌های کشی - ریمان صدق کنند:

$$D_1 u(c) = D_2 v(c), \quad D_1 v(c) = -D_2 u(c).$$

همچنین، با مثالی نشان دادیم که برقراری این معادله‌ها بتنهایی برای وجود داشتن $f'(c)$ کافی نیست. قضیه زیرین نشان می‌دهد که معادله‌های کشی - ریمان و مشتقپذیری u و v وجود $f'(c)$ را ایجاب می‌کنند.

قضیه ۶.۱۳ فرض کنیم u و v دو تابع حقیقی باشند که بر یک زیرمجموعه صفحه مختلط مانند S تعریف شده باشند. و نیز فرض کنیم که u و v در یک نقطه درونی S مانند c مشتقپذیر باشند و مشتقهای جزئی آنها در معادله‌های کشی - ریمان در نقطه c صدق کنند. در این صورت، تابع $f = u + iv$ در c مشتق دارد. بعلاوه،

$$f'(c) = D_1 u(c) + i D_1 v(c).$$

برهان. به‌ازای هر z در S ، داریم

$$f(z) - f(c) = u(z) - u(c) + i\{v(z) - v(c)\}.$$

چون هر یک از u و v در c مشتقپذیر است، وقتی که z را به قدر کافی نزدیک c

فرض کنیم، خواهیم داشت

$$u(z) - u(c) = \nabla u(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|)$$

و

$$v(z) - v(c) = \nabla v(c) \cdot (z - c) + o(\|z - c\|).$$

در این جا ما نماد بردار را بکار می بریم و عددهای مختلط را به عنوان بردارها در \mathbb{R}^2 در نظر می گیریم. در این صورت،

$$f(z) - f(c) = \{\nabla u(c) + i \nabla v(c)\} \cdot (z - c) + o(\|z - c\|).$$

اگر بنویسیم $z = x + iy$ و $c = a + ib$ ، بنا بر معادله های کشی - ریمان، به این روابط می رسیم:

$$\begin{aligned} & \{\nabla u(c) + i \nabla v(c)\} \cdot (z - c) \\ &= D_x u(c)(x - a) + D_y u(c)(y - b) \\ & \quad + i\{D_x v(c)(x - a) + D_y v(c)(y - b)\} \\ &= D_x u(c)\{(x - a) + i(y - b)\} \\ & \quad + i D_x v(c)\{(x - a) + i(y - b)\}. \end{aligned}$$

از این روی،

$$f(z) - f(c) = \{D_x u(c) + i D_x v(c)\}(z - c) + o(\|z - c\|).$$

با تقسیم رابطه بالا بر $z - c$ و فرض این که $z \rightarrow c$ ، ملاحظه می شود که $f'(c)$ وجود دارد و مساوی است با

$$D_x u(c) + i D_x v(c).$$

۷.۱۲ ماتریس يك تابع خطی

در این بخش اندکی راه را کج می کنیم تا بعضی از واقعیات مقدماتی جبر خطی را که در برخی محاسبات با مشتقها مفیدند از نظر بگذرانیم.

فرض کنیم که $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع خطی باشد. (در کاربردهای ما، T مشتق کل تابعی چون f خواهد بود.) نشان می دهیم که T یک ماتریس $m \times n$ از اسکالرها را مشخص می کند (ر. ک. (۹) در زیر) و این ماتریس به صورت زیر بدست می آید:

فرض می کنیم که u_1, \dots, u_n بردارهای مختصات یکه در \mathbb{R}^n باشند. اگر $x \in \mathbb{R}^n$ داریم $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ ، پس، بنا بر خاصیت خطی،

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n x_k T(\mathbf{u}_k).$$

بنا بر این، T کاملاً با عملش بر بردارهای مختصات $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ مشخص می‌شود. اینک فرض می‌کنیم که $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ بردارهای مختصات یکه در \mathbf{R}^m باشند. چون $T(\mathbf{u}_k) \in \mathbf{R}^m$ ، می‌توان $T(\mathbf{u}_k)$ را به صورت ترکیبی خطی از $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ نوشت، یعنی

$$T(\mathbf{u}_k) = \sum_{i=1}^m t_{ik} \mathbf{e}_i.$$

اسکالرها t_{1k}, \dots, t_{mk} مختصات $T(\mathbf{u}_k)$ می‌باشند. این اسکالرها را به‌طور عمودی به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \vdots \\ t_{mk} \end{bmatrix}.$$

این آرایش را یک بردار ستونی می‌نامند. بردار ستونی هر یک از

$$T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$$

را تشکیل می‌دهیم و آنها را کنار یکدیگر می‌گذاریم و آرایش مستطیلی شکل زیر را می‌سازیم:

$$(9) \quad \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}.$$

این آرایش را ماتریس T می‌نامیم و با نماد $m(T)$ نشان می‌دهیم. این ماتریس از m سطر و n ستون تشکیل شده است. عددهای ستون k ام، از بالا به پائین، مؤلفه‌های $T(\mathbf{u}_k)$ می‌باشند. برای نشان دادن ماتریس (9) نماد

$$m(T) = (t_{ik}) \quad \text{یا} \quad m(T) = [t_{ik}]_{i,k=1}^{m,n}$$

را نیز بکار خواهیم برد.

حال فرض کنیم که $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ و $S: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$ دو تابع خطی باشند

۱. به بیان دقیقتر، ماتریس T نسبت به پایه‌های مفروض $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ از \mathbf{R}^n و $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ از \mathbf{R}^m .

بقسمی که قلمرو S حاوی برد T باشد. در این صورت می توان ترکیب $S \circ T$ را، که با رابطه

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = S[T(\mathbf{x})] \quad \text{به‌ازای هر } \mathbf{x} \text{ در } \mathbf{R}^n$$

تعریف می‌شود، ساخت. ترکیب $S \circ T$ نیز خطی است و \mathbf{R}^n را در \mathbf{R}^p می‌نگارد. حال می‌خواهیم ماتریس $m(S \circ T)$ را محاسبه کنیم. بردارهای مختصات یکه در \mathbf{R}^n ، \mathbf{R}^m و \mathbf{R}^p را، بترتیب، با

$$\mathbf{w}_p, \dots, \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{u}_1$$

نشان می‌دهیم. فرض کنیم S و T ، بترتیب، دارای ماتریسهای (s_{ij}) و (t_{ij}) باشند. یعنی

$$S(\mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^p s_{ik} \mathbf{w}_i, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

و

$$T(\mathbf{u}_j) = \sum_{k=1}^m t_{kj} \mathbf{e}_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

در این صورت

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\mathbf{u}_j) &= S[T(\mathbf{u}_j)] = \sum_{k=1}^m t_{kj} S(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^m t_{kj} \sum_{i=1}^p s_{ik} \mathbf{w}_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m s_{ik} t_{kj} \right) \mathbf{w}_i, \end{aligned}$$

پس

$$m(S \circ T) = \left[\sum_{k=1}^m s_{ik} t_{kj} \right]_{i,j=1}^{p,n}$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، $m(S \circ T)$ یک ماتریس $p \times n$ است که عضو سطر i م و ستون j م آن مساوی

$$\sum_{k=1}^m s_{ik} t_{kj}$$

است، و این مقدار در واقع حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م ماتریس $m(S)$ در ستون j م ماتریس $m(T)$ می‌باشد. این ماتریس را حاصل ضرب $m(S) m(T)$ نیز می‌نامند. بنابراین، $m(S \circ T) = m(S) m(T)$

۸.۱۲ ماتریس ژاکوبی^۱

اینک نشان می‌دهیم که چگونه ماتریسها با مشتقهای کل ارتباط دارند. فرض کنیم مقادیر تابع f در R^m باشند، و f در نقطه‌ای در R^n مانند c مشتقپذیر باشد. همچنین فرض می‌کنیم که $T = f'(c)$ مشتق کل f در c باشد. برای پیدا کردن ماتریس T عمل آن را بر بردارهای مختصات یکه u_1, \dots, u_n در نظر می‌گیریم. بنا بر قضیه ۳.۱۲، داریم

$$T(u_k) = f'(c; u_k) = D_k f(c).$$

برای آن که $T(u_k)$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای مختصات یکه e_1, \dots, e_n از R^n بیان کنیم، می‌نویسیم $f = (f_1, \dots, f_m)$ پس $D_k f = (D_k f_1, \dots, D_k f_m)$ و در نتیجه

$$T(u_k) = D_k f(c) = \sum_{i=1}^m D_k f_i(c) e_i.$$

بنابراین، ماتریس T عبارت است از $m(T) = (D_k f_i(c))$. این ماتریس را ماتریس ژاکوبی f در c می‌نامند و با $Df(c)$ نشان می‌دهند. یعنی،

$$(10) \quad Df(c) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(c) & D_2 f_1(c) & \dots & D_n f_1(c) \\ D_1 f_2(c) & D_2 f_2(c) & \dots & D_n f_2(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(c) & D_2 f_m(c) & \dots & D_n f_m(c) \end{bmatrix}.$$

عضو سطر i و ستون k ام عبارت است از $D_k f_i(c)$. بنابراین، برای بدست آوردن عضوهای ستون k ام، باید از مؤلفه‌های f بر حسب بردار مختصات k ام مشتق گرفت. ماتریس ژاکوبی $Df(c)$ در هر نقطه c در R^n که در آن همه مشتقهای جزئی f ، یعنی $D_k f_i(c)$ وجود داشته باشند تعریف شده است.

سطر k ام ماتریس ژاکوبی (۱۰) برداری در R^n است که بردار گرادیان f_k نام دارد، و به $\nabla f_k(c)$ نشان داده می‌شود. یعنی،

$$\nabla f_k(c) = (D_1 f_k(c), \dots, D_n f_k(c)).$$

در حالت خاص که f حقیقی است ($m = 1$)، ماتریس ژاکوبی فقط یک سطر دارد. در این حالت $Df(c) = \nabla f(c)$ ، و معادله (۸) قضیه ۵.۱۲ نشان می‌دهد که مشتق جهتی $f'(c; v)$ مساوی است با حاصل ضرب نقطه‌ای بردار گرادیان $\nabla f(c)$ در بردار v .

برای تابع برداری $f = (f_1, \dots, f_m)$ داریم

$$(11) \quad f'(c)(v) = f'(c; v) = \sum_{k=1}^m f'_k(c; v)e_k = \sum_{k=1}^m \{\nabla f_k(c) \cdot v\}e_k,$$

پس بردار $f'(c)(v)$ دارای مؤلفه‌های زیرین است:

$$(\nabla f_1(c) \cdot v, \dots, \nabla f_m(c) \cdot v).$$

بنا بر این، مؤلفه‌های $f'(c)(v)$ به وسیله حاصل ضرب نقطه‌ای سطرهای متوالی ماتریس ژاکوبی در بردار v بدست می‌آیند. هرگاه $f'(c)(v)$ را به عنوان یک ماتریس $m \times 1$ ، یا به عنوان یک بردار ستونی، در نظر بگیریم، آنگاه $f'(c)(v)$ مساوی حاصل ضرب ماتریسی $Df(c)v$ است، که در آن ماتریس ژاکوبی $m \times n$ است و v به عنوان یک ماتریس $1 \times n$ ، یا یک بردار ستونی، در نظر گرفته شده است.

تیسره. از معادله (۱۱)، نامساوی مثلثی، و نامساوی کشی - شوارتز نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|f'(c)(v)\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \{\nabla f_k(c) \cdot v\}e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^m |\nabla f_k(c) \cdot v| \\ &\leq \|v\| \sum_{k=1}^m \|\nabla f_k(c)\|. \end{aligned}$$

بنا بر این،

$$(12) \quad \|f'(c)(v)\| \leq M \|v\|,$$

که در آن $M = \sum_{k=1}^m \|\nabla f_k(c)\|$. این نامساوی در اثبات قاعده زنجیره‌ای بکار خواهد رفت. همچنین این نامساوی نشان می‌دهد که

$$f'(c)(v) \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \text{ وقتی}$$

۹.۱۲ قاعده زنجیره‌ای

فرض کنیم f و g دو تابع باشند بقسمی که ترکیب $h = f \circ g$ در یکی از همسایگیهای نقطه a تعریف شده باشد. قاعده زنجیره‌ای نحوه محاسبه مشتق کل h را بر حسب مشتقهای کل f و g بدست می‌دهد.

قضیه ۷.۱۲ فرض کنیم g در a مشتقپذیر، و مشتق کل آن $g'(a)$ باشد. و نیز فرض می‌کنیم که $f, b = g(a)$ در b مشتقپذیر، و مشتق کل آن $f'(b)$ باشد. در این صورت، تابع مرکب $h = f \circ g$ در a مشتقپذیر است، و مشتق کل h ، یعنی $h'(a)$

از این رابطه بدست می‌آید:

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a),$$

یعنی $h'(a)$ مساوی ترکیب تابعهای خطی $f'(b)$ و $g'(a)$ است.

برهان. تفاضل $h(a+y) - h(a)$ را به‌ازای $\|y\|$ های کوچک در نظر می‌گیریم، و نشان می‌دهیم که دستور تیلور مرتبه اول برای h برقرار است. داریم

$$(۱۳) \quad h(a+y) - h(a) = f[g(a+y)] - f[g(a)] \\ = f(b+v) - f(b),$$

که در آن $b = g(a)$ و $v = g(a+y) - b$. دستور تیلور برای f در آن ایجاب می‌کند که

$$(۱۴) \quad E_a(y) \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \text{ که در آن وقتی که } v = g'(a)(y) + \|y\|E_a(y) \\ \text{دستور تیلور برای } f(b+v) \text{ نتیجه می‌دهد که}$$

$$(۱۵) \quad f(b+v) - f(b) = f'(b)(v) + \|v\|E_b(v), \\ E_b(v) \rightarrow 0, v \rightarrow 0 \text{ که در آن وقتی که}$$

با استفاده از (۱۴) در (۱۵)، خواهیم داشت

$$(۱۶) \quad f(b+v) - f(b) = f'(b)[g'(a)(y)] + f'(b)[\|y\|E_a(y)] \\ + \|v\|E_b(v) = f'(b)[g'(a)(y)] + \|y\|E(y),$$

که در آن $E(0) = 0$ و

$$(۱۷) \quad E(y) = f'(b)[E_a(y)] + \frac{\|v\|}{\|y\|}E_b(v), \quad y \neq 0 \text{ اگر}$$

برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که وقتی که $y \rightarrow 0$ ، $E(y) \rightarrow 0$ وقتی که $y \rightarrow 0$ ، اولین جمله طرف راست (۱۷) به 0 می‌گراید زیرا که $E_a(y) \rightarrow 0$ چون وقتی که $y \rightarrow 0$ ، $v \rightarrow 0$ ، پس در جمله دوم طرف راست $E_b(v) \rightarrow 0$ حال نشان می‌دهیم که وقتی که $y \rightarrow 0$ ، $\|v\|/\|y\|$ کراندار باقی می‌ماند. اگر از (۱۴) و (۱۲) برای تخمین صورت این کسر استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\|v\| \leq \|g'(a)(y)\| + \|y\| \|E_a(y)\| \leq \|y\| \{M + \|E_a(y)\|\},$$

که در آن $M = \sum_{k=1}^n \|\nabla g_k(a)\|$. از این روی

$$\frac{\|v\|}{\|y\|} \leq M + \|E_a(y)\|,$$

پس وقتی که $y \rightarrow 0$ ، $\|v\|/\|y\|$ کراندار باقی می ماند. با استفاده از (۱۳) و (۱۶)، دستور تیلور زیرین را بدست می آوریم:

$$h(a + y) - h(a) = f'(b)[g'(a)(y)] + \|y\| E(y),$$

که در آن وقتی $y \rightarrow 0$ ، $E(y) \rightarrow 0$. این ثابت می کند که h در a مشتقپذیر است و مشتق کل آن در a مساوی ترکیب $f'(b) \circ g'(a)$ می باشد.

۱۰.۱۲ شکل ماتریسی قاعده زنجیره ای

اگر $h = f \circ g$ و $b = g(a)$ ، بنا به قاعده زنجیره ای،

$$(18) \quad h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

چون ماتریس ترکیب دو تابع مساوی حاصل ضرب ماتریسهای متناظر آنها است، پس از رابطه زیرین برای ماتریسهای ژاکوبی بدست می آید:

$$(19) \quad Dh(a) = Df(b) Dg(a).$$

این را شکل ماتریسی قاعده زنجیره ای می نامند. با نشان دادن هر ماتریس بر حسب عضوهایش، رابطه (۱۹) را نیز می توان به صورت معادلهائی اسکالر نوشت.

خصوصاً، فرض کنیم که $a \in \mathbb{R}^p$ ، $b = g(a) \in \mathbb{R}^n$ ، و $f(b) \in \mathbb{R}^m$ در این صورت $h(a) \in \mathbb{R}^m$ و می توان نوشت

$$g = (g_1, \dots, g_n), \quad f = (f_1, \dots, f_m), \quad h = (h_1, \dots, h_m).$$

در این صورت $Dh(a)$ یک ماتریس $m \times p$ و $Df(b)$ یک ماتریس $m \times n$ و $Dg(a)$ یک ماتریس $n \times p$ هستند که با رابطه های زیر مشخص می شوند:

$$Dh(a) = [D_j h_i(a)]_{i,j=1}^{m,p}, \quad Df(b) = [D_k f_i(b)]_{i,k=1}^{m,n},$$

$$Dg(a) = [D_j g_k(a)]_{k,j=1}^{n,p}$$

معادله ماتریسی (۱۹) هم ارز mp معادله اسکالر زیر است:

$$(20) \quad D_j h_i(a) = \sum_{k=1}^n D_k f_i(b) D_j g_k(a),$$

به ازای $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, p$.

این معادله ها مشتقهای جزئی مؤلفه های h را بر حسب مشتقهای جزئی مؤلفه های f و g بیان می کنند.

معادله‌های مذکور در (۲۰) را می‌توان به شکلی درآورد که بشود ساده‌تر بخاطر سپرد. می‌نویسیم $y = f(x)$ و $x = g(t)$. در این صورت $y = f[g(t)] = h(t)$ و (۲۰) به صورت

$$(21) \quad \frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j}$$

درمی‌آید، که در آن

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_j} = D_j g_k \quad \text{و} \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = D_k f_i \quad , \quad \frac{\partial y_i}{\partial t_j} = D_j h_i$$

چند مثال. فرض کنیم $m = 1$. در این صورت f و $h = f \circ g$ حقیقی هستند و در (۲۰)، p معادله وجود خواهد داشت، که هر یک برای یکی از مشتقات جزئی h می‌باشد:

$$D_j h(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{b}) D_j g_k(\mathbf{a}), \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

عضو طرف راست در بالا عبارت است از حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار $\nabla f(\mathbf{b})$ و $D_j g(\mathbf{a})$. در این حالت، معادله (۲۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

خصوصاً، اگر $p = 1$ ، فقط یک معادله

$$h'(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{b}) g'_k(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{b}) \cdot Dg(\mathbf{a})$$

را خواهیم داشت، که در آن ماتریس ژاکوبی $Dg(\mathbf{a})$ یک بردار ستونی خواهد بود. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان برهان ساده‌ای برای قضیه زیر یافت. این قضیه درباره مشتگیری از یک انتگرال بر حسب پرمائی است که هم در انتگرالده و هم در حدهای انتگرالگیری ظاهر می‌شود.

قضیه ۸.۱۲. فرض کنیم f در $D_p f$ بر مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشند. همچنین p و q ، که به ازای هر y در $[c, d]$ ، $p(y) \in [a, b]$ و $q(y) \in [a, b]$ بر $[c, d]$ مشتقپذیر باشند. F را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \quad , \quad y \in [c, d] \quad \text{اگر}$$

در این صورت $F'(y)$ به‌ازای هر y در $[c, d]$ وجود دارد و از رابطه زیرین بدست می‌آید:

$$F'(y) = \int_{p(y)}^{q(y)} D_{x_1} f(x, y) dx + f(q(y), y)q'(y) - f(p(y), y)p'(y).$$

برهان. به‌ازای x_1 و x_2 در $[a, b]$ و $x_3 \in [c, d]$ قرار می‌دهیم $G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} f(t, x_3) dt$ در این صورت F تابع مرکبی است که با $F(y) = G(p(y), q(y), y)$ مشخص می‌شود. از قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که

$$F'(y) = D_1 G(p(y), q(y), y)p'(y) + D_2 G(p(y), q(y), y)q'(y) + D_3 G(p(y), q(y), y).$$

بنابر قضیه ۳۲.۷، $D_1 G(x_1, x_2, x_3) = -f(x_1, x_3)$ و

$$D_3 G(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3).$$

همچنین، بنا بر قضیه ۴۰.۷،

$$D_2 G(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1}^{x_2} D_{x_1} f(t, x_3) dt.$$

اگر این نتیجه‌ها را در دستور مذکور برای $F'(y)$ بکار بریم، قضیه بدست می‌آید.

۱۱.۱۲ قضیه مقدار میانگین برای تابعهای مشتقپذیر

قضیه مقدار میانگین برای تابعهای از \mathbf{R}^1 به \mathbf{R}^1 بیان می‌کند که به‌ازای مقداری از z بین x و y ،

$$(۲۲) \quad f(y) - f(x) = f'(z)(y - x).$$

این معادله، در حالت کلی، برای تابعهای برداری از \mathbf{R}^n به \mathbf{R}^m ، که در آن $m > 1$ ، درست نیست. (ر. ک. تمرین ۱۹.۱۲). اما، نشان خواهیم داد که اگر z مناسب اختیار شود، با تشکیل حاصل ضرب نقطه‌ای هر عضو (۲۲) با هر بردار در \mathbf{R}^m ، می‌توان معادله صحیح را بدست آورد. این مطلب تعمیم مفیدی از قضیه مقدار میانگین برای تابعهای برداری خواهد بود.

در بیان این قضیه، منظور از نماد $L(x, y)$ یعنی پاره خطی که دو نقطه x و y در \mathbf{R}^n را بهم وصل می‌کند. یعنی،

$$L(x, y) = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}.$$

قضیه ۹.۱۲ (قضیه مقدار میانگین). فرض کنیم S یک زیر مجموعهٔ باز \mathbb{R}^n باشد و $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ در هر نقطهٔ S مشتقپذیر باشد. همچنین x و y دو نقطه در S باشند بقسمی که $L(x, y) \subseteq S$. در این صورت، به ازای هر بردار a در \mathbb{R}^m ، نقطه‌ای مانند z در $L(x, y)$ هست بقسمی که

$$(۲۳) \quad a \cdot \{f(y) - f(x)\} = a \cdot \{f'(z)(y - x)\}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $u = y - x$. چون S باز است و $L(x, y) \subseteq S$ ، پس δ مثبتی هست بقسمی که به ازای هر عدد حقیقی t در بازهٔ $[-\delta, 1 + \delta]$ ، $x + tu \in S$ فرض کنیم a بردار ثابتی در \mathbb{R}^m باشد و فرض کنیم F آن تابع حقیقی باشد که بر $[-\delta, 1 + \delta]$ با معادلهٔ

$$F(t) = a \cdot f(x + tu)$$

تعریف می‌شود. در این صورت، F بر $[-\delta, 1 + \delta]$ مشتقپذیر است و مشتق آن از رابطهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$F'(t) = a \cdot f'(x + tu; u) = a \cdot \{f'(x + tu)(u)\}.$$

بنا بر قضیهٔ معمولی مقدار میانگین،

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)$$

که در آن $0 < \theta < 1$ ،

حال می‌توان نوشت

$$F(1) - F(0) = a \cdot \{f'(x + \theta u)(u)\} = a \cdot \{f'(z)(y - x)\},$$

اما $z = x + \theta u \in L(x, y)$.

$$F(1) - F(0) = a \cdot \{f(y) - f(x)\},$$

پس رابطهٔ (۲۳) برقرار است. البته، نقطهٔ z به F ، و در نتیجه به a بستگی دارد.

تیسره. هرگاه S کوژ باشد، آنگاه به ازای هر x و y در S ، $L(x, y) \subseteq S$ ، پس رابطهٔ (۲۳) به ازای هر x و y در S برقرار است.

چند مثال

۱. اگر f حقیقی باشد ($m = 1$)، در رابطهٔ (۲۳) می‌توان a را مساوی ۱ اختیار کرد، خواهیم داشت

$$(۲۴) \quad f(y) - f(x) = f'(z)(y - x) = \nabla f(z) \cdot (y - x).$$

۲. اگر f تابعی برداری، و a یک بردار یکه در \mathbf{R}^m باشد، چون $\|a\| = 1$ ، از معادله (۲۳) و نامساوی کشی - شوارتز خواهیم داشت

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f'(z)(y - x)\|.$$

با استفاده از (۱۲) نامساوی زیر بدست می آید:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M \|y - x\|,$$

که در آن $M = \sum_{k=1}^m \|\nabla f_k(z)\|$. توجه کنید که M به z ، و در نتیجه به x و y بستگی دارد.

۳. هر گاه S کوژ باشد و همه مشتقهای جزئی f ، یعنی $D_j f_k$ بر S کراندار باشند، آنگاه عددی پایا مانند $A > 0$ هست بقسمی که

$$\|f(y) - f(x)\| \leq A \|y - x\|.$$

با بیان دیگر می توان گفت که، f در یک شرط لیبشیتس بر S صدق می کند. قضیه مقدار میانگین برهان ساده ای از قضیه زیرین را بدست می دهد، که مربوط به تابعهایی است که مشتق کل آنها صفر است.

قضیه ۱۰.۱۳ فرض کنیم S یک زیر مجموعه همبند باز \mathbf{R}^n و $f: S \rightarrow \mathbf{R}^m$ در هر نقطه S مشتقپذیر باشد. هر گاه به ازای هر c در S ، $f'(c) = 0$ ، آنگاه f بر S پایا است.

برهان. چون S باز و همبند است، پس چند ضلعی وار همبند خواهد بود. (ر. ک. بخش ۰.۱۸.۰۴). بنابراین، هر جفت از نقطه های x و y در S را می توان با یک کمان چند ضلعی در S به هم وصل کرد. رأسهای این کمان را با p_1, \dots, p_r نشان می دهیم، که در آن $p_r = x$ و $p_1 = y$. چون هر پاره خط $L(p_{i+1}, p_i) \subseteq S$ بنا بر قضیه مقدار میانگین، به ازای هر بردار a

$$a \cdot \{f(p_{i+1}) - f(p_i)\} = 0.$$

اگر همه این معادله ها را که به ازای $1, 2, \dots, r-1$ حاصل می شوند با هم جمع کنیم، به ازای هر a خواهیم داشت

$$a \cdot \{f(y) - f(x)\} = 0.$$

با فرض $a = f(y) - f(x)$ ، نتیجه می شود که $f(x) = f(y)$ ، پس f بر S پایا است.

۱۲.۱۲ شرطی کافی برای مشتقپذیری

تا بحال از فرض این که تابعی مشتقپذیر است نتایجی می‌گرفتیم. همچنین دیده‌ایم که نه وجود همه مشتقهای جزئی و نه وجود همه مشتقهای جهتی، هیچ یک برای مشتقپذیری یک تابع کافی نیست (زیرا از هیچ یک نمی‌توان پیوستگی تابع را نتیجه گرفت). قضیه زیر نشان می‌دهد که پیوستگی همه مشتقهای جزئی تابعی منهای یکی، مشتقپذیری آن تابع را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۱۱.۱۲ فرض می‌کنیم یکی از مشتقهای جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ در c وجود داشته باشد، و $n - 1$ مشتق جزئی باقیمانده در یک گوی n بعدی مانند $B(c)$ وجود داشته باشند و در c پیوسته باشند. در این صورت f در c مشتقپذیر است.

برهان. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تابع برداری $f = (f_1, \dots, f_m)$ وقتی، فقط وقتی، در c مشتقپذیر است که هر مؤلفه آن مانند f_k در c مشتقپذیر باشد. (اثبات این مطلب آسان است). بنا براین، کافی است قضیه را برای وقتی که f تابعی حقیقی باشد ثابت کنیم.

برای اثبات فرض می‌کنیم که $D_1 f(c)$ وجود داشته باشد، و مشتقهای جزئی پیوسته عبارت از $D_2 f, \dots, D_n f$ باشند.

تنها چیزی که می‌توانسد $f'(c)$ بشود بردار گرادیان $\nabla f(c)$ است. ثابت می‌کنیم که

$$f(c + v) - f(c) = \nabla f(c) \cdot v + o(\|v\|), \quad v \rightarrow 0$$

و در نتیجه قضیه برقرار خواهد بود. راه اثبات این است که تفاضل $f(c + v) - f(c)$ را به صورت مجموع n جمله در آوریم، که در آن جمله k ام تقریبی برای $v_k D_k f(c)$ باشد.

برای این منظور می‌نویسیم $v = \lambda y$ ، که در آن $\|y\| = 1$ و $\lambda = \|v\|$. λ را آن قدر کوچک اختیار می‌کنیم که $c + v$ در گوی $B(c)$ ، که در آن $D_1 f, \dots, D_n f$ وجود دارند، قرار گیرد. اگر y را برحسب مؤلفه‌هایش بیان کنیم، خواهیم داشت

$$y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n,$$

که در آن u_k بردار مختصات یکه k ام است. حال تفاضل $f(c + v) - f(c)$ را به صورت یک مجموع توی هم رونده زیر می‌نویسیم:

$$(۲۵) \quad f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{y}) - f(\mathbf{c}) \\ = \sum_{k=1}^n \{f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_k) - f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1})\},$$

که در آن

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 = y_1 \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2, \dots, \\ \mathbf{v}_n = y_1 \mathbf{u}_1 + \dots + y_n \mathbf{u}_n.$$

اولین جمله مجموع عبارت است از $f(\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1) - f(\mathbf{c})$. چون دو نقطه \mathbf{c} و $\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1$ فقط در اولین مؤلفه‌های خود متفاوتند، و چون $D_1 f(\mathbf{c})$ وجود دارد، می‌توان نوشت

$$f(\mathbf{c} + \lambda y_1 \mathbf{u}_1) - f(\mathbf{c}) = \lambda y_1 D_1 f(\mathbf{c}) + \lambda y_1 E_1(\lambda),$$

که در آن وقتی که $\lambda \rightarrow 0$ ، $E_1(\lambda) \rightarrow 0$.

به‌ازای $k \geq 2$ ، جمله k ام در مجموع عبارت است از

$$f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1} + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1}) \\ = f(\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{b}_k),$$

که در آن $\mathbf{b}_k = \mathbf{c} + \lambda \mathbf{v}_{k-1}$. دو نقطه \mathbf{b}_k و $\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k$ فقط در مؤلفه k ام با هم فرق دارند، و می‌توان قضیه مقدار میانگین برای مشتق در حالت یک بعدی را بکار برد و نوشت

$$(۲۶) \quad f(\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k) - f(\mathbf{b}_k) = \lambda y_k D_k f(\mathbf{a}_k),$$

که در آن \mathbf{a}_k برپاره خطی که \mathbf{b}_k را به $\mathbf{b}_k + \lambda y_k \mathbf{u}_k$ وصل می‌کند قرار دارد. توجه کنید که وقتی که $\lambda \rightarrow 0$ ، $\mathbf{b}_k \rightarrow \mathbf{c}$ ، و در نتیجه $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{c}$. چون به‌ازای هر $k \geq 2$ ، $D_k f$ در \mathbf{c} پیوسته است، می‌توان نوشت

$$D_k f(\mathbf{a}_k) = D_k f(\mathbf{c}) + E_k(\lambda),$$

که در آن وقتی که $\lambda \rightarrow 0$ ، $E_k(\lambda) \rightarrow 0$. با بکار بردن این رابطه در (۲۶) رابطه (۲۵) به صورت زیرین درمی‌آید:

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{c}) = \lambda \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{c}) y_k + \lambda \sum_{k=1}^n y_k E_k(\lambda) \\ = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\| E(\lambda),$$

که در آن

$$E(\lambda) = \sum_{k=1}^n y_k E_k(\lambda) \rightarrow 0, \quad \|v\| \rightarrow 0$$

وقتی که

و برهان قضیه تمام است.

تیسر. پیوستگی دست کم $n - 1$ تا از $D_1 f, \dots, D_n f$ در C ، اگر چه شرطی کافی برای مشتق پذیری f در C است، ولی بهیچوجه شرطی لازم نخواهد بود. (ر. ک. تمرینهای ۵۰۱۲ و ۵۰۱۳)

۱۳۰۱۲ شرطی کافی برای تساوی مشتقهای جزئی مخلوط

مشتقهای جزئی $D_1 f, \dots, D_n f$ تابع f از R^n به R^m خود تابعهایی از R^n به R^m هستند، و به نوبه خود، می توانند دارای مشتقهای جزئی باشند. این مشتقها را مشتقهای جزئی مرتبه دوم می نامند. نمادهایی را که در فصل ۵ برای تابعهای حقیقی معرفی شدند بکار می بریم:

$$D_{r,k} f = D_r(D_k f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_k}$$

بطریقی مشابه، می توان مشتقهای جزئی مرتبه بالاتر را تعریف کرد.

مثال:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان می دهد که $D_{1,2} f(x, y)$ لزوماً با $D_{2,1} f(x, y)$ یکی نیست. در واقع، در این مثال،

$$D_{1,2} f(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad , (x, y) \neq (0, 0)$$

و $D_{1,2} f(0, 0) = 0$ ، از این روی، به ازای هر y ، $D_{1,2} f(0, y) = -y$ ، و در نتیجه

$$D_{2,1} f(0, y) = -1, \quad D_{2,1} f(0, 0) = -1.$$

از سوی دیگر،

$$D_{2,1} f(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \quad , (x, y) \neq (0, 0)$$

و $D_{2,1} f(0, 0) = 0$ ، پس به ازای هر x ، $D_{2,1} f(x, 0) = x$ ، بنابراین،

$$D_{1,2}f(x, 0) = 1, D_{1,2}f(0, 0) = 1 \text{ و می بینیم که}$$

$$D_{2,1}f(0, 0) \neq D_{1,2}f(0, 0).$$

قضیه زیر محکی برای تساوی دو مشتق جزئی مخلوط $D_{2,1}f$ و $D_{1,2}f$ بدست می دهد .

قضیه ۱۲.۱۲ هرگاه هر دو مشتق جزئی $D_k f$ و $D_r f$ در یک گوی n بعدی مانند $B(c; \delta)$ وجود داشته باشند و هر دو در c مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$(27) \quad D_{r,k} f(c) = D_{k,r} f(c).$$

برهان. هرگاه $f = (f_1, \dots, f_m)$ ، آنگاه $D_k f = (D_k f_1, \dots, D_k f_m)$. بنا بر این کافی است قضیه را برای تابع حقیقی f ثابت کنیم. بعلاوه، چون در (۲۷) فقط دو مؤلفه مورد لزوم است، کافی است حالت $n = 2$ را در نظر بگیریم. برای آسان شدن مطلب، فرض می کنیم که $c = (0, 0)$. ثابت می کنیم که

$$D_{1,2}f(0, 0) = D_{2,1}f(0, 0).$$

$h \neq 0$ را بقسمی اختیار می کنیم که مربعی که رأسهای آن $(0, 0)$ ، $(h, 0)$ ، (h, h) و $(0, h)$ باشند در گوی $B(0; \delta)$ قرار گیرد. مقدار

$$\Delta(h) = f(h, h) - f(h, 0) - f(0, h) + f(0, 0)$$

را در نظر می گیریم. نشان خواهیم داد که وقتی که $h \rightarrow 0$ ، $\Delta(h)/h^2$ هم به $D_{2,1}f(0, 0)$ و هم به $D_{1,2}f(0, 0)$ می گراید.

فرض می کنیم $G(x) = f(x, h) - f(x, 0)$ و ملاحظه می کنیم که

$$(28) \quad \Delta(h) = G(h) - G(0).$$

بنا بر قضیه مقدار میانگین در حالت یک بعدی، داریم

$$(29) \quad G(h) - G(0) = hG'(x_1) = h\{D_1 f(x_1, h) - D_1 f(x_1, 0)\},$$

که در آن x_1 بین 0 و h قرار دارد. چون $D_1 f$ در $(0, 0)$ مشتقپذیر است، دستورهای تیلور مرتبه اول

$$D_1 f(x_1, h) = D_1 f(0, 0) + D_{1,1}f(0, 0)x_1 + D_{2,1}f(0, 0)h + (x_1^2 + h^2)^{1/2} E_1(h),$$

$$D_1 f(x_1, 0) = D_1 f(0, 0) + D_{1,1}f(0, 0)x_1 + |x_1| E_2(h)$$

برقرارند، که در آنها وقتی که $h \rightarrow 0$ ، $E_1(h)$ و $E_2(h)$ به ۰ می‌گرایند. اگر اینها را در (۲۹) و (۲۸) بکار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$\Delta(h) = D_{2,1}f(0, 0)h^2 + E(h),$$

که در آن

$$E(h) = h(x_1^2 + h^2)^{1/2} E_1(h) + h|x_1| E_2(h).$$

چون $|x_1| \leq |h|$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leq |E(h)| \leq \sqrt{2} h^2 |E_1(h)| + h^2 |E_2(h)|,$$

پس

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{2,1}f(0, 0).$$

اگر به جای $G(x)$ تابع $H(y) = f(h, y) - f(0, y)$ را اختیار نمایم و همین روش را بکار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = D_{1,2}f(0, 0),$$

و برهان قضیه تمام خواهد بود.

قضیه زیر نتیجه‌ای است از قضیه‌های ۱۱.۱۲ و ۱۲.۱۲.

قضیه ۱۳.۱۲ هرگاه هر دو مشتق جزئی $D_k f$ و $D_r f$ در یک گوی n بعدی مانند $B(c)$ وجود داشته باشند و $D_{k,r} f$ در دو در c پیوسته باشند، آنگاه

$$D_{r,k} f(c) = D_{k,r} f(c).$$

تبره. در این جا (بدون اثبات) فقط ذکر می‌کنیم که هرگاه $D_k f$ ، $D_r f$ و $D_{k,r} f$ در یک گوی n بعدی مانند $B(c)$ پیوسته باشند، آنگاه $D_{r,k} f(c)$ وجود دارد و مساوی $D_{k,r} f(c)$ است.

اگر f تابعی حقیقی از دو متغیر باشد، f دارای چهار مشتق جزئی مرتبه دوم است؛ که عبارتند از $D_{1,1} f$ ، $D_{1,2} f$ ، $D_{2,1} f$ و $D_{2,2} f$. هم اکنون نشان دادیم که با در نظر گرفتن شرطهای مناسبی برای f فقط سه‌تای آنها از یکدیگر متمایزند. تعداد مشتقهای جزئی مرتبه k مساوی 2^k است. هرگاه همه این مشتقها در یک همسایگی نقطه (x, y) پیوسته باشند، آنگاه بعضی از مشتقهای جزئی مخلوط با یکدیگر متساویند. هر مشتق جزئی مخلوط به شکل f_{r_1, \dots, r_k} است، که در آن هر r_j مساوی ۱ یا ۲ خواهد بود. اگر همه 2^k مشتق جزئی f در یکی از

همسایگیهای (x, y) پیوسته باشند، هر دو مشتق جزئی مخلوط مانند f_{r_k}, \dots, r_k و D_{p_1}, \dots, p_k که در آنها k تائی (r_1, \dots, r_k) جایگشتی از k تائی (p_1, \dots, p_k) باشد، در نقطه (x, y) با یکدیگر متساوی خواهند بود. این گزاره را می توان به کمک استقرای ریاضی، با استفاده از قضیه ۱۳.۱۲ (که حالت خاص این مطلب به ازای $k = 2$ است) با آسانی ثابت نمود. از اثبات آن به ازای مقدار کلی k صرف نظر می کنیم. از این مطلب نتیجه می شود که میان k مشتق جزئی مرتبه k ، در حالت کلی، فقط $k + 1$ مشتق جزئی متمایز وجود دارد، که عبارتند از f_{r_1}, \dots, r_k ها، که در آنها k تائی (r_1, \dots, r_k) به $k + 1$ شکل زیر خواهد بود:

$$\dots, (2, 1, 1, 2, \dots, 2), (2, 2, 2, \dots, 2), (2, 2, \dots, 2), \dots, (1, 2, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1)$$

مشابه گزاره های بالا البته برای تابع های n متغیره نیز برقرارند. در این حالت، تعداد n^k مشتق جزئی از مرتبه k وجود دارد. از پیوستگی همه این مشتقها در نقطه X می توان نتیجه گرفت که مقدار $f_{r_1}, \dots, r_k(X)$ با جایگشت زیر نویسهای r_1, \dots, r_k تغییر نمی کند. در این جا هر r_i عدد صحیح مثبتی است نایبتر از n .

۱۴.۱۲ دستور تیلور برای تابع های از R^n به R^1

دستور تیلور (قضیه ۱۹.۵) را می توان به تابع های حقیقی f که بر زیر مجموعه های R^n تعریف شده باشند وسعت داد. برای بیان قضیه کلی در این مورد به شکلی شبیه به حالت یک بعدی، نمادهای مخصوص

$$f''(x; t), f'''(x; t), \dots, f^{(m)}(x; t)$$

را برای بعضی از مجموعه های بوجود آمده در دستور تیلور بکار می بریم. اینها نقش مشتقهای جهتی مرتبه های بالاتر را بر عهده دارند، و به صورت زیر تعریف می شوند: اگر همه مشتقهای جزئی مرتبه دوم تابع f در نقطه X در R^n وجود داشته باشند، و $t = (t_1, \dots, t_n)$ نقطه دلخواهی در R^n باشد، می نویسیم

$$f''(x; t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f(x) t_j t_i$$

همچنین اگر همه مشتقهای جزئی مرتبه سوم f در X وجود داشته باشند، تعریف می کنیم

$$f^{(m)}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{i,j,k} f(\mathbf{x}) t_k t_j t_i.$$

اگر همه مشتقات جزئی مرتبه m وجود داشته باشند، می توان نماد $f^{(m)}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ را به طریق مشابه تعریف کرد.

مجموعه‌های تعریف شده در بالا شبیه‌اند به دستور

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{x}) t_i$$

برای مشتق جهتی تابعی که در \mathbf{x} مشتقپذیر باشد.

قضیه ۱۴.۱۲ (دستور تیلور). فرض کنیم f و همه مشتقات جزئی آن که از مرتبه کوچکتر از m هستند در هر نقطه از مجموعه باز S در \mathbb{R}^n مشتقپذیر باشند. هر گاه \mathbf{a} و \mathbf{b} دو نقطه S باشند بقسمی که $L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subseteq S$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند \mathbf{z} بر پاره-خط $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ هست بقسمی که

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\mathbf{a}; \mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{m!} f^{(m)}(\mathbf{z}; \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

پروهان. چون S باز است، δ مثبتی وجود دارد بقسمی که به ازای هر عدد حقیقی t در بازه $1 + \delta > t > -\delta$ ، $\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in S$. تابع g را بر $[\delta, 1 + \delta]$ با معادله

$$g(t) = f[\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})]$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $g(1) - g(0) = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$. قضیه را با بکار بردن دستور تیلور در حالت یک بعدی برای g ثابت می‌کنیم. می‌نویسیم

$$(30) \quad g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{m!} g^{(m)}(\theta),$$

که در آن $0 < \theta < 1$.

از طرفی g تابعی است مرکب که با رابطه $g(t) = f[\mathbf{p}(t)]$ داده شده است، که در آن $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. مؤلفه k ام \mathbf{p} دارای مشتق $p'_k(t) = b_k - a_k$ است. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، ملاحظه می‌شود که $g'(t)$ در بازه $[\delta, 1 + \delta]$ وجود دارد و از دستور زیرین بدست می‌آید:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n D_j f[\mathbf{p}(t)] (b_j - a_j) = f'(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

اگر بار دیگر قاعده زنجیره‌ای را بکار ببریم، خواهیم داشت

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f[\mathbf{p}(t)] (b_j - a_j) (b_i - a_i) = f''(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

بهین طریق، نتیجه می‌شود که $g^{(m)}(t) = f^{(m)}(\mathbf{p}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a})$. اگر از اینها در رابطه (۳۰) استفاده کنیم، چون $\mathbf{z} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ قضیه نتیجه خواهد شد.

تمرین

تابعهای مشتقپذیر

۱.۱۲ فرض کنید S یک زیرمجموعه باز \mathbf{R}^n باشد، و $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ تابعی باشد حقیقی بقسمی که $D_1 f, \dots, D_n f$ بر S متناهی باشند. اگر f در نقطه \mathbf{c} در S ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، ثابت کنید به‌ازای هر $k, D_k f(\mathbf{c}) = 0$.

۲.۱۲ در مورد هر یک از تابعهای حقیقی زیرین که بر \mathbf{R}^n تعریف شده است، همه مشتقهای جزئی مرتبه اول و مشتق جهتی $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u})$ را محاسبه کنید:

$$(آ) \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{که در آن } \mathbf{a} \text{ بردار ثابتی است در } \mathbf{R}^n.$$

$$(ب) \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^4$$

$$(ج) \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot L(\mathbf{x}), \quad \text{که در آن } L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ تابعی است خطی.}$$

$$(د) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \text{که در آن } a_{ij} = a_{ji}$$

۳.۱۲ فرض کنید مقادارهای دو تابع \mathbf{f} و \mathbf{g} در \mathbf{R}^m باشند، و مشتقهای جهتی $\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ و $\mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$ وجود داشته باشند. ثابت کنید که مشتقهای جهتی مجموع

$\mathbf{f} + \mathbf{g}$ و حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ از رابطه‌های زیر بدست می‌آیند:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})$$

و

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u}).$$

۴.۱۲ اگر $S \subseteq \mathbf{R}^n$ ، فرض کنید که $\mathbf{f}: S \rightarrow \mathbf{R}^m$ تابعی باشد که مقادیر آن در \mathbf{R}^m باشند، و بنویسید $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$. ثابت کنید که \mathbf{f} در یک نقطه درونی S

مانند c وقتی، و فقط وقتی، مشتقپذیر است که هر f_i در c مشتقپذیر باشد.

۵.۱۲ n تابع حقیقی f_1, \dots, f_n داده شده‌اند، که هر یک بر بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} مشتقپذیر است. به‌ازای هر $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ در بازه n بعدی

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a < x_k < b, k = 1, 2, \dots, n\},$$

تعریف کنید $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$. ثابت کنید که f در هر نقطه S مشتقپذیر است و

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \text{ که در آن } f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n f'_i(x_i)u_i$$

۶.۱۲ n تابع حقیقی f_1, \dots, f_n داده شده‌اند، که همه بر مجموعه S در \mathbb{R}^n تعریف شده‌اند. به‌ازای هر \mathbf{x} در S ، تعریف کنید

$$f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + \dots + f_n(\mathbf{x}).$$

فرض کنید به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، حد زیرین وجود داشته باشد:

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y_k \neq x_k}} \frac{f_k(\mathbf{y}) - f_k(\mathbf{x})}{y_k - x_k}.$$

این حد را $a_k(\mathbf{x})$ بنامید. ثابت کنید که f در \mathbf{x} مشتقپذیر است و

$$f'(\mathbf{x})(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^n a_k(\mathbf{x})u_k, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \text{ اگر}$$

۷.۱۲ فرض کنید \mathbf{f} و \mathbf{g} تابعهائی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m باشند. همچنین \mathbf{f} در c مشتقپذیر، $\mathbf{f}(c) = \mathbf{0}$ و \mathbf{g} در c پیوسته باشد. قرار دهید $h(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$. ثابت کنید که h در c مشتقپذیر است و

$$h'(c)(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(c) \cdot \{\mathbf{f}'(c)(\mathbf{u})\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \text{ اگر}$$

۸.۱۲ فرض کنید $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با معادله

$$\mathbf{f}(x, y) = (\sin x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \cos y)$$

تعریف شده باشد. ماتریس ژاکوبی $D\mathbf{f}(x, y)$ را مشخص کنید.

۹.۱۲ ثابت کنید به‌ازای نقطه ثابت c در \mathbb{R}^n و هر بردار ناصفر \mathbf{u} در \mathbb{R}^n ، تابعی حقیقی مانند f با خاصیت $f'(c; \mathbf{u}) > 0$ وجود ندارد. تابع f را بقسمی مثال بزنید که به‌ازای بردار ثابت \mathbf{u} و هر c در \mathbb{R}^n ، داشته باشیم $f'(c; \mathbf{u}) > 0$.

۱۰.۱۲ فرض کنید $f = u + iv$ تابعی مختلط باشد قسمی که به ازای عدد مختلطی چون c ، $f'(c)$ وجود داشته باشد. بنویسید $z = c + re^{i\alpha}$ (که در آن α حقیقی و ثابت باشد) و در خارج قسمت تفاضلی $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ با فرض $r \rightarrow 0$ نتیجه بگیرد که

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[u'(c; \mathbf{a}) + iv'(c; \mathbf{a})],$$

که در آن $\mathbf{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ، و $u'(c; \mathbf{a})$ و $v'(c; \mathbf{a})$ مشتقهای جهتی می باشند. اگر $\beta = \alpha + \pi/2$ ، قرار دهید $\mathbf{b} = (\cos \beta, \sin \beta)$ ، و با بیانی مشابه بالا، نشان دهید که

$$f'(c) = e^{-i\alpha}[v'(c; \mathbf{b}) - iu'(c; \mathbf{b})].$$

نتیجه بگیرد که $u'(c; \mathbf{a}) = v'(c; \mathbf{b})$ و $v'(c; \mathbf{a}) = -u'(c; \mathbf{b})$. معادله های کشی - ریمان (قضیه ۲۲.۵) حالتی خاصی از این دو رابطه اخیر می باشند.

گرادیانها و قاعده زنجیره ای

۱۱.۱۲ فرض کنید تابع حقیقی f در نقطه \mathbf{c} در \mathbf{R}^n مشتقپذیر باشد، و $\|\nabla f(\mathbf{c})\| \neq 0$. ثابت کنید که یک، و فقط یک، بردار یکه مانند \mathbf{u} در \mathbf{R}^n هست قسمی که $\|\nabla f(\mathbf{c})\| = \|\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})\|$ ، و این بردار یکه ای است که به ازای آن $|\mathbf{f}'(\mathbf{c}; \mathbf{u})|$ مقدار ماکزیمم خود را دارد.

۱۲.۱۲ بردار گرادیان $\nabla f(x, y)$ را در هر نقطه مانند (x, y) در \mathbf{R}^2 که وجود داشته باشد محاسبه کنید:

$$f(0, 0) = 0, \quad \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = x^2 y^2 \log(x^2 + y^2) \quad (\text{آ})$$

$$f(0, 0) = 0, \quad \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(x, y) = xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (\text{ب})$$

۱۳.۱۲ فرض کنید تابعهای حقیقی f و g بر \mathbf{R}^1 تعریف شده باشند و مشتقهای دوم آنها، یعنی f'' و g'' ، بر \mathbf{R}^1 پیوسته باشند. F را چنین تعریف کنید:

$$F(x, y) = f[x + g(y)], \quad \text{در } \mathbf{R}^2, \quad (x, y)$$

به ازای هر (x, y) در \mathbf{R}^2 ، مشتقهای مرتبه اول و دوم F بر حسب مشتقهای f و g داده شده باشند. برقراری رابطه زیر را تحقیق کنید:

$$(D_{\setminus} F)(D_{\setminus, \gamma} F) = (D_{\gamma} F)(D_{\setminus, \setminus} F).$$

۱۴.۱۲ تابع f که در \mathbb{R}^2 تعریف شده باشد مفروض است. قرار دهید

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

(آ) با فرض خاصیت‌های مناسبی دربارهٔ مشتق‌پذیری f ، نشان دهید که

$$D_{\setminus} F(r, \theta) = \cos \theta D_{\setminus} f(x, y) + \sin \theta D_{\gamma} f(x, y),$$

$$D_{\setminus, \setminus} F(r, \theta) = \cos^2 \theta D_{\setminus, \setminus} f(x, y) + 2 \sin \theta \cos \theta D_{\setminus, \gamma} f(x, y) + \sin^2 \theta D_{\gamma, \gamma} f(x, y),$$

که در آنها $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$.

(ب) دستورهای مشابهی برای $D_{\gamma} F$ ، $D_{\setminus, \gamma} F$ و $D_{\gamma, \gamma} F$ بیابید.

(ج) صحت دستور زیر را تحقیق کنید:

$$\|\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta)\|^2 = [D_{\setminus} F(r, \theta)]^2 + \frac{1}{r^2} [D_{\gamma} F(r, \theta)]^2.$$

۱۵.۱۲ اگر بردارهای گرادیان f و g در نقطهٔ \mathbf{x} در \mathbb{R}^n ، یعنی $\nabla f(\mathbf{x})$ و $\nabla g(\mathbf{x})$ وجود داشته باشند، نشان دهید که تابع حاصل ضرب h ، که با $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ تعریف می‌شود، نیز در نقطهٔ \mathbf{x} دارای بردار گرادیان است که از رابطهٔ زیرین بدست می‌آید:

$$\nabla h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x}).$$

مشابه این نتیجه را برای خارج قسمت f/g بیان و ثابت کنید.

۱۶.۱۲ فرض کنید تابع f در هر نقطه در \mathbb{R}^1 مشتق داشته باشد، و g بر \mathbb{R}^2 با معادلهٔ

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تعریف شده باشد. اگر $h = f \circ g$ ، نشان دهید که

$$\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4g(x, y, z) \{f'[g(x, y, z)]\}^2.$$

۱۷.۱۲ فرض کنید f در هر نقطه مانند (x, y) در \mathbb{R}^2 مشتق‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید که g_1 و g_2 بر \mathbb{R}^3 با معادله‌های

$$g_2(x, y, z) = x + y + z \quad \text{و} \quad g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

تعریف شده باشند، و g تابعی باشد برداری که مقادیر آن (در \mathbb{R}^2) از رابطهٔ زیر بدست آیند:

$$g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)).$$

فرض کنید $h = f \circ g$ ، نشان دهید که

$$\|\nabla h\|^2 = 4(D_1 f)^2 g_1 + 4(D_1 f)(D_2 f) g_2 + 3(D_2 f)^2.$$

۱۸۰۱۲ فرض کنیم f بر مجموعه S باز در \mathbb{R}^n تعریف شده باشد. گوئیم f روی S همگن از درجه p است در صورتی که به ازای هر عدد حقیقی λ و هر \mathbf{x} در S که $\lambda \mathbf{x} \in S$ داشته باشیم $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$. اگر چنین تابعی در \mathbf{x} مشتقپذیر باشد، نشان دهید که

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x}).$$

تبره. این مطلب به نام قضیهٔ اویلر برای تابعهای همگن معروف است. دانهمایی. به ازای \mathbf{x} ثابت، تعریف کنید $g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})$ و سپس $g'(1)$ را محاسبه کنید. عکس این مطلب را نیز ثابت کنید. یعنی، نشان دهید که هرگاه به ازای هر \mathbf{x} در مجموعه S بازی چون S ، $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x})$ ، آنگاه f باید روی S همگن از درجه p باشد.

قضیه‌های مقدار میانگین

۱۹۰۱۲ فرض کنید $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ با معادله $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ تعریف شده باشد. در این صورت، به ازای هر عدد حقیقی u ،

$$\mathbf{f}'(t)(u) = u(-\sin t, \cos t).$$

دستور مقدار میانگین، یعنی

$$\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}'(z)(y - x),$$

وقتی که $y = 2\pi$ و $x = 0$ نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا عضو طرف چپ مساوی صفر است و عضو طرف راست برداری است به درازای 2π . با وجود این، بنا بر قضیهٔ ۹۰۱۲، به ازای هر بردار مانند \mathbf{a} در \mathbb{R}^2 ، z در بازهٔ $[0, 2\pi]$ هست بقسمی که

$$\mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x)\} = \mathbf{a} \cdot \{\mathbf{f}'(z)(y - x)\}.$$

وقتی که $x = 0$ و $y = 2\pi$ ، z را بر حسب \mathbf{a} مشخص کنید.

۲۰۰۱۲ فرض کنید تابع حقیقی f برگوی 2 بعدی $B(\mathbf{x})$ مشتقپذیر باشد. با در نظر گرفتن تابع تعریف شده با

$$g(t) = f[ty_1 + (1-t)x_1, y_2] + f[x_1, ty_2 + (1-t)x_2],$$

ثابت کنید که

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (y_1 - x_1) D_1 f(z_1, y_2) + (y_2 - x_2) D_2 f(x_1, z_2),$$

که در آن $z_2 \in L(x_2, y_2)$ و $z_1 \in L(x_1, y_1)$.

۲۱.۱۲ نتیجه تمرین ۲۰.۱۲ را برای یک تابع حقیقی مشتقپذیر برگویی n بعدی مانند $B(\mathbf{x})$ تعمیم دهید و آن را ثابت کنید.

۲۲.۱۲ فرض کنید f تابعی باشد حقیقی بقسمی که مشتق جهتی $f'(\mathbf{c} + t\mathbf{u}; \mathbf{u})$ به ازای هر t در بازه $0 \leq t \leq 1$ وجود داشته باشد. ثابت کنید که θ ای در بازه $[0, 1]$ هست که به ازای آن

$$f(\mathbf{c} + \mathbf{u}) - f(\mathbf{c}) = f'(\mathbf{c} + \theta\mathbf{u}; \mathbf{u}).$$

۲۳.۱۲ (آ) اگر f تابعی حقیقی باشد، و به ازای هر \mathbf{x} در گوی n بعدی $B(\mathbf{c})$ و هر بردار \mathbf{u} ، $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$ ، ثابت کنید که f بر $B(\mathbf{c})$ پایا است.

(ب) از این فرض که به ازای بردار ثابت \mathbf{u} و هر \mathbf{x} در $B(\mathbf{c})$ ، $f'(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0$ چه می توان نتیجه گرفت؟

مشتقهای مرتبه بالاتر و دستور تیلور

۲۴.۱۲ برای هر یک از تابعهای زیرین، تحقیق کنید که مشتقهای جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ با هم متساویند.

(آ) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

(ب) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$

(ج) $f(x, y) = \tan(x^2/y)$ ، $y \neq 0$

۲۵.۱۲ فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد. با استفاده از استقرا و قضیه ۱۳.۱۲، ثابت کنید که هرگاه k مشتق جزئی مرتبه k ی f در یکی از همسایگیهای نقطه (x, y) پیوسته باشند، آنگاه همه مشتقهای جزئی مخلوط به شکل f_{r_1, \dots, r_k} و f_{p_1, \dots, p_k} در صورتی در نقطه (x, y) با هم متساویند که در k تائیهای (r_1, \dots, r_k) و (p_1, \dots, p_k) تعداد یکها متساوی باشند.

۲۶.۱۲ اگر همه مشتقهای جزئی مرتبه k ی تابع دو متغیره f بر مجموعه S در \mathbb{R}^2 پیوسته باشند، نشان دهید که

$$f^{(k)}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} t_1^r t_2^{k-r} D_{p_1, \dots, p_k} f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S, \mathbf{t} = (t_1, t_2),$$

که در آن در جمله m ، $p_1 = \dots = p_r = 1$ و $p_{r+1} = \dots = p_k = 2$ با استفاده از این نتیجه، دستور تیلور (قضیه ۱۴.۱۲) برای $n = 2$ را به صورتی دیگر بیان کنید. علامت $\binom{k}{r}$ همان ضریب دو جمله‌ای $k! / [r!(k-r)!]$ است.

۲۷.۱۲ با استفاده از دستور تیلور، تابعهای زیرین را به صورت توانهایی از $(x-1)$ و $(y-2)$ بیان کنید:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2 \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad (\text{ب})$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 12.1 Apostol, T.M., *Calculus*, Vol. 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.
- 12.2 Chaundy, T.W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.
- 12.3 Woll, J.W., *Functions of Several Variables*. Harcourt Brace and World, New York, 1966.

تابعهای ضمنی و مسأله‌های اکسترمم

۱۰۱۳ مقدمه

این فصل از دو قسمت عمده تشکیل شده است. در قسمت اول دربارهٔ قضیهٔ مهمی در آنالیز به نام قضیهٔ تابع ضمنی بحث می‌شود؛ و در قسمت دوم مسأله‌های اکسترمم مورد بحث خواهند بود. در هر دو قسمت، قضیه‌های مذکور در فصل ۱۲ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیهٔ تابع ضمنی در ساده‌ترین شکل خود با معادله‌ای به شکل

$$(۱) \quad f(x, t) = 0$$

سر و کار دارد. مسأله این است که آیا از این معادله می‌توان x را به‌عنوان تابعی از t مشخص کرد؟ اگر این کار امکان‌پذیر باشد، به‌ازای تابعی چون g ، معادلهٔ

$$x = g(t)$$

بدست می‌آید. می‌گوئیم g «به‌طور ضمنی» به‌وسیلهٔ (۱) تعریف شده است. شکل کلیتر مسأله وقتی است که دستگاهی از چند معادله داشته باشیم که هر یک شامل چند متغیر باشد، و سؤال کنیم که آیا می‌توان این معادله‌ها را حل کرد و تعدادی از متغیرها را برحسب بقیه بدست آورد؟ این مسأله از نوع مسألهٔ بالا است، جز این‌که x و t با بردارها، و f و g با تابعهای برداری عوض شده‌اند. با شرطهای نسبتاً کلی، همواره جواب وجود دارد. قضیهٔ تابع ضمنی این شرطها را توصیف می‌کند و نتایجی دربارهٔ جواب بدست می‌دهد.

یکی از حالت‌های خاص و مهم مسأله‌ای است که در جبر با آن آشنا هستیم، و آن حل n معادله خطی به شکل

$$(۲) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = t_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

است، که در آن a_{ij} و t_i ها عدددهائی معلوم، و x_1, \dots, x_n نماینده مجهولها هستند. در جبر خطی ثابت شده است که یک چنین دستگاه وقتی، و فقط وقتی، دارای جواب منحصر بفرد است که دترمینان ماتریس $A = [a_{ij}]$ ، یعنی دترمینان ماتریس ضریبها، صفر نباشد.

تبره. دترمینان یک ماتریس مربعی مانند $A = [a_{ij}]$ را با نماد $\det A$ یا $\det [a_{ij}]$ نشان می‌دهیم. اگر $\det [a_{ij}] \neq 0$ ، جواب (۲) از قاعده کرامر بدست می‌آید، که بر طبق این قاعده، هر x_k مساوی خارج قسمت دو دترمینان است، یعنی، به صورت $x_k = A_k/D$ ، که در آن $D = \det[a_{ij}]$ دترمینان ماتریسی است که از تعویض ستون k ام $[a_{ij}]$ با t_1, \dots, t_n حاصل می‌گردد. (برای اثباتی از قاعده کرامر، ر. ک. کتاب مرجع ۱۰۱۳، قضیه ۱۴۰۳). در حالت خاص، هرگاه هر $t_i = 0$ ، $x_k = 0$.

اینک نشان می‌دهیم که دستگاه (۲) را می‌توان به شکل (۱) نوشت. هر معادله در (۲) به شکل زیر است:

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0 \quad \text{که در آن } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$$

و

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - t_i$$

بنابراین، دستگاه (۲) را می‌توان با یک معادله برداری مانند $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = 0$ بیان کرد، که در آن $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. هر گاه $D_j f_i$ نمایش مشتق جزئی f_i بر حسب مختص j م، یعنی x_j ، باشد، آنگاه $D_j f_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = a_{ij}$. از این روی ماتریس ضریبها در (۲)، یعنی $A = [a_{ij}]$ ، یک ماتریس ژاکوبی خواهد بود. در جبر خطی داریم که (۲) در صورتی جواب منحصر بفرد دارد که دترمینان این ماتریس ژاکوبی صفر نباشد.

در حالت کلی قضیه تابع ضمنی هم صفر نشدن دترمینان ماتریس ژاکوبی نقشی برعهده دارد. این نقش وقتی ظاهر می‌شود که \mathbf{f} را به یک تابع خطی نزدیک

می‌کنیم. جای معادله $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$ را دستگامی از معادله‌های خطی می‌گیرد که ماتریس ضریبهایشان ماتریس ژاکوبی \mathbf{f} است.

نمادگذاری. اگر $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ و $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ، ماتریس ژاکوبی $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [D_j f_i(\mathbf{x})]$ یک ماتریس $n \times n$ است. دترمینان این ماتریس را یک دترمینان ژاکوبی می‌نامیم و با $J_f(\mathbf{x})$ نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$J_f(\mathbf{x}) = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det [D_j f_i(\mathbf{x})].$$

نماد

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

را هم برای نشان دادن دترمینان ژاکوبی $J_f(\mathbf{x})$ بکار می‌بریم. قضیه زیرین دترمینان ژاکوبی یک تابع مختلط را با مشتق آن مربوط می‌سازد.

قضیه ۱۰۱۳ هرگاه تابع مختلط $f = u + iv$ در نقطه z در C مشتق داشته باشد، نگاه $J_f(z) = |f'(z)|^2$ برهان. می‌دانیم که

$$|f'(z)|^2 = (D_x u)^2 + (D_x v)^2 \quad \text{پس} \quad f'(z) = D_x u + i D_x v$$

همچنین، به‌موجب معادله‌های کشی - ریمان،

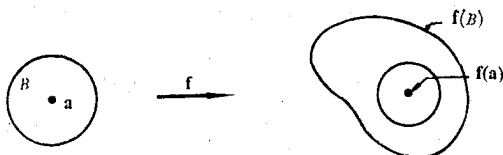
$$\begin{aligned} J_f(z) &= \det \begin{bmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{bmatrix} = D_x u D_y v - D_x v D_y u \\ &= (D_x u)^2 + (D_x v)^2. \end{aligned}$$

۲۰۱۳ توابع با دترمینانهای ژاکوبی ناصفر

این بخش برخی از خاصیت‌های توابعی را که در بعضی از نقطه‌ها دارای دترمینان ژاکوبی ناصفرند بدست می‌دهد. این نتیجه‌ها بعداً در اثبات قضیه تابع ضمنی بکار خواهند رفت.

قضیه ۲۰۱۳ فرض کنیم $B = B(\mathbf{a}; r)$ یک گوی n بعدی در \mathbf{R}^n باشد، و ∂B کرانه آن باشد، یعنی

$$\partial B = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\},$$



شکل ۱.۱۳

و همچنین فرض کنیم که $\bar{B} = B \cup \partial B$ بست آن را نشان دهد. $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ را بر \bar{B} پیوسته می‌انگاریم، و فرض می‌کنیم که همه مشتقهای جزئی $D_j f_i(\mathbf{x})$ در هر نقطه $\mathbf{x} \in B$ وجود داشته باشند. بعلاوه فرض می‌کنیم که اگر $\mathbf{x} \in \partial B$ ، $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$ و به ازای هر \mathbf{x} در B ، $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$. در این صورت، $\mathbf{f}(B)$ ، یعنی نقش B با \mathbf{f} ، حاوی یک گوی n بعدی به مرکز $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ خواهد بود.

پرهان. تابع حقیقی g را بر ∂B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\|, \quad \mathbf{x} \in \partial B$$

در این صورت، به ازای هر \mathbf{x} در ∂B ، $g(\mathbf{x}) > 0$ ، زیرا که اگر $\mathbf{x} \in \partial B$ ، $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{a})$. همچنین، از این که \mathbf{f} بر \bar{B} پیوسته است نتیجه می‌شود که g بر ∂B پیوسته است. چون ∂B فشرده است، g در نقطه‌ای بر ∂B مینیمم مطلق خود را (که آن را m می‌نامیم) می‌گیرد. توجه کنید که چون g بر ∂B مثبت است، پس $m > 0$. فرض می‌کنیم T گوی n بعدی

$$T = B\left(\mathbf{f}(\mathbf{a}); \frac{m}{r}\right)$$

را نشان دهد. ثابت می‌کنیم که $T \subseteq \mathbf{f}(B)$ ، و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. (ر. ک. شکل ۱.۱۳)

برای این کار نشان می‌دهیم که اگر $\mathbf{y} \in T$ ، $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(B)$. نقطه‌ای مانند \mathbf{y} در T اختیار می‌کنیم و آن را ثابت نگه‌داشته، تابع حقیقی جدید h را بر \bar{B} به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x} \in \bar{B}$$

در این صورت h بر مجموعه فشرده \bar{B} پیوسته است، و در نتیجه بر \bar{B} به مینیمم مطلق خود می‌رسد. نشان خواهیم داد که h مینیمم خود را در نقطه‌ای در گوی n بعدی باز B احراز خواهد کرد. چون $\mathbf{y} \in T$ ، در مرکز، رابطه

$$h(\mathbf{a}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| < \frac{m}{\gamma}$$

را داریم. پس مقدار مینیمم h در \bar{B} نیز باید از m/γ کوچکتر باشد. اما در هر نقطه مانند \mathbf{x} بر کرانه B ، یعنی ∂B ، داریم

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &= \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - (\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{a}))\| \\ &\geq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\| - \|\mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{y}\| > g(\mathbf{x}) - \frac{m}{\gamma} \geq \frac{m}{\gamma}, \end{aligned}$$

پس مینیمم h نمی تواند بر کرانه B ، یعنی ∂B ، روی دهد. از این روی نقطه ای مانند \mathbf{c} در درون B هست که در آن h به مینیمم خود می رسد. در این نقطه مربع h نیز مینیمم دارد. چون

$$h^2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{r=1}^n [f_r(\mathbf{x}) - y_r]^2,$$

و چون هر $D_k(h^2)$ باید در \mathbf{c} صفر باشد، پس بایستی

$$\sum_{r=1}^n [f_r(\mathbf{c}) - y_r] D_k f_r(\mathbf{c}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

اما از آن جا که $\mathbf{c} \in B$ ، این دستگاهی از معادله های خطی است که دترمینان آن، یعنی $J_f(\mathbf{c})$ ، صفر نیست. بنابراین، به ازای هر r ، $f_r(\mathbf{c}) = y_r$ ، یا $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{y}$ ، یعنی $\mathbf{y} \in f(B)$ از این روی $T \subseteq f(B)$ و برهان تمام است.

تابع $f: S \rightarrow T$ از فضای متریک (S, d_S) به فضای متریک دیگر (T, d_T) را یک نگاشت باز نامیم در صورتی که به ازای هر مجموعه باز A در S ، نقش $f(A)$ در T باز باشد.

قضیه زیر شرطی کافی است برای آن که نگاشتی مجموعه های باز را روی مجموعه های باز نقش کند. (همچنین ر. ک. قضیه ۵.۱۳.)

قضیه ۳.۱۳ فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز \mathbb{R}^n باشد، و $\mathbf{f}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ پیوسته، و بر A دارای مشتقهای جزئی متناهی $D_r f_i$ باشد. هرگاه \mathbf{f} بر A یک به یک باشد، و به ازای هر \mathbf{x} در A ، $J_f(\mathbf{x}) \neq 0$ ، آنگاه $\mathbf{f}(A)$ باز است.

برهان. هر گاه $\mathbf{b} \in \mathbf{f}(A)$ ، آنگاه به ازای یک مقدار \mathbf{a} در A ، $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$. یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a}; r) \subseteq A$ وجود دارد که \mathbf{f} بر آن در مفروضات قضیه ۲.۱۳ صدق می کند، پس $\mathbf{f}(B)$ حاوی یک گوی n بعدی به مرکز \mathbf{b} خواهد بود. بنابراین، \mathbf{b} یک نقطه درونی $\mathbf{f}(A)$ است، در نتیجه $\mathbf{f}(A)$ باز است.

قضیه زیرین نشان می دهد که اگر تابعی دارای مشتقهای جزئی پیوسته باشد،

این تابع در نزدیکی نقطه‌ای که دترمینان ژاکوبی آن صفر نشود یک به یک موضعی است.

قضیه ۴.۱۳ فرض کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ بر مجموعه‌ای باز مانند S در \mathbb{R}^n دارای مشتقهای جزئی پیوسته $D_j f_i$ باشد. و نیز فرض می‌کنیم در نقطه‌ای مانند \mathbf{a} در S ، $J_f(\mathbf{a}) \neq 0$. در این صورت، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ وجود دارد که بر آن \mathbf{f} یک به یک است.

پروهان. فرض کنیم Z_1, \dots, Z_n ، n نقطه در S باشند و $Z = (Z_1; \dots; Z_n)$ نقطه‌ای در \mathbb{R}^{n^2} باشد که n مؤلفه اول آن مؤلفه‌های Z_1, \dots, Z_n ، n مؤلفه بعدی آن مؤلفه‌های Z_p ، و به همین قیاس، هستند. تابع حقیقی h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(Z) = \det [D_j f_i(Z_i)].$$

این تابع در نقطه‌هائی چون Z در \mathbb{R}^{n^2} که $h(Z) = J_f(\mathbf{a}) \neq 0$ تعریف شده باشد پیوسته است، زیرا هر $D_j f_i$ بر S پیوسته است و هر دترمینان یک چند جمله‌ای از n^2 عضو خود می‌باشد. فرض کنیم Z نقطهٔ بخصوصی در \mathbb{R}^{n^2} باشد که با قراردادن

$$Z_1 = Z_p = \dots = Z_n = \mathbf{a}$$

ساخته می‌شود. در این صورت $h(Z) = J_f(\mathbf{a}) \neq 0$ ، و در نتیجه، بنا بر خاصیت پیوستگی، یک گوی n بعدی مانند $B(\mathbf{a})$ هست قسمی که اگر هر $Z_i \in B(\mathbf{a})$ ، $\det [D_j f_i(Z_i)] \neq 0$ ثابت می‌کنیم که \mathbf{f} بر $B(\mathbf{a})$ یک به یک است.

فرض کنیم چنین نباشد. یعنی، به‌ازای دو نقطهٔ $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ در $B(\mathbf{a})$ ، داشته باشیم $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. چون $B(\mathbf{a})$ کوژ است، پس پاره خط $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subseteq B(\mathbf{a})$ و می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین را در مورد هر مؤلفهٔ \mathbf{f} بکار برده، نوشت

$$0 = f_i(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x}) = \nabla f_i(Z_i) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن هر $Z_i \in L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ، و در نتیجه $Z_i \in B(\mathbf{a})$. (چون \mathbf{f} بر S مشتق‌پذیر است، قضیهٔ مقدار میانگین را می‌توان بکار برد.) اما این یک دستگاه معادله‌های خطی به شکل زیر است:

$$a_{ik} = D_k f_i(Z_i) \quad \text{که در آن} \quad \sum_{k=1}^n (y_k - x_k) a_{ik} = 0$$

دترمینان این دستگاه صفر نیست، زیرا که $Z_i \in B(\mathbf{a})$. از این روی، به‌ازای هر k ، $y_k - x_k = 0$ و این ناقض فرض $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ است. بدین ترتیب نشان داده‌ایم که

$x \neq y$ رابطه $f(x) \neq f(y)$ را ایجاب می‌کند، و در نتیجه f بر $B(a)$ یک به یک است.

نمبره. خواننده باید توجه داشته باشد که قضیه ۴.۱۳ یک قضیه موضعی است و کلی نمی‌باشد. صفر نشدن $J_f(a)$ یک به یک بودن f را در یکی از همسایگیهای a تضمین می‌کند. از این امر، حتی وقتی که به ازای هر x در S ، $J_f(x) \neq 0$ ، نمی‌توان نتیجه گرفت که f بر S یک به یک است. مثال زیرین این مطلب را مصور می‌کند. فرض کنیم تابع مختلط f با $f(z) = e^z$ ، $z \in C$ ، تعریف شده باشد. اگر $z = x + iy$ داریم

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 = |e^z|^2 = e^{2x}.$$

بنابراین، به ازای هر z در C ، $J_f(z) \neq 0$ ، اما، f بر C یک به یک نیست زیرا به ازای هر جفت از نقاط z_1 و z_2 که تفاضل آنها $2\pi i$ باشد، $f(z_1) = f(z_2)$. قضیه زیرین یکی از خاصیت‌های کلی تابعهائی را که دارای دترمینان ژاکوبی ناصفر باشند بدست می‌دهد.

قضیه ۵.۱۳ فرض کنیم A یک زیر مجموعه باز R^n باشد، و $f: A \rightarrow R^n$ دارای مشتقات جزئی $D_j f_i$ پیوسته بر A باشد. هرگاه به ازای هر x در A ، $J_f(x) \neq 0$ ، آنگاه f یک نگاشت باز است.

پرهان. فرض کنیم S یک زیرمجموعه باز A باشد. اگر $x \in S$ ، بنا بر قضیه ۴.۱۳ یک گوی n بعدی مانند $B(x)$ هست که بر آن f یک به یک است. بنابراین، به موجب قضیه ۳.۱۳، نقش $f(B(x))$ در R^n باز است. اما می‌توان نوشت $S = \bigcup_{x \in S} B(x)$ با بکار بردن f نتیجه می‌شود که $f(S) = \bigcup_{x \in S} f(B(x))$ ، پس $f(S)$ باز است.

نمبره. اگر تابع $f = (f_1, \dots, f_n)$ بر مجموعه S دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، گوئیم f بر S مشتقپذیر پیوسته است، و می‌نویسیم $f \in C^1$ بر S است. بنا بر قضیه ۱۱.۱۲، مشتقپذیری پیوسته در یک نقطه مشتقپذیری در آن نقطه را ایجاب می‌کند.

قضیه ۴.۱۳ نشان می‌دهد که یک تابع مشتقپذیر پیوسته که در نقطه‌ای مانند a ژاکوبی ناصفر داشته باشد، در یکی از همسایگیهای a دارای معکوس موضعی است. قضیه زیر بعضی از خاصیت‌های مشتقپذیری موضعی این تابع معکوس موضعی را بدست می‌دهد.

۳.۱۳ قضیه تابع معکوس

قضیه ۶.۱۳ فرض کنیم $f = (f_1, \dots, f_n) \in C'$ بر مجموعه باز S در R^n باشد، و $T = f(S)$ هرگاه به ازای نقطه‌ای مانند a در S ، دترمینان ژاکوبی $J_f(a) \neq 0$ ، آنگاه دو مجموعه باز $X \subseteq S$ و $Y \subseteq T$ و تابع منحصر بفردی چون g وجود دارند بقسمی که

(آ) $f(a) \in Y$ و $a \in X$

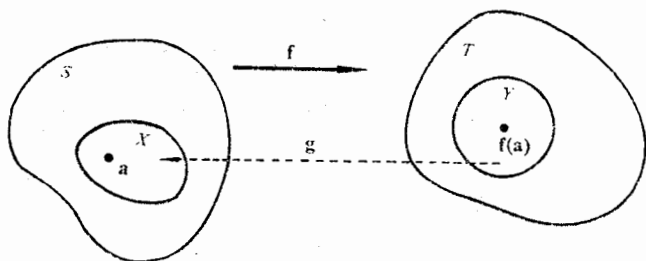
(ب) $Y = f(X)$

(ج) f بر X یک به یک است،

(د) g بر Y تعریف شده است، $g(Y) = X$ و به ازای هر x در X ، $g[f(x)] = x$

(ه) $g \in C'$ بر Y است.

برهان. تابع J_f بر S پیوسته است، و چون $J_f(a) \neq 0$ ، یک گوی n بعدی مانند $B_1(a)$ وجود دارد بقسمی که به ازای هر x در $B_1(a)$ ، $J_f(x) \neq 0$. بنا بر قضیه ۴.۱۳، یک گوی n بعدی مانند $B(a) \subseteq B_1(a)$ هست که بر آن f یک به یک است. فرض کنیم B یک گوی n بعدی به مرکز a و شعاع کوچکتر از شعاع $B(a)$ باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۲.۱۳، $f(B)$ حاوی یک گوی n بعدی به مرکز $f(a)$ خواهد بود. این گوی را Y می‌نامیم و قرار می‌دهیم $X = f^{-1}(Y) \cap B$ در این صورت X باز است زیرا $f^{-1}(Y)$ و B هر دو بازند. (ر.ک. شکل ۲.۱۳)



شکل ۲.۱۳

مجموعه \bar{B} (بست B) فشرده است، و f بر \bar{B} یک به یک و پیوسته است. از این روی، بنا بر قضیه ۲۹.۴، g تابعی مانند f^{-1} (تابع معکوس f^{-1} در قضیه ۲۹.۴) بر $f(\bar{B})$ بقسمی تعریف شده است که به ازای هر x در \bar{B} ، $g[f(x)] = x$ ، بعلاوه، g بر $f(\bar{B})$ پیوسته است. چون $X \subseteq \bar{B}$ و $Y \subseteq f(\bar{B})$ ، پس قسمتهای (آ)، (ب)،

(ج) و (د) برقرارند. یکتائی g از قسمت (د) نتیجه می شود.

اینک (ه) را ثابت می کنیم. برای این منظور، تابع حقیقی h را با معادله $h(Z) = \det [D_j f_i(Z_i)]$ تعریف می کنیم، که در آن Z_1, \dots, Z_n, n نقطه در S هستند، و $Z = (Z_1; \dots; Z_n)$ نقطه متناظر آنها در \mathbb{R}^{2n} است. در این صورت، اگر مانند قضیه ۴.۱۳ استدلال کنیم، نتیجه می شود که یک گوی n بعدی مانند $B_r(a)$ هست بقسمی که اگر هر $Z_i \in B_r(a)$ ، $h(Z) \neq 0$. حال می توان در قسمت اول برهان فرض کرد که گوی n بعدی $B(a)$ بقسمی اختیار شده باشد که $B(a) \subseteq B_r(a)$. در این صورت $\bar{B} \subseteq B_r(a)$ ، و اگر هر $Z_i \in \bar{B}$ ، $h(Z) \neq 0$. برای اثبات (ه)، می نویسیم $g = (g_1, \dots, g_n)$. نشان می دهیم که هر $g_k \in C'$ بر Y است. برای اثبات وجود $D_r g_k$ بر Y ، فرض می کنیم که $y \in Y$ و خارج قسمت تفاضلی $[g_k(y + tu_r) - g_k(y)]/t$ را، که در آن u_r عبارت است از بردار مختصات یکه m ، در نظر می گیریم. (چون Y باز است، اگر t به قدر کافی کوچک باشد، $y + tu_r \in Y$) قرار می دهیم $x = g(y)$ و $x' = g(y + tu_r)$. در این صورت x و x' هر دو در X هستند و $f(x') - f(x) = tu_r$. از این روی، اگر $i \neq r$ ، $f_i(x') - f_i(x) = 0$ است، و اگر $i = r$ ، $f_i(x') - f_i(x) = t$ خواهد بود. بنا بر قضیه مقدار میانگین داریم

$$\frac{f_i(x') - f_i(x)}{t} = \nabla f_i(Z_i) \cdot \frac{x' - x}{t} \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

که در آن هر Z_i بر پاره خطی قرار دارد که x را به x' وصل می کند؛ از این روی $Z_i \in B$. عبارت طرف چپ، بر حسب آن که $i = r$ یا $i \neq r$ ، مساوی ۱ یا ۰ خواهد بود. این یک دستگاه n معادله خطی بر حسب n مجهول $(x'_j - x_j)/t$ است و دارای یک جواب منحصر بفرد است، زیرا

$$\det [D_j f_i(Z_i)] = h(Z) \neq 0.$$

حال به وسیله قاعده کرامر این دستگاه را برای مجهول k ام حل می کنیم. از این عمل عبارت $[g_k(y + tu_r) - g_k(y)]/t$ به صورت خارج قسمت دو دترمینان بدست می آید. وقتی که $t \rightarrow 0$ ، $x' \rightarrow x$ ، زیرا g پیوسته است، و در نتیجه، چون Z_i بر پاره خط واصل بین x و x' قرار دارد، پس هر $Z_i \rightarrow x$. حد دترمینان منخرج کسر مساوی عدد $\det [D_j f_i(x)] = J_f(x)$ است، و چون $x \in X$ ، این عدد ناصفر خواهد بود. بنابراین، حد زیر وجود دارد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_k(y + tu_r) - g_k(y)}{t} = D_r g_k(y).$$

در نتیجه، به‌ازای هر y در Y و هر $r = 1, 2, \dots, n$ ، $D_r g_k(y)$ وجود دارد. بعلاوه، این حد مساوی خسارح قسمت دو درمیان است که هر دو به $D_j f_i(x)$ ها بستگی دارند. از پیوستگی $D_j f_i$ پیوستگی هر مشتق جزئی $D_r g_k$ نتیجه می‌شود، پس برهان (ه) تمام است.

بصره. برهان قبل روشی نیز برای محاسبه $D_r g_k(y)$ بدست می‌دهد. در عمل، مشتقهای $D_r g_k$ را می‌توان (بی مراجعه به عمل حد گیری) با استفاده از این حقیقت که اگر $y = f(x)$ ، حاصل ضرب دو ماتریس ژاکوبی $Df(x)$ و $Dg(y)$ مساوی ماتریس همانی است، ساده‌تر بدست آورد. اگر این را به‌طور مشروح بنویسیم، دستگاه n^2 معادله زیرین نتیجه خواهد شد:

$$\sum_{k=1}^n D_k g_i(y) D_j f_k(x) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

به‌ازای هر i ثابت، اگر j مقدارهای $1, 2, \dots, n$ را بخود بگیرد، n معادله خطی بدست می‌آید. این معادله‌ها را می‌توان به کمک قاعده کرامر و یا روش دیگر برای n مجهول $D_n g_i(y), \dots, D_1 g_i(y)$ حل کرد.

۴.۱۳ قضیه تابع ضمنی

می‌دانیم که معادله یک خم در صفحه xy را می‌توان به شکلی «صریح»، مانند $y = f(x)$ ، یا به شکلی «ضمنی»، مانند $F(x, y) = 0$ ، بیان کرد. اما، اگر معادله‌ای به شکل $F(x, y) = 0$ داده شده باشد، این معادله لزوماً تابعی را نمایش نخواهد داد. (مثلاً، $0 = 5 - x^2 + y^2$). البته معادله $F(x, y) = 0$ همواره یک رابطه را نمایش می‌دهد، یعنی مجموعه همه جفتهای (x, y) که در این معادله صدق‌کنند. بنا بر این، سؤال زیر خود بخود مطرح می‌شود: چه وقت رابطه‌ای که با $F(x, y) = 0$ تعریف شود تابع هم هست؟ با بیان دیگر می‌توان پرسید که، چه وقت می‌توان معادله $F(x, y) = 0$ را به‌طور صریح برای y بر حسب x حل کرده. جواب منحصر بفرد بدست آورد؟ قضیه تابع ضمنی با این سؤال به‌طور موضعی سرو کار دارد. بنابراین قضیه، در نقطه داده شده (x_0, y_0) که $F(x_0, y_0) = 0$ ، با شرایطی چند، یک همسایگی (x_0, y_0) وجود دارد که در آن همسایگی، رابطه تعریف شده با $F(x, y) = 0$ تابع هم هست. این شرطها عبارتند از این که F و $D_x F$ در یکی از همسایگیهای (x_0, y_0) پیوسته باشند و $D_x F(x_0, y_0) \neq 0$. در شکل کلیتر این قضیه، به جای بحث در یک معادله بر حسب دو متغیر، درباره دستگاهی مرکب

از n معادله بر حسب $n + k$ متغیر مانند

$$f_r(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_k) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

بحث می‌شود. اگر بعضی از مشتق‌های جزئی پیوسته باشند و دترمینان ژاکوبی $n \times n$ $\partial(f_1, \dots, f_n) / \partial(x_1, \dots, x_n)$ صفر نباشد، می‌توان این دستگاه را برای x_1, \dots, x_n بر حسب t_1, \dots, t_k حل کرد.

برای اختصار، در این قضیه نماد زیرین را می‌پذیریم: نقطه‌های فضای $(n + k)$ بعدی R^{n+k} را به شکل $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ می‌نویسیم، که در آن

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k) \in R^k \text{ و } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

قضیه ۷.۱۳ (قضیه تابع ضمنی). فرض کنیم $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ تابعی برداری باشد که بر مجموعه S باز در R^{n+k} تعریف شده باشد و مقادیر آن در R^n باشند. فرض می‌کنیم $\mathbf{f} \in C^1$ بر S باشد. همچنین $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ نقطه‌ای در S باشد که به‌ازای آن $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = 0$ و به‌ازای آن دترمینان $n \times n$ $\det [D_r f_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)] \neq 0$ ، در این صورت، یک مجموعه k باز بعدی مانند T_0 حاوی \mathbf{t}_0 و یک \mathbf{t} و فقط یک تابع برداری مانند \mathbf{g} ، تعریف شده بر T_0 با مقادیر در R^n ، وجود دارند قسمی که

(آ) $\mathbf{g} \in C^1$ بر T_0 است؛

(ب) $\mathbf{g}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$ ؛

(ج) به‌ازای هر \mathbf{t} در T_0 ، $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) = 0$.

پرهان. قضیه تابع معکوس را در مورد تابعی برداری مانند

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n; F_{n+1}, \dots, F_{n+k}),$$

که بر S تعریف شده است و مقادیرش در R^{n+k} است، بکار خواهیم برد. تابع \mathbf{F} به‌صورت زیر تعریف شده است: به‌ازای $1 \leq m \leq n$ ، قرار می‌دهیم

$$F_m(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = f_m(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \text{ و به‌ازای } 1 \leq m \leq k, \text{ قرار می‌دهیم}$$

$$F_{n+m}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = t_m.$$

پس می‌توان نوشت $\mathbf{F} = (\mathbf{f}; \mathbf{I})$ ، که در آن $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ و \mathbf{I} تابع همانی است که به‌ازای هر \mathbf{t} در R^k با $\mathbf{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ تعریف می‌شود. در این صورت، دترمینان ژاکوبی $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ همان مقدار دترمینان $n \times n$ $\det [D_r f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$ را دارد، زیرا جمله‌هایی که در k سطر و همچنین k ستون آخر $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ ظاهر می‌شوند تشکیل یک دترمینان $k \times k$ می‌دهند که عضوهای آن در امتداد قطر اصلی همه 1 و در

سایر جاها صفرند؛ اشتراک n سطر اول و n ستون اول دترمینان $\det [D_j f_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})]$ را تشکیل می‌دهد، و

$$D_i F_{n+j}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = 0, \quad 1 \leq j \leq k \text{ و } 1 \leq i \leq n$$

از این روی، دترمینان $J_F(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) \neq 0$ همچنین، $F(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0) = (0; \mathbf{t}_0)$ پس، بنا بر قضیه ۶.۱۳، مجموعه‌های بازی مانند X و Y ، که بترتیب حاوی نقطه‌های $(\mathbf{x}_0; \mathbf{t}_0)$ و $(0; \mathbf{t}_0)$ باشند، وجود دارند بقسمی که F بر X یک به یک است، و $X = F^{-1}(Y)$ همچنین، یک تابع معکوس موضعی مانند G هست که بر Y تعریف شده است و مقادیرش در X می‌باشند بقسمی که

$$G[F(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t}),$$

و $G \in C'$ بر Y است.

حال می‌توان G را به مؤلفه‌هایش به صورت $G = (v; w)$ تحویل کرد، که در آن $v = (v_1, \dots, v_n)$ تابعی است برداری که بر Y تعریف شده است و مقادیرش در \mathbf{R}^n هستند و $w = (w_1, \dots, w_k)$ نیز بر Y تعریف شده است ولی مقادیرش در \mathbf{R}^k می‌باشند. حال می‌توان v و w را به‌طور صریح مشخص کرد. اگر معادله $G[F(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = (\mathbf{x}; \mathbf{t})$ را برحسب مؤلفه‌های v و w بنویسیم، دو معادله

$$v[F(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{x} \quad \text{و} \quad w[F(\mathbf{x}; \mathbf{t})] = \mathbf{t}$$

بدست می‌آیند. اما، هر نقطه $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ در Y را می‌توان به‌ازای یک $(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ در X به‌طور منحصر بفرد به شکل $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = F(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ درآورد، زیرا F بر X یک به یک است و نقش معکوس $F^{-1}(Y)$ مجموعه X را دربر می‌گیرد. علاوه، از تعریف F معلوم می‌شود که، وقتی بنویسیم $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = F(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')$ ، باید داشته باشیم $\mathbf{t}' = \mathbf{t}$ بنا بر این،

$$v(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = v[F(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')] = \mathbf{x}' \quad \text{و} \quad w(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = w[F(\mathbf{x}'; \mathbf{t}')] = \mathbf{t}$$

از این روی تابع G را می‌توان بدین صورت توصیف کرد: به‌ازای نقطه مفروض $(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ در Y ، داریم $G(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$ ، که در آن نقطه‌ای در \mathbf{R}^n است بقسمی که $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = F(\mathbf{x}'; \mathbf{t})$. از این نتیجه می‌شود که

$$F[v(\mathbf{x}; \mathbf{t}); \mathbf{t}] = (\mathbf{x}; \mathbf{t}), \quad Y \text{ در } (\mathbf{x}; \mathbf{t})$$

حال آماده‌ایم که مجموعه T و تابع g مذکور در قضیه را تعریف کنیم. فرض کنیم که

$$T_0 = \{t \mid t \in \mathbf{R}^k, (0; t) \in Y\},$$

و به ازای هر t در T_0 ، تعریف می‌کنیم $g(t) = v(o; t)$. مجموعه T_0 در R^k باز است. بعلاوه، $g \in C'$ بر T_0 است زیرا $G \in C'$ بر Y است و مؤلفه‌های g از مؤلفه‌های G گرفته شده‌اند. همچنین،

$$g(t_0) = v(o; t_0) = x_0.$$

زیرا $(o; t_0) = F(x_0; t_0)$. بالاخره، از معادله $F[v(x; t); t] = (x; t)$ ، که به ازای هر $(x; t)$ در Y برقرار است، (با توجه به مؤلفه‌های R^n) معادله $f[v(x; t); t] = x$ نتیجه می‌شود. با فرض $x = o$ ، ملاحظه می‌شود که به ازای هر t در T_0 ، داریم $f[g(t); t] = o$ و در نتیجه برهان‌گزاره‌های (آ)، (ب)، و (ج) تمام است. باقی می‌ماند اثبات این که g منحصر بفرد است. اما این مطلب بی‌درنگ از یک به یک بودن f نتیجه می‌شود. هرگاه تابع دیگری، مثلاً h ، وجود می‌داشت که در (ج) صدق می‌کرد، آنگاه باید $f[g(t); t] = f[h(t); t]$ ، و از این نتیجه می‌شود که به ازای هر t در T_0 ، $(g(t); t) = (h(t); t)$ ، یا $g(t) = h(t)$.

۵.۱۳ اکسترممهای توابع حقیقی یک متغیره

تا خاتمه این فصل تابعهای حقیقی f را در نظر می‌گیریم، و (در صورت وجود) نقطه‌هایی را که در آنها f یک اکسترمم موضعی، یعنی ماکزیمم یا مینیمم موضعی، دارد مشخص می‌کنیم.

قبلاً در این مورد نتیجه‌ای برای تابعهای یک متغیره بدست آورده‌ایم (قضیه ۹.۵). در آن قضیه ملاحظه شد که شرطی لازم برای آن که تابع f در یک نقطه درونی یک بازه مانند c دارای اکسترمم موضعی باشد آن است که، در صورت وجود $f'(c) = 0$ ، اما این شرط کافی نیست، و آن را می‌توان با فرض $f(x) = x^3$ و $c = 0$ دید. اینک برای این مطلب شرطی کافی بدست می‌آوریم.

قضیه ۱۰.۱۳ فرض کنیم به ازای عددی صحیح مانند $n \geq 1$ ، مشتق n م تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم که به ازای یک نقطه درونی مانند c در $[a, b]$ داشته باشیم

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{اما} \quad f^{(n)}(c) \neq 0$$

در این صورت، در حالت زوج بودن n ، اگر $f^{(n)}(c) > 0$ ، f در d دارای مینیمم موضعی است، و اگر $f^{(n)}(c) < 0$ ، f در c ماکزیمم موضعی دارد. اگر n فرد باشد، f در c نه ماکزیمم موضعی دارد نه مینیمم موضعی.

برهان. چون $f^{(n)}(c) \neq 0$ ، بازه‌ای مانند $B(c)$ وجود دارد قسمی که به ازای هر

x در $B(c)$ ، $f^{(n)}(x)$ دارای همان علامت $f^{(n)}(c)$ است. اما، بنا بر دستور تیلور (قضیه ۱۹۰۵)، به ازای هر x در $B(c)$ ،

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - c)^n$$

$x_1 \in B(c)$ که در آن

اگر n زوج باشد، از این معادله نتیجه می‌شود که وقتی که $f^{(n)}(c) > 0$ ،

$$f(x) \geq f(c),$$

و وقتی که $f^{(n)}(c) \leq 0$ ، $f(x) \leq f(c)$ ، هر گاه n فرد باشد و $f^{(n)}(c) > 0$ ، آنگاه در صورت $x > c$ ، $f(x) > f(c)$ ، ولی در صورت $x < c$ ، $f(x) < f(c)$ ، و f در c نمی‌تواند اکسترم داشته باشد. گزاره‌ای مشابه برای وقتی که n فرد باشد و $f^{(n)}(c) < 0$ برقرار است. پس قضیه ثابت است.

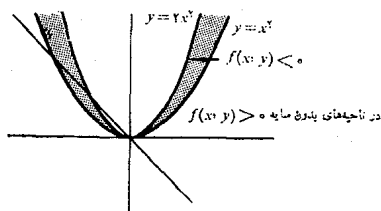
۶.۱۳ اکسترمهای توابع حقیقی چند متغیره

حال تابعهای چند متغیره را در نظر می‌گیریم. تمرین ۱۰۱۲ شرطی لازم برای آن بدست می‌دهد که تابعی در یک نقطه درونی یک مجموعه باز مانند a دارای ماکزیمیم یا مینیمم موضعی باشد. شرط این است که هر $D_k f(a)$ باید در این نقطه صفر باشد. می‌توان این مطلب را برحسب مشتقاتی جهتی نیز بیان کرد و گفت که به ازای هر بردار u باید $f'(a; u)$ صفر باشد.

اما، عکس این گزاره صحیح نیست. تابع دو متغیره زیر را به عنوان مثال در نظر می‌گیریم:

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

در این جا $D_1 f(0, 0) = D_2 f(0, 0) = 0$. در این مثال $f(0, 0) = 0$ ، اما این تابع در هر همسایگی $(0, 0)$ هم مقدار مثبت و هم مقدار منفی بخود می‌گیرد، پس در نقطه $(0, 0)$ تابع نه ماکزیمیم موضعی دارد و نه مینیمم موضعی. (ر.ک. شکل ۳۰۱۳). این مثال پدیده جالب دیگری را مصور می‌سازد. هر گاه خط راست ثابتی را که از مبدأ بگذرد در نظر بگیریم، و نقطه (x, y) در امتداد این خط به طرف $(0, 0)$ حرکت کند، آنگاه این نقطه بالاخره وارد ناحیه بالای سهمی $y = 2x^2$ (یا زیر سهمی $y = x^2$) می‌شود، که در آن $f(x, y)$ به ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ مثبت است. بنابراین، در امتداد هر چنین خطی، f در $(0, 0)$ مینیمم دارد، اما مبدأ در هیچ یک از همسایگیهای دو بعدی نقطه $(0, 0)$ مینیمم موضعی نیست.



شکل ۳.۱۳

تعریف ۹.۱۳ اگر f در نقطه a مشتق‌پذیر باشد و $\nabla f(a) = 0$ ، نقطه a را یک نقطه ایستای f می‌نامند. یک نقطه ایستا را یک نقطه زینی نامند در صورتی که هر گوی n بعدی مانند $B(a)$ حاوی نقطه‌هائی مانند x باشد که به‌ازای بعضی از آنها $f(x) > f(a)$ و به‌ازای بعضی دیگر $f(x) < f(a)$.

در مثال قبل، مبدأ یک نقطه زینی تابع است.

برای آن که ببینیم یک تابع n متغیره در نقطه ایستای a دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است، یا a نقطه زینی است، باید به‌ازای هر x در یکی از همسایگیهای a علامت جبری $f(x) - f(a)$ را تعیین کنیم. این عمل، مانند حالت یک بعدی، به کمک دستور تیلور (قضیه ۱۴.۱۲) انجام می‌شود. در قضیه ۱۴.۱۲ فرض می‌کنیم که $m = 2$ و $y = a + t$. هر گاه مشتقهای جزئی f بر یک گوی n بعدی مانند $B(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه

$$(۳) \quad f(a + t) - f(a) = \nabla f(a) \cdot t + \frac{1}{2} f''(z; t),$$

که در آن z برپاره خطی که a و $a + t$ را به هم وصل می‌کند قرار دارد، و

$$f''(z; t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f(z) t_i t_j.$$

در یک نقطه ایستا $\nabla f(a) = 0$ ، پس (۳) به صورت

$$f(a + t) - f(a) = \frac{1}{2} f''(z; t)$$

درمی‌آید. بنابراین، وقتی که $a + t$ روی $B(a)$ تغییر کند، علامت جبری $f(a + t) - f(a)$ به‌وسیله $f''(z; t)$ مشخص می‌شود. می‌توان (۳) را به شکل

$$(۴) \quad f(a + t) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a; t) + \|t\|^2 E(t)$$

نوشت، که در آن

$$\|t\|^2 E(t) = \frac{1}{\nu} f''(z; t) - \frac{1}{\nu} f''(a; t).$$

نامساوی

$$\|t\|^2 |E(t)| \leq \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |D_{i,j} f(z) - D_{i,j} f(a)| \|t\|^2$$

نشان می‌دهد که اگر مشتقهای جزئی مرتبه دوم f در a پیوسته باشند، وقتی که $E(t) \rightarrow 0$ ، $t \rightarrow 0$ چون $\|t\|^2 E(t)$ از $\|t\|^2$ سریعتر به صفر می‌گراید، می‌توان انتظار داشت که علامت جبری $f(a+t) - f(a)$ به وسیله $f''(a; t)$ تعیین گردد. این مطلب در قضیه زیرین ثابت می‌شود.

قضیه ۱۰.۱۳ (آزمون مشتق دوم برای اکسترمها). فرض کنیم مشتقهای جزئی مرتبه دوم f یعنی $D_{i,j} f$ ها، در یک گوی n بعدی مانند $B(a)$ وجود داشته باشند، و در نقطه a که یک نقطه ایستای f است پیوسته باشند. قرار می‌دهیم

$$(5) \quad Q(t) = \frac{1}{\nu} f''(a; t) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{i,j} f(a) t_i t_j.$$

(آ) اگر به‌ازای هر $t \neq 0$ ، $Q(t) > 0$ ، f دارای مینیمم نسبی در a است.
 (ب) اگر به‌ازای هر $t \neq 0$ ، $Q(t) < 0$ ، f دارای ماکزیمم نسبی در a است.
 (ج) هرگاه $Q(t)$ مقادیر مثبت و منفی هر دو را بگیرد، آنگاه f یک نقطه زینتی در a دارد.

برهان. تابع Q در هر نقطه t در \mathbf{R}^n پیوسته است. فرض کنیم که

$$S = \{t \mid \|t\| = 1\}$$

کرانه گوی n بعدی $B(0; 1)$ را نشان دهد. هرگاه به‌ازای هر $t \neq 0$ ، $Q(t) > 0$ آنگاه $Q(t)$ بر S مثبت است. چون S فشرده است، Q بر S دارای مینیمی است (آن را m می‌نامیم)، و $m > 0$. اما به‌ازای هر عدد حقیقی c ، $Q(ct) = c^2 Q(t)$. اگر به‌ازای $t \neq 0$ ، $c = 1/\|t\|$ اختیار شود، ملاحظه می‌شود که $ct \in S$ ، و در نتیجه $c^2 Q(t) \geq m$ ، پس $Q(t) \geq m \|t\|^2$. اگر این مقدار را در (۴) بکار ببریم بدست می‌آوریم

$$f(a+t) - f(a) = Q(t) + \|t\|^2 E(t) \geq m \|t\|^2 + \|t\|^2 E(t).$$

چون، وقتی که $E(t) \rightarrow 0$ ، $t \rightarrow 0$ پس عدد مثبتی مانند r یافت می‌شود بقسمی

که اگر $0 < \|t\| < r$ ، $|E(t)| < m/2$ ، به‌ازای این مقدار t داریم

$$0 \leq \|t\|^2 |E(t)| < \frac{1}{4} m \|t\|^2,$$

پس

$$f(a+t) - f(a) > m \|t\|^2 - \frac{1}{4} m \|t\|^2 = \frac{3}{4} m \|t\|^2 > 0.$$

بنابراین، f دارای مینیمم نسبی در a است، یعنی حکم (آ) برقرار است. قسمت (ب) را می‌توان با بیانی مشابه ثابت کرد، یا قسمت (آ) را برای $f -$ بکار برد. بالاخره، قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. به‌ازای هر $\lambda > 0$ ، از (۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(a + \lambda t) - f(a) &= Q(\lambda t) + \lambda^2 \|t\|^2 E(\lambda t) \\ &= \lambda^2 \{Q(t) + \|t\|^2 E(\lambda t)\}. \end{aligned}$$

فرض کنیم به‌ازای یک مقدار t ، $Q(t) \neq 0$. چون وقتی که $y \rightarrow 0$ ، $E(y) \rightarrow 0$ پس عدد مثبتی مانند r وجود دارد بقسمی که

$$\|t\|^2 E(\lambda t) < \frac{1}{4} |Q(t)|, \quad 0 < \lambda < r$$

بنابراین، به‌ازای هر چنین λ ای، مقدار $\lambda^2 \{Q(t) + \|t\|^2 E(\lambda t)\}$ دارای همان علامت $Q(t)$ است. بنابراین، اگر $0 < \lambda < r$ ، تفاضل $f(a + \lambda t) - f(a)$ دارای علامت $Q(t)$ خواهد بود. از این روی، اگر $Q(t)$ مقدارهای مثبت و منفی هر دو را بگیرد، نتیجه می‌شود که f در a یک نقطهٔ زینی دارد.

تیسره. تابعی حقیقی مانند Q که بر R^n با معادله‌ای از نوع

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

تعریف شود، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و a_{ij} ها عددهائی حقیقی باشند، یک فرم درجهٔ دوم نامیده می‌شود. فرم را تقادنی نامیم در صورتی که به‌ازای هر i و j ، $a_{ij} = a_{ji}$. فرم را معین مثبت نامیم در صورتی که اگر $x \neq 0$ ، $Q(x) > 0$ ، و آن را معین منفی گوئیم در صورتی که اگر $x \neq 0$ ، $Q(x) < 0$.

عموماً تشخیص این که یک فرم درجهٔ دوم معین مثبت یا منفی است آسان نیست. یک محک، که در آن «مقدارهای ویژه» وارد می‌شوند، در کتاب مرجع ۱۰۱۳، قضیهٔ ۵.۹، توصیف شده است. محک دیگر را، که در آن دترمینانها مداخله

دارند، می‌توان چنین توصیف کرد. فرض کنیم $\Delta = \det[a_{ij}]$ و Δ_k دترمینان ماتریس $k \times k$ ای را نشان دهد که از حذف $(n - k)$ سطر و ستون آخر $[a_{ij}]$ حاصل گردد. همچنین، قرار می‌دهیم $\Delta_0 = 1$. از نظریه فرمهای درجه دوم می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای آن که یک فرم تبارنی معین مثبت باشد آن است که $n + 1$ عدد $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ مثبت باشند. فرم وقتی، و فقط وقتی، معین منفی است که همان $n + 1$ عدد به‌طور متناوب مثبت و منفی باشند. (ر. ک. کتاب مرجع ۲۰۱۳ از صفحه ۳۰۴ تا ۳۰۸). فرم درجه دوم مذکور در (Δ) تبارنی است زیرا مشتقهای جزئی مخلوط $D_{i,j}f(\mathbf{a})$ و $D_{j,i}f(\mathbf{a})$ با یکدیگر متساویند. بنابراین، با شرطهای قضیه ۱۰.۱۳، ملاحظه می‌شود که اگر $(n + 1)$ عدد $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n$ همه مثبت باشند، f در \mathbf{a} مینیمم موضعی دارد، و اگر این عددها متناوباً مثبت و منفی باشند، f در این نقطه ماکزیمم موضعی خواهد داشت. حالت $n = 2$ را مستقیماً می‌توان بررسی کرد و محک زیر را برای آن بدست آورد.

قضیه ۱۱.۱۳ فرض کنیم تابع حقیقی f دارای مشتقهای جزئی مرتبه دوم پیوسته در نقطه ایستای \mathbf{a} در \mathbb{R}^2 باشد. قرار می‌دهیم

$$A = D_{1,1}f(\mathbf{a}), \quad B = D_{1,2}f(\mathbf{a}), \quad C = D_{2,2}f(\mathbf{a}),$$

و

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

در این صورت:

- (آ) اگر $\Delta > 0$ و $A > 0$ ، f در \mathbf{a} مینیمم نسبی دارد.
- (ب) اگر $\Delta > 0$ و $A < 0$ ، f در \mathbf{a} ماکزیمم نسبی دارد.
- (ج) اگر $\Delta < 0$ ، f یک نقطه زینی در \mathbf{a} دارد.

برهان. در حالت ۲ بعدی می‌توان فرم درجه دوم (Δ) را چنین نوشت:

$$Q(x, y) = \frac{1}{4} \{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\}.$$

اگر $A \neq 0$ ، این فرم را بدین شکل نیز می‌توان درآورد:

$$Q(x, y) = \frac{1}{4A} \{ (Ax + By)^2 + \Delta y^2 \}.$$

اگر $\Delta > 0$ ، عبارت داخل دو ابرو مجموع دو مربع است، پس $Q(x, y)$ دارای همان علامت A است. بنابراین، گزاره‌های (آ) و (ب) را می‌توان بی‌درنگ از

قسمتهای (آ) و (ب) قضیه ۱۰.۱۳ نتیجه گرفت .

اگر $\Delta < 0$ ، فرم درجه دوم مساوی حاصل ضرب دو سازه خطی است. بنابراین، مجموعه نقطه‌هایی چون (x, y) که $Q(x, y) = 0$ عبارت است از دو خط در صفحه xy که در $(0, 0)$ متقاطعند. این خطها صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند؛ $Q(x, y)$ در دو ناحیه مثبت و در دو ناحیه دیگر منفی است. بنابراین، f یک نقطه زینی در a دارد.

بصره. اگر $\Delta = 0$ ، f در a ممکن است ماکزیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، یا a یک نقطه زینی f باشد.

۷.۱۳ مسأله‌های اکسترمم با شرطهای جنبی

مسأله اکسترمم از نوع زیر را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که $f(x, y, z)$ درجه حرارت را در نقطه (x, y, z) در فضا نمایش دهد. می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم درجه حرارت را روی یک رویه معین پیدا کنیم. هرگاه معادله رویه به شکل صریح $z = h(x, y)$ داده شده باشد، آنگاه در عبارت $f(x, y, z)$ می‌توان z را با $h(x, y)$ عوض کرد و درجه حرارت روی رویه را فقط به‌عنوان تابعی از x و y ، یعنی به صورت $F(x, y) = f[x, y, h(x, y)]$ بدست آورد. در این صورت، مسأله به یافتن مقادیرهای اکسترمم F منجر می‌شود. اما، در عمل، بعضی مشکلات بوجود می‌آیند. معادله رویه ممکن است به شکل ضمنی $g(x, y, z) = 0$ داده شده باشد، و ممکن است عملاً حل صریح این معادله برای z بر حسب x و y ، یا حتی برای x یا y بر حسب بقیه متغیرها، ناممکن باشد. اگر منظور یافتن مقادیرهای اکسترمم درجه حرارت بر یک خم مفروض در فضا باشد، مسأله ممکن است پیچیده‌تر شود. یک چنین خم عبارت از اشتراک دو رویه، مثلاً $g_1(x, y, z) = 0$ و $g_2(x, y, z) = 0$ است. هرگاه بتوان این دو معادله را همزمان، مثلاً برای x و y بر حسب z ، حل کرد، آنگاه می‌توان این عبارتها را در f گذارد و تابعی جدید فقط از z بدست آورد، و سپس اکسترممهای آن را جستجو کرد. اما، در حالت کلی، این عمل امکان‌پذیر نیست و باید روش عملیتری برای آن یافت. روشی زیبا و مفید برای حل این چنین مسائل وجود دارد که به‌وسیله لاگرانژ ابداع شده است.

روش لاگرانژ شرطی لازم برای وجود اکسترمم بدست می‌دهد، و می‌توان آن را چنین توصیف کرد. فرض کنیم $f(x_1, \dots, x_n)$ عبارتی باشد که می‌خواهیم مقادیرهای اکسترمم آن را بدست آوریم با فرض آن که متغیرها مقید به تعدادی شرط جنبی مثلاً

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

باشد. برای این کار ترکیب خطی

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

را، که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ عدد پایا هستند، تشکیل می‌دهیم. سپس از φ بر حسب هر مختص مشتق گرفته، دستگاه $n + m$ معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D_r \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

لاگرانژ دریافت که هرگاه نقطه (x_1, \dots, x_n) یک جواب مسأله اکسترم باشد، آنگاه این جواب در این دستگاه $n + m$ معادله نیز صدق می‌کند. در عمل، سعی می‌کنیم که این دستگاه را برای $n + m$ «مجهول» $\lambda_1, \dots, \lambda_m, x_1, \dots, x_n$ حل کنیم. سپس باید نقطه‌هائی مانند (x_1, \dots, x_n) را که بدین طریق بدست می‌آیند آزمایش کنیم تا ببینیم که در آنها f ماکزیمم است، یا مینیمم، یا هیچ‌یک. عددهای $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ که برای کمک به حل دستگاه برای x_1, \dots, x_n وارد شده‌اند، به نام تکثیرکنهای لاگرانژ معروفند. به ازای هر شرط جنبی یک تکثیرکن معرفی می‌شود.

در این مسائل برای تشخیص بین ماکزیممها و مینیممها یک محک پیچیده تحلیلی وجود دارد. (مثلاً، ر. ک. کتاب مرجع ۰۳.۱۳). اما این محک در عمل زیاد مفید نیست، و در هر مسأله بخصوص، برای تشخیص این تمایز، معمولاً توسل به روشهای دیگر (مثلاً، ملاحظات فیزیکی یا هندسی) آسانتر است.

قضیه زیرین معتبر بودن روش لاگرانژ را تأیید می‌کند:

قضیه ۱۲.۱۳ فرض کنیم f تابعی باشد حقیقی قسمی که $f \in C^1$ بر مجموعه‌ی باز S در R^n باشد. همچنین فرض کنیم که g_1, \dots, g_m تابع حقیقی باشند قسمی که $g = (g_1, \dots, g_m) \in C^1$ بر S باشد و $m < n$. بعلاوه، X_0 آن زیرمجموعه‌ی S باشد که g بر آن صفر شود، یعنی،

$$X_0 = \{x \mid x \in S, g(x) = 0\}.$$

و فرض می‌کنیم که $x_0 \in X_0$ و یک گوی n بعدی مانند $B(x_0)$ وجود داشته باشد قسمی که به ازای هر x در $X_0 \cap B(x_0)$ ، $f(x) \leq f(x_0)$ ، یا به ازای هر x در $X_0 \cap B(x_0)$ ، $f(x) \geq f(x_0)$. و نیز دترمینان m سطری

$$\det[D_j g_i(\mathbf{x}_0)] \neq 0.$$

در این صورت، m عدد حقیقی $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ وجود دارند قسمی که به ازای آنها n معادله زیر برقرارند:

$$(۶) \quad D_r f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

تیسر. n معادله (۶) هم ارز معادله برداری زیرند:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\mathbf{x}_0) = 0.$$

برهان. دستگاه m معادله خطی بر حسب m مجهول $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ زیرین را در نظر می گیریم:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k D_r g_k(\mathbf{x}_0) = -D_r f(\mathbf{x}_0) \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

این دستگاه دارای جوابی منحصر بفرد است زیرا، بنا بر فرض، در مینان دستگاه صفر نیست. بنابراین، m معادله اول (۶) برقرارند. حال باید تحقیق کنیم که برای این $\lambda_1, \dots, \lambda_m, n - m$ معادله باقیمانده در (۶) نیز برقرار هستند.

برای تحقیق این مطلب، قضیه تابع ضمنی را بکار می بریم. چون $m < n$ ، هر نقطه \mathbf{x} در S را می توان مثلاً به شکل $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'; \mathbf{t})$ نوشت، که در آن $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-m}$. تا پایان برهان به جای (x_1, \dots, x_m) می نویسیم \mathbf{x}' و به جای (x_{m+1}, \dots, x_n) می نویسیم \mathbf{t} ، پس $t_k = x_{m+k}$. حال بر حسب تابع برداری $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ می توان نوشت:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0)$$
 اگر

چون $\mathbf{g} \in C'$ بر S است و $\det[D_j g_i(\mathbf{x}_0'; \mathbf{t}_0)] \neq 0$ ، همه شرطهای قضیه تابع ضمنی برقرارند. بنابراین، یک همسایگی $n - m$ بعدی نقطه \mathbf{t}_0 مانند T_0 و یک تابع برداری منحصر بفرد مانند $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)$ تعریف شده بر T_0 که مقادارهایش در \mathbb{R}^m اند وجود دارند قسمی که $\mathbf{h} \in C'$ بر T_0 است، $\mathbf{h}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0'$ ، و به ازای هر \mathbf{t} در T_0 ، $\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}] = 0$. پس می توان گفت که دستگاه m معادله

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

را می شود برای x_1, \dots, x_m بر حسب x_{m+1}, \dots, x_n حل کرد، و جوابهایی به شکل $x_r = h_r(x_{m+1}, \dots, x_n)$ ، $r = 1, 2, \dots, m$ بدست آورد. حال این عبارتها برای x_1, \dots, x_m را در عبارت $f(x_1, \dots, x_n)$ و نیز در هر عبارت

می‌گذاریم. یعنی، تابع جدید F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) = f[h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, h_m(x_{m+1}, \dots, x_n); x_{m+1}, \dots, x_n];$$

و m تابع جدید G_1, \dots, G_m را به صورت

$$G_p(x_{m+1}, \dots, x_n) = g_p[h_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, h_m(x_{m+1}, \dots, x_n); x_{m+1}, \dots, x_n]$$

تعریف می‌کنیم. این تابعها را می‌توان مختصرتر به صورت $F(\mathbf{t}) = f[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ و $G_p(\mathbf{t}) = g_p[\mathbf{H}(\mathbf{t})]$ نوشت، که در آنها $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = (\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t})$. در این جا \mathbf{t} مقید به این است که در مجموعه T_0 قرار داشته باشد.

بنابر قضیه تابع ضمنی، هر G_p بر T_0 متحد صفر است. بنابراین، هر $D_r G_p$ نیز بر T_0 متحد صفر خواهد بود، و بخصوص، $D_r G_p(\mathbf{t}_0) = 0$. اما بنابر قاعده زنجیره‌ای (معادله ۲۰.۱۲)، این مشتقها را می‌توان به صورت زیرین محاسبه کرد:

$$D_r G_p(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^n D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \quad (r = 1, 2, \dots, n - m).$$

اما اگر $1 \leq k \leq m$ ، $H_k(\mathbf{t}) = h_k(\mathbf{t})$ ، و اگر $m+1 \leq k \leq n$ ، $H_k(\mathbf{t}) = x_k$ ، بنابراین، وقتی که $1 \leq k \leq n$ ، به ازای هر \mathbf{t} ، اگر $m+r \neq k$ ، $D_r H_k(\mathbf{t}) = 0$ و $D_r H_{m+r}(\mathbf{t}) = 1$. از این روی معادله‌های بالا بدین صورت درمی‌آیند:

$$(7) \quad \sum_{k=1}^m D_k g_p(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0$$

$$\begin{cases} p = 1, 2, \dots, m, \\ r = 1, 2, \dots, n - m. \end{cases}$$

بنابر پیوستگی \mathbf{h} ، یک گوی $n - m$ بعدی مانند $B(\mathbf{t}_0) \subseteq T_0$ وجود دارد قسمی که اگر $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ ، $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in B(\mathbf{x}_0)$ ، که در آن همان گوی n بعدی است که در صورت قضیه گفتیم. از این روی، $\mathbf{t} \in B(\mathbf{t}_0)$ ایجاب می‌کند که $(\mathbf{h}(\mathbf{t}); \mathbf{t}) \in X_0 \cap B(\mathbf{x}_0)$ ، و در نتیجه، بنابر فرض، به ازای هر \mathbf{t} در $B(\mathbf{t}_0)$ ، $F(\mathbf{t}) \leq F(\mathbf{t}_0)$ یا به ازای هر \mathbf{t} در $B(\mathbf{t}_0)$ ، $F(\mathbf{t}) \geq F(\mathbf{t}_0)$. یعنی، F در نقطه درونی \mathbf{t}_0 یا ماکزیمم موضعی دارد یا مینیمم موضعی. بنابراین، هر $D_r F(\mathbf{t}_0)$ باید

صفر باشد. اگر برای محاسبه این مشتقها قاعده زنجیره‌ای را بکار ببریم، خواهیم داشت

$$D_r F(\mathbf{t}_0) = \sum_{k=1}^n D_k f(\mathbf{x}_0) D_r H_k(\mathbf{t}_0) \quad (r = 1, \dots, n-m),$$

و در نتیجه می‌توان نوشت

$$(\lambda) \quad \sum_{k=1}^m D_k f(\mathbf{x}_0) D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} f(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (r = 1, \dots, n-m).$$

حال اگر رابطه (۷) را در λ_p ضرب کنیم، بر p جمع‌بندی کنیم، و نتیجه را به (۸) بیفزائیم، به‌ازای $r = 1, \dots, n-m$ خواهیم داشت

$$\sum_{k=1}^m \left[D_k f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^m \lambda_p D_k g_p(\mathbf{x}_0) \right] D_r h_k(\mathbf{t}_0) + D_{m+r} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^m \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0.$$

با توجه به تعریف $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ، ملاحظه می‌شود که در قسمتی از جمع فوق که بر k جمع‌بندی شده عبارت داخل قلاب مساوی صفر است. در نتیجه از جمع بالا فقط قسمت زیرین باقی می‌ماند:

$$D_{m+r} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{p=1}^m \lambda_p D_{m+r} g_p(\mathbf{x}_0) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n-m),$$

و اینها درست همان معادله‌های لازم برای اتمام برهان می‌باشند.

تبره. معمولاً وقتی برای مسأله خاصی مربوط به اکسترمم روش لاگرانژ را بکار ببریم، با آسانی می‌توان دستگاه معادله‌های (۶) را مشخص کرد. ولی، در حالت کلی، حل این دستگاه عملاً آسان نیست. غالباً به کمک روشهای بخصوصی می‌توان، بی آن که ابتدا نقاطی را که این اکسترممها در آنها وقوع می‌یابند یافت، مقادیرهای اکسترمم f را مستقیماً از (۶) بدست آورد. مثال زیرین بعضی از این روشها را تصور می‌سازد:

مثال. یک رویهٔ درجهٔ دو که مرکزش در مبدأ باشد دارای معادله

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1$$

است. دزازه‌های نیم محوره‌های آن را بیابید.

حل. به جای (x, y, z) می‌نویسیم (x_1, x_2, x_3) ، و فرم درجهٔ دوم

$$(۹) \quad q(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i x_j$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ و $a_{ij} = a_{ji}$ بقسمی اختیار شده‌اند که معادلهٔ رویه به صورت $q(\mathbf{x}) = 1$ درآید. (از این روی، این فرم درجه دوم تقارنی و معین مثبت است.) مسأله‌ای که مطرح است هم‌ارز این مسأله است که مقدارهای اکسترمم $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ با شرط جنبی $g(\mathbf{x}) = 0$ ، که در آن $g(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 1$ ، تعیین شوند. روش لاگرانژ را بکار می‌بریم، و یک تکثیرکن معرفی می‌کنیم. چون $\nabla g = \nabla q$ معادلهٔ برداری

$$(۱۰) \quad \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \nabla q(\mathbf{x}) = 0$$

را در نظر می‌گیریم. در این حالت خاص، f و g هر دو تابعهایی همگن از درجهٔ ۲ هستند، و می‌توان قضیهٔ اولر (ر.ک. تمرین ۱۸.۱۲) را در (۱۰) بکار برده نتیجه گرفت که

$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{x} \cdot \nabla q(\mathbf{x}) = 2f(\mathbf{x}) + 2\lambda q(\mathbf{x}) = 0.$$

چون بر رویه $q(\mathbf{x}) = 1$ ، نتیجه می‌گیریم که $\lambda = -f(\mathbf{x})$ و (۱۰) به صورت

$$(۱۱) \quad t \nabla f(\mathbf{x}) - \nabla q(\mathbf{x}) = 0$$

درمی‌آید که در آن $t = 1/f(\mathbf{x})$. (در این مسأله $f(\mathbf{x})$ نمی‌تواند مساوی ۰ باشد.) در نتیجه، از معادلهٔ برداری (۱۱) سه معادلهٔ زیرین برای x_1, x_2, x_3 بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} (a_{11} - t)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - t)x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - t)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

چون $\mathbf{x} = 0$ جوابی برای مسألهٔ ما بیار نمی‌آورد، پس دترمینان این دستگاه باید صفر شود. یعنی، باید داشته باشیم

$$(۱۲) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t \end{vmatrix} = 0.$$

معادلهٔ (۱۲) را معادلهٔ مشخص‌کنندهٔ فرم درجهٔ دوم (۹) می‌نامند. در این حالت، ماهیت هندسی مسأله تأیید می‌کند که سه ریشهٔ t_1, t_2, t_3 و این معادلهٔ درجهٔ سوم باید حقیقی و مثبت باشند. [چون $q(\mathbf{x})$ تقارنی و معین مثبت است، نظریهٔ کلی فرمهای

درجه دوم نیز حقیقی و مثبت بودن همه ریشه‌های (۱۲) را تضمین خواهد کرد. (ر. ک. کتاب مرجع ۱۰۱۳، قضیه ۰۵۰۹) نیم محوره‌های رویه درجه دو عبارتند از $z_1^{-1/2}$ ، $z_2^{-1/2}$ و $z_3^{-1/2}$.

تمرین

ژاکوبیها

۱۰۱۳ فرض کنید تابع مختلط f به ازای هر عدد مختلط $z \neq 0$ با معادله $f(z) = 1/z$ تعریف شده باشد. نشان دهید که $J_f(z) = -|z|^{-4}$ ثابت کنید که f یک به یک است و f^{-1} را به طور صریح محاسبه کنید.

۲۰۱۳ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ (به ازای هر نقطه مانند (x_1, x_2, x_3) در \mathbf{R}^3 که $x_1 + x_2 + x_3 \neq -1$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_k}{1 + x_1 + x_2 + x_3} \quad (k = 1, 2, 3).$$

نشان دهید که $J_{\mathbf{f}}(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1 + x_2 + x_3)^{-4}$ نشان دهید که \mathbf{f} یک به یک است و \mathbf{f}^{-1} را به طور صریح محاسبه کنید.

۳۰۱۳ فرض کنید تابع برداری $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ در \mathbf{R}^n تعریف شده باشد، $\mathbf{f} \in C'$ بر \mathbf{R}^n باشد، و $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ دترمینان ژاکوبی آن را نشان دهد. فرض کنید n تابع حقیقی g_1, \dots, g_n بر \mathbf{R}^1 تعریف شده باشند و دارای مشتقهای پیوسته g'_1, \dots, g'_n باشند. همچنین به ازای n ، $h_k = f_k[g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)]$ ، $k = 1, 2, \dots, n$ قرار دهید $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ نشان دهید که

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}[g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)] g'_1(x_1) \cdots g'_n(x_n).$$

۴۰۱۳ (آ) اگر $x(r, \theta) = r \cos \theta$ و $y(r, \theta) = r \sin \theta$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r.$$

(ب) اگر $x(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi$ ، $y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi$ و $z = r \cos \varphi$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = -r^2 \sin \varphi.$$

۵.۱۳ (آ) شرطهایی برای f و g بیان کنید که با آنها معادله‌های $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ را بتوان برای u و v در یکی از همسایگیهای (x_0, y_0) حل کرد. اگر جوابها $u = F(x, y)$ و $v = G(x, y)$ باشند و $J = \partial(f, g) / \partial(u, v)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial v}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial u}$$

(ب) اگر $f(u, v) = u^2 - v^2$ و $g(u, v) = 2uv$ و مشتقهای جزئی F و G را در نقطه $(x_0, y_0) = (1, 1)$ محاسبه کنید.

۶.۱۳ فرض کنید f و g مانند آنچه در قضیه ۶.۱۳ گفته شد به هم مربوط باشند. حالت $n = 3$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که

$$J_f(\mathbf{x}) D_i g_i(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \delta_{i,1} & D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_1 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,2} & D_2 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_3(\mathbf{x}) \\ \delta_{i,3} & D_3 f_2(\mathbf{x}) & D_3 f_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, 3),$$

که در آن $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ، $\delta_{i,j}$ بر حسب این که $i \neq j$ یا $i = j$ ، مساوی ۰ یا ۱ است. با استفاده از این، دستور

$$D_i g_i = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(x_2, x_3)} \bigg/ \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$$

را نتیجه بگیرید. برای هشت مشتق دیگر عبارتهای مشابهی وجود دارند.

۷.۱۳ فرض کنید تابع مختلط $f = u + iv$ در شرطهای زیرین صدق کند: $u \in C'$ و $v \in C'$ برگردۀ باز $\{z \mid |z| < 1\}$ باشد؛ f برگردۀ بسته $\bar{A} = \{z \mid |z| \leq 1\}$ پیوسته باشد؛ هرگاه $x^2 + y^2 = 1$ ، $u(x, y) = x$ و $v(x, y) = y$ ؛ اگر $z \in A$ ، $J_f(z) > 0$. فرض کنید که $B = f(A)$ نقش A با f را نشان دهد و ثابت کنید که:

(آ) هرگاه X یک زیرمجموعهٔ باز A باشد، آنگاه $f(X)$ زیرمجموعهٔ باز B است.

(ب) B یک گردۀ باز با شعاع ۱ است.

(ج) به ازای هر نقطه مانند $u_0 + iv_0$ در B ، فقط تعدادی متناهی نقطه مانند z

در A هست که $f(z) = u_0 + iv_0$.

مسئله‌های اکسترمم

۸.۱۳ مقدارهای اکسترمم تابعهای تعریف شده با معادله‌های زیرین را (در صورت وجود) پیدا و رده بندی کنید:

$$(آ) f(x, y) = y^2 + x^2y + x^4$$

$$(ب) f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y + xy$$

$$(ج) f(x, y) = (x - 1)^4 + (x - y)^4$$

$$(د) f(x, y) = y^2 - x^3$$

۹.۱۳ کوتاهترین فاصله از نقطه $(0, b)$ بر محور y تاسه می $0 = 4y - x^2$ را بیابید. این مسئله را یک بار با استفاده از روش لاگرانژ و بار دیگر بی استفاده از آن حل کنید.

۱۰.۱۳ مسئله‌های هندسی زیرین را با بکار بردن روش لاگرانژ حل کنید:

(آ) کوتاهترین فاصله از نقطه (a_1, a_2, a_3) در R^3 تا صفحه‌ای که معادله‌اش $0 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0$ است پیدا کنید.

(ب) بر فصل مشترک دو صفحه

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$$

و

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$$

نزدیکترین نقطه به مبدأ را پیدا کنید.

۱۱.۱۳ اگر $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ ، مقدار ماکزیمم $|\sum_{k=1}^n a_k x_k|$ را، با استفاده از

(آ) نامساوی کوشی - شوارتز،

(ب) روش لاگرانژ،

بدست آورید.

۱۲.۱۳ ماکزیمم $(x_1 x_2 \dots x_n)^2$ را با شرط

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

بیابید. با استفاده از این نتیجه نامساوی زیرین را، که به‌ازای عددهای حقیقی و مثبت a_1, \dots, a_n معتبر است، ثابت کنید:

$$(a_1 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

۱۳.۱۳ اگر $f(\mathbf{x}) = x_1^k + \dots + x_n^k$ و $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ نشان دهید که یکی از مقادیرهای اکسترم موضعی f که در شرط $x_1 + \dots + x_n = a$ صدق می‌کند مساوی $a^k n^{1-k}$ است.

۱۴.۱۳ نشان دهید که می‌توان همهٔ نقطه‌های (x_1, x_2, x_3, x_4) را که در آنها $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$ و $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$ با دو شرط جنبی دارای اکسترم موضعی باشد، در میان نقطه‌های

$$(0, 0, \pm\sqrt{3}, \pm 1), (0, \pm 1, +2, 0), (\pm 1, 0, 0, \pm\sqrt{3}), (\pm 2, \pm 3, 0, 0)$$

یافت. کدام از این نقطه‌ها ماکزیم موضعی و کدام مینیم موضعی را بدست می‌دهند؟ برای آنچه نتیجه می‌گیرید دلیل بیاورید.

۱۵.۱۳ نشان دهید که مقادیرهای اکسترم $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ با دو شرط جنبی

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 1 \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

و

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \quad (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0),$$

عبارتند از t_1^{-1} و t_2^{-1} که در آنها t_1 و t_2 ریشه‌های معادله

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

می‌باشند. نشان دهید که معادلهٔ بالا یک معادلهٔ درجهٔ دوم بر حسب t است، و با بیانی هندسی توضیح دهید که چرا ریشه‌های t_1 و t_2 حقیقی و مثبت هستند.

۱۶.۱۳ فرض کنید که $\Delta = \det [x_{ij}]$ و $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. قضیهٔ مشهوری از آدامار بیان می‌کند که هرگاه d_1, \dots, d_n پایای مثبت باشند بقسمی که

$$|\Delta| \leq d_1 \dots d_n, \quad \|\mathbf{X}_i\|^2 = d_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

این قضیه را، با در نظر گرفتن Δ به عنوان تابعی از n^2 متغیر با n قید، ثابت کنید. با استفاده از روش لاگرانژ نشان دهید که وقتی با این قیدها Δ دارای اکسترمم باشد، باید داشته باشیم

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} d_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n^2 \end{vmatrix}.$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

- 13.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.
- 13.2 Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. 1. K. A. Hirsch, translator. Chelsea, New York, 1959.
- 13.3 Hancock, H., *Theory of Maxima and Minima*. Ginn, Boston, 1917.

انتگرالهای ریمان چندگانه

۱۰۱۴ مقدمه

انتگرال ریمان $\int_a^b f(x) dx$ را می‌توان تعمیم داد، بدین ترتیب که به جای بازه $[a, b]$ یک ناحیه n بعدی را که در آن f تعریف شده باشد و کراندار نیز باشد قرار داد. برای این منظور ساده‌ترین ناحیه‌ها در \mathbb{R}^n بازه‌های n بعدی هستند. مثلاً، در \mathbb{R}^2 مستطیل I را که به زیرمستطیلهای I_k افراز شده باشد اختیار می‌کنیم و مجموعه‌های ریمان به شکل $\sum f(x_k, y_k) A(I_k)$ را، که در آن $(x_k, y_k) \in I_k$ و $A(I_k)$ نمایانندهٔ مساحت I_k است، در نظر می‌گیریم. از این مجموعه‌ها به مفهوم انتگرال مضاعف می‌رسیم. به همین نحو، در \mathbb{R}^3 با استفاده از مکعب مستطیلهائی که به مکعب مستطیلهای کوچکتر I_k تقسیم شده باشند، و در نظر گرفتن مجموعه‌هایی به شکل $\sum f(x_k, y_k, z_k) V(I_k)$ ، که در آن $(x_k, y_k, z_k) \in I_k$ و $V(I_k)$ حجم I_k است، به مفهوم انتگرال مثلث خواهیم رسید. اگر مفهومهای سطح و حجم را به طور مناسبی به \mathbb{R}^n تعمیم دهیم، بآسانی می‌توان دربارهٔ انتگرالهای چندگانه در \mathbb{R}^n بحث کرد. این «حجم تعمیم یافته» اندازه یا محتوا نامیده می‌شود و در بخش آینده تعریف خواهد شد.

۲۰۱۴ اندازهٔ یک بازهٔ کراندار در \mathbb{R}^n

فرض کنیم A_1, \dots, A_n ، بازهٔ کلی در \mathbb{R}^1 را نشان دهند؛ یعنی، هر A_k در \mathbb{R}^1 ممکن است کراندار، بی‌کران، باز، بسته، یا نیمباز باشد. مجموعهٔ A در \mathbb{R}^n به شکل

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \\ = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in A_k, k = 1, 2, \dots, n \text{ به‌ازای}\}$$

را یک بازهٔ n بعدی کلی می‌نامیم. حالت تبه شده را هم، که در آن یک یا چند تا از بازه‌های A_k فقط یک نقطه داشته باشند، می‌پذیریم. هرگاه هر A_k در \mathbf{R}^1 باز، بسته، یا کراندار باشد، آنگاه A نیز در \mathbf{R}^n همان خاصیت را دارد.

اگر هر A_k کراندار باشد، اندازهٔ n بعدی (یا اندازهٔ $A(n)$ را به $\mu(A)$ نشان می‌دهیم، و با معادلهٔ زیرین تعریف می‌کنیم:

$$\mu(A) = \mu(A_1) \cdot \dots \cdot \mu(A_n),$$

که در آن $\mu(A_k)$ اندازهٔ یک بعدی (درازای) A_k است. وقتی که $n = 2$ ، آن را سطح A ، و هنگامی که $n = 3$ ، آن را حجم A می‌نامیم. توجه کنید که هرگاه به‌ازای یک مقدار k ، $\mu(A_k) = 0$ ، آنگاه $\mu(A) = 0$.

حال به بحثی در بارهٔ انتگرالگیری ریمان در \mathbf{R}^n باز می‌گردیم. تنها فرق اساسی بین حالت $n = 1$ و حالت $n > 1$ این است که کمیت $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ که برای اندازه‌گیری درازای زیربازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ بکار رفته است، با $\mu(I_k)$ ، یعنی اندازهٔ یک زیر بازهٔ n بعدی، عوض می‌شود. چون عمل درست مانند حالت یک-بعدی است، در بحثی که در زیر می‌آید بسیاری از جزئیات را حذف می‌کنیم.

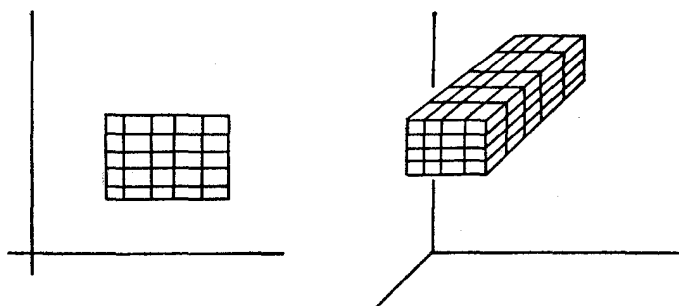
۳.۱۴ انتگرال ریمان یک تابع کراندار که باریک بازهٔ فشرده در \mathbf{R}^n تعریف شده باشد

تعریف ۱.۱۴ فرض کنیم $A = A_1 \times \dots \times A_n$ یک بازهٔ فشرده در \mathbf{R}^n باشد. اگر P_k یک افراز A_k باشد، حاصل ضرب دکارتی

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

دا یک افراز A می‌نامیم. هرگاه P_k بازهٔ A_k را به m_k زیربازهٔ یک بعدی تقسیم کند، آنگاه P تجزیه‌ای از A به صورت اجتماعی از $m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ بازهٔ n بعدی (که زیربازه‌های P نامیده می‌شوند) را مشخص خواهد کرد. یک افراز A مانند P' را ظریفتر از P نامیم در صورتی که $P \subseteq P'$. مجموعهٔ همهٔ افرازهای A را به $\mathcal{P}(A)$ نشان می‌دهیم.

شکل ۱.۱۴ افرازهای بازه‌ها در \mathbf{R}^2 و در \mathbf{R}^3 را مصور می‌سازد.



شکل ۱.۱۴

تعریف ۲.۱۴ فرض کنیم f بر بازه فشرده I در \mathbf{R}^n تعریف شده و کراندار باشد. اگر P یک افراز I به m زیر بازه I_1, \dots, I_m باشد و $t_k \in I_k$ هر مجموع به شکل

$$S(P, f) = \sum_{k=1}^m f(t_k) \mu(I_k)$$

را یک مجموع ریمان می‌نامیم. گوئیم f بر I انتگرال ریمان دارد و می‌نویسیم $f \in R$ بر I است، در صورتی که عددی حقیقی مانند A با خاصیت زیرین وجود داشته باشد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک افراز I مانند P_ε وجود داشته باشد قسمی که به‌ازای هر مجموع ریمان $S(P, f)$ که در آن P از P_ε ظریفتر باشد،

$$|S(P, f) - A| < \varepsilon.$$

اگر چنین A ی وجود داشته باشد، منحصر بفرست است و با

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \quad \text{یا} \quad \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \int_I f d\mathbf{x}$$

نشان داده می‌شود.

تصوره. به‌ازای $n > 1$ ، انتگرال یک انتگرال چندگانه یا یک انتگرال n گونا نامیده می‌شود. وقتی که $n = 2$ و $n = 3$ ، اصطلاحهای انتگرال مضاعف و مثلث بکار می‌روند. شبیه به آنچه در \mathbf{R}^1 دیدیم، نماد \mathbf{x} در $\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ یک «متغیر فریبان» است و می‌توان آن را با هر نماد مناسب دیگری عوض کرد. به جای

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1 \dots dx_n)$$

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad \text{نماد}$$

نیز بکار می‌رود. گاهی انتگرالهای مضاعف را با دو علامت انتگرال، و انتگرالهای مثلث را با سه علامت انتگرال می‌نویسیم، یعنی می‌نویسیم

$$\int_I \int f(x, y) dx dy, \int_I \int \int f(x, y, z) dx dy dz.$$

تعریف ۳۰۱۴ فرض کنیم f بر بازه فشرده I در \mathbf{R}^n تعریف شده و کراندار باشد. اگر P یک افزای I به m زیربازه I_1, \dots, I_m باشد، قرار می‌دهیم

$$m_k(f) = \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\}, \quad M_k(f) = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\}.$$

عددهای

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^m m_k(f) \mu(I_k) \quad \text{و} \quad U(P, f) = \sum_{k=1}^m M_k(f) \mu(I_k)$$

را مجموعهای ریمان بالائی و پائینی می‌نامیم. انتگرالهای ریمان بالائی و پائینی f (در I بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$\int_I f dx = \inf\{U(P, f) \mid P \in \mathcal{P}(I)\},$$

$$\int_I f dx = \sup\{L(P, f) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}.$$

گوئیم تابع f بر I در شرط ریمان صدق می‌کند در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک افزای I مانند P_ε وجود داشته باشد قسمی که ظرفتر بودن P از P_ε رابطه $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ را ایجاد کند.

تبره. مانند حالت یک بعدی، انتگرالهای بالائی و پائینی دارای خاصیت‌های زیرین می‌باشند:

$$\int_I (f + g) dx \leq \int_I f dx + \int_I g dx, \quad (\bar{A})$$

$$\int_I (f + g) dx \geq \int_I f dx + \int_I g dx.$$

(ب) هرگاه بازه I به اجتماع دو بازه I_1 و I_2 که نقطه مشترک درونی نداشته باشند تجزیه شود، آنگاه

$$\int_I f dx = \int_{I_1} f dx + \int_{I_2} f dx$$

$$\int_I f \, d\mathbf{x} = \int_{I_1} f \, d\mathbf{x} + \int_{I_2} f \, d\mathbf{x}.$$

برهان قضیهٔ زیرین اساساً همان برهان قضیهٔ ۱۹.۷ است و حذف می‌شود.

قضیهٔ ۴.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در \mathbb{R}^n تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت گزاره‌های زیرین هم‌ارزند:

(یکم) $f \in R$ بر I است.

(دوم) f بر I در شرط ریمان صدق می‌کند.

(سوم) $\int_I f \, d\mathbf{x} = \bar{\int}_I f \, d\mathbf{x}$.

۴.۱۴ مجموعه‌های دارای اندازهٔ صفر و محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان چندگانه

یک زیرمجموعهٔ \mathbb{R}^n مانند T را دارای اندازهٔ n صفر نامیم اگر که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، T را بتوان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی پوشانید، که مجموع اندازه‌های n آنها از ϵ کمتر باشد.

مانند حالت یک بعدی، اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های دارای اندازهٔ n خود دارای اندازهٔ n است. اگر $m < n$ ، هر زیرمجموعهٔ \mathbb{R}^m که به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ \mathbb{R}^n تلقی شود، دارای اندازهٔ n صفر خواهد بود.

خاصیتی را گوئیم برمجموعهٔ S در \mathbb{R}^n تقریباً همه جا برقرار است که بر S جز برای یک زیرمجموعه دارای اندازهٔ n برقرار باشد.

محک لبگ برای وجود انتگرال ریمان در \mathbb{R}^1 را می‌توان مستقیماً به انتگرالهای چندگانه وسعت داد. برهان آن مشابه برهان قضیهٔ ۴۸.۷ است.

قضیهٔ ۵.۱۴ فرض کنیم f بر بازهٔ فشردهٔ I در \mathbb{R}^n تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت، $f \in R$ بر I است وقتی، و فقط وقتی، که مجموعهٔ ناپویستگیهای f در I دارای اندازهٔ n صفر باشد.

۵.۱۴ ارزیابی یک انتگرال چندگانه به‌وسیلهٔ انتگرالگیری مکرر

خواننده در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته است که چگونه بعضی از انتگرالهای مضاعف و مثلث را با انتگرالگیری متوالی برحسب هرمتغیر ارزیابی کند. مثلاً، هر گاه تابع دو متغیرهٔ f بر مستطیل فشردهٔ Q در صفحهٔ (x, y) ، یعنی $Q = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ، پیوسته باشد، آنگاه به‌ازای هر r

ثابت در $[c, d]$ ، تابع F که با معادله $F(x) = f(x, y)$ تعریف شود بر $[a, b]$ پیوسته (و در نتیجه انتگرالپذیر) است. مقدار انتگرال $\int_a^b F(x) dx$ بستگی به y دارد و به وسیله آن تابع جدیدی مانند G تعریف می‌شود، یعنی

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

تابع G (بنا بر قضیه ۳۸۰۷) بر $[c, d]$ پیوسته است، و در نتیجه انتگرالپذیر خواهد بود. خواهیم دید که مقدار انتگرال $\int_c^d G(y) dy$ مساوی مقدار انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ است. یعنی، معادله زیر برقرار است:

$$(۱) \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

(این دستور بعداً ثابت می‌شود.) حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا این نتیجه برای وقتی که f بر Q صرفاً انتگرالپذیر است (و لزوماً پیوسته نیست) نیز برقرار هست یا خیر. واضح است که در این جا مشکلاتی وجود دارند. مثلاً، ممکن است انتگرال مضاعف وجود داشته باشد، ولی به‌ازای بعضی از مقدارهای y ، انتگرال داخلی $\int_a^b f(x, y) dx$ وجود نداشته باشد. در واقع، هرگاه f در هر نقطه پاره خط $a \leq x \leq b, y = y_0$ ناپیوسته باشد، آنگاه $\int_a^b f(x, y_0) dx$ وجود ندارد. اما، این پاره خط مجموعه‌ای است که اندازه دو بعدی آن صفر است، و در نتیجه در انتگرالپذیری f بر تمام مستطیل Q تأثیری ندارد. در حالتی به این صورت باید با استفاده از انتگرالهای بالائی و پائینی تعمیم مناسبی برای (۱) پیدا کنیم.

قضیه ۶۰۱۴ فرض کنیم f بر مستطیل فشرده

$$Q = [a, b] \times [c, d] \text{ در } \mathbb{R}^2$$

تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت:

(یکم)

$$\begin{aligned} \int_Q f d(x, y) &\leq \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &\leq \int_a^b \left[\int_c^d \bar{f}(x, y) dy \right] dx \leq \int_Q \bar{f} d(x, y). \end{aligned}$$

(دوم) گزاره (یکم) برقرار است وقتی که در سراسر آن به جای \bar{f} علامت \underline{f} را قرار

دهیم.

(سوم)

$$\int_Q f d(x, y) \leq \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$$\leq \int_c^d \left[\int_a^b \bar{f}(x, y) dx \right] dy \leq \int_Q \bar{f} d(x, y).$$

چهارم) گزاره (سوم) برقرار است وقتی که در سراسر آن به جای \bar{f}_a^b علامت \underline{f}_a^b را قرار دهیم.

پنجم) وقتی که $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ وجود داشته باشد، این رابطه ها برقرار هستند:

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d \bar{f}(x, y) dy \right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b \bar{f}(x, y) dx \right] dy.$$

برهان. برای اثبات (یکم)، F را با معادله زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b]$$

در این صورت $|F(x)| \leq M(d - c)$ که در آن

$$M = \sup\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in Q\},$$

و می‌توان انتگرال بالائی زیر را در نظر گرفت:

$$I = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

به همین نحو، تعریف می‌کنیم

$$I = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d \bar{f}(x, y) dy \right] dx.$$

فرض کنیم $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز $[a, b]$ و

$$P_{\gamma} = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$$

یک افراز $[c, d]$ باشد. در این صورت $P = P_{\alpha} \times P_{\gamma}$ یک افراز Q به mn زیرمسطیل Q_{ij} خواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$I_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy \right] dx,$$

$$I_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy \right] dx.$$

چون

$$\int_c^{\bar{d}} f(x, y) dy = \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy,$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_a^{\bar{b}} \left[\int_c^{\bar{d}} f(x, y) dy \right] dx &\leq \sum_{j=1}^m \int_a^{\bar{b}} \left[\int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy \right] dx \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{\bar{x}_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

یعنی، نامساوی زیرین برقرار است:

$$I \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n I_{ij}.$$

بهین نحو، نتیجه می‌شود که

$$I \geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n I_{ij}.$$

هر گاه بنویسیم

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{ij}\}$$

و

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) \mid (x, y) \in Q_{ij}\},$$

آنگاه از نامساویهای $(x, y) \in Q_{ij}, m_{ij} \leq f(x, y) \leq M_{ij}$ نتیجه می‌شود که

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{\bar{y}_j} f(x, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

از این رابطه، به نوبه خود، نتیجه می‌گیریم که

$$m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right] dx$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right] dx \leq M_{ij}\mu(Q_{ij}).$$

حال اگر i و j جمع‌بندی کنیم و از نامساویهای بالا استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$L(P, f) \leq I \leq \bar{I} \leq U(P, f).$$

چون این نامساویها به‌ازای همهٔ افزایش‌های Q مانند P برقرار هستند، پس باید

$$\int_0 f d(x, y) \leq I \leq \bar{I} \leq \int_0 f d(x, y).$$

یعنی گزارهٔ (یکم) برقرار است.

واضح است که اگر تابع F از ابتدا با دستور

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

تعریف می‌شد، برهان پیشین را می‌توانستیم برای آن بکار ببریم، و در نتیجه گزارهٔ (دوم) با دلیلی مشابه بدست می‌آید.

با تعویض نقش x و y می‌توان گزاره‌های (سوم) و (چهارم) را به نحو مشابهی ثابت کرد. بالاخره، گزارهٔ (پنجم) نتیجهٔ فوری گزاره‌های (یکم) تا (چهارم) است.

به‌عنوان نتیجه، می‌توان دستور

$$\int_0 f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

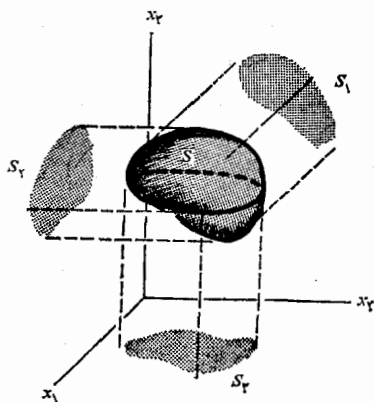
را، که پیشتر ذکر شده است، با فرض پیوسته بودن f بر Q بدست آورد. این مطلب غالباً قضیهٔ فوبینی نامیده می‌شود.

تبصره. از وجود انتگرالهای مکرر

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad \text{و} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

نمی‌توان وجود $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ را نتیجه گرفت. مثال ناقص در تمرین ۷۰۱۴ داده شده است.

پیش از آن که به بحث در مشابه قضیه ۶.۱۴ در \mathbb{R}^n پردازیم، ابتدا به معرفی نمادها و اصطلاحهای دیگری می‌پردازیم. اگر $k \leq n$ ، مجموعه X_k هائی در \mathbb{R}^n را که به‌ازای آنها $x_k = 0$ ابر صفحه مختصات می‌نامیم و با نماد Π_k نمایش می‌دهیم. اگر مجموعه S در \mathbb{R}^n داده شده باشد، S_k تصویر S بر Π_k عبارت است از نقش S با نگاهی که مقدارش در هر نقطه مانند (x_1, x_2, \dots, x_n) در S مساوی $(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$ باشد. با آسانی می‌توان نشان داد که چنین نگاهی بر S پیوسته است. از این نتیجه می‌شود که اگر S فشرده باشد، هر S_k فشرده است. همچنین، اگر S همبند باشد، هر S_k همبند است. در شکل ۲.۱۴ تصویرها در \mathbb{R}^3 مصور شده‌اند.



شکل ۲.۱۴

برای انتگرالهای n گونا قضایه‌ای کاملاً شبیه قضیه ۶.۱۴ وجود دارد. کافی است که توسیع این مطلب را به حالت $n = 3$ نشان دهیم. در این حالت، f بر بازه فشرده‌ای مانند $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ در \mathbb{R}^3 تعریف شده و کراندار است، و به‌جای گزاره (یکم) قضیه ۶.۱۴ رابطه‌های

$$(2) \quad \int_Q f d\mathbf{x} \leq \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{Q_1} f d(x_2, x_3) \right] dx_1 \\ \leq \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{Q_1} f d(x_2, x_3) \right] dx_1 \leq \int_Q f d\mathbf{x}$$

قرار می‌گیرند، که در آنها Q_1 تصویر Q بر صفحه مختصات Π_1 می‌باشد. وقتی که $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، شبیه به قسمت (پنجم) قضیه ۶.۱۴، دستور

$$(۳) \quad \int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{Q_1} f d(x_2, x_3) \right] dx_1 \\ = \int_{Q_1} \left[\int_{a_1}^{b_1} f dx_1 \right] d(x_2, x_3)$$

برقرار است. همان طور که در قضیه ۶.۱۴ آمده است، از تعویض مناسب انتگرالهای بالائی با پائینی، گزاره‌های مسلم مشابهی بدست می‌آیند، و همچنین دستورهای مشابهی برای تصویرهای Q_2 و Q_3 نیز وجود خواهند داشت.

خواننده با آسانی می‌تواند نتیجه‌های مشابه را برای انتگرالهای n گونا بیان کند (این نتیجه‌ها را می‌توان با روشی که در قضیه ۶.۱۴ بکار رفته است ثابت کرد). حالت خاصی که در آن انتگرال n گونای $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود دارد دارای اهمیت بخصوصی است و می‌توان آن را بدین صورت بیان کرد:

قضیه ۷.۱۴ فرض کنیم f بر بازه فشرده‌ای مانند

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

در \mathbf{R}^n تعریف شده و کراندار باشد. همچنین $\int_Q f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\int_Q f d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{Q_1} f d(x_2, \dots, x_n) \right] dx_1 \\ = \int_{Q_1} \left[\int_{a_1}^{b_1} f dx_1 \right] d(x_2, \dots, x_n).$$

دستورهای مشابهی که از تعویض انتگرالهای بالائی با انتگرالهای پائینی و Q_1 با Q_k ، یعنی تصویر Q بر Π_k ، بدست می‌آیند نیز برقرار هستند.

۶.۱۴ مجموعه‌های در \mathbf{R}^n که اندازه ژردان دارند

تا کنون انتگرال چندگانه $\int_I f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ فقط برای بازه‌های I تعریف شده بود. البته، این قید کاربردهای انتگرالگیری را بسیار محدود می‌کند. با آسانی می‌توان تعریف را بقسمی وسعت داد که مجموعه‌های کلیتری را، که مجموعه‌های دارای اندازه ژردان نام دارند، در بر گیرد. در این بخش این مجموعه‌ها مورد بحث واقع

می‌شوند. در تعریف آنها از کرانه یک مجموعه مانند S در \mathbb{R}^n استفاده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که نقطه x در \mathbb{R}^n را یک نقطه کرانه‌ای S نامند در صورتی که هر گوی n بعدی مانند $B(x)$ حاوی نقطه‌ای که در S است و همچنین نقطه‌ای که در S نیست باشد. مجموعه همه نقطه‌های کرانه‌ای S را کرانه S نامیم و با ∂S نشان می‌دهیم. (ر. ک. بخش ۱۶.۳).

تعریف ۸.۱۴ فرض کنیم S یک زیرمجموعه بازه فشرده I در \mathbb{R}^n باشد. به ازای هر افزای I مانند P ، $J(P, S)$ را مساوی مجموع اندازه‌های آن زیربازه‌های P تعریف می‌کنیم که فقط حاوی نقطه‌های درونی S باشند و $\bar{J}(P, S)$ را مساوی مجموع اندازه‌های آن زیربازه‌های P تعریف می‌کنیم که نقطه‌هایی از $S \cup \partial S$ داشته باشند. عدهای

$$\underline{c}(S) = \sup\{J(P, S) \mid P \in \mathcal{P}(I)\},$$

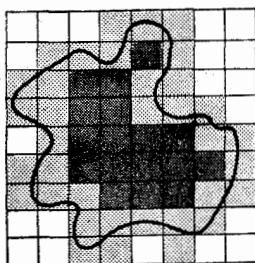
$$\bar{c}(S) = \inf\{\bar{J}(P, S) \mid P \in \mathcal{P}(I)\}$$

را، بترتیب، محتوای ژردان داخلی و خارجی (n بعدی) S می‌نامیم. اگر $\underline{c}(S) = \bar{c}(S)$ ، گوئیم S دارای اندازه ژردان است، که در این حالت این مقدار مشترک محتواها را محتوای ژردان S نامیم، و با $c(S)$ نشان می‌دهیم. با آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\underline{c}(S)$ و $\bar{c}(S)$ فقط به S بستگی دارند نه به بازه I که حاوی S است. همچنین، $0 \leq \underline{c}(S) \leq \bar{c}(S)$.

هرگاه S دارای محتوای صفر باشد، آنگاه $\underline{c}(S) = \bar{c}(S) = 0$. از این روی، به ازای هر $\epsilon > 0$ ، S را می‌توان با دسته‌ای متناهی از بازه‌ها پوشانید، که مجموع اندازه‌های آنها از ϵ کوچکتر باشد. توجه داشته باشید که محتوای صفر بر حسب پوشش متناهی توصیف می‌شود، حال آن‌که اندازه صفر بر حسب پوشش شمارشپذیر توصیف گردیده است. هر مجموعه‌ای که دارای محتوای صفر باشد اندازه‌اش نیز صفر است، ولی عکس این حکم لزوماً درست نیست.

هر بازه فشرده مانند Q دارای اندازه ژردان است و محتوای آن، یعنی $c(Q)$ ، مساوی اندازه آن، یعنی $\mu(Q)$ ، خواهد بود. اگر $k < n$ ، محتوای n بعدی هر مجموعه کراندار در \mathbb{R}^k صفر است.

وقتی مجموعه S در \mathbb{R}^2 دارای اندازه ژردان باشد، نیز گفته می‌شود که S دارای سطح $c(S)$ است. در این حالت، مجموعهای $J(P, S)$ و $\bar{J}(P, S)$ ، بترتیب، تقریبهایی از این سطح را از «داخل» و از «خارج» S نمایش می‌دهند. این مطلب



شکل ۳.۱۴

در شکل ۳.۱۴ مصور شده است. در این شکل مستطیلهائی که سایه روشن دارند در $J(P, S)$ و آنهایی را که سایه تیره دارند در $\bar{J}(P, S)$ حساب شده‌اند. برای مجموعه‌های در \mathbb{R}^2 ، $c(S)$ را حجم S نیز می‌نامند. قضیه زیرین نشان می‌دهد که یک مجموعه کراندار وقتی، فقط وقتی، دارای محتوای ژردان است که کرانه آن خیلی «ستبر» نباشد.

قضیه ۹.۱۴ فرض کنیم S مجموعه‌ای کراندار در \mathbb{R}^n باشد و ∂S کرانه آن را نشان دهد. در این صورت،

$$c(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S).$$

از این دو، S وقتی، فقط وقتی، دارای اندازه ژردان است که ∂S دارای محتوای صفر باشد.

پرهان. فرض کنیم I بازه‌ای فشرده حاوی S و ∂S باشد. در این صورت، به‌ازای هر افراز I مانند P ،

$$\bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S).$$

بنابراین، $\bar{J}(P, \partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ و در نتیجه $c(\partial S) \geq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$ برای بدست آوردن نامساوی عکس، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. P_1 را قسمی اختیار می‌کنیم که $\bar{J}(P_1, S) < \bar{c}(S) + \varepsilon/2$ و P_2 را چنان اختیار می‌کنیم که $\underline{J}(P_2, S) > \underline{c}(S) - \varepsilon/2$. قرار می‌دهیم $P = P_1 \cup P_2$. چون عمل تقریب مجموعه‌های داخلی \underline{J} را کم، و مجموعه‌های خارجی \bar{J} را اضافه نمی‌کند، پس

$$c(\partial S) \leq \bar{J}(P, \partial S) = \bar{J}(P, S) - \underline{J}(P, S) \leq \bar{J}(P_1, S) - \underline{J}(P_2, S) < \bar{c}(S) - \underline{c}(S) + \varepsilon.$$

چون ε دلخواه است، از این نتیجه می‌شود که $c(\partial S) \leq \bar{c}(S) - \underline{c}(S)$.

بنابراین، $c(\partial S) = c(S) - c(S)$ و برهان تمام است.

۷.۱۴ انتگرالگیری چندگانه روی مجموعه‌هایی که اندازه ژردان دارند

تعریف ۱۰.۱۴ فرض کنیم f بر مجموعه S در R^n که اندازه ژردان دارد تعریف شده و کراندار باشد. همچنین I بازه فشرده‌ای حاوی S باشد و g بر I به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in S \text{ اگر} \\ 0 & , x \in I - S \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت، هرگاه انتگرال $\int_I g(x) dx$ وجود داشته باشد، آنگاه گوئیم f بر S انتگرال ریمان دارد و می‌نویسیم $f \in R$ بر S است. همچنین می‌نویسیم

$$\int_S f(x) dx = \int_I g(x) dx.$$

انتگرالهای بالائی و پائینی $\int_S f(x) dx$ و $\int_S f(x) dx$ به نحو مشابهی تعریف می‌شوند.

تصوره. با در نظر گرفتن مجموعه‌های ریمان که $\int_I g(x) dx$ را تقریب می‌زنند، می‌توان با آسانی دید که انتگرال $\int_S f(x) dx$ به انتخاب بازه I ، که برای دربر گرفتن S بکار رفته بود، بستگی ندارد.

حال می‌توان شرطی لازم و کافی برای وجود $\int_S f(x) dx$ بیان کرد.

قضیه ۱۱.۱۴ فرض کنیم مجموعه S در R^n دارای اندازه ژردان باشد، و f بر S تعریف شده و کراندار باشد. در این صورت، $f \in R$ بر S است وقتی، و فقط وقتی، که ناپیوستگیهای f در S تشکیل مجموعه‌ای دارای اندازه صفر بدهند.

برهان. فرض کنیم I بازه‌ای فشرده حاوی S باشد، و به ازای هر $x \in S$ ، $g(x) = f(x)$ ، و به ازای هر $x \in I - S$ ، $g(x) = 0$. ناپیوستگیهای f ناپیوستگیهای g هستند. اما، ممکن است g در برخی یا همه نقطه‌های کرانه‌ای S نیز ناپیوسته باشد. چون S دارای اندازه ژردان است، بنا بر قضیه ۹.۱۴، $c(\partial S) = 0$. بنابراین، $g \in R$ بر I است وقتی، و فقط وقتی، که ناپیوستگیهای f تشکیل مجموعه‌ای دارای اندازه صفر بدهند.

۸.۱۴ بیان محتوای ژردان به صورت انتگرال ریمان

قضیه ۱۳.۱۴ فرض کنیم مجموعه فشرده S در R^n دارای اندازه ژردان باشد. در این صورت انتگرال $\int_S 1$ وجود دارد و

$$c(S) = \int_S 1.$$

برهان. فرض کنیم بازه فشرده I حاوی S باشد و χ_S تابع مشخص کننده S را نشان دهد. یعنی،

$$\chi_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \in S \\ 0 & , \mathbf{x} \in I - S \end{cases}$$

ناپوستگیهای χ_S در I نقطه‌های کرانه‌ای S هستند، و این نقطه‌ها تشکیل مجموعه‌ای دارای محتوای صفر می‌دهند، پس انتگرال $\int_I \chi_S$ وجود دارد، و در نتیجه $\int_S 1$ وجود خواهد داشت.

فرض کنیم P یک افراز I به زیر بازه‌های I_1, \dots, I_m باشد، و

$$A = \{k \mid I_k \cap S \text{ ناتهی باشد}\}.$$

اگر $k \in A$

$$M_k(\chi_S) = \sup \{\chi_S(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in I_k\} = 1,$$

و اگر $k \notin A$ ، $M_k(\chi_S) = 0$ ، پس

$$U(P, \chi_S) = \sum_{k=1}^m M_k(\chi_S) \mu(I_k) = \sum_{k \in A} \mu(I_k) = \bar{J}(P, \chi_S).$$

چون این برای همه افرازاها برقرار است، پس $\bar{\int}_I \chi_S = \bar{c}(S) = c(S)$ اما

$$c(S) = \int_I \chi_S = \int_S 1 \quad \text{پس} \quad \bar{\int}_I \chi_S = \int_I \chi_S$$

۹.۱۴ خاصیت جمع‌پذیری انتگرال ریمان

قضیه زیرین نشان می‌دهد که انتگرال بر حسب مجموعه‌هایی که دارای محتوای ژردان هستند جمع‌پذیر است.

قضیه ۱۳.۱۴ فرض کنیم مجموعه S در R^n اندازه ژردان داشته باشد و $f \in R$ بر S باشد. همچنین $S = A \cup B$ ، که در آن A و B دارای اندازه ژردان باشند ولی دارای

نقطهٔ دونی مشترکی نباشند. در این صورت $f \in R$ بر A ، $f \in R$ بر B است، و

$$(۴) \quad \int_S f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx.$$

پرهان. فرض می‌کنیم بازهٔ فشردهٔ I حاوی S باشد، و تابع g را به صورت زیرین تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in S \text{ اگر} \\ 0 & , x \in I - S \text{ اگر} \end{cases}$$

بآسانی می‌توان وجود $\int_A f(x) dx$ و $\int_B f(x) dx$ را از قضیهٔ ۱۱.۱۴ نتیجه گرفت. برای اثبات (۴)، فرض می‌کنیم P یک افراز I به m زیر بازهٔ I_1, \dots, I_m باشد و مجموع ریمان

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^m g(t_k) \mu(I_k)$$

را تشکیل می‌دهیم. اگر S_A آن قسمت از این مجموع باشد که از زیر بازه‌هایی که حاوی نقطه‌های A هستند حاصل می‌شود، و اگر S_B به‌نحومشابه تعریف شده باشد، می‌توان نوشت

$$S(P, g) = S_A + S_B - S_C,$$

که در آن S_C حاوی جمله‌هایی است که زیر بازه‌های متناظر آنها نقطه‌هایی از هر دوی A و B را دارند. خصوصاً، همهٔ نقطه‌های مشترک دو کرانهٔ ∂A و ∂B در این ردهٔ سوم قرار می‌گیرند. اما S_A یک مجموع ریمان است که تقریبی است برای انتگرال $\int_A f(x) dx$ ، و S_B یک مجموع ریمان است که تقریبی برای $\int_B f(x) dx$ می‌باشد. چون $c(\partial A \cap \partial B) = 0$ ، نتیجه می‌شود که اگر P را به قدر کافی ظریف کنیم، می‌توان $|S_C|$ را بدلیخواه کوچک کرد. از این مطالب می‌توان معادلهٔ مذکور در قضیه را بآسانی نتیجه گرفت.

نبره. دستور (۴) برای انتگرالهای بالائی و پائینی نیز برقرار است.

برای S هایی که دارای نهاد نسبتاً ساده‌ای باشند، می‌توان با بکار بردن قضیهٔ ۶.۱۴ دستورهای برای ارزیابی انتگرالهای مضاعف به وسیلهٔ انتگرالگیری مکرر بدست آورد. این دستورها در قضیهٔ زیر داده شده‌اند.

قضیهٔ ۱۴.۱۴. فرض کنیم دو تابع پیوستهٔ φ_1 و φ_2 بر $[a, b]$ تعریف شده باشند بقسمی

که به ازای هر x در $[a, b]$ ، $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ ، همچنین S مجموعه فشرده زیر در \mathbb{R}^2 باشد:

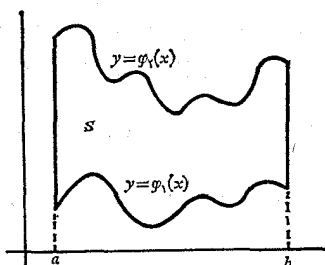
$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

اگر $f \in \mathbb{R}$ بر S باشد،

$$\int_S f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

تبصره. مجموعه S دارای اندازه ژردان است زیرا کرانه آن دارای محتوای صفر می باشد. (ر.ک. تمرین ۰.۹.۱۴)

گزاره‌های مشابهی برای انتگرالهای n گونا برقرارند. این توسعهها بسیار واضح هستند، و لزومی به توضیح بیشتر نیست.



شکل ۴.۱۴

شکل ۴.۱۴ نوع ناحیه‌ای را که در قضیه توصیف شده است مصور می‌سازد. برای مجموعه‌هایی که بتوان آنها را به تعدادی متناهی ناحیه‌های دارای اندازه ژردان از این نوع تجزیه کرد، می‌توان انتگرالگیری مکرر را در هر قسمت جداگانه انجام داد و نتیجه‌های حاصل را بر طبق قضیه ۱۳.۱۴ با هم جمع کرد.

۱۵.۱۴ قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای چندگانه

انتگرالهای چندگانه، مانند حالت یک بعدی، دارای خاصیت مقدار میانگین هستند. این خاصیت را می‌توان با آسانی از قضیه زیرین نتیجه گرفت. اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

قضیه ۱۵.۱۴ فرض کنیم مجموعه S در \mathbb{R}^n دارای اندازه ژردان باشد و $f \in \mathbb{R}$ و $g \in \mathbb{R}$ بر S باشند. هر گاه به‌ازای هر x در S ، $f(x) \leq g(x)$ ، آنگاه

$$\int_S f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

قضیه ۱۶.۱۴ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای چندگانه). فرض می‌کنیم مجموعه S در R^n دارای اندازه ژردان باشد و $g \in R$ و $f \in R$ بر S باشند. و همچنین به ازای هر \mathbf{x} در S ، $g(\mathbf{x}) \geq 0$. قرار می‌دهیم $m = \inf f(S)$ و $M = \sup f(S)$. در این صورت عددی حقیقی مانند λ در بازه $m \leq \lambda \leq M$ وجود دارد بقسمی که

$$(۵) \quad \int_S f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lambda \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

بخصوصاً،

$$(۶) \quad mc(S) \leq \int_S f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq Mc(S).$$

بصره. علاوه بر این، هرگاه S همبند، و f بر S پیوسته باشد، آنگاه (بنابر قضیه ۳۸.۴) به ازای یک مقدار \mathbf{x}_0 در S ، $\lambda = f(\mathbf{x}_0)$ و (۵) به صورت

$$(۷) \quad \int_S f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

درمی‌آید. خصوصاً، از (۷) نتیجه می‌شود که $\int_S f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) c(S)$ که در آن $\mathbf{x}_0 \in S$.

برهان. چون $g(\mathbf{x}) \geq 0$ ، به ازای هر \mathbf{x} در S ، $mg(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \leq Mg(\mathbf{x})$ ، بنا بر قضیه ۱۴.۱۵، می‌توان نوشت

$$m \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int_S f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq M \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

اگر $\int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ ، دستور (۵) به ازای هر λ برقرار است. اگر $\int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} > 0$ ، دستور (۵) به ازای $\lambda = \int_S f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} / \int_S g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ برقرار خواهد بود. با فرض $g(\mathbf{x}) \equiv 1$ ، دستور (۶) بدست می‌آید. با استفاده از (۶) می‌توان ثابت کرد که انتگرالده f می‌تواند بر مجموعه‌ای دارای محتوای صفر تغییر کند بدون آن که این تغییر در مقدار انتگرال تأثیری داشته باشد. در واقع، در این مورد داریم:

قضیه ۱۷.۱۴ فرض کنیم مجموعه S در R^n اندازه ژردان داشته باشد و $f \in R$ بر S باشد. همچنین T یک زیر مجموعه S باشد که دارای محتوای ژردان n بعدی صفر

است. بعلاوه، تابع g بر S تعریف شده و کراندار باشد بقسمی که به ازای هر $x \in S - T$ ، $g(x) = f(x)$. در این صورت $g \in R$ بر S است و

$$\int_S f(x) dx = \int_S g(x) dx.$$

پرهان. قرار می دهیم $h = f - g$. در این صورت

$$\int_S h(x) dx = \int_T h(x) dx + \int_{S-T} h(x) dx.$$

اما، بنا بر (۶)، $\int_T h(x) dx = 0$ ، و چون به ازای هر x در $S - T$ ، $h(x) = 0$ پس $\int_{S-T} h(x) dx = 0$.

تبره. این قضیه راهی را پیشنهاد می کند که به وسیله آن می توان تعریف انتگرال ریمان $\int_S f(x) dx$ را برای تابعهایی که در سراسر S لزوماً تعریف نشده باشند و کراندار نباشند وسعت داد. در حقیقت، فرض کنیم که S مجموعه ای کراندار در \mathbb{R}^n باشد که دارای محتوای ژردان است، و T یک زیرمجموعه S دارای محتوای صفر باشد. اگر f بر $S - T$ تعریف شده و کراندار باشد، تعریف می کنیم

$$\int_S f(x) dx = \int_{S-T} f(x) dx$$

(در صورتی که انتگرال طرف راست وجود داشته باشد)، و می گوئیم که f بر S انتگرال ریمان دارد. بنا بر قضیه ای که هم اکنون ثابت شد، این تعریف اساساً مانند آن است که قلمرو f را به تمام S وسعت دهیم بقسمی که f بر T چنان تعریف شود که این تابع کراندار باقی بماند.

تمرین

انتگرالهای چندگانه

۱۰۱۴ اگر $f_1 \in R$ بر $[a_1, b_1]$ ، \dots ، $f_n \in R$ بر $[a_n, b_n]$ باشد، ثابت کنید که

$$\int_S f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right),$$

که در آن $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

۲۰۱۴ فرض کنید f بر مستطیل فشرده $Q = [a, b] \times [c, d]$ در \mathbb{R}^2 تعریف شده و کراندار باشد. همچنین به ازای هر y ثابت در $[c, d]$ ، $f(x, y)$ تابعی صعودی از x ، و به ازای هر x ثابت در $[a, b]$ ، $f(x, y)$ تابعی صعودی از y را نشان دهد. ثابت کنید که $f \in R$ بر Q است.

۳۰۱۴ هر یک از انتگرالهای مضاعف زیرین را ارزیابی کنید.

(آ) $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$ که در آن $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2 x \sin^2 y \, dx \, dy$

(ب) $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$ که در آن $\int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x + y)| \, dx \, dy$

(ج) $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ که در آن $\int_0^2 \int_0^2 [x + y] \, dx \, dy$

و $[t]$ بزرگترین عدد صحیح نایبتر از t است.

۴۰۱۴ فرض کنید $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ ، و انتگرال $\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy$ را در هر یک از حالت‌های زیرین محاسبه کنید.

(آ) اگر $x + y \leq 1$ ، $f(x, y) = 1 - x - y$ ، و در غیر این صورت، $f(x, y) = 0$.

(ب) اگر $x^2 + y^2 \leq 1$ ، $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، و در غیر این صورت، $f(x, y) = 0$.

(ج) اگر $x^2 \leq y \leq 2x^2$ ، $f(x, y) = x + y$ ، و در غیر این صورت، $f(x, y) = 0$.

۵۰۱۴ تابع f را بر مربع $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیرین تعریف کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 2y & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید که به ازای $0 \leq t \leq 1$ وجود دارد و

$$\int_0^1 \left[\int_0^t f(x, y) \, dy \right] dx = t^2,$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = t.$$

این نشان می‌دهد که $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$ وجود دارد و مساوی ۱ است.

(ب) ثابت کنید که انتگرال $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy$ وجود دارد و مقدار آن را بیابید.

(ج) ثابت کنید که انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ وجود ندارد. ۶.۱۴ تابع f را بر مربع $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیرین تعریف کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ اگر دست کم یکی از } x \text{ و } y \text{ گنگ باشد} \\ 1/n & , \text{ اگر } y \text{ گویا باشد و } x = m/n \end{cases}$$

که در آن m و n عددهای صحیح نسبت به هم اول باشند و $n > 0$. ثابت کنید که

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_Q f(x, y) d(x, y) = 0 \end{aligned}$$

اما اگر x گویا باشد، $\int_0^1 f(x, y) dy$ وجود ندارد.

۷.۱۴ اگر p_k k امین عدد اول باشد، قرار دهید

$$S(p_k) = \left\{ \left(\frac{n}{p_k}, \frac{m}{p_k} \right) \mid n = 1, 2, \dots, p_k - 1, m = 1, 2, \dots, p_k - 1 \right\},$$

$$Q = [0, 1] \times [0, 1] \text{ و } S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(p_k)$$

(آ) ثابت کنید که S در Q چگال است (یعنی، بست S حاوی Q است) ولی هر خط موازی محورهای مختصات حد اکثر حاوی یک زیرمجموعه متناهی S است.

(ب) f را بر Q به صورت زیرین تعریف کنید:

$$f(x, y) = 1, (x, y) \in Q - S, \quad f(x, y) = 0, (x, y) \in S$$

ثابت کنید که $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = 1$ ولی انتگرال مضاعف $\int_Q f(x, y) d(x, y)$ وجود ندارد.

محتوای ژردان

۸۰۱۴ فرض کنید S مجموعه کرانداری در \mathbf{R}^n باشد که حداکثر تعدادی متناهی نقطه انباشتگی داشته باشد. ثابت کنید که $c(S) = 0$.

۹۰۱۴ فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. همچنین S نمودار f را نشان دهد، یعنی، $S = \{(x, y) \mid y = f(x), a \leq x \leq b\}$. ثابت کنید که S دارای محتوای ژردان دوبعدی صفر است.

۱۰۱۴ فرض کنید Γ یک خم با درازای متناهی در \mathbf{R}^n باشد. ثابت کنید که Γ دارای محتوای ژردان n بعدی صفر است.

۱۱۰۱۴ فرض کنید تابع نامنفی f بر مجموعه‌ای مانند S در \mathbf{R}^n تعریف شده باشد. مجموعه‌ی عرضهای f روی S عبارت است از یک زیرمجموعه \mathbf{R}^{n+1} ، که به صورت زیرین تعریف می‌شود:

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_n) \in S, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

اگر S یک ناحیه دارای اندازه ژردان در \mathbf{R}^n ، و f بر S پیوسته باشد، ثابت کنید که مجموعه‌ی عرضهای f روی S دارای محتوای ژردان $(n + 1)$ بعدی است که مقدار آن مساوی

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

می‌باشد. این مسأله را برای حالت‌های $n = 1$ و $n = 2$ تغییر هندسی کنید.

۱۲۰۱۴ فرض کنید که $f \in R$ بر S باشد و $\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ و S یک زیرمجموعه \mathbf{R}^n است. همچنین $A = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S, f(\mathbf{x}) < 0\}$ و $c(A) = 0$. ثابت کنید که مجموعه‌ای مانند B دارای اندازه صفر هست بقسمی که به‌ازای هر \mathbf{x} در $S - B$ ، $f(\mathbf{x}) = 0$.

۱۳۰۱۴ فرض کنید $f \in R$ بر S باشد، که در آن S یک ناحیه در \mathbf{R}^n ، و f بر S پیوسته باشد. ثابت کنید که یک نقطه‌ی درونی S مانند \mathbf{x}_0 وجود دارد بقسمی که

$$\int_S f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0) c(S).$$

۱۴۰۱۴ فرض کنید f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد. به‌ازای هر نقطه‌ی درونی (x_1, x_2) در Q ، تعریف کنید

$$F(x_1, x_2) = \int_a^{x_1} \left(\int_c^{x_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

ثابت کنید که

$$D_{1,2} F(x_1, x_2) = D_{2,1} F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2).$$

۱۵.۱۴ فرض کنید که T ناحیه مثلثی شکل زیرین در صفحه را نشان دهد:

$$T = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1 \right\}$$

که در آن $a > 0$ و $b > 0$.

همچنین $D_{1,2} f$ ، مشتق جزئی مرتبه دوم f ، بر T پیوسته باشد. ثابت کنید که نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) بر پاره خط واصل بین $(a, 0)$ و $(0, b)$ هست بقسمی که

$$\int_T D_{1,2} f(x, y) d(x, y) = f(0, 0) - f(a, 0) + a D_{1,2} f(x_0, y_0).$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 14.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 2, 2nd ed. Xerox, Waltham, 1969.
- 14.2 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.
- 14.3 Rogosinski, W. W., *Volume and Integral*. Wiley, New York, 1952.

انتگرالهای لبگ چندگانه

۱۰۱۵ مقدمه

در فصل ۱۰ انتگرال لبگ برای تابعهائی که بر زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^1 تعریف شده باشند توصیف گردید. روشی را که در آنجا بکار رفت می‌توان تعمیم داد و به کمک آن نظریه انتگرالگیری لبگ را برای تابعهائی که بر زیرمجموعه‌های فضای n بعدی \mathbb{R}^n تعریف شده باشند بدست آورد. انتگرالهای حاصل را انتگرالهای چندگانه می‌نامند. در حالت $n = 2$ این انتگرالها را انتگرالهای مضاعف، و در حالت $n = 3$ آنها را انتگرالهای مثلث می‌نامند.

مانند حالت یک بعدی، انتگرالگیری لبگ چندگانه توسعه‌ی است از انتگرالگیری ریمان چندگانه. این نظریه تابعه‌های کلیتری را به عنوان انتگرالده می‌پذیرد، با تابعه‌های بی‌کران مانند تابعه‌های کراندار رفتار می‌کند، و مجموعه‌های کلیتری را به عنوان ناحیه‌های انتگرالگیری در بر می‌گیرد.

تعریفهای اساسی و قضیه‌های همگرایی عمده تماماً مانند حالت یک بعدی هستند. اما، کیفیت جدیدی در این جا هست که در \mathbb{R}^1 دیده نمی‌شود: انتگرال چندگانه در \mathbb{R}^n را می‌توان با محاسبه متوالی n انتگرال یک بعدی ارزیابی کرد. این نتیجه، که به قضیه فوینینی معروف است، یکی از موضوعهای عمده این فصل خواهد بود.

مانند حالت یک بعدی، ابتدا انتگرال را برای تابعه‌های پله‌ای، سپس برای رده‌ای وسیعتر (به نام تابعه‌های بالائی) که حاوی حدود بعضی از دنباله‌های صعودی

از تابعهای پله‌ای است تعریف می‌کنیم، و سرانجام به رده‌ای باز هم وسیعتر، که عبارت از رده‌ی تابعهایی است که انتگرال لبگ دارند، می‌پردازیم. چون این عمل درست مانند حالت یک بعدی انجام می‌شود، بیشتر جزئیات برهانها را حذف خواهیم کرد.

برخی مفاهیم را که در فصل ۱۴ معرفی شدند یادآوری می‌کنیم. اگر $I = I_1 \times \dots \times I_n$ یک بازه‌ی کراندار در \mathbb{R}^n باشد، اندازه‌ی n بازه‌ی I را با معادله

$$\mu(I) = \mu(I_1) \dots \mu(I_n)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\mu(I_k)$ اندازه‌ی یک بعدی، یا درازای، I_k است. یک زیرمجموعه‌ی \mathbb{R}^n مانند T را دارای اندازه‌ی n نامیم در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، T را بتوان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی، که مجموع اندازه‌های n آنها کوچکتر از ε باشد، پوشانید:

گوئیم خاصیتی تقریباً همه‌جا بر مجموعه‌ی S در \mathbb{R}^n برقرار است در صورتی که این خاصیت همه‌جا بر S جز برای زیرمجموعه‌ای دارای اندازه‌ی 0 برقرار باشد. مثلاً، اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از تابعها باشد، گوئیم $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا بر S ، در صورتی که به‌ازای هر x در S جز x های عضو زیرمجموعه‌ای دارای اندازه‌ی 0 ، رابطه‌ی $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ برقرار باشد.

۲۰۱۵ تابعهای پله‌ای و انتگرالهای آنها

فرض کنیم I بازه‌ای فشرده در \mathbb{R}^n ، مثلاً

$$I = I_1 \times \dots \times I_n$$

باشد، که در آن هر I_k یک زیربازه‌ی فشرده‌ی \mathbb{R}^1 است. اگر P_k یک افراز I_k باشد، حاصل ضرب دکارتی $P = P_1 \times \dots \times P_n$ را یک افراز I می‌نامیم. هرگاه P_k بازه‌ی I_k را به m_k زیربازه‌ی یک بعدی تجزیه کند، آنگاه P بازه‌ی I را به $m = m_1 \dots m_n$ زیربازه‌ی n بعدی، مثلاً J_1, \dots, J_m ، تجزیه خواهد کرد.

تابع s که بر I تعریف شده باشد یک تابع پله‌ای نامیده می‌شود در صورتی که یک افراز I مانند P وجود داشته باشد قسمی که s درون هر زیربازه‌ی J_k پایا باشد، یعنی

$$s(x) = c_k, \quad x \in \text{int } J_k$$

انتگرال s روی I با معادله‌ی زیرین تعریف می‌شود:

$$(۱) \quad \int_I s = \sum_{k=1}^n c_k \mu(J_k).$$

حال فرض می‌کنیم G یک بازه n بعدی کلی باشد، یعنی، بازه‌ای در \mathbb{R}^n که لزوماً فشرده نباشد. تابع s را یک تابع پله‌ای بر G نامیم در صورتی که G زیر-بازه‌ای n بعدی و فشرده مانند I داشته باشد بقسمی که s یک تابع پله‌ای بر I باشد، و به‌ازای هر $\mathbf{x} \in G - I$ ، $s(\mathbf{x}) = 0$. انتگرال s روی G را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_G s = \int_I s,$$

که در آن انتگرال روی I با دستور (۱) داده شده است. انتگرال فوق، مانند حالت یک بعدی، به بازه انتخاب شده I بستگی ندارد.

۳.۱۵ تابعهای بالائی و تابعهایی که انتگرال لبگ دارند

تعریف تابعهای بالائی و تابعهای دارای انتگرال لبگ درست مانند تعریف درحالت یک بعدی است.

تابع حقیقی f را که بر بازه I در \mathbb{R}^n تعریف شده باشد یک تابع بالائی بر I نامیم، و می‌نویسیم $f \in U(I)$ ، در صورتی که دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود داشته باشد بقسمی که

$$(A) \quad f \rightarrow s_n \text{ تقریباً همه‌جا بر } I,$$

و

$$(B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n \text{ وجود داشته باشد.}$$

گوئیم دنباله $\{s_n\}$ تابع f را تولید می‌کند. انتگرال f روی I با معادله

$$(۲) \quad \int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I s_n$$

تعریف می‌شود.

مجموعه همه تابعهای f به شکل $f = u - v$ که در آن $u \in U(I)$ و $v \in U(I)$ ، به $L(I)$ نشان می‌دهیم. اگر تابع f در $L(I)$ باشد، گوئیم f بر I انتگرال لبگ دارد، و انتگرال آن را با معادله

$$\int_I f = \int_I u - \int_I v$$

تعریف می‌کنیم.

چون این تعریفها همانند حالت یک بعدی هستند، عجیب نیست که بسیاری از قضیه‌هایی که از این تعریفها ناشی می‌شوند نیز معتبر باشند. خصوصاً، قضیه‌های ۵۰.۱۰، ۶۰.۱۰، ۷۰.۱۰، ۹۰.۱۰، ۱۰۰.۱۰، ۱۱۰.۱۰، ۱۳۰.۱۰، ۱۴۰.۱۰، ۱۶۰.۱۰، ۱۷۰.۱۰ (آ) و (ج)، ۱۸۰.۱۰ و ۱۹۰.۱۰ همه برای انتگرالهای چندگانه معتبرند. قضیه ۱۷۰.۱۰ (ب)، که رفتار یک انتگرال را در اثر انبساط یا انقباض بازه انتگرالگیری توصیف می‌کند، باید بدین صورت اصلاح گردد:

هرگاه $f \in L(I)$ و $g(x) = f(x/c)$ ، که در آن $c > 0$ ، آنگاه $g \in L(cI)$

$$\int_{cI} g = c^n \int_I f.$$

با بیان دیگر می‌توان گفت که، از انبساط بازه به وسیله یک سازه مثبت مانند c لازم می‌آید که انتگرال را در c^n ، که در آن n بعد فضا است، ضرب کنیم.

قضیه‌های همگرایی لوی (قضیه‌های ۲۲.۱۰ تا ۲۶.۱۰)، و قضیه همگرایی تسلطی لبگ (قضیه ۲۷.۱۰) و نتیجه‌های آن (قضیه‌های ۲۸.۱۰، ۲۹.۱۰ و ۳۰.۱۰) نیز برای انتگرالهای چندگانه معتبر هستند.

نمادگذاری. انتگرال $\int_I f$ را با

$$\int_I f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \text{ یا } \int_I f(x) dx$$

نیز نشان می‌دهند. نماد $\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ نیز بکار خواهد رفت. گاهی انتگرالهای مضاعف را با دو علامت انتگرال، و انتگرالهای مثلث را با سه علامت انتگرال می‌نویسند، یعنی:

$$\int_I \int_I f(x, y) dx dy, \quad \int_I \int_I \int_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

۴.۱۵ تابعهای اندازه پذیر و مجموعه‌های اندازه پذیر در R^n

تابع حقیقی f تعریف شده بر بازه I در R^n را بر I اندازه‌پذیر می‌گوئیم، و می‌نویسیم $f \in M(I)$ ، در صورتی که دنباله‌ای از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ بر I وجود داشته باشد بقسمی که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \text{ ت. ه. بر } I.$$

خاصیتهای توابع اندازه پذیر که در قضیه‌های ۳۵.۱۰، ۳۶.۱۰ و ۳۷.۱۰ بیان شده‌اند برای این محدودهٔ کلیتر نیز معتبرند.

یک زیرمجموعهٔ \mathbb{R}^n مانند S را اندازه‌پذیر نامیم در صورتی که تابع مشخص‌کنندهٔ آن یعنی χ_S اندازه‌پذیر باشد. هر گاه، علاوه بر این، χ_S بر \mathbb{R}^n انتگرال لبگ نیز داشته باشد، آنگاه اندازهٔ n مجموعهٔ S ، یعنی $\mu(S)$ را با معادلهٔ

$$\mu(S) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_S$$

تعریف می‌کنیم. اگر χ_S اندازه‌پذیر باشد ولی در $L(\mathbb{R}^n)$ نباشد، تعریف می‌کنیم $\mu(S) = +\infty$. تابع μ که به این طریق تعریف شد اندازهٔ لبگ n بعدی نامیده می‌شود.

خاصیتهای اندازه که در قضیه‌های ۴۴.۱۰ تا ۴۷.۱۰ توصیف شده‌اند برای اندازهٔ لبگ n بعدی نیز معتبرند. همچنین، انتگرال لبگ را می‌توان با روشی که در بخش ۱۹.۱۰ بکار برده شده است برای زیرمجموعه‌های دلخواه \mathbb{R}^n نیز تعریف کرد.

خصوصاً بر خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر اندازهٔ لبگ، که در قضیهٔ ۴۷.۱۰ توصیف شده است، تکیه می‌کنیم:

هرگاه $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های اندازه‌پذیر و از هم جدا در \mathbb{R}^n باشد، آنگاه اجتماع $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ اندازه‌پذیر است و

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

قضیهٔ زیرین نشان می‌دهد که هر زیرمجموعهٔ باز \mathbb{R}^n اندازه‌پذیر است.

قضیهٔ ۱۰۱۵ هر مجموعهٔ باز مانند S در \mathbb{R}^n را می‌توان به صورت اجتماع دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای کراندار و از هم جدا که بست آنها محتوا در S باشند بیان کرد. بنابراین S اندازه‌پذیر است. بعلاوه، هر گاه S کراندار باشد، آنگاه $\mu(S)$ متناهی است.

برهان. عدد صحیحی مانند $m \geq 1$ اختیار می‌کنیم و آن را ثابت نگه می‌داریم، و همهٔ بازه‌های نیمباز در \mathbb{R}^1 به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

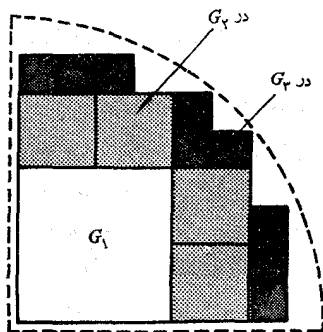
درازای هر بازه 2^{-m} است، و همهٔ آنها تشکیل دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌هایی

از هم جدا می‌دهند که اجتماعشان مساوی \mathbb{R}^1 است. حاصل ضرب دکارتی n تا از این بازه‌ها یک مکعب n بعدی به درازای ضلع 2^{-m} است. فرض کنیم F_m دسته همه این مکعبها را نشان دهد. در این صورت F_m دسته‌ای شمارشپذیر از مجموعه‌های از هم جدا است که اجتماع آنها \mathbb{R}^n است. توجه کنید که مکعبها در F_{m+1} این طور بدست می‌آیند که هر ضلع هر مکعب در F_m را به دو جزء مساوی تقسیم کنیم. بنابراین، هرگاه Q_m مکعبی در F_m ، و Q_{m+1} مکعبی در F_{m+1} باشد، آنگاه یکی از این دو صورت پیش می‌آید: $Q_{m+1} \subseteq Q_m$ ، یا Q_m و Q_{m+1} از هم جدا هستند. حال زیردسته G_m را از F_m به صورت زیر استخراج می‌کنیم: اگر $m=1$ ، عبارت G_1 باشد از مجموعه همه مکعبها در F_1 که بستهای آنها در S واقعند. اگر $m=2$ ، عبارت G_2 باشد از مجموعه همه مکعبها در F_2 که بستهای آنها در S واقعند ولی در هیچ یک از مکعبهای موجود در G_1 واقع نیستند. اگر $m=3$ ، عبارت G_3 باشد از مجموعه همه مکعبها در F_3 که بستهای آنها در S واقعند اما در هیچ یک از مکعبهای موجود در G_1 یا G_2 واقع نیستند، و مانند اینها. ساختن G_m ها در شکل ۱.۱۵ تصور شده است، که در آن S یک چهارم یک گرده باز در \mathbb{R}^2 است. مربع سفید در G_1 ، مربعهای با سایه کم رنگ در G_2 ، و مربعهای با سایه پررنگتر در G_3 واقعند.

حال قرار می‌دهیم

$$T = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{Q \in G_m} Q.$$

یعنی، T مساوی اجتماع همه مکعبهای موجود در G_1, G_2, \dots باشد. ثابت می‌کنیم



شکل ۱.۱۵

که $S = T$ ، و در نتیجه قضیه ثابت خواهد شد زیرا T دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است که بستهای آنها در S قرار دارند. چون هر Q در G_m یک زیرمجموعه S است، پس $T \subseteq S$. از این روی فقط کافی است نشان دهیم که $S \subseteq T$.

فرض کنیم $p = (p_1, \dots, p_n)$ نقطه‌ای در S باشد. چون S باز است، مکعبی به مرکز p و درازای ضلع $\delta > 0$ وجود دارد که جزء S است. m را بقسمی اختیار می‌کنیم که $\delta/2 < 2^{-m}$. در این صورت برای هر مقدار i ،

$$p_i - \frac{\delta}{2} < p_i - \frac{1}{2^m} < p_i < p_i + \frac{1}{2^m} < p_i + \frac{\delta}{2}.$$

حال k_i را طوری اختیار می‌کنیم که

$$\frac{k_i}{2^m} < p_i \leq \frac{k_i + 1}{2^m},$$

و فرض می‌کنیم Q حاصل ضرب دکارتی بازه‌های $[k_i 2^{-m}, (k_i + 1) 2^{-m}]$ به‌ازای $i = 1, 2, \dots, n$ باشد. در این صورت به‌ازای مکعبی چون Q در F_m ، $p \in Q$ هر گاه m کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت باشد، آنگاه $Q \in G_m$ ، پس $p \in T$. بنابراین $S \subseteq T$. گزاره‌های دیگر قضیه که دربارهٔ اندازه‌پذیری S است بی‌درنگ از خاصیت جمع‌پذیری شمارشپذیر اندازهٔ لبگ نتیجه می‌شود. تبصره. اگر S اندازه‌پذیر باشد، $\mathbb{R}^n - S$ نیز چنین است زیرا

$$\chi_{\mathbb{R}^n - S} = 1 - \chi_S.$$

بنابراین، هر زیرمجموعهٔ بستهٔ \mathbb{R}^n اندازه‌پذیر است.

۵.۱۵ قضیهٔ تحویل فوبینی برای انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای

تا این جا، نظریهٔ لبگ در \mathbb{R}^n کاملاً شبیه حالت یک بعدی است. برای محاسبهٔ یک انتگرال چندگانه در \mathbb{R}^n به‌وسیلهٔ انتگرالهای مکرر با بعد پائینتر، اگر بخواهیم از قضیهٔ فوبینی استفاده کنیم، مفهومی جدیدی را لازم داریم. برای آن که بهتر بفهمیم که چه لازم است، ابتدا حالت دوبعدی را در نظر می‌گیریم.

نتیجهٔ مشابه را برای انتگرالهای ریمان چندگانه یادآوری می‌کنیم. هر گاه $I = [a, b] \times [c, d]$ یک بازهٔ فشرده در \mathbb{R}^2 باشد و f بر I انتگرال ریمان داشته باشد، آنگاه (از قسمت (ه) قضیهٔ ۶.۱۴) دستور تحویل زیرین را داریم:

$$(۳) \quad \int_I f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

با تعویض انتگرال پائینی \int_a^b با انتگرال بالایی \int_b^a ، لنگه دستور فوق بدست می‌آید. همچنین دو دستور مشابه دیگر که با معکوس ترتیب عمل انتگرالگیری حاصل می‌شوند وجود دارند. در این جا انتگرالهای بالایی و پائینی مورد نیازند زیرا فرض انتگرال ریمان داشتن بر I به قدر کافی قوی نیست که وجود انتگرال ریمان یک بعدی $\int_a^b f(x, y) dx$ را تضمین کند. این اشکال در نظریه لپگ وجود ندارد. قضیه فویننی برای انتگرالهای لپگ مضاعف دستورهای تحویل

$$\begin{aligned} \int_I f(x, y) d(x, y) &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \end{aligned}$$

را تنها با شرط این که f بر I انتگرال لپگ دارد بدست می‌دهد. نشان می‌دهیم که انتگرالهای داخلی همواره به‌عنوان انتگرالهای لپگ وجود دارند. این مثال دیگری است که چگونگی غلبه نظریه لپگ بر مشکلات ذاتی نظریه ریمان را مصور می‌سازد. در این بخش قضیه فویننی را برای تابعهای پله‌ای ثابت می‌کنیم، و بعداً در یکی از بخشها آن را به تابعهای دلخواه که انتگرال لپگ دارند وسعت می‌دهیم.

قضیه ۲۰۱۵ (قضیه فویننی برای تابعهای پله‌ای). فرض کنیم S یک تابع پله‌ای بر \mathbb{R}^2 باشد. در این صورت به‌ازای هر y ثابت در \mathbb{R}^1 ، انتگرال $\int_{\mathbb{R}^1} s(x, y) dx$ وجود دارد، و به‌عنوان تابعی از y ، بر \mathbb{R}^1 انتگرال لپگ دارد. بعلاوه،

$$(۴) \quad \int_{\mathbb{R}^2} s(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} s(x, y) dx \right] dy.$$

به‌همین نحو، به‌ازای هر x ثابت در \mathbb{R}^1 ، انتگرال $\int_{\mathbb{R}^1} s(x, y) dy$ وجود دارد، و به‌عنوان تابعی از x ، بر \mathbb{R}^1 انتگرال لپگ دارد. و نیز،

$$(۵) \quad \int_{\mathbb{R}^2} s(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} s(x, y) dy \right] dx.$$

پروهان. این قضیه را می‌توان از دستور تحویل (۳) برای انتگرالهای ریمان بدست آورد، ولی ما ترجیح می‌دهیم که آن را مستقیماً مستقل از نظریه ریمان ثابت کنیم. بازه فشرده‌ای مانند $I = [a, b] \times [c, d]$ هست قسمی که S یک تابع

پله‌ای بر I است، و اگر $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - I$ ، $s(x, y) = 0$. یک افراز I به mn زیر مستطیل مانند $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ هست بقسمی که s درون I_{ij} پایاست، یعنی

$$s(x, y) = c_{ij}, (x, y) \in \text{int } I_{ij} \text{ اگر}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \int_{I_{ij}} s(x, y) d(x, y) &= c_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} s(x, y) dx \right] dy. \end{aligned}$$

اگر بر i و j جمع‌بندی کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\int_I s(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left[\int_a^b s(x, y) dx \right] dy.$$

چون s در خارج I صفر می‌شود، پس (۴) برقرار است، و با بیانی مشابه می‌توان (۵) را ثابت کرد.

برای توسیع قضیه فوینی به تابعهایی که انتگرال لیگ دارند، به بعضی نتایج دیگر درباره مجموعه‌های دارای اندازه صفر نیاز داریم. این نتیجه‌ها در بخش بعد مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۶.۱۵ بعضی از خواص مجموعه‌های دارای اندازه صفر

قضیه ۳.۱۵ فرض کنیم S یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n باشد. در این صورت S وقتی، و فقط وقتی، دارای اندازه n است که دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{J_1, J_2, \dots\}$ ، که مجموع اندازه‌های n آنها متناهی باشد، وجود داشته باشد بقسمی که هر نقطه در S به ازای تعدادی نامتناهی k به J_k تعلق داشته باشد. برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که S دارای اندازه n باشد. در این صورت، به ازای هر $m \geq 1$ ، S را می‌توان با یک دسته شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{I_{m,1}, I_{m,2}, \dots\}$ ، که مجموع اندازه‌های n آنها از 2^{-m} کوچکتر باشد، پوشانید. مجموعه A که از همه بازه‌های $I_{m,k}$ ، به ازای $m = 1, 2, \dots$ و $k = 1, 2, \dots$ تشکیل شده است دسته‌ای است شمارشپذیر که S را می‌پوشاند، و مجموع اندازه‌های n همه این بازه‌ها از $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1$ کوچکتر است. بعلاوه، هرگاه $a \in S$ ، آنگاه به ازای هر m ، k ای هست بقسمی که $a \in I_{m,k}$ ، بنابراین،

اگر بنویسیم $A = \{J_1, J_2, \dots\}$ ، ملاحظه می‌شود که a به تعدادی نامتناهی J_k تعلق دارد.

برعکس، فرض می‌کنیم یک دسته شمارشپذیر از بازه‌های n بعدی مانند $\{J_1, J_2, \dots\}$ وجود داشته باشد قسمی که رشته $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k)$ همگرا باشد و هر نقطه در S به تعدادی نامتناهی از J_k ها تعلق داشته باشد. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، عدد صحیحی مانند N وجود دارد قسمی که

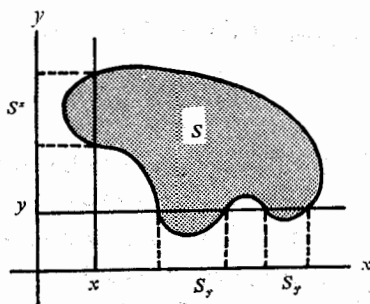
$$\sum_{k=N}^{\infty} \mu(J_k) < \varepsilon.$$

هر نقطه S در مجموعه $\bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$ قرار دارد، پس $S \subseteq \bigcup_{k=N}^{\infty} J_k$. بنابراین، S را می‌توان با دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌ها پوشانید، که مجموع اندازه‌های آنها از ε کمتر باشد، نتیجه آن که S دارای اندازه n است.

تعریف ۴.۱۵. اگر S یک زیرمجموعه دلخواه \mathbb{R}^2 باشد، و $(x, y) \in S$ ، دو زیرمجموعه \mathbb{R}^1 مذکور در زیر را با S_x و S_y^* نشان می‌دهیم:

$$S_x = \{x \mid (x, y) \in S \text{ و } x \in \mathbb{R}^1\},$$

$$S_y^* = \{y \mid (x, y) \in S \text{ و } y \in \mathbb{R}^1\}.$$



شکل ۲.۱۵

مثالهایی در شکل ۲.۱۵ نشان داده شده‌اند. S_x ، از نظر هندسی، تصویر برش مقاطع افقی S بر محور x ؛ و S_y^* تصویر برش مقاطع قائم S بر محور y می‌باشد.

قضیه ۵.۱۵. هرگاه S یک زیرمجموعه \mathbb{R}^2 ، و دارای اندازه دوبعدی 0 باشد، آنگاه S_x به ازای تقریباً همه مقادیر y در \mathbb{R}^1 دارای اندازه یک بعدی 0 است، و S_y^*

به‌ازای تقریباً همه مقادیر x در \mathbf{R}^1 دارای اندازه یک‌بعدی 0 می‌باشد. برهان. ثابت می‌کنیم که S_y به‌ازای تقریباً همه مقادیر y در \mathbf{R}^1 دارای اندازه یک‌بعدی 0 است. در اثبات از قضیه ۳۰۱۵ استفاده می‌شود. چون S دارای اندازه دو‌بعدی 0 است، بنابراین قضیه ۳۰۱۵، دسته‌ای شمارشپذیر از مستطیلهای مانند $\{I_k\}$ هست بقسمی که رشته

$$(۶) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \quad \text{همگرا است،}$$

و هر نقطه S مانند (x, y) به تعدادی نامتناهی I_k تعلق دارد. می‌نویسیم $I_k = X_k \times Y_k$ ، که در آن X_k و Y_k زیربازه‌های \mathbf{R}^1 هستند. در این صورت،

$$\mu(I_k) = \mu(X_k) \mu(Y_k) = \mu(X_k) \int_{\mathbf{R}^1} \chi_{Y_k} = \int_{\mathbf{R}^1} \mu(X_k) \chi_{Y_k},$$

که در آن χ_{Y_k} تابع مشخص‌کننده بازه Y_k می‌باشد. قرار می‌دهیم $g_k = \mu(X_k) \chi_{Y_k}$. در این صورت از (۶) نتیجه می‌شود که رشته

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k \quad \text{همگرا است.}$$

اما $\{g_k\}$ دنباله‌ای است از تابعهای نامنفی در $L(\mathbf{R}^1)$ بقسمی که رشته

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^1} g_k$$

همگرا است. بنابراین، بنا بر قضیه لوی (قضیه ۲۵۰۱۵)، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ تقریباً همه‌جا بر \mathbf{R}^1 همگرا است. با بیان دیگر می‌توان گفت که، یک زیرمجموعه \mathbf{R}^1 مانند T دارای اندازه یک‌بعدی 0 وجود دارد بقسمی که

به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^1 - T$ ، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) \chi_{Y_k}(y)$ همگرا است. (۷) نقطه‌ای مانند y را در $\mathbf{R}^1 - T$ اختیار می‌کنیم، y را ثابت نگهداشته، مجموعه S_y را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که S_y دارای اندازه یک‌بعدی صفر است. می‌توان فرض کرد که S_y ناتهی است؛ زیرا در غیر این صورت نتیجه بدیهی خواهد بود. فرض کنیم که

$$A(y) = \{X_k \mid y \in Y_k, k = 1, 2, \dots\}.$$

در این صورت $A(y)$ دسته‌ای شمارشپذیر از بازه‌های یک‌بعدی است که ما آن را به صورت $\{J_1, J_2, \dots\}$ برچسب مجدد می‌زنیم. بنا بر (۷)، مجموع درازاهای

همه بازه‌های J_k همگرا است. هر گاه $x \in S_y$ ، آنگاه $(x, y) \in S$ ، پس به‌ازای تعدادی نامتناهی k ، $(x, y) \in I_k = X_k \times Y_k$ ، و در نتیجه به‌ازای تعدادی نامتناهی k ، $x \in J_k$. از صورت یک بعدی قضیه ۳.۱۵ نتیجه می‌شود که S_y دارای اندازه یک بعدی صفر است. این نشان می‌دهد که به‌ازای تقریباً هر y در \mathbb{R}^1 ، S_y دارای اندازه یک بعدی صفر است، و با بیانی مشابه ثابت می‌شود که به‌ازای تقریباً هر x در \mathbb{R}^1 ، S^x دارای اندازه یک بعدی صفر می‌باشد.

۷.۱۵ قضیه تحویل فوینینی برای انتگرالهای مضاعف

قضیه ۶.۱۵ فرض کنیم f بر \mathbb{R}^2 انتگرال لپگ داشته باشد. در این صورت:
 (آ) مجموعه‌ای مانند T دارای اندازه یک بعدی ۰ هست بقسمی که به‌ازای هر y در $\mathbb{R}^1 - T$ ، انتگرال لپگ $\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx$ وجود دارد.
 (ب) تابع G ، که بر \mathbb{R}^1 با معادله

$$G(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx, & \text{اگر } y \in \mathbb{R}^1 - T \\ 0, & \text{اگر } y \in T \end{cases}$$

تعریف شده است، بر \mathbb{R}^1 انتگرال لپگ دارد.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^1} G(y) dy \quad (\text{ج})$$

یعنی

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx \right] dy.$$

تبره. در قضیه‌ای شبیه به قضیه بالا دستور زیرین نتیجه می‌شود:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dy \right] dx.$$

برهان. قضیه را قبلاً برای تابعهای پله‌ای ثابت کرده‌ایم. حال آن را برای تابعهای بالائی ثابت می‌کنیم. اگر $f \in U(\mathbb{R}^2)$ ، دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_n\}$ وجود دارد بقسمی که به‌ازای هر (x, y) در $\mathbb{R}^2 - S$ ، رابطه $f(x, y) \rightarrow s_n(x, y)$ برقرار است، که در این جا S مجموعه‌ای دارای اندازه دوبعدی ۰ است؛ همچنین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2} s_n(x, y) d(x, y) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y).$$

چون $S - (x, y) \in \mathbb{R}^2$ وقتی، و فقط وقتی، که $x \in \mathbb{R}^1 - S_y$ ، از این روی

$$(۸) \quad s_n(x, y) \rightarrow f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^1 - S_y \text{ اگر}$$

فرض کنیم که $t_n(y) = \int_{\mathbb{R}^1} s_n(x, y) dx$ این انتگرال به‌ازای هر عدد حقیقی y وجود دارد و تابعی است انتگرال‌پذیر از y . بعلاوه، بنا بر قضیه ۲۰۱۵،

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} t_n(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} s_n(x, y) dx \right] dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} s_n(x, y) d(x, y) \leq \int \int_{\mathbb{R}^2} f. \end{aligned}$$

چون دنباله $\{t_n\}$ صعودی است، نامساوی اخیر نشان می‌دهد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} t_n(y) dy$$

وجود دارد. بنابراین، بنا بر قضیه لوی (قضیه ۲۴.۱۰)، تابعی مانند t در $L(\mathbb{R}^1)$ هست قسمی که $t_n \rightarrow t$ تقریباً همه جا بر \mathbb{R}^1 . با بیان دیگر می‌توان گفت که، مجموعه‌ای مانند T_1 دارای اندازه یک بعدی 0 هست قسمی که اگر $y \in \mathbb{R}^1 - T_1$ ، $t_n(y) \rightarrow t(y)$ بعلاوه،

$$\int_{\mathbb{R}^1} t(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} t_n(y) dy.$$

باز، چون $\{t_n\}$ صعودی است،

$$t_n(y) = \int_{\mathbb{R}^1} s_n(x, y) dx \leq t(y), \quad y \in \mathbb{R}^1 - T_1 \text{ اگر}$$

با بکار بردن قضیه لوی در مورد $\{s_n\}$ نتیجه می‌شود که اگر $y \in \mathbb{R}^1 - T_1$ ، تابعی مانند g در $L(\mathbb{R}^1)$ وجود دارد قسمی که به‌ازای هر x در $\mathbb{R}^1 - A$ ،

$$s_n(x, y) \rightarrow g(x, y),$$

که در آن A مجموعه‌ای دارای اندازه یک بعدی 0 است. (مجموعه A به y بستگی دارد.) از مقایسه این رابطه با (۸) ملاحظه می‌شود که هرگاه $y \in \mathbb{R}^1 - T_1$ ، آنگاه

$$(۹) \quad g(x, y) = f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^1 - (A \cup S_y)$$

ولی A و S_y به‌ازای تقریباً هر y دارای اندازه یک بعدی 0 هستند، در حقیقت به-

ازای هر y در $T_y - \mathbb{R}^1$ ، که در آن اندازه T_y دارای اندازه یک بعدی 0 است. قرار می‌دهیم $T = T_1 \cup T_y$. در این صورت T دارای اندازه یک بعدی 0 است. اگر $T - \mathbb{R}^1$ ، مجموعه $A \cup S_y$ دارای اندازه یک بعدی 0 است و (۹) برقرار خواهد بود. چون انتگرال $\int_{\mathbb{R}^1} g(x, y) dx$ به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^1 - T$ وجود دارد، پس انتگرال $\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx$ نیز به‌ازای هر $y \in \mathbb{R}^1 - T$ وجود خواهد داشت. از این (آ) ثابت می‌شود. همچنین، اگر $y \in \mathbb{R}^1 - T$ داریم

$$(10) \quad \int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^1} g(x, y) dx \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} s_n(x, y) dx = t(y).$$

چون $t \in L(\mathbb{R}^1)$ ، پس (ب) برقرار است. بالاخره، داریم

$$\int_{\mathbb{R}^1} t(y) dy = \int_{\mathbb{R}^1} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} t_n(y) dy \\ \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} s_n(x, y) dx \right] dy \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{\mathbb{R}^2} s_n(x, y) d(x, y) \\ = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y).$$

بامقایسه این رابطه‌ها با (۱۰) می‌توان (ج) را نتیجه گرفت. بدین ترتیب قضیه فوینی برای تابعهای بالائی ثابت می‌شود.

برای اثبات آن برای تابعهایی که انتگرال لیبگ دارند، می‌نویسیم $f = u - v$ ، که در آن $u \in L(\mathbb{R}^2)$ و $v \in L(\mathbb{R}^2)$ ، و نتیجه می‌گیریم که

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f = \int \int_{\mathbb{R}^2} u - \int \int_{\mathbb{R}^2} v = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} u(x, y) dx \right] dy \\ - \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} v(x, y) dx \right] dy \\ = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} \{u(x, y) - v(x, y)\} dx \right] dy \\ = \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx \right] dy.$$

از قضیه ۶.۱۵ و مشابه دو بعدی قضیه ۱۱.۱۰ بی درنگ قضیه زیر بدست می‌آید:

قضیه ۷.۱۵ فرض کنیم f بر مستطیل فشرده $I = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و کراندار باشد، و f تقریباً همه جا بر I پیوسته باشد. در این صورت $f \in L(I)$ و

$$\begin{aligned} \int_I \int f(x, y) d(x, y) &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

بهره. انتگرال یک بعدی $\int_a^b f(x, y) dx$ به ازای تقریباً همه مقادیر y در $[c, d]$ به عنوان یک انتگرال لبگ وجود دارد. اما لازم نیست به عنوان یک انتگرال ریمان وجود داشته باشد. تبصره مشابهی را می‌توان برای انتگرال $\int_c^d f(x, y) dy$ بیان کرد. در نظریه ریمان، انتگرالهای داخلی در دستور تحویل را باید با انتگرالهای بالائی یا پائینی معاوضه کرد. (ر. ک. ۰ قضیه ۶.۱۴، قسمت (ه) ۰)

البته، توسیع قضیه فویننی به انتگرالهای با بعد بالاتر نیز وجود دارد. اگر f بر \mathbb{R}^{m+k} انتگرال لبگ داشته باشد، در مشابه قضیه ۶.۱۵ داریم که

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+k}} f &= \int_{\mathbb{R}^k} \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x}; \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

در این جا هر نقطه در \mathbb{R}^{m+k} را به صورت $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ نوشته‌ایم، که در آن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$. این مطلب را می‌توان با توسیع روشی که برای اثبات حالت دو بعدی آن بکار رفته است ثابت کرد، ولی ما از ذکر جزئیات آن صرف نظر می‌کنیم.

۸.۱۵ آزمون تنلی - هابسن^۱ برای انتگرالپذیری

چه تابعهائی بر \mathbb{R}^2 انتگرال لبگ دارند؟ قضیه زیرین شرط کافی مفیدی برای انتگرالپذیری بدست می‌دهد. برای اثبات آن از قضیه فویننی استفاده می‌شود.

قضیه ۸.۱۵ فرض کنیم f بر \mathbb{R}^2 اندازه‌پذیر باشد و دست کم یکی از دو انتگرال مکرر

$$\int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} |f(x, y)| dy \right] dx \quad \text{یا} \quad \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} |f(x, y)| dx \right] dy$$

وجود داشته باشد. در این صورت:

$$f \in L(\mathbb{R}^2) \quad (\text{آ})$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f &= \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx \right] dy & (\text{ب}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

برهان. به خاطر قضیه فویننی، قسمت (ب) از قسمت (آ) نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (آ) نیز از قضیه فویننی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که انتگرال مکرر $\int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} |f(x, y)| dx \right] dy$ وجود داشته باشد. دنباله صعودی از تابعهای پله‌ای نامنفی $\{s_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s_n(x, y) = \begin{cases} n & , \quad |x| \leq n \text{ و } |y| \leq n \\ 0 & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $f_n(x, y) = \min\{s_n(x, y), |f(x, y)|\}$. چون s_n و $|f|$ هر دو، اندازه پذیرند، پس f_n اندازه پذیر خواهد بود. همچنین داریم

$$0 \leq f_n(x, y) \leq s_n(x, y),$$

پس f_n تحت تسلط تابعی است که انتگرال لبتگ دارد. بنابراین، $f_n \in L(\mathbb{R}^2)$ از این روی می‌توان قضیه فویننی را برای f_n بکار برد، و با توجه به نامساویهای $0 \leq f_n(x, y) \leq |f(x, y)|$ نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f_n &= \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f_n(x, y) dx \right] dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} |f(x, y)| dx \right] dy. \end{aligned}$$

چون $\{f_n\}$ صعودی است، نامساوی فوق نشان می‌دهد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f_n$ وجود دارد. بنا بر قضیه لوی (مشابه دو بعدی قضیه ۱۰.۲۴)، $\{f_n\}$ تقریباً همه جا بر \mathbb{R}^2 به تابع حلی در $L(\mathbb{R}^2)$ همگراست. اما وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، $f_n(x, y) \rightarrow |f(x, y)|$ ، پس $|f| \in L(\mathbb{R}^2)$. چون f اندازه پذیر است، نتیجه می‌شود که $f \in L(\mathbb{R}^2)$. یعنی (آ) برقرار است. اگر انتگرال مکرر دیگر وجود داشته باشد، اثبات به همین گونه خواهد بود.

۹.۱۵ تبدیلهای مختصات

در نظریه انتگرالگیری چندگانه یکی از مهمترین نتیجهها دستور تغییرمتغیرها است. این دستور توسیع دستور

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t) dt$$

است، که در قضیه ۳۶.۷ برای انتگرالهای ریمان، با فرض این که g بر بازه‌ای چون $T = [c, d]$ دارای مشتق پیوسته باشد و f بر نقش $g(T)$ پیوسته باشد، ثابت شد. حالت خاصی را که در آن g' بر T هرگز صفر نشود (در نتیجه دارای علامت پایا باشد) در نظر می‌گیریم. هرگاه g' بر T مثبت باشد، آنگاه g صعودی است، پس $g(c) < g(d)$ ، $g(T) = [g(c), g(d)]$ ، و دستور بالا را می‌توان به صورت زیرین نوشت:

$$\int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f[g(t)]g'(t) dt.$$

از سوی دیگر، هرگاه g' بر T منفی باشد، آنگاه $g(T) = [g(d), g(c)]$ و دستور بالا به صورت

$$\int_{g(T)} f(x) dx = - \int_T f[g(t)]g'(t) dt$$

درمی‌آید. بنا براین، دستور

$$(۱۱) \quad \int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f[g(t)] |g'(t)| dt$$

هر دو حالت را در برمی‌گیرد. معادله (۱۱) برای حالت $c > d$ نیز معتبر است، و این شکل از (۱۱) است که برای انتگرالهای چندگانه تعمیم داده می‌شود. تابع g که متغیرها را تبدیل می‌کند باید جای خود را به تابعی برداری به نام تبدیل مختصات، که به صورت زیر تعریف می‌شود، بدهد.

تعریف ۹.۱۵ فرض کنیم T یک زیرمجموعه باز \mathbb{R}^n باشد. تابع برداری $g: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ را یک تبدیل مختصات بر T می‌نامیم در صورتی که دارای این سه خاصیت باشد:

(آ) $g \in C^1$ بر T باشد؛

(ب) g بر T یک به یک باشد؛

(ج) به ازای هر t در T ، $J_g(t) = \det Dg(t) \neq 0$.

تبره. یک تبدیل مختصات گاهی یک دایرسانی نامیده می‌شود.

خاصیت (آ) بیان می‌کند که g بر T مشتقپذیر پیوسته است. از قضیه ۴.۱۳ می‌دانیم که یک تابع که مشتقپذیر پیوسته باشد در نزدیکی هر نقطه که در ترمینان ژاکوبی آن صفر نشود یک به یک موضعی است. در خاصیت (ب) فرض شده است که g بر T یک به یک کلی است. این فرض وجود معکوس کلی g^{-1} را که بر نقش $g(T)$ تعریف شده و یک به یک است تضمین می‌کند. از خاصیت‌های (آ) و (ج) نتیجه می‌شود که g یک نگاشت باز است (بنابر قضیه ۵.۱۳). همچنین، g^{-1} بر $g(T)$ مشتقپذیر پیوسته می‌باشد (بنابر قضیه ۶.۱۳).
خاصیت‌های دیگر تبدیلهای مختصات از خاصیت ضربپذیری در ترمینانهای ژاکوبی مذکور در زیر بدست خواهند آمد.

قضیه ۱۰.۱۵ (قضیه ضرب برای در ترمینانهای ژاکوبی). فرض کنیم g بر مجموعه باز T در R^n مشتقپذیر، و h بر نقش $g(T)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت ترکیب $k = h \circ g$ بر T مشتقپذیر است، و به ازای هر t در T

$$(۱۲) \quad J_k(t) = J_h[g(t)]J_g(t).$$

برهان. بنابر قاعده زنجیره‌ای (قضیه ۷.۱۲)، تابع مرکب k بر T مشتقپذیر است، و بنابر شکل ماتریسی قاعده زنجیره‌ای، ماتریسهای ژاکوبی متناظر آنها به صورت زیرین بهم مربوطند:

$$(۱۳) \quad Dk(t) = Dh[g(t)]Dg(t).$$

از نظریه در ترمینانها می‌دانیم که $\det(AB) = \det A \det B$ ، پس رابطه (۱۳) رابطه (۱۲) را ایجاب می‌کند.

این قضیه نشان می‌دهد که اگر g یک تبدیل مختصات بر T و h یک تبدیل مختصات بر $g(T)$ باشند، تابع مرکب k یک تبدیل مختصات بر T خواهد بود. همچنین هر گاه $h = g^{-1}$ ، آنگاه

$$J_k(t) = ۱ \quad \text{و} \quad k(t) = t, \quad T \text{ در } t$$

پس $J_h[g(t)]J_g(t) = ۱$ و g^{-1} یک تبدیل مختصات بر $g(T)$ است. تبدیل مختصات g و معکوس آن g^{-1} تناظری یک به یک بین زیرمجموعه‌های باز T و زیرمجموعه‌های باز $g(T)$ ، و همچنین بین زیرمجموعه‌های فشرده T و زیرمجموعه‌های فشرده $g(T)$ ایجاد می‌کنند. در مثالهای زیرین چند تبدیل مختصات متداول نشان داده می‌شوند.

مثال ۱ مختصات قطبی در \mathbb{R}^2 . در این حالت T را به این صورت اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(t_1, t_2) \mid t_1 > 0, 0 < t_2 < 2\pi\},$$

و فرض می‌کنیم تابع $g = (g_1, g_2)$ بر T به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$g_1(\mathbf{t}) = t_1 \cos t_2, \quad g_2(\mathbf{t}) = t_1 \sin t_2.$$

رسم بر این است که مؤلفه‌های \mathbf{t} را با (r, θ) ، به جای (t_1, t_2) ، نشان می‌دهند. تبدیل مختصات g هر نقطه (r, θ) در T را روی نقطه (x, y) در $g(T)$ که با دستوره‌های آشنای

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

داده می‌شود می‌نگارد. نقش $g(T)$ مساوی مجموعه $\{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ در \mathbb{R}^2 است، و دترمینان ژاکوبی g عبارت است از

$$J_g(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

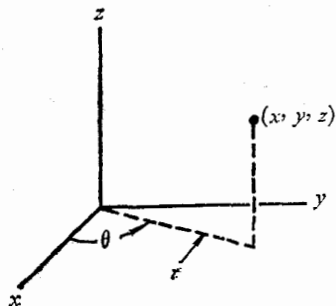
مثال ۲ مختصات استوانه‌ای در \mathbb{R}^3 . در این جا می‌نویسیم T و $\mathbf{t} = (r, \theta, z)$ را به صورت زیرین اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(r, \theta, z) \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}.$$

تبدیل مختصات g هر نقطه (r, θ, z) در T را روی نقطه (x, y, z) در $g(T)$ که با معادله‌های

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

داده می‌شود می‌نگارد.



شکل ۳.۱۵

نقش $g(T)$ مساوی مجموعه $\{(x, 0, 0) \mid x \geq 0\}$ در \mathbb{R}^3 است، و دترمینان ژاکوبی g عبارت است از

$$J_g(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

معنی هندسی r ، θ ، و z در شکل ۳.۱۵ نشان داده شده است.

مثال ۳ مختصات کروی در \mathbb{R}^3 . در این حالت می‌نویسیم $\mathbf{t} = (\rho, \theta, \varphi)$ و T را به صورت زیرین اختیار می‌کنیم:

$$T = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}.$$

تبدیل مختصات g هر نقطه (ρ, θ, φ) در T را روی نقطه (x, y, z) در $g(T)$ که با معادله‌های

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi$$

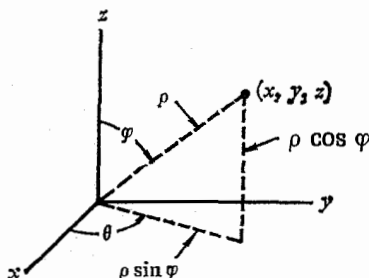
داده می‌شوند می‌نگارد. نقش $g(T)$ مساوی مجموعه

$$\mathbb{R}^3 - [\{(x, 0, 0) \mid x \geq 0\} \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}]$$

است، و دترمینان ژاکوبی g عبارت است از

$$J_g(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi.$$

معنی هندسی ρ ، θ ، و φ در شکل ۴.۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۴.۱۵

مثال ۴ تبدیلهای خطی در \mathbb{R}^n . فرض کنیم $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تبدیلی خطی باشد که با ماتریس $(a_{ij}) = m(g)$ نمایش داده می‌شود، پس

$$g(t) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} t_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} t_j \right).$$

در این صورت $g = (g_1, \dots, g_n)$ ، که در آن $g_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j$ ، و ماتریس ژاکوبی g عبارت است از

$$Dg(t) = (D_j g_i(t)) = (a_{ij}).$$

بنابراین دترمینان ژاکوبی $J_g(t)$ پایا، و مساوی $\det(a_{ij})$ ، یعنی دترمینان ماتریس (a_{ij}) است. ما این را دترمینان g نیز می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\det g = \det(a_{ij}).$$

تبدیل خطی g که بر \mathbb{R}^n یک به یک باشد ناستثنائی نامیده می‌شود. خاصیت‌های مقدماتی تبدیلهای ناستثنائی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n که در پائین ذکر می‌شوند مورد استفاده قرار خواهند گرفت. (برهانهای آنها را می‌توان در هر کتاب درسی جبر خطی یافت؛ همچنین ر. ک. کتاب مرجع ۰۱۰۴).

تبدیل خطی g وقتی، و فقط وقتی، ناستثنائی است که ماتریس آن $A = m(g)$ دارای معکوس A^{-1} باشد بقسمی که $AA^{-1} = I$ ، که در آن I ماتریس همانی (ماتریس تبدیل همانی) است. در این حالت A را نیز ناستثنائی می‌نامند. ماتریس A که $n \times n$ باشد، وقتی، و فقط وقتی، ناستثنائی است که $\det A \neq 0$. بنابراین، تابع خطی g وقتی، و فقط وقتی، یک تبدیل مختصات است که $\det g \neq 0$.

هر تبدیل خطی ناستثنائی مانند g را می‌توان به صورت تجزیه‌ای از سه نوع بخصوص از تبدیلهای ناستثنائی به نام تبدیلهای مقدماتی بیان کرد، که ما آنها را با عنوانهای نوع a ، نوع b ، و نوع c متمایز می‌سازیم. این تبدیلهای به صورت زیرین تعریف می‌شوند:

نوع a : $g_a(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) = (t_1, \dots, \lambda t_k, \dots, t_n)$ ، که در آن $\lambda \neq 0$. با بیان دیگر می‌توان گفت که، g_a یکی از مؤلفه‌های t را در اسکالر ناصفری چون λ ضرب می‌کند. در حالت خاص، g_a بردارهای مختصات یکه را بدین صورت می‌نگارد:

$$g_a(u_i) = u_i, \quad i \neq k, \quad g_a(u_k) = \lambda u_k, \quad k$$

ماتریس g_a را می‌توان از ضرب عضوهای سطر k ام ماتریس همانی در λ بدست آورد. همچنین $\det g_a = \lambda$.

نوع $b: g_b(t_1, \dots, t_k, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_k + t_j, \dots, t_n)$ که در آن $j \neq k$. بنا براین، فقط به جای یکی از مؤلفه‌های t مجموع آن با مؤلفه‌های دیگر را قرار می‌دهد. در حالت خاص، g_b بردارهای مختصات را به صورت زیر می‌نگارد:

$$g_b(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_j, \quad k \neq j, \quad \text{با شرط}$$

$$g_b(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i, \quad i \neq k$$

ماتریس g_b را می‌توان این طور بدست آورد که در ماتریس همانی I سطر k ام را با مجموع سطر k ام و سطر j م عوض کرد. همچنین $\det g_b = 1$.

نوع $c: g_c(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_n)$ که در آن $i \neq j$. یعنی، به ازای دو مقدار i و j که $i \neq j$ ، g_c مؤلفه‌های i م و j م را با یکدیگر عوض می‌کند. در حالت خاص، به ازای هر i و k که $k \neq j$ و $k \neq i$

$$g_c(\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k \quad \text{و} \quad g_c(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i, \quad g_c(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j$$

ماتریس g_c همان ماتریس همانی است که سطرهای i م و j م آن باهم عوض شده‌اند. در این حالت $\det g_c = -1$.

معکوس یک تبدیل مقدماتی تبدیل دیگری از همان نوع است. ماتریس یک تبدیل مقدماتی را یک ماتریس مقدماتی نامند. با ضرب متوالی ماتریسهای مقدماتی از طرف چپ در ماتریس نااستثنائی A ، می‌توان A را به ماتریس همانی I تبدیل کرد. (این همان فرایند گاوس - ژردان در جبر خطی است که با آن آشنا هستید.) بنا براین،

$$I = T_1 T_2 \dots T_r A,$$

که در آن هر T_k یک ماتریس مقدماتی است. از این روی،

$$A = T_r^{-1} \dots T_2^{-1} T_1^{-1}.$$

اگر $A = m(\mathbf{g})$ ، از رابطه بالا می‌توان متناظر \mathbf{g} را به صورت تجزیه‌ای از سازه‌ها درآورد که هر سازه آن یک تبدیل مقدماتی باشد.

۱۰.۱۵ دستور تبدیل برای انتگرالهای چندگانه

بقیه این فصل اختصاص دارد به اثبات دستور تبدیل زیرین برای انتگرالهای چندگانه.

قضیه ۱۱.۱۵ فرض کنیم T یک زیر مجموعه باز \mathbf{R}^n ، و \mathbf{g} یک تبدیل مختصات بر T باشد. فرض کنیم که تابع حقیقی f بر نقش $\mathbf{g}(T)$ تعریف شده باشد و انتگرال لیگ $\int_{\mathbf{g}(T)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد. در این صورت انتگرال لیگ

$$\int_T f[g(t)] |J_g(t)| dt$$

نیز وجود دارد و

$$(۱۴) \quad \int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f[g(t)] |J_g(t)| dt.$$

برهان قضیه ۱۱-۱۵ به سه قسمت تقسیم شده است. قسمت ۱ نشان می‌دهد که دستور برای هر تبدیل مختصات خطی α برقرار است. به عنوان نتیجه‌ای از آن، رابطه

$$\mu[\alpha(A)] = |\det \alpha| \mu(A)$$

را برای هر زیرمجموعه \mathbb{R}^n مانند A که دارای اندازه لبگ متناهی است بدست می‌آوریم. در قسمت ۲ تبدیل مختصات کلی g را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که وقتی f تابع مشخص‌کننده یک مکعب فشرده باشد، (۱۴) برقرار است. از این نتیجه می‌شود که به ازای هر مکعب فشرده K در $g(T)$

$$(۱۵) \quad \mu(K) = \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt.$$

این درازترین قسمت برهان است. در قسمت ۳، با استفاده از معادله (۱۵)، دستور (۱۴) را به شکل کلی خود نتیجه می‌گیریم.

۱۱-۱۵ برهان دستور تبدیل برای تبدیلهای مختصات خطی

قضیه ۱۲-۱۵ فرض کنیم $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی باشد. هرگاه انتگرال لبگ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال لبگ

$$\int_{\mathbb{R}^n} f[\alpha(t)] |J_\alpha(t)| dt$$

نیز وجود دارد، و دو انتگرال با هم متساویند.

برهان. ابتدا خاطر نشان می‌سازیم که هرگاه قضیه برای α و β درست باشد، آنگاه برای ترکیب $\gamma = \alpha \circ \beta$ نیز چنین است، زیرا چون $J_\gamma(t) = J_\alpha[\beta(t)] J_\beta(t)$

پس

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f[\alpha(t)] |J_\alpha(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f[\alpha[\beta(t)]] |J_\alpha[\beta(t)]| |J_\beta(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f[\gamma(t)] |J_\gamma(t)| dt. \end{aligned}$$

بنابراین، چون هر تبدیل خطی ناستثنائی α ترکیبی از تبدیلهای مقدماتی است، کافی است قضیه را برای هر تبدیل مقدماتی ثابت کنیم. همچنین کافی است فرض کنیم که $f \geq 0$.

فرض می‌کنیم α از نوع a باشد. برای آسان شدن مطلب، فرض می‌کنیم که α آخرین مؤلفه t را در اسکالر ناصغری چون λ ضرب کند، یعنی

$$\alpha(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{n-1}, \lambda t_n).$$

در این صورت $|J\alpha(t)| = |\det \alpha| = |\lambda|$ با بکار بردن قضیه فوینی، انتگرال f روی \mathbb{R}^n را به صورت یک انتگرال مکرر مرکب از یک انتگرال $(n-1)$ بعدی روی \mathbb{R}^{n-1} و یک انتگرال یک بعدی روی \mathbb{R}^1 می‌نویسیم. برای انتگرال روی \mathbb{R}^1 از قضیه ۱۷.۱۰ (ب) و (ج) استفاده می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[|\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda t_n) dt_n \right] dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f[\alpha(t)] |J\alpha(t)| dt_n \right] dt_1 \dots dt_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f[\alpha(t)] |J\alpha(t)| dt, \end{aligned}$$

که در آن در آخرین مرحله از قضیه تلی - هابسن استفاده شده است. از این نتیجه می‌شود که قضیه برای وقتی که α از نوع a است برقرار است. اگر α از نوع b باشد، برهان شبیه همان است جز این که در این حالت قضیه ۱۷.۱۰ (آ) را در مورد انتگرال یک بعدی بکار می‌بریم. در این حالت $|J\alpha(t)| = 1$. بالاخره، اگر α از نوع c باشد، فقط کافی است قضیه فوینی را برای تعویض ترتیب عمل انتگرالگیری روی مختصات z_i و z_m بکار ببریم. در این حالت نیز $|J\alpha(t)| = 1$. به عنوان نتیجه‌ای فوری داریم:

قضیه ۱۳.۱۵ هرگاه $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی، و A یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n باشد قسمی که انتگرال لبگ $\int_{\alpha(A)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ وجود داشته باشد، آنگاه انتگرال لبگ $\int_A f[\alpha(t)] |J\alpha(t)| dt$ نیز وجود دارد، و دو انتگرال با هم متساویند.

پرهان. فرض کنیم اگر $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ ، $\mathbf{x} \in \alpha(A)$ و در غیر این صورت $\bar{f}(\mathbf{x}) = 0$ در این صورت،

$$\begin{aligned} \int_{\alpha(A)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}[\alpha(t)] |J_{\alpha}(t)| dt \\ &= \int_A f[\alpha(t)] |J_{\alpha}(t)| dt. \end{aligned}$$

رابطه زیرین که بین اندازه A و اندازه $\alpha(A)$ است نتیجه‌ای از قضیه ۱۳.۱۵ می‌باشد.

قضیه ۱۴.۱۵ فرض کنیم $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل مختصات خطی باشد. هرگاه A یک زیرمجموعه \mathbb{R}^n با اندازه لبگ متناهی $\mu(A)$ باشد، آنگاه $\alpha(A)$ نیز دارای اندازه لبگ متناهی است و

$$(۱۶) \quad \mu[\alpha(A)] = |\det \alpha| \mu(A).$$

برهان. می‌نویسیم $A = \alpha^{-1}(B)$ که در آن $B = \alpha(A)$. چون α^{-1} نیز یک تبدیل مختصات است، داریم

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A d\mathbf{x} = \int_{\alpha^{-1}(B)} d\mathbf{x} = \int_B |\det \alpha^{-1}| dt \\ &= |\det \alpha^{-1}| \mu(B). \end{aligned}$$

چون $B = \alpha(A)$ و $\det(\alpha^{-1}) = (\det \alpha)^{-1}$ ، پس رابطه (۱۶) نتیجه خواهد شد.

قضیه ۱۵.۱۵ هرگاه A یک زیرمجموعه فشرده \mathbb{R}^n ، و دارای اندازه ژردان باشد، آنگاه به‌ازای هر تبدیل مختصات خطی $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، نقش $\alpha(A)$ مجموعه‌ای است فشرده و دارای اندازه ژردان و محتوای آن از معادله زیرین بدست می‌آید:

$$c[\alpha(A)] = |\det \alpha| c(A).$$

برهان. مجموعه $\alpha(A)$ فشرده است زیرا α بر A پیوسته است. برای اثبات قضیه مانند اثبات قضیه ۱۴.۱۵ استدلال می‌کنیم. اما، در این حالت، همه انتگرالها هم به‌عنوان انتگرال لبگ و هم به‌عنوان انتگرال ریمان وجود خواهند داشت.

۱۲.۱۵ برهان دستور تبدیل برای تابع مشخص کننده یک مکعب فشرده

این بخش حاوی قسمت ۲ از برهان قضیه ۱۱.۱۵ است. در سراسر بخش فرض می‌کنیم که g یک تبدیل مختصات بر مجموعه‌ای باز چون T در \mathbb{R}^n باشد. هدف ما این است که ثابت کنیم که به‌ازای هر مکعب فشرده K در T ،

$$\mu(K) = \int_{g^{-1}(K)} |J_g(T)| dt.$$

مطالب كمكى مورد نیاز برای اثبات این دستور با عنوان لم مشخص شده اند. برای كمك به ساده شدن جزئیات، نمادهای مناسب دیگری را معرفی می‌کنیم. به جای متر اقلیدسی متداول برای \mathbb{R}^n ، متر d را که به صورت

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

تعریف می‌شود بکار می‌بریم. این متر در مثال ۹، بخش ۱۳.۳، معرفی شده بود. فقط در این بخش به جای $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ می‌نویسیم $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

با این متر، گوی $B(\mathbf{a}; r)$ به مرکز \mathbf{a} و شعاع r یک مکعب n بعدی است که مرکز آن \mathbf{a} ، و درازای ضلع آن $2r$ است؛ یعنی، $B(\mathbf{a}; r)$ حاصل ضرب دکارتی n بازه یک بعدی است، که درازای هر یک $2r$ می‌باشد. اندازه هر چنین مکعبی $(2r)^n$ ، یعنی حاصل ضرب درازاهای اضلاع آن، می‌باشد.

هرگاه $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تبدیلی خطی باشد که با ماتریس (a_{ij}) نمایش داده شده باشد، یعنی

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right),$$

آنگاه

$$(17) \quad \|\alpha(\mathbf{x})\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \|\mathbf{x}\| \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$(18) \quad \|\alpha\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

این رابطه متر $\|\alpha - \beta\|$ را بر فضای همه تبدیلهای خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n تعریف می‌کند. اولین لم بعضی از خاصیت‌های این متر را بدست می‌دهد.

لم ۱ فرض کنیم α د β تبدیلهائی خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n باشند. در این صورت:

(آ) به ازای یک مقدار \mathbf{x} با شرط $\|\mathbf{x}\| = 1$ ، $\|\alpha\| = \|\alpha(\mathbf{x})\|$ ،

(ب) به ازای هر \mathbf{x} در \mathbb{R}^n ، $\|\alpha(\mathbf{x})\| \leq \|\alpha\| \|\mathbf{x}\|$ ،

(ج) $\|\alpha \circ \beta\| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$ ،

(د) $\|I\| = 1$ ، که در آن I تبدیل همانی است.

پوهان. فرض می‌کنیم که $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ به ازای $i = p$ حاصل شود. اگر $a_{pj} \geq 0$ را مساوی ۱، اگر $a_{pj} < 0$ را مساوی -۱، و اگر $x_j, z, j \neq p$ را مساوی ۰ اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$\|\alpha\| = \|\alpha(\mathbf{x})\| \text{ و } \|\mathbf{x}\| = 1,$$

یعنی (آ) برقرار است.

قسمت (ب) بی‌درنگ از (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شود. برای اثبات (ج)، از (ب) استفاده کرده می‌نویسیم

$$\|(\alpha \circ \beta)(\mathbf{x})\| = \|\alpha(\beta(\mathbf{x}))\| \leq \|\alpha\| \|\beta(\mathbf{x})\| \leq \|\alpha\| \|\beta\| \|\mathbf{x}\|.$$

اگر \mathbf{x} را با شرط $\|\mathbf{x}\| = 1$ بقسمی اختیار کنیم که $\|(\alpha \circ \beta)(\mathbf{x})\| = \|\alpha \circ \beta\|$ ، قسمت (ج) بدست می‌آید.

بالاخره، هرگاه \mathbf{I} تبدیل همانی باشد، آنگاه در (۱۸) هر مجموع

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1,$$

پس $\|\mathbf{I}\| = 1$.

تبدیل مختصات \mathbf{g} بر T مشتق‌پذیر است، پس به‌ازای هر \mathbf{t} در T ، مشتق کل \mathbf{g} ، یعنی $\mathbf{g}'(\mathbf{t})$ ، یک تبدیل خطی از \mathbf{R}^n به \mathbf{R}^n است که با ماتریس ژاکوبی

$$D\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (D_j g_i(\mathbf{t}))$$

نمایش داده می‌شود. بنابراین، اگر در (۱۸) فرض کنیم که $\alpha = \mathbf{g}'(\mathbf{t})$ ، خواهیم داشت

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |D_j g_i(\mathbf{t})|.$$

ملاحظه می‌کنیم که $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ تابعی پیوسته از \mathbf{t} است زیرا همه $D_j g_i$ ها بر T پیوسته‌اند.

اگر Q یک زیرمجموعه فشرده T باشد، هر تابع $D_j g_i$ بر Q کراندار است؛ از این روی $\|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\|$ نیز بر Q کراندار خواهد بود. تعریف می‌کنیم

$$(۱۹) \quad \lambda_g(Q) = \sup_{\mathbf{t} \in Q} \|\mathbf{g}'(\mathbf{t})\| = \sup_{\mathbf{t} \in Q} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |D_j g_i(\mathbf{t})| \right\}.$$

لم زیر بیان می‌کند که نقش $\lambda_g(Q)$ مکعب Q با درازای ضلع $2r$ در مکعب دیگری به‌درازای ضلع $2r \lambda_g(Q)$ واقع است.

لم ۲ فرض کنیم $Q = \{x \mid \|x - a\| \leq r\}$ یک مکعب فشرده با درازای ضلع $2r$ باشد که در T قرار دارد. در این صورت به ازای هر x در Q ، این رابطه را داریم:

$$(۲۰) \quad \|g(x) - g(a)\| \leq r \lambda_g(Q).$$

بنابراین، $g(Q)$ در مکعبی به درازای ضلع $2r \lambda_g(Q)$ واقع است.

برهان. بنا بر قضیه مقدار میانگین برای تابعهای حقیقی،

$$g_i(x) - g_i(a) = \nabla g_i(z_i) \cdot (x - a) = \sum_{j=1}^n D_j g_i(z_i) (x_j - a_j),$$

که در آن z_i برپاره خطی که a و x را به هم وصل می‌کند قرار دارد. بنابراین،

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_i(a)| &\leq \sum_{j=1}^n |D_j g_i(z_i)| |x_j - a_j| \\ &\leq \|x - a\| \sum_{j=1}^n |D_j g_i(z_i)| \leq r \lambda_g(Q), \end{aligned}$$

و این رابطه (۲۰) را ایجاب می‌کند.

تیسره. نامساوی (۲۰) نشان می‌دهد که $g(Q)$ در داخل مکعبی به محتوای

$$(2r \lambda_g(Q))^n = \{\lambda_g(Q)\}^n c(Q)$$

قرار دارد.

لم ۳ هرگاه A یک زیرمجموعه فشرده T ، و دارای اندازه ژردان باشد، آنگاه $g(A)$ یک زیرمجموعه فشرده $g(T)$ ، و دارای اندازه ژردان خواهد بود.

برهان. فشردگی $g(A)$ از پیوستگی g نتیجه می‌شود. چون A اندازه ژردان دارد، کرانه آن، یعنی ∂A ، دارای محتوای صفر است. همچنین، از این که g یک به یک و پیوسته است نتیجه می‌شود که $\partial(g(A)) = g(\partial A)$. بنابراین، برای اتمام برهان، کافی است نشان دهیم که $g(\partial A)$ دارای محتوای صفر است.

به ازای $\varepsilon > 0$ مفروض، تعدادی متناهی بازه باز مانند A_1, \dots, A_m جزء T هستند بقسمی که مجموع اندازه‌های آنها از ε کمتر است، و $\partial A \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i$. بنا بر قضیه ۱۰۱۵، این اجتماع را نیز می‌توان به صورت اجتماعی از یک دسته شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا مانند $U(\varepsilon)$ درآورد، که مجموع اندازه‌های آنها از ε کمتر باشد. اگر $\varepsilon < 1$ ، می‌توان فرض کرد که هر مکعب در $U(\varepsilon)$ محتوا در $U(1)$ باشد. (اگر چنین نباشد، اشتراک هر مکعب در $U(\varepsilon)$ را با هر مکعب در $U(1)$ بدست می‌آوریم و دوباره قضیه ۱۰۱۵ را بکار می‌بریم.) چون ∂A فشرده

است، یک زیردسته متناهی از مکعبها در $U(\varepsilon)$ ، مثلاً، Q_1, \dots, Q_k ، هست که ∂A را می پوشاند. بنا بر لم ۲، نقش $g(\bar{Q}_i)$ در مکعبی با اندازه $c(Q_i) \{\lambda_g(\bar{Q}_i)\}^n$ واقع است. فرض می کنیم که $\lambda = \lambda_g(\bar{U}(1))$. در این صورت $\lambda_g(\bar{Q}_i) \leq \lambda$ زیرا $\bar{Q}_i \subseteq \bar{U}(1)$. بنابراین، $g(\partial A)$ را می توان با تعدادی متناهی از مکعبها، که مجموع اندازه های آنها از $\varepsilon \lambda^n < \lambda^n \sum_{i=1}^k c(Q_i)$ تجاوز نکند، پوشانید. چون این مطلب برای هر $\varepsilon < 1$ برقرار است، نتیجه می شود که $g(\partial A)$ دارای محتوای $g(\partial A)$ ≤ 0 است، پس $g(A)$ دارای اندازه ژردان خواهد بود.

لم زیرین محتوای مکعبی چون Q را با محتوای نقش آن، یعنی $c[g(Q)]$ ، مربوط می سازد.

لم ۴ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد، $g \circ \alpha = h$ که در آن $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی ناستثنائی باشد. در این صورت

$$(۲۱) \quad c[g(Q)] \leq |\det \alpha|^{-1} \{\lambda_h(Q)\}^n c(Q).$$

برهان. از لم ۲ داریم $c[g(Q)] \leq \{\lambda_g(Q)\}^n c(Q)$. با بکار بردن این نامساوی در مورد تبدیل مختصات h ، نتیجه می شود که

$$c[h(Q)] \leq \{\lambda_h(Q)\}^n c(Q).$$

اما، بنا بر قضیه ۱۵.۱۵، $c[h(Q)] = c[\alpha(g(Q))] = |\det \alpha| c[g(Q)]$ ، پس

$$c[g(Q)] = |\det \alpha|^{-1} c[h(Q)] \leq |\det \alpha|^{-1} \{\lambda_h(Q)\}^n c(Q).$$

لم ۵ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد. در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ هست بقسمی که اگر $t \in Q$ و $a \in Q$ ،

$$(۲۲) \quad \text{وقتی که } \|t - a\| < \delta, \quad \|\mathbf{g}'(a)^{-1} \circ \mathbf{g}'(t)\| < 1 + \varepsilon,$$

برهان. تابع $\|\mathbf{g}'(t)\|^{-1}$ پیوسته است، و در نتیجه بر Q کراندار است، یعنی یک مقدار $M > 0$ وجود دارد که به ازای هر $t \in Q$ ، $\|\mathbf{g}'(t)^{-1}\| < M$. بنا بر پیوستگی $\|\mathbf{g}'(t)\|$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد بقسمی که

$$\text{وقتی که } \|t - a\| < \delta, \quad \|\mathbf{g}'(t) - \mathbf{g}'(a)\| < \frac{\varepsilon}{M}$$

هرگاه I تبدیل همانی باشد، آنگاه

$$\mathbf{g}'(a)^{-1} \circ \mathbf{g}'(t) - I(t) = \mathbf{g}'(a)^{-1} \circ \{\mathbf{g}'(t) - \mathbf{g}'(a)\},$$

پس اگر $\delta < \|t - a\|$

$$\|g'(a)^{-1} \circ g'(t) - I(t)\| \leq \|g'(a)^{-1}\| \|g'(t) - g'(a)\| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

از نامساوی مثلثی نتیجه می شود که $\|\alpha\| \leq \|\beta\| + \|\alpha - \beta\|$ با فرض

$$\beta = I(t) \text{ و } \alpha = g'(a)^{-1} \circ g'(t)$$

(۲۲) نتیجه خواهد شد.

لم ۶ فرض کنیم Q یک مکعب فشرده در T باشد. در این صورت

$$c[g(Q)] \leq \int_0^1 |J_g(t)| dt.$$

پرهان. انتگرال طرف راست به عنوان یک انتگرال ریمان وجود دارد زیرا انتگرالده آن بر Q پیوسته و کسراندار است. بنابراین، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، یک افراز Q مانند P_ε هست قسمی که برای هر مجموع ریمان $S(P, |J_g|)$ که در آن P از P_ε ظریفتر باشد، داریم

$$\left| S(P, |J_g|) - \int_0^1 |J_g(t)| dt \right| < \varepsilon.$$

P را از این نوع اختیار می کنیم که به تعدادی متناهی مکعب مانند Q_1, \dots, Q_m تقسیم شده باشد که درازای ضلع هر یک از آنها از δ کمتر باشد، که در آن δ (که تابع ε است) در لم ۵ داده شده است. فرض کنیم a_i مرکز Q_i را نشان دهد. اگر لم ۴ را در مورد Q_i با $\alpha = g'(a_i)^{-1}$ بکار ببریم، نامساوی زیرین بدست می آید:

$$(۲۳) \quad c[g(Q_i)] \leq |\det g'(a_i)| \{\lambda_h(Q_i)\}^n c(Q_i),$$

که در آن $h = \alpha \circ g$ بنا بر قاعده زنجیره ای، داریم $h'(t) = \alpha'(x) \circ g'(t)$ که در آن $x = g(t)$. اما $\alpha'(x) = \alpha$ زیرا α یک تابع خطی است، پس

$$h'(t) = \alpha \circ g'(t) = g'(a_i)^{-1} \circ g'(t).$$

اما، بنا بر لم ۵، اگر $t \in Q_i$ ، $\|h'(t)\| < 1 + \varepsilon$ ، پس

$$\lambda_h(Q_i) = \sup_{t \in Q_i} \|h'(t)\| \leq 1 + \varepsilon.$$

بنابراین، از (۲۳) نامساوی زیرین بدست می آید:

$$c[g(Q_i)] \leq |\det g'(a_i)| (1 + \varepsilon)^n c(Q_i).$$

اگر روی i جمع بندی کنیم، خواهیم داشت

$$c[g(Q)] \leq (1 + \varepsilon)^n \sum_{i=1}^m |\det g'(a_i)| c(Q_i).$$

چون $\det g'(a_i) = J_g(a_i)$ ، مجموع طرف راست یک مجموع ریمان مانند $S(P, |J_g|) < \int_Q |J_g(t)| dt + \varepsilon$ و چون نتیجه می‌شود که

$$c[g(Q)] \leq (1 + \varepsilon)^n \left\{ \int_Q |J_g(t)| dt + \varepsilon \right\}.$$

اما ε دلخواه است، بنا بر این از رابطه فوق نتیجه می‌شود که $c[g(Q)] \leq \int_Q |J_g(t)| dt$.

لم ۷ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $g(T)$ باشد. در این صورت

$$(۲۴) \quad \mu(K) \leq \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt.$$

برهان. انتگرال به‌عنوان یک انتگرال ریمان وجود دارد زیرا انتگرالده آن بر مجموعه فشرده $g^{-1}(K)$ پیوسته است. همچنین، بنابر لم ۳، انتگرال روی $g^{-1}(K)$ مساوی انتگرال روی درون $g^{-1}(K)$ می‌باشد. بنابر قضیه ۱۰.۱۵، می‌توان نوشت

$$\text{int } g^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

که در آن $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است که بست آنها درون $g^{-1}(K)$ قرار دارند. بنا بر این، $\text{int } g^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ ، که در آن هر Q_i بست A_i است. چون انتگرال مذکور در (۲۴) یک انتگرال لبگ نیز هست، می‌توان با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری شمارشپذیر و لم ۶ نوشت

$$\begin{aligned} \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_g(t)| dt \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu[g(Q_i)] \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} g(Q_i)\right) = \mu(K). \end{aligned}$$

لم ۸ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $g(T)$ باشد. در این صورت به‌ازای هر تابع بالائی و ناهنفی f که بر K کراندار باشد، انتگرال

$$\int_{g^{-1}(K)} f[g(t)] |J_g(t)| dt$$

وجود دارد، و این نامساوی برقرار است:

$$(۲۵) \quad \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{g^{-1}(K)} f[\mathbf{g}(t)] |J_g(t)| dt.$$

برهان. فرض کنیم S یک تابع پله‌ای نامنفی بر K باشد. در این صورت یک افزاز K به تعدادی متناهی مکعب مانند K_1, \dots, K_r هست بقسمی که S درون هر K_i پایا است، مثلاً، اگر $\mathbf{x} \in \text{int } K_i$ ، $S(\mathbf{x}) = a_i \geq 0$. با بکار بردن (۲۴) برای هر K_i ، ضرب دو طرف آن در a_i و جمع همه آنها، نامساوی زیرین حاصل می‌شود:

$$(۲۶) \quad \int_K S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_{g^{-1}(K)} S[\mathbf{g}(t)] |J_g(t)| dt.$$

حال فرض می‌کنیم که $\{S_k\}$ دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای نامنفی باشد که تقریباً همه جا بر K به تابع بالائی f همگرا باشد. در این صورت (۲۶) برای هر S_k برقرار است، و اگر در آن $k \rightarrow \infty$ ، نامساوی (۲۵) بدست می‌آید. وجود انتگرال طرف راست از قضیه همگرایی کراندار لبگ نتیجه می‌شود زیرا $f[\mathbf{g}(t)]$ و $|J_g(t)|$ هر دو، بر مجموعه فشرده $g^{-1}(K)$ کراندار است.

قضیه ۱۶.۱۵ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $g(T)$ باشد. در این صورت

$$(۲۷) \quad \mu(K) = \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt.$$

برهان. به خاطر لم ۷، کافی است نامساوی زیر را ثابت کنیم:

$$(۲۸) \quad \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt \leq \mu(K).$$

همان طور که در برهان لم ۷ انجام شد می‌نویسیم

$$\text{int } g^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,$$

که در آن $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته‌ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است و Q_i بست A_i می‌باشد. در این صورت

$$(۲۹) \quad \int_{g^{-1}(K)} |J_g(t)| dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} |J_g(t)| dt.$$

حال با فرض $f = |J_g|$ و استفاده از تبدیل مختصات $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$ ، لم ۸ را در مورد هر انتگرال $\int_{Q_i} |J_g(t)| dt$ بکار می‌بریم. نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$\int_{Q_i} |J_g(t)| dt \leq \int_{g(Q_i)} |J_g[h(u)]| |J_h(u)| du$$

$$= \int_{g(Q_i)} du = \mu[g(Q_i)],$$

که اگر از آن در (۲۹) استفاده کنیم، نامساوی (۲۸) بدست می آید.

۱۳.۱۵ اتمام برهان دستور تبدیل

اینک اتمام برهان دستور

$$(۳۰) \quad \int_{g(T)} f(x) dx = \int_T f[g(t)] |J_g(t)| dt,$$

با شرطهای مذکور در قضیه ۱۱.۱۵ نسبتاً آسان است. یعنی، فرض کنیم که T یک زیرمجموعهٔ باز \mathbb{R}^n ، و g یک تبدیل مختصات بر T باشد، و انتگرال طرف چپ (۳۰) وجود داشته باشد. ثابت می‌کنیم که انتگرال طرف راست نیز وجود دارد و دو انتگرال با هم متساویند. این مطلب را از حالت خاصی که در آن انتگرال طرف چپ روی یک مکعب مانند K وسعت داده شده باشد نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۱۷.۱۵ فرض کنیم K یک مکعب فشرده در $g(T)$ باشد و انتگرال لبگ $\int_K f(x) dx$ وجود داشته باشد. در این صورت انتگرال لبگ

$$\int_{g^{-1}(K)} f[g(t)] |J_g(t)| dt$$

نیز وجود دارد، و دو انتگرال با یکدیگر متساویند.

برهان. کافی است قضیه را برای وقتی ثابت کنیم که f بر K تابعی بالائی باشد. در این صورت دنباله‌ای صعودی از تابعهای پله‌ای مانند $\{s_k\}$ وجود دارد بقسمی که $f \rightarrow s_k$ تقریباً همه جا بر K . بنا بر قضیه ۱۶.۱۵، به ازای هر تابع پله‌ای s_k داریم

$$\int_K s_k(x) dx = \int_{g^{-1}(K)} s_k[g(t)] |J_g(t)| dt.$$

وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $\int_K s_k(x) dx \rightarrow \int_K f(x) dx$ ، حال قرار می‌دهیم

$$f_k(t) = \begin{cases} s_k[g(t)] |J_g(t)| & , t \in g^{-1}(K) \\ 0 & , t \in \mathbb{R}^n - g^{-1}(K) \end{cases} \text{ اگر}$$

در این صورت

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(t) dt = \int_{g^{-1}(K)} s_k[g(t)] |J_g(t)| dt = \int_K s_k(x) dx,$$

پس

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K s_k(x) dx = \int_K f(x) dx.$$

به موجب قضیه لوی (مشابه قضیه ۲۴.۱۰)، دنباله $\{f_k\}$ تقریباً همه جا بر \mathbb{R}^n به تابعی در $L(\mathbb{R}^n)$ همگرا خواهد بود. چون تقریباً همه جا بر \mathbb{R}^n

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = \begin{cases} f[g(t)] |J_g(t)|, & \text{اگر } t \in g^{-1}(K) \\ 0, & \text{اگر } t \in \mathbb{R}^n - g^{-1}(K) \end{cases}$$

پس نتیجه می شود که انتگرال $\int_{g^{-1}(K)} f[g(t)] |J_g(t)| dt$ وجود دارد و مساوی $\int_K f(x) dx$ است، و بدین ترتیب برهان قضیه ۱۷.۱۵ تمام می شود.

برهان قضیه ۱۱.۱۵ حال فرض می کنیم که انتگرال $\int_{g(T)} f(x) dx$ وجود داشته باشد. چون $g(T)$ باز است، می توان نوشت

$$g(T) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

که در آن $\{A_1, A_2, \dots\}$ دسته ای شمارشپذیر از مکعبهای از هم جدا است که بستهای آنها در $g(T)$ قرار دارند. فرض کنیم K_i بست A_i را نشان دهد. با استفاده از خاصیت جمعپذیری شمارشپذیر و قضیه ۱۷.۱۵، داریم

$$\begin{aligned} \int_{g(T)} f(x) dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{K_i} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{g^{-1}(K_i)} f[g(t)] |J_g(t)| dt \\ &= \int_T f[g(t)] |J_g(t)| dt. \end{aligned}$$

تمرین

۱۰۱۵ اگر T ناحیه مثلثی شکل در \mathbb{R}^2 با رأسهای $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، و $(0,1)$ باشد، و $f \in L(T)$ ، ثابت کنید که

$$\int_T f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y) dy \right] dx \\ = \int_0^1 \left[\int_y^1 f(x, y) dx \right] dy.$$

۲.۱۵ به ازای ثابت c ، با شرط $0 < c < 1$ ، تابع f را بر \mathbb{R}^2 به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} (1-y)^c / (x-y)^c, & 0 < x < 1 \text{ و } 0 \leq y < x \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید که $f \in L(\mathbb{R}^2)$ و انتگرال مضاعف $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y)$ را محاسبه کنید.

۳.۱۵ فرض کنید S یک زیرمجموعه اندازه پذیر \mathbb{R}^2 با اندازه متناهی $\mu(S)$ باشد. با استفاده از نمادهای تعریف ۴.۱۵، ثابت کنید که

$$\mu(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S^x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(S_y) dy.$$

۴.۱۵ اگر $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ، قرار دهید $f(x, y) = e^{-xy} \sin x \sin y$ ، در غیر این صورت، قرار دهید $f(x, y) = 0$. ثابت کنید که هر دو انتگرال مکرر

$$\int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dx \right] dy \quad \text{و} \quad \int_{\mathbb{R}^1} \left[\int_{\mathbb{R}^1} f(x, y) dy \right] dx$$

وجود دارند و با هم متساویند، ولی انتگرال مضاعف f روی \mathbb{R}^2 وجود ندارد. همچنین توضیح دهید که چرا این نتیجه با آزمون تلی - هابسن مغایر نیست (قضیه ۸.۱۵).

۵.۱۵ به ازای $0 \leq x \leq 1$ و $0 < y \leq 1$ ، قرار دهید

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)^2,$$

و فرض کنید که $f(0, 0) = 0$. ثابت کنید هر دو انتگرال مکرر

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \quad \text{و} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$$

وجود دارند ولی با یکدیگر متساوی نیستند. این نشان می‌دهد که f بر $[0, 1] \times [0, 1]$ انتگرال لبگ ندارد.

۶.۱۵ فرض کنید $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ، و اگر $(x, y) \in I$ و $(x, y) \neq (0, 0)$ ، قرار دهید $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$ و $f(0, 0) = 0$. با توجه به انتگرالهای مکرر

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \quad \text{و} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$$

ثابت کنید که $f \notin L(I)$.

۷.۱۵ فرض کنید $I = [0, 1] \times [1, +\infty]$ ، و اگر $(x, y) \in I$ ، قرار دهید $f(x, y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. با توجه به انتگرالهای مکرر

$$\int_1^{\infty} \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \quad \text{و} \quad \int_0^1 \left[\int_1^{\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

ثابت کنید که $f \notin L(I)$.

۸.۱۵ دستورهای زیرین برای تبدیل انتگرالهای مضاعف و مثلث در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آمده‌اند. این دستورها را از قضیه ۱۱.۱۵ نتیجه بگیرید و برای معتبر بودن آنها قیدهای لازم بر T و T' را بدست آورید.

$$\int_T \int f(x, y) dx dy = \int_{T'} \int f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (\text{آ})$$

$$\int_T \int \int f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{ب})$$

$$= \int_{T'} \int \int f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

$$\int_T \int \int f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{ج})$$

$$= \int_{T'} \int \int f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

۹.۱۵ (آ) با تبدیل انتگرال به مختصات قطبی، ثابت کنید که

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \pi.$$

(ب) با استفاده از قسمت (آ)، ثابت کنید که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

(ج) با استفاده از قسمت (ب)، ثابت کنید که

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d(x_1, \dots, x_n) = \pi^{n/2}.$$

(د) با استفاده از قسمت (ب)، انتگرالهای $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx$ را به ازای $t > 0$ محاسبه کنید.

۱۰.۱۵ فرض کنید $V_n(a)$ اندازه n گوی n بعدی $B(0; a)$ به شعاع a را نشان دهد. این تمرین برهان دستور

$$V_n(a) = \frac{\pi^{n/2} a^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}$$

را مختصراً شرح می‌دهد.

(آ) با استفاده از یک تغییر متغیر خطی، ثابت کنید که $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(ب) فرض کنید که $n \geq 3$. انتگرال موجود برای $V_n(1)$ را به صورت انتگرالی مکرر مرکب از یک انتگرال $(n-2)$ گونا و یک انتگرال مضاعف بیان کنید، و با استفاده از قسمت (آ) برای یک گوی $(n-2)$ - بعدی، دستور زیرین را بدست آورید:

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1-r^2)^{n/2-1} r dr \right] d\theta = V_{n-2}(1) \frac{2\pi}{n}.$$

(ج) از دستور بازگشتی مذکور در (ب) نتیجه بگیرید که

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}.$$

۱۱.۱۵ به تمرین ۱۰.۱۵ بازگردید و ثابت کنید که به ازای هر $n, k = 1, 2, \dots$

$$\int_{B(0;1)} x_k^2 d(x_1, \dots, x_n) = \frac{V_n(1)}{n+2}.$$

۱۲.۱۵ به تمرین ۱۰.۱۵ بازگردید و انتگرال موجود برای $V_n(1)$ را به صورت یک انتگرال مکرر مرکب از یک انتگرال $(n-1)$ گونا و یک انتگرال یک- بعدی بیان کنید، و از آن دستور بازگشتی

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^1 (1-x^2)^{(n-1)/2} dx$$

را نتیجه بگیرید. با قرار دادن $x = \cos t$ در انتگرال، و استفاده از دستور تمرین ۱۵.۱۵ نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}$$

۱۳.۱۵ اگر $a > 0$ ، قرار دهید

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \leq a\},$$

و فرض کنید $V_n(a)$ اندازه $S_n(a)$ را نشان دهد. این تمرین برهانی از دستور $V_n(a) = 2^n a^n / n!$ را مختصراً بیان می‌کند.

(آ) با استفاده از یک تغییر متغیر خطی، ثابت کنید که $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(ب) با فرض $n \geq 2$ ، انتگرال موجود برای $V_n(1)$ را به صورت انتگرال مکرر مرکب از یک انتگرال یک بعدی و یک انتگرال $(n-1)$ -گونا بیان کنید، و سپس با استفاده از (آ) نشان دهید که

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx = 2V_{n-1}(1)/n,$$

و نتیجه بگیرید که $V_n(1) = 2^n / n!$

۱۴.۱۵ اگر $a > 0$ و $n \geq 2$ ، فرض کنید که $S_n(a)$ مجموعه زیر در \mathbb{R}^n باشد:

$$S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i| + |x_n| \leq a, i = 1, \dots, n-1\}.$$

فرض کنید $V_n(a)$ اندازه $S_n(a)$ را نشان دهد. با استفاده از روش پیشنهاد شده به وسیله تمرین ۱۳.۱۵، ثابت کنید که $V_n(a) = 2^n a^n / n$.

۱۵.۱۵ فرض کنید $Q_n(a)$ «اولین ربع» گوی n بعدی $B(0; a)$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_n(a) =$$

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq a, i = 1, 2, \dots, n, \|\mathbf{x}\| \leq a\}.$$

فرض کنید $f(\mathbf{x}) = x_1 \dots x_n$ و ثابت کنید که

$$\int_{Q_n(a)} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{a^{2n}}{2^n n!}.$$

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می‌توان به آنها مراجعه کرد.

- 15.1 Asplund, E., and Bungart, L., *A First Course in Integration*. Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1966.
- 15.2 Bartle, R., *The Elements of Integration*. Wiley, New York, 1966.
- 15.3 Kestelman, H., *Modern Theories of Integration*. Oxford University Press, 1937.
- 15.4 Korevaar, J., *Mathematical Methods*, Vol. 1. Academic Press, New York, 1968.
- 15.5 Riesz, F., and Sz. Nagy, B., *Functional Analysis*. L. Boron, translator. Ungar, New York, 1955.

قضیه کشی و حساب باقیمانده

۱.۱۶ تابعهای تحلیلی

در فصل ۵ (بخش ۱۵.۵) با مفهوم مشتق برای تابعهای یک متغیر مختلط آشنائی حاصل شد. در نظریه متغیرهای مختلط مهمترین تابعها آنهایی هستند که در هر نقطه یک مجموعه باز دارای مشتق پیوسته می باشند. این تابعها تسوابع تحلیلی نامیده می شوند.

تعریف ۱.۱۶ فرض کنیم که $f = u + iv$ تابع مختلطی باشد که بر مجموعه باز S در صفحه مختلط C تعریف شده باشد. گوئیم f بر S تحلیلی است در صورتی که f' در هر نقطه S وجود داشته و پیوسته باشد.

تبره. اگر T یک زیرمجموعه دلخواه (نه ضرورتاً باز) C باشد، اصطلاح « f بر T تحلیلی است» بدین معنی است که f بر مجموعه بازی که حاوی T است تحلیلی است. خصوصاً، f در نقطه ای مانند z تحلیلی است اگر گرده بازی حول z وجود داشته باشد که f بر آن تحلیلی باشد.

ممکن است تابعی در یک نقطه مشتق داشته باشد بی آن که در آن نقطه

۱. می توان نشان داد که وجود f' بر S بخودی خود پیوستگی f' را بر S ایجاب می کند (این مطلب به وسیله گورسا Goursat در ۱۹۰۵ کشف شد). از این روی می توان تابعی را که صرفاً همه جا بر S مشتق دارد تابع تحلیلی تعریف کرد. اما، پیوستگی f' را قسمتی از تعریف تحلیلی بودن قرار می دهیم، زیرا بدین وسیله می توان بعضی از برهانها را روانتر بیان کرد.

تحلیلی باشد. مثلاً، هرگاه $f(z) = |z|^2$ ، f در o مشتق دارد اما در هیچ نقطه دیگر C مشتق ندارد.

در فصل ۵ با مثالهایی از تابعهای تحلیلی مواجه شدیم. هرگاه $f(z) = z^n$ (که در آن n عدد صحیح مثبتی باشد)، آنگاه f همه جا در C تحلیلی است و $f'(z) = nz^{n-1}$. وقتی که n یک عدد صحیح منفی باشد، معادله $f(z) = z^n$ ، $z \neq 0$ ، تابعی را تعریف می‌کند که غیر از o در هر نقطه دیگر تحلیلی است. چند جمله‌ایها همه جا در C تحلیلی هستند، و تابعهای گویا در همه جا، غیر از نقطه‌هایی که مخرج صفر می‌شود. تابع نمایی، که با دستور $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ، که در آن $z = x + iy$ ، تعریف می‌شود، همه جا در C تحلیلی است و مساوی مشتق خود می‌باشد. تابعهای سینوس و کسینوس مختلط (که ترکیبهایی خطی از تابعهای نمایی هستند) نیز همه جا در C تحلیلی می‌باشند.

اگر $z \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $f(z) = \text{Log } z$ ، که در آن $\text{Log } z$ لگاریتم عمده z است (ر. ک. تعریف ۵۳۰۱). در این صورت f همه جا در C تحلیلی است مگر در نقطه‌هایی چون $z = x + iy$ که در آنها $x \leq 0$ و $y = 0$. در این نقاط، لگاریتم عمده پیوسته نیست. در نقطه‌های دیگر، با تحقیق این که قسمتهای حقیقی و موهومی f در معادله‌های کوشی - ریمان (قضیه ۶۰۱۲) صدق می‌کنند، می‌توان تحلیلی بودن f را باسانی نشان داد.

بعداً خواهیم دید که تحلیلی بودن در یک نقطه مانند z قیدهای سنگینی بر یک تابع تحمیل می‌کند. تحلیلی بودن در z وجود همه مشتقهای بالاتر در یکی از همسایگیهای z را ایجاب می‌کند و، نیز، وجود یک رشته توانی همگرا را که در یکی از همسایگیهای z تابع را نمایش می‌دهد تضمین می‌نماید. این تباین بارزی است با رفتار تابعهای حقیقی، که وجود و پیوستگی مشتق اول وجود مشتق دوم آنها را ایجاب نمی‌کند.

۲۰۱۶ گذرها و خمها در صفحه مختلط

بسیاری از خاصیتهای اساسی تابعهای تحلیلی را می‌توان بسادگی به کمک انتگرالهایی در امتداد خمهایی در صفحه مختلط نتیجه گرفت. این انتگرالها انتگرالهای پیرانهی (یا انتگرالهای خط مختلط) نامیده می‌شوند، و در بخش آینده مورد بحث واقع خواهند شد. در این بخش فهرستی از اصطلاحهایی که برای خمهای مختلف، مانند خمهای شکل ۱۰۱۶، بکار می‌روند می‌آید.

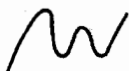
یادآوری می‌کنیم که یک گذر در صفحه مختلط تابعی است مختلط مانند γ که بر بازه فشرده‌ای چون $[a, b]$ پیوسته باشد. نقش $[a, b]$ با γ (نمودار γ) را



خم ژردان



خم بسته



کمان ژردان



کمان

شکل ۱.۱۶

یک خم توصیف شده به وسیله γ نامیم، و گوئیم این خم نقطه‌های $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ را به هم وصل می‌کند.

اگر $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ ، خم را یک کمان با نقطه‌های انتهایی $\gamma(a)$ و $\gamma(b)$ می‌نامیم.

اگر γ بر $[a, b]$ یک به یک باشد، خم را یک کمان ساده، یا یک کمان ژردان، می‌نامند.

اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$ ، خم را یک خم بسته می‌نامند. اگر $\gamma(a) = \gamma(b)$ و γ بر بازه نیمباز $[a, b]$ یک به یک باشد، خم را یک خم بسته ساده، یا یک خم ژردان، می‌خوانند.

گوئیم گذر γ با درازای متناهی است در صورتی که درازای کمان آن، همان طور که در بخش ۱۰.۶ تعریف شده است، متناهی باشد. یادآوری می‌کنیم که γ وقتی، و فقط وقتی، با درازای متناهی است که γ بر $[a, b]$ با تغییر کراندار باشد. (ر. ک. بخش ۲۷.۷ و قضیه ۱۷.۶).

گوئیم گذر γ هموار قطعه‌وار است اگر γ' کراندار، و همه جا بر $[a, b]$ بجز (احتمالاً) در تعدادی متناهی نقطه پیوسته باشد. در این نقطه‌های استثنائی لازم است که هر دو مشتق دست راستی و چپ‌ی وجود داشته باشند. هرگذر که هموار قطعه وار باشد، با درازای متناهی است و درازای کمان آن مساوی است با انتگرال

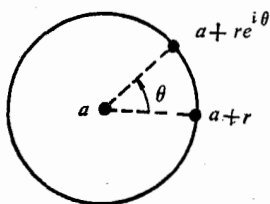
$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

هرگذر بسته که هموار قطعه‌وار باشد، یک حداد نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۱۶ اگر $a \in \mathbb{C}$ و $r > 0$ ، گذر γ را که با معادله

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

تعریف شده باشد، دایره جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r می‌نامند.



شکل ۲.۱۶

تبصره. معنی هندسی $\gamma(\theta)$ در شکل ۲.۱۶ نشان داده شده است. وقتی که θ از ۰ تا 2π تغییر کند، نقطه $\gamma(\theta)$ در جهت عکس حرکت عقربه ساعت یک دور دایره را طی می‌کند.

۳.۱۶ انتگرالهای پیرامنی

انتگرالهای پیرامنی بر حسب انتگرالهای ریمان - اشتیل یس مختلط، که در بخش ۲۷.۷ مورد بحث واقع شدند، تعریف خواهند شد.

تعریف ۳.۱۶ فرض کنیم γ گذری در صفحه مختلط با قلمرو $[a, b]$ باشد، و فرض کنیم تابع مختلط f بر نمودار γ تعریف شده باشد. انتگرال پیرامنی f در امتداد γ با $\int_{\gamma} f$ نموده، و به وسیله معادله

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f[\gamma(t)] d\gamma(t)$$

تعریف می‌شود، در صورتی که انتگرال ریمان - اشتیل یس طرف راست وجود داشته باشد.

نمادگذاری. همچنین این انتگرال را به صورت

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z) dz \quad \text{یا} \quad \int_{\gamma} f(z) dz$$

می‌نویسیم. علامت فریبان z را می‌توان با هر علامت مناسب دیگر عوض کرد. مثلاً،

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(w) dw.$$

هرگاه γ با درازای متناهی باشد، آنگاه شرطی کافی برای وجود $\int_{\gamma} f$ آن است که f بر نمودار γ پیوسته باشد (قضیه ۲۷.۷).

تأثیر تعویض γ با یک گذر هم‌ارز با آن (که در بخش ۱۲.۶ تعریف شد) حداکثر یک تغییر علامت در انتگرال است. در واقع، داریم:

قضیه ۴.۱۶ فرض کنیم γ و δ گذرهائی هم‌ارز باشند که هر دو یک خم مانند Γ را توصیف کنند. هرگاه $\int_{\gamma} f$ وجود داشته باشد، آنگاه $\int_{\delta} f$ نیز وجود دارد. بعلاوه، اگر γ و δ هر دو Γ را در یک جهت رسم کنند،

$$\int_{\gamma} f = \int_{\delta} f,$$

و اگر هر دو آن را در دو جهت مختلف رسم نمایند،

$$\int_{\gamma} f = - \int_{\delta} f.$$

برهان. فرض کنیم $\delta(t) = \gamma[u(t)]$ که در آن u بر $[c, d]$ یکنوای اکید باشد. از دستور تغییر متغیر برای انتگرالهای ریمان - اشتیل بس (قضیه ۷.۷) داریم

$$(۱) \quad \int_{u(c)}^{u(d)} f[\gamma(t)] d\gamma(t) = \int_c^d f[\delta(t)] d\delta(t) = \int_{\delta} f.$$

هرگاه u صعودی باشد، آنگاه $u(d) = b, u(c) = a$ و (۱) به صورت

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f \text{ درمی آید.}$$

هرگاه u نزولی باشد، آنگاه $u(d) = a, u(c) = b$ و (۱) به صورت

$$\int_{\gamma} f = \int_b^a f - \text{درمی آید.}$$

خواننده باسانی می‌تواند خاصیت‌های جمع‌پذیری ذیل را برای انتگرالهای

پیرامنی تحقیق کند.

قضیه ۵.۱۶ فرض کنیم γ گذری با قلمرو $[a, b]$ باشد.

یکم) هرگاه انتگرالهای $\int_{\gamma} f$ و $\int_{\gamma} g$ وجود داشته باشند، آنگاه به‌ازای

هر جفت عدد مختلط α و β انتگرال $\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g)$ وجود دارد، و داریم

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\gamma} f + \beta \int_{\gamma} g.$$

دوم) فرض کنیم γ_1 و γ_2 ، بترتیب، تحدید γ به $[a, c]$ و $[c, b]$ را نشان

دهند، که در آنها $a < c < b$. هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال مذکور در (۲)

وجود داشته باشند، آنگاه سومی نیز وجود دارد و

$$(۲) \quad \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

اکثر گذرهای انتگرالگیری در عمل با درازای متناهی هستند. برای چنین گذرها غالباً قضیه زیر برای تخمین قدر مطلق یک انتگرال پیرامنی بکار می‌رود.

قضیه ۶.۱۶ فرض کنیم γ یک گذر با درازای متناهی $\Lambda(\gamma)$ باشد. هرگاه انتگرال $\int_{\gamma} f$ وجود داشته باشد، و به ازای هر z بر نمودار γ ، $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه این نامساوی برقرار است:

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq M \Lambda(\gamma).$$

برهان. کافی است ملاحظه کنیم که همهٔ مجموعهای ریمان - اشتیلیس که در تعریف $\int_a^b f[\gamma(t)] d\gamma(t)$ بکار می‌روند قدر مطلقشان از $M \Lambda(\gamma)$ تجاوز نمی‌کند.

انتگرالهای پیرامنی روی خمهای هموار قطعه‌وار را می‌توان به‌عنوان انتگرالهای ریمان بیان کرد. قضیه زیرین نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ ۸.۷ است.

قضیهٔ ۷.۱۶ فرض کنیم γ یک گذر هموار قطعه‌وار با قلمرو $[a, b]$ باشد. اگر انتگرال پیرامنی $\int_{\gamma} f$ وجود داشته باشد،

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f[\gamma(t)] \gamma'(t) dt.$$

۴.۱۶ انتگرال در امتداد یک گذر مستدیر به‌عنوان تابعی از شعاع آن

گذری مستدیر مانند γ با شعاع $r \geq 0$ و مرکز a ، که با

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

داده می‌شود، در نظر می‌گیریم. در این بخش انتگرال $\int_{\gamma} f$ را به‌عنوان تابعی از شعاع r مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنیم $\varphi(r) = \int_{\gamma} f$ چون $\gamma'(\theta) = ire^{i\theta}$ ، از قضیهٔ ۷.۱۶ نتیجه می‌شود که

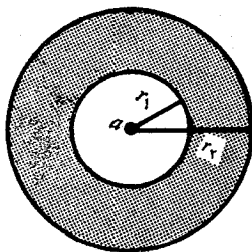
$$(۳) \quad \varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta.$$

وقتی که r روی بازهٔ $[r_1, r_2]$ ، که در آن $r_1 < r_2$ ، $0 \leq r_1$ ، تغییر کند، نقطه‌های $\gamma(\theta)$

یک حلقه دایره را رسم می‌کنند که ما آن را با $A(a; r_1, r_2)$ نشان می‌دهیم. (ر. ک. شکل ۳.۱۶) پس

$$A(a; r_1, r_2) = \{z \mid r_1 \leq |z - a| \leq r_2\}.$$

اگر $r_1 = 0$ ، حلقه دایره گرده بسته‌ای با شعاع r_2 خواهد بود. هرگاه f بر حلقه دایره پیوسته باشد، آنگاه φ بر بازه $[r_1, r_2]$ پیوسته است. هرگاه f بر حلقه دایره تحلیلی باشد، آنگاه φ بر $[r_1, r_2]$ مشتقپذیر است. قضیه زیرین نشان می‌دهد که اگر f همه جا بر حلقه دایره، مگر احتمالاً بر زیرمجموعه‌ای متناهی، تحلیلی باشد، φ بر $[r_1, r_2]$ تابعی است پایا، به شرط آن که f بر این زیرمجموعه متناهی پیوسته باشد.



شکل ۳.۱۶

قضیه ۸.۱۶ فرض کنیم f بر حلقه دایره $A(a; r_1, r_2)$ ، جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه، تحلیلی باشد. در این نقطه‌های استثنائی فرض می‌کنیم که f پیوسته باشد. در این صورت، تابع φ که با رابطه (۳) تعریف می‌شود بر بازه $[r_1, r_2]$ پایا است. بعلاوه، اگر $r_1 = 0$ ، مقدار پایا مساوی ۰ خواهد بود.

برهان. فرض کنیم z_1, \dots, z_n همان نقطه‌های استثنائی باشند که f در آنها تحلیلی نیست. آنها را برحسب زیاد شدن فاصله‌هایشان از مرکز برچسب می‌زنیم، یعنی

$$|z_1 - a| \leq |z_2 - a| \leq \dots \leq |z_n - a|,$$

و فرض می‌کنیم که $R_k = |z_k - a|$. همچنین، فرض کنیم که $R_0 = r_1$ و $R_{n+1} = r_2$.

اجتماع بازه‌های $[R_k, R_{k+1}]$ به ازای $n, \dots, 2, 1, 0$ مساوی بازه $[r_1, r_2]$ است. نشان خواهیم داد که φ بر هر یک از بازه‌های $[R_k, R_{k+1}]$ پایا است. رابطه (۳) را به شکل زیرین می‌نویسیم:

$$g(r, \theta) = f(a + re^{i\theta}) ire^{i\theta} \quad \text{که در آن} \quad \varphi(r) = \int_0^{2\pi} g(r, \theta) d\theta$$

با بکار بردن قاعده زنجیره‌ای، بسادگی نتیجه می‌شود که

$$(۴) \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = ir \frac{\partial g}{\partial r}$$

(تحقیق دستور بالا به خواننده واگذار می‌شود). پیوستگی f پیوستگی مشتقاتی جزئی g ، یعنی $\partial g / \partial r$ و $\partial g / \partial \theta$ ، را ایجاب می‌کند. بنابراین، با مشتگیری زیر علامت انتگرال (قضیه ۴۰۷)، می‌توان $\varphi'(r)$ را بر هر بازه باز $[R_k, R_{k+1}]$ حساب کرد. سپس با استفاده از (۴) و قضیه اساسی دوم حساب انتگرال (قضیه ۳۴۷) این رابطه بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r} d\theta = \frac{1}{ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{ir} \{g(r, 2\pi) - g(r, 0)\} = 0. \end{aligned}$$

اگر قضیه ۱۰۱۲ را بکار بریم، می‌بینیم که φ بر هر زیربازه باز $[R_k, R_{k+1}]$ پایا است. بنا بر پیوستگی، φ بر هر زیربازه بسته $[R_k, R_{k+1}]$ پایا است، و در نتیجه بر اجتماع آنها، یعنی $[r_1, r_2]$ ، نیز چنین خواهد بود. از (۳) نتیجه می‌شود که وقتی که $r \rightarrow 0$ ، $\varphi(r) \rightarrow 0$ ، پس اگر $r_1 = 0$ ، مقدار پایای φ مساوی ۰ خواهد بود.

۵.۱۶ قضیه انتگرال کشی برای يك دایره

حالت خاص قضیه ۸۰۱۶ که در پائین بیان می‌شود دارای اهمیت خاصی است.

قضیه ۹۰۱۶ (قضیه انتگرال کشی برای يك دایره). هرگاه f برگردۀ $B(a; R)$ بجز احتمالاً تعدادی منتهای نقطه، تحلیلی و در این نقطه‌ها پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر گذر مستدیر γ به مرکز a و شعاع R ، $r < R$

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

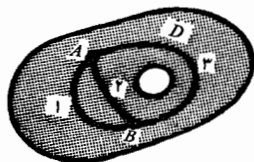
برهان. r_2 را قسمی اختیار می‌کنیم که $r < r_2 < R$ ، و سپس قضیه ۸۰۱۶ را با $r_1 = 0$ بکار می‌بریم.

تصوره. شکل کلیتری از قضیه انتگرال کشی هست که در آن گذر مستدیر γ با

گذر بسته کلیتری عوض می‌شود. این گذرهای کلیتر به وسیله مفهوم همجائی معرفی می‌گردند.

۶.۱۶ خمهای همجا

شکل ۴.۱۶ سه کمان را نشان می‌دهد که هر سه دارای نقطه‌های انتهائی A و B هستند و در ناحیه باز D قرار دارند. کمان ۱ را می‌توان به طور پیوسته به وسیله دسته‌ای از کمانهای میانی، که هر یک در D قرار دارد، به کمان ۲ تغییر شکل داد. دو کمان با این خاصیت را در D با یکدیگر همجا می‌نامیم. کمان ۱ را نمی‌توان (در نتیجه وجود سوراخی که آن را از ۳ جدا می‌کند) به کمان ۳ تغییر شکل داد، پس این دو کمان در D همجا نیستند.



شکل ۴.۱۶

در این بخش تعریف صوری همجائی را می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم که اگر f در D تحلیلی باشد، انتگرالهای پیرامنی f از A تا B در امتداد هر دو گذر که با یکدیگر در D همجا باشند دارای یک مقدارند. با بیان دیگر می‌توان گفت که، مقدار یک انتگرال پیرامنی مانند $\int_A^B f$ با هر تغییر شکل پیوسته گذر تغییر نمی‌کند، به شرط آن که پیرامنهائی میانی در ناحیه‌ای که f در آن تحلیلی است باقی بمانند. این خاصیت انتگرالهای پیرامنی در کاربردهای انتگرالگیری مختلط دارای منتهای درجه اهمیت است.

تعریف ۱۰.۱۶ فرض کنیم γ_0 و γ_1 دو گذر با قلمرو مشترک $[a, b]$ باشند. همچنین یا A نقطه‌های انتهائی γ_0 و γ_1 یکی باشند، یعنی

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \text{ و } \gamma_0(b) = \gamma_1(b) \text{ یا}$$

ب) γ_0 و γ_1 هر دو گذرهای بسته باشند، یعنی

$$\gamma_0(a) = \gamma_0(b) \text{ و } \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$$

فرض کنیم D یک زیرمجموعه C باشد که نمودارهای γ_0 و γ_1 را در برگیرد. در این

صورت γ_0 و γ_1 را در D با یکدیگر همجا نامیم اگر تابعی چون h وجود داشته باشد که بر مستطیل $[a, b] \times [0, 1]$ پیوسته باشد، و مقادیرهای آن در D باشند،
 قسمتی که

(۱) اگر $h(0, t) = \gamma_0(t)$ ، $t \in [a, b]$

(۲) اگر $h(1, t) = \gamma_1(t)$ ، $t \in [a, b]$

علاوه بر این، به ازای هر s در $[0, 1]$ ،

(۳) در حالت (آ)، $h(s, a) = \gamma_0(a)$ و $h(s, b) = \gamma_0(b)$ ؛

یا

(۳ب) در حالت (ب)، $h(s, a) = h(s, b)$.

تابع h را یک همجائی می نامیم.

مفهوم همجائی تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. برای هر s ثابت در $[0, 1]$ ، قرار می‌دهیم $h(s, t) = \gamma_s(t)$. در این صورت γ_s را می‌توان به‌عنوان گذر متحرک میان‌ی در نظر گرفت که از γ_0 ، وقتی که $s = 0$ ، شروع می‌شود و به γ_1 ، وقتی که $s = 1$ ، ختم می‌گردد.

مثال ۱ همجائی با یک نقطه. اگر γ_1 تابع پایائی باشد، نمودار آن یک نقطه است، و اگر γ_0 با γ_1 در D همجا باشد، گوئیم γ_0 در D با یک نقطه همجا است.

مثال ۲ همجائی خطی. هرگاه به ازای هر t در $[a, b]$ ، پاره خطی که $\gamma_0(t)$ و $\gamma_1(t)$ را به هم وصل می‌کند در D قرار گیرد، آنگاه γ_0 و γ_1 در D همجا هستند زیرا تابع تعریف شده با رابطه

$$h(s, t) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_0(t)$$

را می‌توان به‌عنوان یک همجائی اختیار کرد. در این حالت گوئیم γ_0 و γ_1 در D همجای خطی هستند. خصوصاً، هر دو گذر با قلمرو $[a, b]$ در C (صفحه مختلط) یا، به‌طور کلیتر، در هر مجموعه کوژی که نمودارهای این دو گذر را در بر گیرد، همجای خطی می‌باشند.

تصوره. همجائی یک رابطه هم ارزی است.

قضیه زیرین نشان می‌دهد که بین هر دو گذر همجا می‌توان تعدادی متناهی گذر چندضلعی میان‌ی درج نمود، که هر یک با همسایه خود همجای خطی باشد.

قضیه ۱۱.۱۶ (قضیه درج چندضلعی). فرض کنیم γ_0 و γ_1 دو گذر همجا در مجموعه بازی چون D باشند. در این صورت تعدادی متناهی گذر مانند $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ هستند قسمی که

$$(\bar{A}) \quad \alpha_n = \gamma_1 \text{ و } \alpha_0 = \gamma_0$$

(ب) به ازای $1 \leq j \leq n-1$ یک گذر چندضلعی است،

(ج) به ازای $0 \leq j \leq n-1$ α_j در D با α_{j+1} همجای خطی است.

برهان. چون γ_0 و γ_1 در D همجا هستند، یک همجایی مانند h هست که در شرطهای تعریف ۱۰.۱۶ صدق می کند. حال افزایشهای

$$\{s_0, s_1, \dots, s_n\} \text{ برای } [0, 1] \text{ و } \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \text{ برای } [a, b]$$

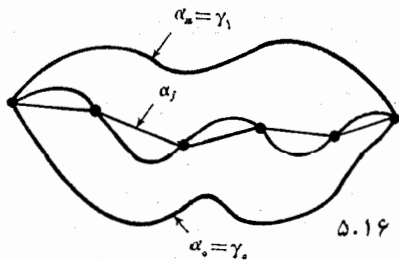
را در نظر می گیریم که بازه ها را به n قسمت مساوی تقسیم کرده باشند، و n را آن قدر بزرگ اختیار می کنیم که نقش هر مستطیل $[t_k, t_{k+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ با h محتوا در گرده بازی چون D_{jk} جزء D باشد. (تحقیق امکان این عمل، که به وسیله پیوستگی یک شکل h صورت می گیرد، به خواننده واگذار می شود.)
در گذر میانی γ_{s_j} که با رابطه

$$\gamma_{s_j}(t) = h(s_j, t), \quad 0 < j < n,$$

مشخص می شود یک گذر چند ضلعی مانند α_j با رأسهای $h(s_j, t_k)$ محاط می کنیم. یعنی،

$$\alpha_j(t_k) = h(s_j, t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

و α_j بر هر زیر بازه $[t_k, t_{k+1}]$ به ازای $0 \leq k \leq n-1$ خطی است. همچنین تعریف می کنیم $\alpha_0 = \gamma_0$ و $\alpha_n = \gamma_1$. (مثالی در شکل ۵.۱۶ داده شده است.)



شکل ۵.۱۶

چهار رأس $\alpha_{j+1}(t_{k+1})$ ، $\alpha_{j+1}(t_k)$ ، $\alpha_j(t_{k+1})$ ، $\alpha_j(t_k)$ همه در گرده D_{jk} واقعند. چون D_{jk} کسوز است، پاره خطهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند نیز در D_{jk} قرار دارند، و در نتیجه به‌ازای هر (s, t) در $[0, 1] \times [t_k, t_{k+1}]$ ، نقطه‌های

$$(5) \quad s\alpha_{j+1}(t) + (1-s)\alpha_j(t)$$

در D_{jk} واقعند. بنابراین، به‌ازای هر (s, t) در $[0, 1] \times [a, b]$ ، نقطه‌های (5) در D قرار دارند، پس α_{j+1} با α_j در D همجای خطی خواهد بود.

۷.۱۶ نامتغیر بودن انتگرالهای پیرامنی با همجایی

قضیه ۱۳.۱۶ فرض کنیم f بر مجموعه‌ی بازی چون D ، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه که در آنها f پیوسته است، تحلیلی باشد. اگر γ_0 و γ_1 دو گذر هموار قطعه‌وار فرض شوند که در D همجا باشند،

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

برهان. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن γ_0 و γ_1 همجای خطی باشند. به‌ازای هر s در $[0, 1]$ ، فرض می‌کنیم

$$\gamma_s(t) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t), \quad t \in [a, b]$$

در این صورت γ_s هموار قطعه‌وار است و نمودار آن در D قرار دارد. می‌نویسیم $\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + s\alpha(t)$ ، که در آن $\alpha(t) = \gamma_1(t) - \gamma_0(t)$ ، و به‌ازای $0 \leq s \leq 1$ ، تعریف می‌کنیم

$$\varphi(s) = \int_{\gamma_s} f = \int_a^b f[\gamma_0(t)] d\gamma_0(t) + s \int_a^b f[\gamma_s(t)] d\alpha(t).$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که $\varphi(0) = \varphi(1)$. در واقع ثابت می‌کنیم که φ بر $[0, 1]$ پایا است.

با استفاده از قضیه ۴۰.۷، $\varphi'(s)$ را به‌وسیله‌ی مشتقگیری زیر علامت انتگرال محاسبه می‌کنیم. چون

$$\frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t) = \alpha(t),$$

نتیجه می‌شود که بنا بر دستور انتگرالگیری به‌طریقه‌ی جزء به جزء (قضیه ۶.۷)،

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \int_a^b f'[\gamma_s(t)] \alpha(t) d\gamma_s(t) + s \int_a^b f'[\gamma_s(t)] \alpha(t) d\alpha(t) \\ &\quad + \int_a^b f[\gamma_s(t)] d\alpha(t) \\ &= \int_a^b \alpha(t) f'[\gamma_s(t)] d\gamma_s(t) + \int_a^b f[\gamma_s(t)] d\alpha(t) \\ &= \int_a^b \alpha(t) f'[\gamma_s(t)] \gamma'_s(t) dt + \int_a^b f[\gamma_s(t)] d\alpha(t) \\ &= \int_a^b \alpha(t) d\{f[\gamma_s(t)]\} + \int_a^b f[\gamma_s(t)] d\alpha(t) \\ &= \alpha(b) f[\gamma_s(b)] - \alpha(a) f[\gamma_s(a)]. \end{aligned}$$

اما، باسانی می توان تحقیق کرد که، آخرین عبارت مساوی صفر است زیرا γ_0 و γ_1 همجا می باشند، پس به ازای هر s در $[0, 1]$ ، $\varphi'(s) = 0$. بنابراین φ بر $[0, 1]$ پایا است. بدین وسیله قضیه برای وقتی که γ_0 و γ_1 در D همجا خطی باشند ثابت می شود.

اگر دو گذر γ_0 و γ_1 در D با یک همجائی کلی h همجا باشند، گذرهائی چندضلعی مانند α_n ، بهمان صورت که در قضیه ۱۱۰۱۶ توصیف شده است، بین آنها درج می کنیم. چون هر گذر چندضلعی هموار قطعه وار است، می توان با چند بار بکار بردن نتیجه ای که هم اکنون ثابت شد بدست آورد که

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\alpha_0} f = \int_{\alpha_1} f = \dots = \int_{\alpha_n} f = \int_{\gamma_1} f.$$

۸۰۱۶ شکل کلی قضیه انتگرال کُشی

حال می توان شکل کلی قضیه کُشی را، که قبلاً به آن اشاره شده بود، باسانی از قضیه های ۹۰۱۶ و ۱۲۰۱۶ نتیجه گرفت. یادآوری می کنیم که یک مداد عبارت است از گذر بسته ای که هموار قطعه وار باشد.

قضیه ۱۳۰۱۶ (قضیه انتگرال کُشی برای مدارهائی که با يك نقطه همجا هستند). فرض کنیم f بر مجموعه بازی چون D ، بجز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه که در آنها f پیوسته فرض می شود، تحلیلی باشد. در این صورت به ازای هر مدار مانند γ که با يك نقطه در D همجا باشد،

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

برهان. چون γ با یک نقطه در D همجا است، γ با یک گذر مستدیر مانند δ در D که شعاع آن بدلیخواه کوچک فرض شود نیز همجا خواهد بود. بنابراین $\int_{\gamma} f = \int_{\delta} f$ و بنا بر قضیه ۹.۱۶، $\int_{\gamma} f = 0$.

تعریف ۱۴.۱۶ مجموعه باز و همبند D را همبند ساده نامیم در صورتی که هر گذر بسته در D با یک نقطه در D همجا باشد.

از نظر هندسی، یک ناحیه همبند ساده ناحیه‌ای است که سوراخ نداشته باشد. قضیه کشی نشان می‌دهد که در یک ناحیه همبند ساده مانند D انتگرال یک تابع تحلیلی دور یک مدار در D صفر است.

۹.۱۶ دستور انتگرال کشی

قضیه زیرین خاصیت شایان توجهی از تابعهای تحلیلی را آشکار می‌سازد. این قضیه مقدار یک تابع تحلیلی در یک نقطه را با مقدارهای این تابع بر خم بسته‌ای که حاوی آن نقطه نباشد ربط می‌دهد.

قضیه ۱۵.۱۶ (دستور انتگرال کشی). فرض کنیم f بر مجموعه بازی چون D تحلیلی، و مدار γ در D با یک نقطه همجا باشد. در این صورت به ازای هر نقطه مانند z در D که بر نمودار γ قرار نداشته باشد،

$$(۶) \quad \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw.$$

برهان. تابع جدید g را بر D به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z}, & \text{اگر } w \neq z \\ f'(z), & \text{اگر } w = z \end{cases}$$

در این صورت g در هر نقطه مانند $w \neq z$ در D تحلیلی است، و در خود نقطه z ، g پیوسته است. اگر قضیه انتگرال کشی را برای g بکار ببریم، نتیجه می‌شود که به ازای هر مدار مانند γ که در D با یک نقطه همجا باشد $\int_{\gamma} g = 0$ اما اگر z بر نمودار γ قرار نداشته باشد، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g &= \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw, \end{aligned}$$

که از این (۶) باثبات می‌رسد.

تفسیر. همین برهان نشان می‌دهد که اگر f بر یک زیرمجموعه متناهی D مانند T تحلیلی نباشد، رابطه (۶) باز هم معتبر است به شرط آن که f بر T پیوسته باشد و z در T نباشد.

انتگرال $\int_{\gamma} (w-z)^{-1} dw$ که در (۶) ظاهر شده است نقش مهمی در نظریه انتگرالگیری مختلط برعهده دارد، و در بخش آینده درباره آن بیشتر بحث خواهد شد. باسانی می‌توان مقدار آن را برای یک گذر مستدیر محاسبه کرد.

مثال. اگر γ یک گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز z و شعاع r باشد، می‌توان نوشت

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$$

در این صورت

$$\gamma'(\theta) = ire^{i\theta} = i\{\gamma(\theta) - z\},$$

و در نتیجه

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta)-z} d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i.$$

تفسیر. در این حالت دستور انتگرال کوشی (۶) بدین شکل در می‌آید:

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

اگر بار دیگر بنویسیم $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$ می‌توان این دستور را به شکل

$$(7) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$$

درآورد. این دستور را می‌توان به عنوان قضیه مقدار میانگین تعبیر کرد که در آن مقدار f در مرکز یک گرده به صورت میانگین مقدارهای آن در کرانه گرده بیان شده باشد. تابع f بر بست گرده، بجز احتمالاً بر یک زیرمجموعه متناهی که در هر نقطه آن f پیوسته است، تحلیلی فرض شده است.

۱۰.۱۶ عددگردشی یک مدار بر حسب یک نقطه

قضیه ۱۰.۱۶. فرض کنیم γ یک مدار و z نقطه‌ای باشد که روی نمودار γ قرار نداشته باشد. در این صورت عددی صحیح مانند n (وابسته به z و γ) وجود دارد بقسمی که

$$(A) \quad \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i n.$$

برهان. فرض کنیم γ دارای قلمرو $[a, b]$ باشد. بنا بر قضیه ۷.۱۶، می‌توان انتگرال موجود در (A) را به صورت انتگرال ریمان زیرین در آورد:

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt.$$

تابع مختلط F را بر بازه $[a, b]$ با این معادله تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t)-z}, \quad a \leq x \leq b$$

برای اثبات قضیه باید نشان دهیم که به ازای عدد صحیحی چون n ، $F(b) = 2\pi i n$ ، گوئیم F بر $[a, b]$ پیوسته، و در هر نقطه پیوستگی γ' دارای مشتق

$$F'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}$$

است. بنا بر این، تابع G هم که به وسیله

$$G(t) = e^{-F(t)} \{\gamma(t) - z\}, \quad t \in [a, b],$$

تعریف شود بر $[a, b]$ پیوسته خواهد بود. بعلاوه، در هر نقطه پیوستگی γ'

$$G'(t) = e^{-F(t)} \gamma'(t) - F'(t) e^{-F(t)} \{\gamma(t) - z\} = 0.$$

بنا بر این، به ازای هر t در $[a, b]$ بجز (احتمالاً) تعدادی متناهی نقطه، $G'(t) = 0$ بنا بر پیوستگی، G در سراسر $[a, b]$ پایا است. از این روی، $G(b) = G(a)$. با بیانی دیگر می‌توان گفت که،

$$e^{-F(b)} \{\gamma(b) - z\} = \gamma(a) - z.$$

چون $z \neq \gamma(a) = \gamma(b)$ ، خواهیم داشت

$$e^{-F(b)} = 1,$$

که از آن نتیجه می‌شود که به ازای عدد صحیحی مانند n ، $F(b) = 2\pi i n$. پس برهان قضیه تمام است.

تعریف ۱۲.۱۶ هرگاه نمودار مداد γ حاوی نقطه z نباشد، آنگاه عدد صحیح n را که به وسیله (A) تعریف شده است عددگردشی (یا شاخص) γ بر حسب z می‌نامیم، و با $n(\gamma, z)$ نشان می‌دهیم. پس،

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$$

تبره. حال می توان دستور انتگرال کشی (۶) را دوباره به شکل زیر بیان کرد:

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

اصطلاح «عدد گردشی» را بکار بردیم زیرا $n(\gamma, z)$ یک راه دقیق ریاضی برای شمردن تعداد دفعاتی راکه نقطه $\gamma(t)$ با تغییر t روی بازه $[a, b]$ «دور نقطه z می گردد» بدست می دهد. مثلاً، اگر γ دایره ای جهت دار با جهت مثبت باشد که با رابطه $\gamma(\theta) = z + re^{i\theta}$ ، که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، مشخص شده باشد، قبلاً دیده ایم که عدد گردشی مساوی ۱ است. این مطلب با تعبیر فیزیکی این که نقطه $\gamma(\theta)$ ، وقتی که θ از ۰ تا 2π تغییر کند، در جهت مثبت یک بار دایره را طی می کند هم آهنگی دارد. اگر θ روی بازه $[0, 2\pi n]$ تغییر کند، نقطه $\gamma(\theta)$ ، n بار دور دایره در جهت مثبت می چرخد، و محاسبه ساده ای نشان می دهد که عدد گردشی مساوی n است. از سوی دیگر، هرگاه به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi n$ ، $\delta(\theta) = z + re^{-i\theta}$ ، آنگاه $\delta(\theta)$ ، n بار دور دایره در جهت مخالف می گردد و عدد گردشی آن $-n$ است. گوئیم گذر δ جهت دار با جهت منفی است.

۱۱.۱۶ بی کرانی مجموعه نقاطی که عددگردشیشان صفر است

فرض کنیم Γ نمودار مدار γ را نشان دهد. چون Γ مجموعه ای فشرده است، متمم آن، یعنی $C - \Gamma$ ، یک مجموعه باز است که، بنا بر قضیه ۴.۴، مساوی اجتماعی شمارشپذیر از ناحیه های باز از هم جدا (که عبارتند از مؤلفه های $C - \Gamma$) می باشد. اگر مؤلفه ها را به عنوان زیرمجموعه های صفحه وسعت یافته C^* در نظر بگیریم، فقط یکی از آنها حاوی نقطه فرضی ∞ است. با بیانی دیگر می توان گفت که، یکی، و فقط یکی، از مؤلفه های $C - \Gamma$ بی کران است. قضیه زیر نشان می دهد که در مؤلفه بی کران، به ازای هر z ، عدد گردشی $n(\gamma, z)$ مساوی ۰ است.

قضیه ۱۸.۱۶ فرض کنیم γ مداری با نمودار Γ باشد. مجموعه $C - \Gamma$ را به دو زیرمجموعه

$$I = \{z \mid n(\gamma, z) \neq 0\} \text{ و } E = \{z \mid n(\gamma, z) = 0\}$$

تقسیم می کنیم. در این صورت E و I هر دو بازند. بعلاوه، E بی کران و I کراندار است.

برهان. تابع g را بر $\Gamma - C$ به وسیله دستور

$$g(z) = n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}$$

تعریف می‌کنیم. بنا بر قضیه ۳۸.۷، g بر $\Gamma - C$ پیوسته است و، چون $g(z)$ همواره عددی صحیح است، نتیجه می‌شود که g بر هر مؤلفه $\Gamma - C$ پایا است. بنابراین، E و I هر دو بازند زیرا هر یک مساوی اجتماعی از مؤلفه‌های $\Gamma - C$ است.

فرض کنیم U مؤلفه بی‌کران $\Gamma - C$ را نشان دهد. اگر ثابت کنیم که E حاوی U است، نشانه آن است که E بی‌کران و I کراندار است. فرض کنیم K عدد پایایی باشد بقسمی که به ازای هر t در قلمرو γ ، $|\gamma(t)| < K$ ، و فرض کنیم c نقطه‌ای در U باشد بقسمی که $|c| > K + \Lambda(\gamma)$ ، که در آن $\Lambda(\gamma)$ درازای γ است. در این صورت

$$\left| \frac{1}{\gamma(t) - c} \right| \leq \frac{1}{|c| - |\gamma(t)|} < \frac{1}{|c| - K}$$

اگر انتگرال موجود برای $n(\gamma, c)$ را به وسیله قضیه ۶.۱۶ تخمین بزنیم، خواهیم داشت

$$0 \leq |g(c)| \leq \frac{\Lambda(\gamma)}{|c| - K} < 1.$$

چون $g(c)$ عددی صحیح است، باید داشته باشیم $g(c) = 0$ ، پس g بر U دارای مقدار پایای ۰ است. از این روی E حاوی نقطه c است، در نتیجه E حاوی تمام U خواهد بود.

قضیه‌ای کلی، به نام قضیه خم ژردان وجود دارد که بنا بر آن، هر گاه Γ یک خم ژردان (خم بسته ساده) باشد که به وسیله γ توصیف شود، آنگاه هر یک از مجموعه‌های E و I مذکور در قضیه ۱۸.۱۶ همبند است. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، یک خم ژردان مانند Γ مجموعه $\Gamma - C$ را درست به دو مؤلفه E و I که دارای کسرانه مشترک Γ هستند تقسیم می‌کند. مجموعه I را ناحیه داخلی (یا درونی) Γ نامیده، می‌گوئیم که نقاط آن در داخل Γ هستند. مجموعه E را ناحیه خارجی (یا بیرونی) Γ می‌نامیم، و می‌گوئیم که نقاط آن در خارج Γ قرار دارند. اگر چه قضیه خم ژردان در مورد بعضی از خمهای ژردان آشنا مانند دایره، مثلث، و مستطیل مشهود و اثبات آن آسان است، اما اثباتش برای یک خم ژردان دلخواه

بهیچوجه ساده نیست. (برهانهای از آن را می توان در کتابهای مرجع ۳۰۱۶ و ۵۰۱۶ یافت.)

قضیه خم ژردان برای اثبات هیچ یک از قضیه های این فصل لازم نیست. اما باید توجه داشت که خمهای ژردانی که درکاربردهای معمولی نظریه انتگرالگیری مختلط با آنها مواجهیم عموماً از تعدادی متناهی پاره خط و کمان مستدیر تشکیل شده اند، و برای این چنین خمها کاملاً واضح است که $C - \Gamma$ درست دارای دو مؤلفه می باشد. برای نقطه هائی چون z داخل این چنین خمها عددگردشی $n(\gamma, z)$ مساوی $+1$ یا -1 است زیرا γ در I با گذری مستدیر چون γ به مرکز z همجا است، پس $n(\gamma, z) = n(\delta, z)$ و $n(\delta, z)$ بسته به آن که گذر مستدیر δ جهت دار با جهت مثبت یا منفی باشد، مساوی $+1$ یا -1 است. بدین دلیل می گوئیم یک مدار ژردان γ جهت دار با جهت مثبت است اگر که به ازای مقداری از z در داخل Γ ، $n(\gamma, z) = +1$ و γ جهت دار با جهت منفی است وقتی که $n(\gamma, z) = -1$.

۱۲.۱۶ تابعهای تحلیلی که به وسیله انتگرالهای پیرامنی تعریف شده اند

دستور انتگرال کشی، یعنی

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

دارای نتیجه های مهم متعدد است. بعضی از آنها از قضیه زیرین بدست می آیند. در این قضیه انتگرالهای مورد بحث اندکی کلیتر هستند و در آنها انتگرالده $f(w)/(w-z)$ با $\varphi(w)/(w-z)$ عوض شده است، که در آن φ صرفاً پیوسته است و لزوماً تحلیلی نیست، و γ گذری است با درازای متناهی، اما لزوماً مدار نیست.

قضیه ۱۹.۱۶ فرض کنیم γ گذری با درازای متناهی با نمودار Γ باشد. همچنین تابع مختلط φ بر Γ پیوسته باشد، و f بر $C - \Gamma$ با معادله زیر تعریف شده باشد:

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw, \quad z \notin \Gamma$$

در این صورت f دارای این خاصیتها خواهد بود:

(آ) به ازای هر نقطه مانند a در $C - \Gamma$ ، f دارای نمایشی به صورت (دشته) توانی زیرین می باشد:

$$(۹) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

که در آن

$$(۱۰) \quad c_n = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

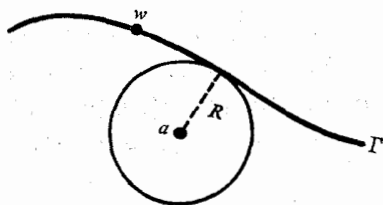
(ب) دشته مذکور در (آ) دارای شعاع همگرایی مثبتی است نا کمتر از R ، که در آن

$$(۱۱) \quad R = \inf\{|w-a| \mid w \in \Gamma\}.$$

(ج) تابع f بر $C - \Gamma$ از هر مرتبه مانند n مشتق دارد که از این رابطه بدست می‌آید:

$$(۱۲) \quad f^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad z \notin \Gamma$$

برهان. نخست توجه می‌کنیم که عدد R که با (۱۱) تعریف شده است مثبت است زیرا تابع تعریف شده با $g(w) = |w-a|$ بر مجموعه فشرده Γ دارای مینیمم است، و چون $a \notin \Gamma$ ، این مینیمم صفر نیست. پس R فاصله از a تا نزدیکترین نقطه Γ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۶.۱۶)



شکل ۶.۱۶

برای اثبات (آ) از اتحاد

$$(۱۳) \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^k t^n + \frac{t^{k+1}}{1-t},$$

که به‌ازای هر $t \neq 1$ معتبر است، شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$t = (z-a)/(w-a),$$

که در آن $|z-a| < R$ و $w \in \Gamma$. در این صورت

$$1/(1-t) = (w-a)/(w-z).$$

با ضرب (۱۳) در $\varphi(w)/(w-a)$ و انتگرالگیری در امتداد γ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw \\ &= \sum_{n=0}^k (z-a)^n \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw + \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw \\ &= \sum_{n=0}^k c_n (z-a)^n + E_k, \end{aligned}$$

که در آن c_n از رابطه (۱۰) و E_k از رابطه

$$(14) \quad E_k = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{k+1} dw$$

بدست می‌آیند. اینک با تخمین انتگرالده در (۱۴)، نشان می‌دهیم که وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $E_k \rightarrow 0$ داریم.

فرض کنیم $M = \max \{|\varphi(w)| \mid w \in \Gamma\}$ و $\Lambda(\gamma)$ درازای γ را نشان دهد. این صورت از (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$|E_k| \leq \frac{M \Lambda(\gamma)}{R - |a-z|} \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^{k+1}$$

چون $|z-a| < R$ ، نتیجه می‌شود که وقتی که $k \rightarrow \infty$ ، $E_k \rightarrow 0$. از این (آ) و (ب) ثابت می‌شوند.

با بکار بردن قضیه ۲۳.۹ در مورد (۹) نتیجه می‌شود که f بر گرده $B(a; R)$ دارای مشتق از هر مرتبه است و $f^{(n)}(a) = n! c_n$. چون a یک نقطه دلخواه $C - \Gamma$ است، پس (ج) برقرار خواهد بود.

تیسره. ممکن است رشته مذکور در (۹) دارای شعاع همگرایی بزرگتر از R باشد. در این صورت این رشته ممکن است در تقاطعی با فاصله بیشتر از R نمایشی برای f باشد یا نباشد.

۱۳.۱۶ بسطهای تابعهای تحلیلی به صورت رشتههای توانی

با تلفیق دستور انتگرال کنی با قضیه ۱۹.۱۶ قضیه زیرین بدست می‌آید:

قضیه ۲۰.۱۶ فرض کنیم f بر مجموعه باز S در C تحلیلی، و a یک نقطه S باشد. در این صورت همه $f^{(n)}(a)$ ها وجود دارند، و f را می توان در هر گرهه مانند $B(a; R)$ که بست آن جزء S باشد به صورت دشته توانی همگرای

$$(15) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

نمایش داد. بعلاوه، به ازای هر $n \geq 0$ و هر گذر مستدیر جهت داد با جهت مثبت مانند γ که مرکزش a و شعاعش $r < R$

$$(16) \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

تبره. رشته مذکور در (۱۵) به بسط تیلور f حول a معروف است. معادله (۱۶) را دستور انتگرال کشی برای $f^{(n)}(a)$ می نامند.

پروان. فرض کنیم مدار γ با یک نقطه در S همجا، و Γ نمودار γ باشد. تابع g را بر $C - \Gamma$ با معادله زیر تعریف می کنیم:

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \notin \Gamma$$

اگر $z \in B(a; R)$ ، از دستور انتگرال کشی برمی آید که

$$g(z) = 2\pi i n(\gamma, z) f(z).$$

از این روی،

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad |z-a| < R$$

حال قرار می دهیم $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ ، که در آن $r < R$ و $|z-a| < r$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$. در این صورت $n(\gamma, z) = 1$ ، پس با بکار بردن قضیه ۱۹.۱۶ در مورد $\varphi(w) = f(w)/(2\pi i)$ نتیجه می شود که نمایش رشته ای

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

که در آن $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ ، به ازای $|z-a| < R$ همگرا است. همچنین، قسمت (ج) قضیه ۱۹.۱۶ رابطه (۱۶) را ایجاب می کند.

بنا بر قضیه های ۲۰.۱۶ و ۲۳.۹، شرطی لازم و کافی برای تحلیلی بودن

تابع مختلط f در نقطه‌ای مانند a آن است که f را بتوان در یکی از همسایگیهای a به صورت رشته‌ای توانی نمایش داد. وقتی یک چنین رشته‌ی توانی وجود داشته باشد، شعاع همگرایی آن دست کم مساوی شعاع هر گرده‌ای مانند $B(a)$ است که جزء ناحیه‌ای قرار دارد که f در آن تحلیلی است. چون هر نقطه‌ای که f در آن تحلیلی نباشد نمی‌تواند درون دایره همگرایی واقع باشد، پس شعاع همگرایی درست مساوی فاصله از a تا نزدیکترین نقطه‌ای است که f در آن تحلیلی نیست.

توجه به این نکته بیش عمیقتری درباره بسطهای تابعهای حقیقی از متغیر حقیقی به صورت رشته‌های توانی به ما می‌بخشد. مثلاً، فرض کنیم که $f(x) = 1/(1+x^2)$ وقتی که x حقیقی باشد. این تابع همه جا در \mathbb{R}^1 تعریف شده است، و در هر نقطه در \mathbb{R}^1 از هر مرتبه مشتق دارد. همچنین دارای بسطی به صورت رشته توانی حول مبدأ است، یعنی

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

اما، این نمایش فقط در بازه باز $]-1, 1[$ معتبر است. از دیدگاه نظریه تابعهای حقیقی، چیزی در رفتار f نیست که بتواند این مطلب را توضیح دهد. اما وقتی آن را در صفحه مختلط بررسی می‌کنیم، بفوریت درمی‌یابیم که تابع تعریف شده با $f(z) = 1/(1+z^2)$ همه جا در C بجز در نقطه‌های $z = \pm i$ تحلیلی است. بنابراین، شعاع همگرایی بسط به صورت رشته توانی حول 0 باید مساوی 1 ، یعنی فاصله از 0 تا i و تا $-i$ ، باشد.

چند مثال. بسطهای به صورت رشته توانی زیرین به ازای هر z در C معتبرند:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (A) \quad \text{ب) } \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{ج) } \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

۱۴.۱۶ نامساویهای کشی. قضیه لیوویل^۱

اگر f بر گرده بسته $B(a; R)$ تحلیلی باشد، دستور انتگرال کشی (۱۶) نشان می‌دهد که

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

که در آن γ هر گذر مستدیری است جهت دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع $r < R$. می توان نوشت $\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}$ ، که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، و رابطه فوق را به شکل زیرین در آورد:

$$(17) \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

این دستور مشتق n م را در a به عنوان میانگین وزندار مقادیرهای f بر دایره ای به مرکز a بیان می کند. حالت خاص $n = 0$ قبلاً در بخش ۹.۱۶ بدست آمده بود. حال فرض کنیم $M(r)$ مقدار ماکزیمم $|f|$ بر نمودار γ را نشان دهد. بنا تخمین انتگرال مذکور در (۱۷)، بی درنگ نامساویهای کشی بدست می آیند:

$$(18) \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{M(r)n!}{r^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

قضیه زیرین نتیجه ساده حالت $n = 1$ است.

قضیه ۲۱.۱۶ (قضیه لیوویل). هر گاه f همه جا بر C تحلیلی، و بر آن کراندار باشد، آنگاه f پایا است.

برهان. فرض می کنیم به ازای هر z در C ، $|f(z)| \leq M$. در این صورت از نامساوی کشی، با $n = 1$ ، نتیجه می شود که به ازای هر $r > 0$ ، $|f'(a)| \leq M/r$. اگر $r \rightarrow +\infty$ ، نتیجه می شود که به ازای هر a در C ، $f'(a) = 0$ و در نتیجه، بنا بر قضیه ۲۳.۵، f پایا خواهد بود.

تفسیر. هر تابعی که همه جا بر C تحلیلی باشد یک تابع تمام نامیده می شود. چند جمله ایها، سینوس و کسینوس، و تابعهای نمائی مثالهایی از تابعهای تمام می باشند. بنا بر قضیه لیوویل، هر تابع تمام کراندار تابعی است پایا.

از قضیه لیوویل برهان ساده ای برای قضیه اساسی جبر بدست می آید.

قضیه ۲۲.۱۶ (قضیه اساسی جبر). هر چند جمله ای از درجه $1 \leq n$ دارای صفری است.

برهان. فرض کنیم $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ، که در آن $n \geq 1$ و $a_n \neq 0$. فرض می کنیم P دارای صفر نباشد و ثابت می کنیم که P پایا است. قرار می دهیم $f(z) = 1/P(z)$. در این صورت f همه جا بر C تحلیلی است زیرا P هرگز صفر نمی شود. همچنین، از این که

$$P(z) = z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right),$$

می بینیم که وقتی که $|z| \rightarrow +\infty$ ، $|P(z)| \rightarrow +\infty$ ، پس وقتی که $|z| \rightarrow +\infty$ ، $f(z) \rightarrow 0$ ، بنا بر این، f بر C کراندار است. پس، بنا بر قضیه لیوویل، f و در نتیجه P پایا خواهد بود.

۱۵.۱۶ تنهائی صفرهای يك تابع تحلیلی

اگر f در a تحلیلی باشد و $f(a) = 0$ ، بسط تیلور f حول a دارای جمله پایای صفر است، و در نتیجه به شکل

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

در می آید. این رابطه به ازای هر z در گردهای مانند $B(a)$ معتبر است. هر گاه f بر این گرده متحد صفر باشد [یعنی، هر گاه به ازای هر z در $B(a)$ ، $f(z) = 0$]، آنگاه هر $c_n = 0$ ، زیرا $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ ، اگر f بر این همسایگی متحد صفر نباشد، بعضی از c_n ها ناصفرند. اگر c_k اولین ضریب ناصفر در بسط فوق باشد، نقطه a را یک صفر از مرتبه k می نامیم. ثابت خواهیم کرد که f در یکی از همسایگیهای a صفر دیگری ندارد. این خاصیت چنین توصیف می شود که صفرهای یک تابع تحلیلی تنها هستند.

قضیه ۲۳.۱۶ فرض کنیم f بر مجموعه S باز در C تحلیلی باشد. همچنین به ازای نقطه ای چون a در S ، $f(a) = 0$ ، f بر هیچ همسایگی a متحد صفر نباشد. در این صورت گردهای مانند $B(a)$ هست که f در آن دادای صفر دیگری نیست.

برهان. بسط تیلور حول a به صورت $f(z) = (z - a)^k g(z)$ در می آید، که در آن $k \geq 1$

$$g(a) = c_k \neq 0 \text{ و } g(z) = c_k + c_{k+1}(z - a) + \dots$$

چون g در a پیوسته است، گردهای مانند $S \subseteq B(a)$ هست که g بر آن صفر نمی شود. بنا بر این، به ازای هر $z \neq a$ در $B(a)$ ، $f(z) \neq 0$.

این قضیه چند نتیجه مهم را در بر دارد. مثلاً، با استفاده از آن می توان نشان داد که هر تابع تحلیلی بر ناحیه باز S که بر هر زیرمجموعه باز و ناتهی S صفر باشد، در سراسر S صفر خواهد بود. یادآوری می کنیم که یک ناحیه باز یعنی مجموعه ای همبند و باز. (ر. ک. تعریفهای ۳۴.۴ و ۴۵.۴).

قضیه ۲۴.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیه باز S در C تحلیلی باشد. همچنین A مجموعه نقطه‌هائی چون z در S باشد که به‌ازای آن گرده‌ای مانند $B(z)$ که f بر آن متحد صفر است وجود داشته باشد. قرار می‌دهیم $B = S - A$. در این صورت یکی از دو مجموعه A یا B تهی است و دیگری خود S خواهد بود.

پروان. داریم $S = A \cup B$ ، که در آن A و B مجموعه‌های از هم جدا هستند. مجموعه A ، بنا بر تعریف آن، باز است. اگر ثابت کنیم که B نیز باز است، از همبندی S نتیجه می‌شود که دست کم یکی از دو مجموعه A یا B تهی است.

برای اثبات باز بودن B ، با فرض این که a نقطه‌ای از B باشد، دو حالت در نظر می‌گیریم: $f(a) \neq 0$ ، $f(a) = 0$. اگر $f(a) \neq 0$ ، گرده‌ای مانند $B(a) \subseteq S$ هست که بر آن f صفر نمی‌شود. بنا بر این هر نقطه‌ای این گرده باید متعلق به B باشد. از این روی، اگر $a, f(a) \neq 0$ یک نقطه درونی B است. اما، اگر $f(a) = 0$ ، بنا بر قضیه ۲۳.۱۶، گرده‌ای مانند $B(a)$ هست که هیچ صفر دیگری از f را در بر ندارد. این بدان معنی است که $B(a) \subseteq B$. پس، در هر حالت، a یک نقطه درونی B است. بنا بر این، B باز است و یکی از دو مجموعه A یا B باید تهی باشد.

۱۶.۱۶ قضیه همانی برای تابعای تحلیلی

قضیه ۲۵.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیه باز S در C تحلیلی باشد. همچنین $a \in S$ یک نقطه انباشتگی یکی از زیر مجموعه‌های S مانند T باشد. هر گاه به‌ازای هر z در T ، $f(z) = 0$ ، آنگاه به‌ازای هر z در S ، $f(z) = 0$.

پروان. دنباله‌ای نامتناهی مانند $\{z_n\}$ وجود دارد که جمله‌هایش نقاط T هستند، قسمی که $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. بنا بر پیوستگی f ، $f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0$. حال ثابت می‌کنیم که f بر یکی از همسایگی‌های a متحد صفر است. فرض کنیم یک چنین همسایگی وجود نداشته باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۲۳.۱۶، باید گرده‌ای چون $B(a)$ باشد قسمی که بر آن $z \neq a$ ایجاب کند که $f(z) \neq 0$. اما این ممکن نیست، زیرا هر گرده مانند $B(a)$ حاوی نقطه‌هائی از T غیر از a هست. بنا بر این، باید f بر یکی از همسایگی‌های a متحد صفر شود. از این روی مجموعه A در قضیه ۲۴.۱۶ نمی‌تواند تهی باشد. بنا بر این $S = A$ ، و این بدان معنی است که به‌ازای هر z در S ، $f(z) = 0$.

گاهی قضیه زیرین را، که نتیجه مهمی از قضیه بالا است، قضیه همانی برای تابعای تحلیلی می‌نامند.

قضیه ۲۶.۱۶ فرض کنیم f و g بر ناحیه باز S در C تحلیلی باشند. هر گاه $a \in S$ يك نقطه انباشتگی یکی از زیر مجموعه‌های S مانند T باشد، و به‌ازای هر z در T ، $f(z) = g(z)$ ، آنگاه به‌ازای هر z در S ، $f(z) = g(z)$.
 برهان. قضیه ۲۵.۱۶ را در مورد $f - g$ بکار برید.

۱۷.۱۶ ماکزیمم و مینیمم کالبد يك تابع تحلیلی

قدر مطلق یا کالبد تابع تحلیلی f ، یعنی $|f|$ ، تابعی است حقیقی و نامنفی. قضیه‌های این بخش مربوطند به ماکزیممها و مینیممهای $|f|$.

قضیه ۲۷.۱۶ (اصل کالبد ماکزیمم موضعی). فرض کنیم تابع تحلیلی f بر ناحیه باز S پایا نباشد. در این صورت $|f|$ در S ماکزیمم موضعی ندارد. یعنی، هر گرده در S مانند $B(a; R)$ حادی نقطه‌هائی چون z هست بقسمی که $|f(z)| > |f(a)|$.

برهان. فرض می‌کنیم گرده‌ای چون $B(a; R)$ در S وجود داشته باشد که در آن $|f(z)| \leq |f(a)|$ ، و ثابت می‌کنیم که f بر S پایا است. گرده هم‌مرکز $B(a; r)$ را با $0 < r \leq R$ در نظر می‌گیریم. بنا بر دستور انتگرال‌کشی، که در (۷) بیان شده است، داریم

$$(19) \quad |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})| d\theta.$$

حال به‌ازای هر θ ، $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)|$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هیچ مقدار θ ، نامساوی اکید $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ برقرار نیست. زیرا که در غیر این صورت، بنا بر پیوستگی، یک $\varepsilon > 0$ وجود پیدا می‌کند بقسمی که به‌ازای هر θ در یکی از زیر بازه‌های $[0, 2\pi]$ مانند I با درازای مثبت، مثلاً h ، خواهیم داشت $|f(a + re^{i\theta})| \leq |f(a)| - \varepsilon$. قرار می‌دهیم $J = [0, 2\pi] - I$. در این صورت J دارای اندازه $2\pi - h$ است، و از (۱۹) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} 2\pi |f(a)| &\leq \int_I |f(a + re^{i\theta})| d\theta + \int_J |f(a + re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq h\{|f(a)| - \varepsilon\} + (2\pi - h) |f(a)| \\ &= 2\pi |f(a)| - h\varepsilon < 2\pi |f(a)|, \end{aligned}$$

که از آن تناقض $|f(a)| < |f(a)|$ بدست می‌آید. این نشان می‌دهد که اگر $r \leq R$ ، به‌ازای هیچ θ نامساوی اکید $|f(a + re^{i\theta})| < |f(a)|$ برقرار نیست. از این روی، به‌ازای هر z در $B(a; R)$ ، $|f(z)| = |f(a)|$. بنا بر این $|f|$

بر این گرده، و بنا بر قضیه ۲۳.۵، خود f بر این گرده پایا خواهد بود. بنا بر قضیه همانی، f بر S پایا است.

قضیه ۲۸.۱۶ (اصل کالبد ماکزیم مطلق). فرض کنیم T یک زیرمجموعه فشرده صفحه مختلط C باشد. و نیز فرض کنیم که f بر T پیوسته، و درون T تحلیلی باشد. در این صورت $|f|$ بر T در نقطه‌ای از ∂T ، یعنی کرانه T ، به ماکزیم مطلق خود خواهد رسید.

برهان. چون T فشرده است، $|f|$ در نقطه‌ای بر T ، مثلاً a ، به ماکزیم مطلق خود می‌رسد. اگر $a \in \partial T$ ، برهان تمام است. اگر $a \in \text{int } T$ ، فرض می‌کنیم S آن مؤلفه $\text{int } T$ باشد که a را دربر دارد. چون $|f|$ در a ماکزیم موضعی دارد، بنا بر قضیه ۲۷.۱۶، f بر S پایا خواهد بود. بنا بر پیوستگی، f بر $\partial S \subseteq T$ نیز چنین است، پس مقدار ماکزیمیم، یعنی $|f(a)|$ ، به ازای نقطه‌ای بر ∂S بدست می‌آید. چون $\partial S \subseteq \partial T$ (چرا؟)، پس $|f|$ بر ∂T به ماکزیمیم مطلق خود خواهد رسید.

قضیه ۲۹.۱۶ (اصل کالبد مینیم). فرض کنیم f بر ناحیه باز S تحلیلی بوده پایا نباشد. هر گاه $|f|$ در S دارای مینیمیم موضعی در نقطه a باشد، آنگاه $f(a) = 0$.

برهان. اگر $f(a) \neq 0$ ، قضیه ۲۷.۱۶ را برای $g = 1/f$ بکار می‌بریم. در این صورت g در گرده بازی چون $B(a; R)$ تحلیلی است و $|g|$ در نقطه a ماکزیمیم موضعی دارد. پس g ، و در نتیجه f ، بر این گرده پایا است. بنا بر این، f بر S پایا است، و این با فرض ما تناقض دارد.

۱۸.۱۶ قضیه نگاشت باز

تابعهای تحلیلی نا پایا نگاشتهایی باز هستند؛ یعنی، این تابعها مجموعه‌های باز را روی مجموعه‌هایی باز می‌نگارند. این مطلب را به‌عنوان کاربرد اولی از اصل کالبد مینیم ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳۰.۱۶ (قضیه نگاشت باز). هرگاه f بر ناحیه باز S تحلیلی باشد ولی پایا نباشد، آنگاه f باز است.

برهان. فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه باز S باشد. باید ثابت کنیم که $f(A)$ باز است. نقطه‌ای مانند b در $f(A)$ اختیار می‌کنیم و می‌نویسیم $b = f(a)$ ، که در آن $a \in A$. نخست ملاحظه می‌کنیم که a یک نقطه تنهای نقش معکوس $f^{-1}(\{b\})$

است. (اگر چنین نباشد، بنا بر قضیه همانی، f باید بر S پایا باشد.) از این روی گردهای مانند $B = B(a; r)$ هست که بست آن \bar{B} در A قرار دارد و جز a حاوی نقطه دیگری از $f^{-1}(\{b\})$ نیست. چون $f(\bar{B}) \subseteq f(A)$ ، برای اتمام برهان کافی است نشان دهیم که $f(\bar{B})$ حاوی گردهای به مرکز b است.

فرض می‌کنیم ∂B کرانه B را نشان دهد، یعنی $\partial B = \{z \mid |z - a| = r\}$. در این صورت $f(\partial B)$ مجموعه‌ای است فشرده که b در آن نیست. از این روی عدد m که با

$$m = \inf \{|f(z) - b| \mid z \in \partial B\}$$

تعریف می‌شود مثبت است. نشان می‌دهیم که $f(\bar{B})$ گرده $B(b; m/2)$ را دربردارد. برای این کار، نقطه‌ای مانند w را در $B(b; m/2)$ اختیار می‌کنیم و نشان می‌دهیم که به ازای یک مقدار z_0 در \bar{B} ، $w = f(z_0)$.

فرض می‌کنیم به ازای هر $z \in \bar{B}$ ، $g(z) = f(z) - w$. ثابت می‌کنیم که به ازای $z_0 \in \bar{B}$ ، $g(z_0) = 0$. تابع $|g|$ بر \bar{B} پیوسته است، و چون \bar{B} فشرده است، نقطه‌ای مانند z_0 در \bar{B} وجود دارد که در آن $|g|$ به مینیمم خود می‌رسد. چون $a \in \bar{B}$ پس

$$|g(z_0)| \leq |g(a)| = |f(a) - w| = |b - w| < \frac{m}{2}.$$

اما اگر $z \in \partial B$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |f(z) - b + b - w| \geq |f(z) - b| \\ &\quad - |w - b| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

از این روی، $z_0 \notin \partial B$ پس z_0 ، یک نقطه درونی \bar{B} خواهد بود. با بیانی دیگر می‌توان گفت که، $|g|$ در z_0 دارای مینیمم موضعی است. چون g تحلیلی است و بر B پایا نیست، اصل کالبد مینیمم نشان می‌دهد که $g(z_0) = 0$ و برهان تمام است.

۱۹.۱۶ بسطهای لوران^۱ برای تابعی تحلیلی در یک حلقه دایره

دو تابع f_1 و g_1 را که هر دو در نقطه a تحلیلی هستند و $g_1(a) = 0$ در نظر می‌گیریم. در این صورت بسطهای به صورت رشته‌های توانی زیرین را خواهیم داشت:

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r_1$$

$$(۲۰) \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r_1$$

فرض کنیم f_1 تابع مرکبی را نشان دهد که با این رابطه تعریف می‌شود:

$$f_1(z) = g_1 \left(\frac{1}{z-a} + a \right).$$

در این صورت f_1 در ناحیه $|z-a| > r_1$ تعریف شده و در این ناحیه تحلیلی است، و می‌توان آن را با رشته همگرایی زیر نمایش داد:

$$(۲۱) \quad f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}, \quad |z-a| > r_1$$

حال اگر $r_1 < r_2$ رشته‌های موجود در (۲۰) و (۲۱) دارای ناحیه همگرایی مشترکی خواهند بود که عبارت است از مجموعه z هائی که در این رابطه‌ها صدق‌کنند:

$$r_1 < |z-a| < r_2.$$

در این ناحیه، که در حقیقت درون حلقه دایره $A(a; r_1, r_2)$ است، هر دو تابع f_1 و f_2 تحلیلی هستند و مجموع $f_1 + f_2$ آنها از رابطه

$$f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

بدست می‌آید. مجموع طرف راست را می‌توان به صورت خلاصه‌تر

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

نوشت، که در آن به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ $c_{-n} = b_n$. هر رشته از این نوع، که از توانهای مثبت و منفی $z-a$ ، هر دو، تشکیل شده باشد، یک رشته لوران نامیده می‌شود. این رشته را در صورتی همگرا نامند که هر یک از دو قسمت آن جداگانه همگرا باشد.

هر رشته لوران همگرا تابعی را نمایش می‌دهد که درون حلقه دایره $A(a; r_1, r_2)$ تحلیلی است. اینک ثابت می‌کنیم که، بعکس، هر تابع تحلیلی مانند f بریک حلقه دایره را می‌توان درون حلقه دایره با یک رشته لوران همگرا نشان داد.

قضیه ۳۱.۱۶ فرض کنیم f بر حلقه دایره $A(a; r_1, r_2)$ تحلیلی باشد. در این صورت به ازای هر نقطه درونی این حلقه دایره مانند z ,

$$(۲۲) \quad f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

که در آن

$$f_2(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} \quad \text{و} \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ضریبها از دستورهای

$$(۲۳) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

بدست می آیند، که در آنها γ یک گذر مستدیر جهت دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r است، و $r_1 < r < r_2$. تابع f_1 (که قسمت موزون f در a نامیده می شود) دری گرده $B(a; r_2)$ تحلیلی است. تابع f_2 (که قسمت عمده f در a نامیده می شود) در خارج بست گرده $B(a; r_1)$ تحلیلی است.

پرهان. نقطه ای مانند z درون حلقه دایره اختیار می کنیم. z را ثابت نگهداشته، تابع g را بر $A(a; r_1, r_2)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & , \quad w \neq z \\ f'(z) & , \quad w = z \end{cases}$$

در این صورت اگر $w \neq z$ ، g در w تحلیلی است و g در z پیوسته خواهد بود. فرض می کنیم که

$$\varphi(r) = \int_{\gamma_r} g(w) dw,$$

که در آن γ_r گذر مستدیر جهت دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r باشد، و $r_1 \leq r \leq r_2$. بنا بر قضیه ۸.۱۶، $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$ پس

$$(۲۴) \quad \int_{\gamma_1} g(w) dw = \int_{\gamma_2} g(w) dw,$$

که در آن $\gamma_1 = \gamma_{r_1}$ و $\gamma_2 = \gamma_{r_2}$. چون z بر نمودار γ_1 یا نمودار γ_2 قرار ندارد، در هر یک از این انتگرالها می توان نوشت

$$g(w) = \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(z)}{w-z}.$$

با قرار دادن این در (۲۴) و جا به جا کردن جمله‌ها نتیجه می‌شود که

$$(25) \quad f(z) \left\{ \int_{\gamma_2} \frac{1}{w-z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{1}{w-z} dw \right\} \\ = \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

اما $\int_{\gamma_1} (w-z)^{-1} dw = 0$ زیرا انتگرالده بر گرده $B(a; r_1)$ تحلیلی است، و $\int_{\gamma_2} (w-z)^{-1} dw = 2\pi i$ زیرا $n(\gamma_2, z) = 1$ بنا بر این، از (۲۵) این معادله بدست می‌آید:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

که در آن

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{و} \quad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

بنا بر قضیه ۱۹.۱۶، f_1 بر گرده $B(a; r_2)$ تحلیلی است، و در نتیجه می‌توان بسط تیلور زیرین را نوشت:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r_2$$

که در آن

$$(26) \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

بعلاوه، بنا بر قضیه ۸.۱۶، گذر γ_2 را می‌توان با هر γ_r که $r_1 \leq r \leq r_2$ عوض کرد.

برای پیدا کردن بسطی برای $f_2(z)$ به صورت یک رشته توانی، با استفاده از اتحاد (۱۳) به ازای $t = (w-a)/(z-a)$ ، مانند برهان قضیه ۱۹.۱۶ استدلال می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$(27) \quad \frac{1}{1 - (w-a)/(z-a)} = \sum_{n=0}^k \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n + \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^{k+1} \left(\frac{z-a}{z-w} \right).$$

اگر w بر نمودار γ_1 باشد، $|w-a| = r_1 < |z-a|$ ، پس $|t| < 1$. حال

رابطه (۲۷) را در $f(w)/(z-a)$ ضرب نموده، در امتداد γ_1 انتگرال گرفته، و بعد اگر $k \rightarrow \infty$ ، نتیجه خواهیم گرفت که

$$f_\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}, \quad |z-a| > r_1$$

که در آن

$$(28) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{1-n}} dw.$$

بنا بر قضیه ۸.۱۶، به ازای هر مقدار r در $[r_1, r_2]$ می توان گذر γ_1 را با هر γ_r عوض کرد. اگر هر دو گذر مذکور در (۲۸) و (۲۶) را یک گذر مانند γ_r اختیار کنیم و به جای b_n بنویسیم c_{-n} ، دو دستور را می توان با هم تلفیق نموده به صورت دستور مذکور در (۲۳) درآورد. چون z یک نقطه درونی دایره حلقه دایره بود، پس برهان قضیه تمام است.

تبره. دستور (۲۳) نشان می دهد که یک تابع در یک حلقه دایره مفروض حداکثر یک بسط لوران دارد.

۲۰.۱۶ نقطه های استثنائی تنها

گرده $B(a; r)$ بجز مرکزش، یعنی، مجموعه $\{a\}$ — $B(a; r)$ را یک همسایگی سفته a نامیم و با $B'(a; r)$ یا $B'(a)$ نشان می دهیم.

تعریف ۳۳.۱۶ نقطه a را يك نقطه استثنائی تنهای f نامیم در صورتی که

(آ) f بر یکی از همسایگیهای سفته a تحلیلی باشد،

و

(ب) f در نقطه a تحلیلی نباشد.

تبره. لازم نیست که f در a تعریف شده باشد.

اگر a یک نقطه استثنائی تنهای f باشد، حلقه دایره ای مانند $A(a; r_1, r_2)$ وجود دارد که f بر آن تحلیلی است. از این روی f دارای بسط لوران منحصر به فردی است، یعنی

$$(29) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}.$$

چون شعاع داخلی r_1 می تواند به قدر کافی کوچک باشد، پس (۲۹) در همسایگی

سفته $B'(a; r_1)$ معتبر است. نقطه استثنائی a (بسته به شکل قسمت عمده) به سه نوع زیر رده بندی می شود:

اگر هیچ توان منفی در (۲۹) ظاهر نشود، یعنی، اگر به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $c_{-n} = 0$ ، نقطه a را یک نقطه استثنائی (رفع شدنی) می نامند. در این حالت، وقتی که $z \rightarrow a$ ، $f(z) \rightarrow c_0$ ، و اگر f در a با $f(a) = c_0$ تعریف شود، می توان این نقطه استثنائی را رفع کرد. (ر. ک. مثال ۱ در زیر.)
اگر فقط تعدادی متناهی توان منفی ظاهر شوند، یعنی، اگر به ازای یک مقدار n ، $c_{-n} \neq 0$ ولی برای هر مقدار $m > n$ ، $c_{-m} = 0$ ، نقطه a را یک قطب از مرتبه n می نامند. در این حالت، قسمت عمده فقط یک مجموع متناهی است، یعنی مساوی است با

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

هر قطب از مرتبه ۱ را معمولاً یک قطب ساده می نامند. هرگاه در a قطب وجود داشته باشد، آنگاه وقتی که $z \rightarrow a$ ، $|f(z)| \rightarrow \infty$.

بالاخره، اگر به ازای تعدادی نامتناهی n ، $c_{-n} \neq 0$ ، نقطه a را یک نقطه استثنائی لازم نامند. در این حالت، وقتی که $z \rightarrow a$ ، $f(z)$ به حدی نمی گراید.

مثال ۱ نقطه استثنائی (رفع شدنی). اگر $z \neq 0$ ، قرار می دهیم $f(z) = (\sin z)/z$ ، و $f(0) = 0$. این تابع همه جا تحلیلی است مگر در ۰. (این تابع در ۰ ناپیوسته است، زیرا وقتی که $z \rightarrow 0$ ، $(\sin z)/z \rightarrow 1$) بسط لوران حول ۰ بدین شکل است:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

چون هیچ توان منفی z وجود ندارد، پس ۰ یک نقطه استثنائی رفع شدنی است. اگر مقدار f در ۰ مساوی ۱ تعریف شود، تابع اصلاح شده در ۰ تحلیلی خواهد بود.

مثال ۲ قطب. اگر $z \neq 0$ ، قرار می دهیم $f(z) = (\sin z)/z^5$. بسط لوران حول ۰ به صورت زیرین است:

$$\frac{\sin z}{z^5} = z^{-4} - \frac{1}{3!} z^{-2} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} z^2 + \dots$$

در این حالت، نقطه ۰ یک قطب از مرتبه ۴ است. توجه کنید که چیزی درباره مقدار

f در o بیان نشده است.

مثال ۳ نقطه استثنائی لازم. اگر $z \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $f(z) = e^{1/z}$. نقطه o یک نقطه استثنائی لازم است، زیرا

$$e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \dots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \dots$$

قضیه ۳۳.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیه باز S در C تحلیلی باشد. تابع g را با معادله $g(z) = 1/f(z)$ ، اگر $f(z) \neq 0$ ، تعریف می‌کنیم. در این صورت f وقتی، و فقط وقتی، در نقطه a در S یک صفر از مرتبه k دارد که g در a یک قطب از مرتبه k داشته باشد.

برهان. اگر f یک صفر از مرتبه k در a داشته باشد، همسایگی سفته‌ای مانند $B'(a)$ هست بقسمی که f در آن صفر نمی‌شود. در همسایگی $B(a)$ داریم $f(z) = (z-a)^k h(z)$ ، که در آن اگر $z \in B(a)$ ، $h(z) \neq 0$. از این روی، $1/h$ در $B(a)$ تحلیلی است و بسطی به صورت زیر دارد:

$$b_0 = \frac{1}{h(a)} \neq 0 \quad \text{که در آن} \quad \frac{1}{h(z)} = b_0 + b_1(z-a) + \dots$$

بنابراین، اگر $z \in B'(a)$ ، خواهیم داشت

$$g(z) = \frac{1}{(z-a)^k h(z)} = \frac{b_0}{(z-a)^k} + \frac{b_1}{(z-a)^{k-1}} + \dots,$$

و در نتیجه a یک قطب از مرتبه k برای g خواهد بود. عکس این مطلب به همین نحو ثابت می‌شود.

۲۱.۱۶ باقیمانده یک تابع در یک نقطه استثنائی تنها

اگر a یک نقطه استثنائی تنهای f باشد، همسایگی سفته‌ای چون $B'(a)$ هست که f بر آن بسط لوران دارد، یعنی

$$(30) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}.$$

ضریب c_{-1} که در $(z-a)^{-1}$ ضرب شده است، باقیمانده f در a نام دارد و با علامت

$$c_{-1} = \operatorname{Res} f(z)_{z=a}$$

نشان داده می‌شود. از دستور (۲۳) معلوم می‌شود که به‌ازای هر گذر مستدیر جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز a مانند γ که نمودار آن جزء گرده $B(a)$ باشد،

$$(۳۱) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z)_{z=a}.$$

در بسیاری از حالتها ارزیابی باقیمانده در یک نقطه بدون استفاده از انتگرالگیری نسبتاً آسان است. مثلاً، اگر a یک قطب ساده باشد، می‌توان با استفاده از دستور (۳۰) نتیجه گرفت که

$$(۳۲) \quad \operatorname{Res} f(z)_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z).$$

بهین نحو، اگر a یک قطب از مرتبه 2 باشد، باسانی می‌توان نشان داد که

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=a} = g'(a), \quad \text{که در آن } g(z) = (z-a)^2 f(z)$$

درحالاتی مشابه این حالت، که در آنها محاسبه باقیمانده خیلی آسان باشد، رابطه (۳۱) روش ساده‌ای برای ارزیابی انتگرالهای پیرامنی در اطراف مدارها را بدست می‌دهد. برای اولین بار، کشی از این مفهوم استفاده کرد و آن را به روشی قوی به نام حساب باقیمانده‌ها گسترش داد. این روش مبتنی بر قضیه باقیمانده‌کشی است، که تعمیمی است از (۳۱).

۲۲.۱۶ قضیه باقیمانده کشی

قضیه ۲۲.۱۶ فرض کنیم f بر ناحیه D ، بجز تعدادی متناهی نقطه استثنائی تنها مانند z_1, \dots, z_n در D تحلیلی باشد. همچنین مدار γ با یک نقطه در D همجا باشد، و هیچ یک از نقطه‌های استثنائی بر نمودار γ قرار نداشته باشد. در این صورت

$$(۳۳) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) \operatorname{Res} f(z)_{z=z_k},$$

که در آن $n(\gamma, z_k)$ عدد گردش γ بر حسب z_k می‌باشد.

برهان. اثبات مبتنی بر دستور ذیل است، که در آن m عددی است صحیح (مثبت، منفی، یا صفر):

$$(۳۴) \quad \int_{\gamma} (z-z_k)^m dz = \begin{cases} 2\pi i n(\gamma, z_k), & m = -1 \\ 0, & m \neq -1 \end{cases}$$

این دستور برای $m = -1$ همان تعریف عدد گردشی $n(\gamma, z_k)$ است. فرض کنیم $[a, b]$ قلمرو γ را نشان دهد. اگر $m \neq -1$ ، به ازای t در $[a, b]$ ، قرار می‌دهیم $g(t) = \{\gamma(t) - z_k\}^{m+1}$. در این صورت، چون $g(b) = g(a)$ ،

$$\int_{\gamma} (z - z_k)^m dz = \int_a^b \{\gamma(t) - z_k\}^m \gamma'(t) dt = \frac{1}{m+1} \int_a^b g'(t) dt \\ = \frac{1}{m+1} \{g(b) - g(a)\} = 0.$$

از این، (۳۴) با ثبات می‌رسد.

برای اثبات قضیه باقیمانده، فرض می‌کنیم f_k قسمت عمده f در نقطه z_k باشد. بنا بر قضیه ۳۱.۱۶، f_k همه جا در C جز در z_k تحلیلی است. بنابراین $f - f_1$ در S تحلیلی است مگر در z_1, \dots, z_n . بهمین نحو، معلوم می‌شود که $f - f_1 - f_2 - \dots - f_n$ در S تحلیلی است، جز در z_1, \dots, z_n ، و با استقرا نتیجه می‌گیریم که $f - \sum_{k=1}^n f_k$ همه جا در S تحلیلی است. پس، بنا بر قضیه انتگرال‌کشی، یا

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k.$$

اکنون f_k را حول z_k به صورت یک رشته لوران بیان می‌کنیم، و از این رشته جمله به جمله انتگرال می‌گیریم، (۳۴) و تعریف باقیمانده را بکار می‌بریم، تا رابطه (۳۳) بدست آید.

تبره. هرگاه γ یک خم ژردان جهت‌دار با جهت مثبت و با نمودار Γ باشد، آنگاه به ازای هر z_k در داخل Γ ، $n(\gamma, z_k) = 1$ ، و به ازای هر z_k در خارج Γ ، $n(\gamma, z_k) = 0$ ، در این حالت، انتگرال f در امتداد γ مساوی $2\pi i$ برابر مجموع باقیمانده‌ها در نقطه‌های استثنائی داخل Γ خواهد بود. بعضی از کاربردهای قضیه باقیمانده کشی در چند بخش آینده گفته می‌شوند.

۲۳.۱۶ شمارش صفرها و قطبها در يك ناحیه

اگر f در a تحلیلی باشد یا در این نقطه قطب داشته باشد، و f متحد صفر نباشد، بسط لوران آن حول a به شکل

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

است، که در آن $c_m \neq 0$. اگر $m > 0$ ، یک صفر از مرتبه m در a وجود دارد؛

اگر $m < 0$ ، در a یک قطب از مرتبه $-m$ وجود دارد؛ و اگر $m = 0$ ، در a نه صفر وجود دارد و نه قطب.

تبره. گاهی برای تأکید در این که m به f و a ، هر دو، بستگی دارد می نویسیم $m(f; a)$.

قضیه ۳۵.۱۶ فرض کنیم تابع f متحد صفر نباشد، و بر ناحیه S ، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب، تحلیلی باشد. همچنین مدار γ با نقطه‌ای در S همجا بوده، نمودار آن حادی هیچ یک از صفرها یا قطبهای f نباشد. در این صورت

$$(۳۵) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in S} n(\gamma, a) m(f; a),$$

که در آن مجموع طرف راست فقط حادی تعدادی متناهی جمله ناصفر است.

تبره. هرگاه γ یک خم زردان جهت دار با جهت مثبت با نمودار Γ باشد، آنگاه به ازای هر a در داخل Γ ، $n(\gamma, a) = 1$ ، و عموماً (۳۵) به شکل

$$(۳۶) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

نوشته می‌شود، که در آن N تعداد صفرها و P تعداد قطبهای f در داخل Γ را نشان می‌دهند، که هر یک به تعداد مرتبه‌اش بحساب آمده است.

برهان. فرض کنیم در یکی از همسایگیهای سفته نقطه‌ای مانند a داشته باشیم $f(z) = (z - a)^m g(z)$ ، که در آن g در a تحلیلی باشد، $g(a) \neq 0$ ، و m عددی صحیح (مثبت یا منفی) باشد. در این صورت یکی از همسایگیهای سفته a وجود دارد که بر آن می‌توان نوشت

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

که در آن خارج قسمت g'/g در a تحلیلی است. این معادله نشان می‌دهد که هر صفر f از مرتبه m یک قطب ساده f'/f با باقیمانده m است. بهمین نحو، یک قطب f از مرتبه m یک قطب ساده f'/f با باقیمانده $-m$ خواهد بود. از این مطلب و قضیه باقیمانده‌کشی رابطه (۳۵) نتیجه می‌شود.

۲۴.۱۶ ارزیابی انتگرالهای حقیقی به وسیله باقیمانده‌ها

گاهی قضیه باقیمانده‌کشی را می‌توان برای ارزیابی انتگرالهای ریمان حقیقی بکار

ببرد. در این مورد روشهای مختلفی وجود دارند که هر یک به شکلی از انتگرالها بستگی خواهد داشت. در این جا باختصار دو روش را توصیف می‌کنیم.
روش اول با انتگرالهائی به شکل $\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ سروکار دارد، که در آن R تابعی گویا^۱ از دو متغیر است.

قضیه ۳۶-۱۶ فرض کنیم R تابعی گویا از دو متغیر باشد، و فرض کنیم که

$$f(z) = R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right),$$

وقتی که عبارت طرف راست متناهی باشد. همچنین γ دایره یکه جهت داد با جهت مثبت به مرکز o را نشان دهد. در این صورت

$$(۳۷) \quad \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{iz} dz$$

به شرط آن که f هیچ قطبی بر نمودار γ نداشته باشد.

برهان. چون $e^{i\theta} = \gamma(\theta)$ با $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، پس

$$\gamma'(\theta) = i\gamma(\theta), \quad \frac{\gamma(\theta)^2 - 1}{2i\gamma(\theta)} = \sin \theta, \quad \frac{\gamma(\theta)^2 + 1}{2\gamma(\theta)} = \cos \theta,$$

و (۳۷) را می‌توان بی‌درنگ از قضیه ۷-۱۶ نتیجه گرفت.

تبره. برای ارزیابی انتگرال طرف راست (۳۷)، فقط کافی است که باقیمانده‌های انتگرالده را در قطبهای که در داخل دایره یکه واقند محاسبه کنیم.

مثال. در حالتی که a عددی حقیقی باشد و $|a| > 1$ ، می‌خواهیم انتگرال

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta / (a + \cos \theta)$$

را ارزیابی کنیم. با بکار بردن (۳۷)، خواهیم داشت

۱. تابع P که بر $C \times C$ با معادله‌ای به شکل

$$P(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

تعریف شده باشد، یک چندجمله‌ای از دو متغیر نامیده می‌شود. ضریبهای $a_{m,n}$ ممکن است حقیقی یا مختلط باشند. خارج قسمت هر دو چندجمله‌ای از این نوع را یک تابع گویا از دو متغیر می‌نامند.

$$I = -2i \int \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

انتگرالده در ریشه های معادله $z^2 + 2az + 1 = 0$ دارای قطبهای ساده است. این ریشهها عبارتند از نقطههای

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1},$$

$$z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

باقیمانده های متناظر، یعنی R_1 و R_2 ، از این رابطهها بدست می آیند:

$$R_1 = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_1 - z_2},$$

$$R_2 = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z - z_2}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{z_2 - z_1}.$$

اگر $a > 1$ ، z_1 در داخل دایره یکه و z_2 در خارج آن است، و

$$I = 4\pi / (z_1 - z_2) = 2\pi / \sqrt{a^2 - 1}.$$

اگر $a < -1$ ، z_2 در داخل دایره و z_1 در خارج آن است، و داریم

$$I = -2\pi / \sqrt{a^2 - 1}.$$

بسیاری از انتگرالهای مجازی را می توان به وسیله قضیه زیر مورد بررسی

قرار داد:

قضیه ۳۷.۱۶ فرض کنیم که $T = \{x + iy \mid y \geq 0\}$ نیمه بالائی صفحه را نشان دهد. همچنین K ناحیه ای باز در C باشد که حاوی T بوده و f ، بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب، بر K تحلیلی باشد. بعلاوه فرض کنیم که هیچ يك از این قطبها بر محور حقیقی واقع نباشد. هرگاه

$$(38) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta = 0,$$

آنگاه

$$(39) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z),$$

که در آن z_1, \dots, z_n قطبهای f در T می باشند.

برهان. فرض کنیم γ گذری جهت‌دار با جهت مثبت باشد که از قسمتی از محور حقیقی از $-R$ تا R و نیم‌دایرهٔ موجود در T که $[-R, R]$ قطر آن است تشکیل شده باشد. R را آن قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که همهٔ قطبهای z_1, \dots, z_n در داخل γ واقع شوند. در این صورت

$$2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + i \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) Re^{i\theta} d\theta.$$

وقتی که $R \rightarrow +\infty$ ، بنا بر (۳۸)، آخرین انتگرال به صفر می‌گراید و (۳۹) بدست می‌آید.

تیمبره. اگر f به صورت خارج قسمت دو چندجمله‌ای، مثلاً $f = P/Q$ باشد، معادلهٔ (۳۸) خود بخود برقرار خواهد بود، مشروط بر آن که درجهٔ Q از درجهٔ P دست کم به اندازهٔ ۲ بیشتر باشد. (ر. ک. تمرین ۱۶.۳۶.)

مثال. برای ارزیابی $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1+x^4)$ ، قرار می‌دهیم $f(z) = 1/(z^4+1)$. در این صورت $P(z) = 1$ ، $Q(z) = 1+z^4$ ، و در نتیجه (۳۸) برقرار است. قطبهای f ریشه‌های معادلهٔ $1+z^4=0$ هستند. این ریشه‌ها عبارتند از z_1, z_2, z_3, z_4 و z_4 که در آنها

$$z_k = e^{(2k-1)\pi i/4} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

از اینها فقط z_1 و z_2 در نیمهٔ بالائی صفحه واقعند. باقیمانده در z_1 عبارت است از

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=z_1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i}. \end{aligned}$$

بهین نحو، نتیجه می‌شود که $\text{Res}_{z=z_2} f(z) = (1/4i) e^{\pi i/4}$. بنا بر این،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{2\pi i}{4i} (e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}) = \pi \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}.$$

۲۵.۱۶ ارزیابی مجموع گاوس به وسیلهٔ حساب باقیمانده

قضیهٔ باقیمانده غالباً برای ارزیابی مجموعها به وسیلهٔ انتگرالگیری بکار می‌رود. این مطلب را با مثال معروف $G(n)$ ، یعنی مجموع گاوس که با دستور

$$(۴۰) \quad G(n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{2\pi i r^2/n}, \quad n \geq 1,$$

تعریف می‌شود، مصور می‌سازیم. این مجموع در قسمتهای مختلف نظریه اعداد تجلی می‌کند. به‌ازای مقدا رهای کوچک n ، آن را می‌توان با سانی از روی تعریفش حساب کرد. مثلاً،

$$G(1) = 1, \quad G(2) = 0, \quad G(3) = i\sqrt{3}, \quad G(4) = 2(1 + i).$$

اگر چه قدر مطلق هر جمله مجموع مساوی ۱ است، اما قدر مطلق خود مجموع \sqrt{n} ، 0 یا $\sqrt{2n}$ می‌باشد. در حقیقت، گاوس دستور شایان توجه

$$(۴۱) \quad G(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + i)(1 + e^{-\pi i n/4})$$

را به‌ازای هر $n \geq 1$ ثابت کرد. برای (۴۱) برهانهای متفاوتی در دست است. ما رابطه (۴۱) را از مجموع کلیتر

$$S(a, n) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a r^2/n},$$

که در آن n و a عددهائی صحیح و مثبت هستند، و این مجموع به‌وسیله دیریکله معرفی شده است، نتیجه خواهیم گرفت. هرگاه $a = 2$ ، آنگاه $S(2, n) = G(n)$. دیریکله رابطه (۴۱) را از یک قانون تقابل برای $S(a, n)$ ، که می‌توان آن را به صورت زیرین بیان کرد، نتیجه گرفته است.

قضیه ۳۸.۱۶ اگر حاصل ضرب na زوج باشد،

$$(۴۲) \quad S(a, n) = \sqrt{\frac{n}{a}} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \overline{S(n, a)},$$

که در آن منظور از $\overline{S(n, a)}$ مزدوج مختلط $S(n, a)$ است.

تبصره. برای بدست آوردن دستور گاوس یعنی (۴۱)، در (۴۲)، a را مساوی ۲ اختیار کرده و ملاحظه می‌کنیم که $\overline{S(n, 2)} = 1 + e^{-\pi i n/2}$.

برهان. برهانی که در این جا ارائه شده است به نحو خاصی آموزنده است زیرا چند روش مختلف را که در آنالیز مختلط بکار می‌روند مصور می‌سازد. برخی از جزئیات کم اهمیتتر محاسبه به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

فرض کنیم تابع g با معادله

$$(۴۳) \quad g(z) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a(z+r)^2/n}$$

تعریف شده باشد. پس تابع g همه جا تحلیلی است، و $g(0) = S(a, n)$. چون na زوج است، می بینیم که

$$\begin{aligned} g(z+1) - g(z) &= e^{\pi i a z^2/n} (e^{2\pi i a z} - 1) \\ &= e^{\pi i a z^2/n} (e^{2\pi i z} - 1) \sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi i m z} \end{aligned}$$

(تمرین ۴۱.۱۶). حال تابع f را با معادله

$$f(z) = g(z)/(e^{2\pi i z} - 1)$$

تعریف می کنیم. در این صورت f همه جا تحلیلی است مگر برای یک قطب مرتبه اول در هر عدد صحیح، و f در معادله

$$(۴۴) \quad f(z+1) = f(z) + \varphi(z)$$

صدق می کند، که در این معادله

$$(۴۵) \quad \varphi(z) = e^{\pi i a z^2/n} \sum_{m=0}^{a-1} e^{2\pi i m z}$$

تابع φ همه جا تحلیلی است.

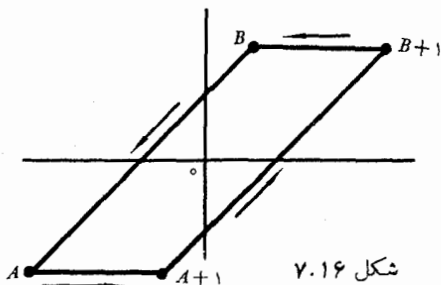
در $z = 0$ باقیمانده f مساوی $g(0)/(2\pi i)$ است (تمرین ۴۱.۱۶)، و در نتیجه

$$(۴۶) \quad S(a, n) = g(0) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

که در آن γ هر گذر بسته ساده جهت دار با جهت مثبت است که ناحیه درونی نمودار آن فقط حاوی قطب $z = 0$ می باشد. γ را قسمی اختیار می کنیم که، همان طور که در شکل ۷.۱۶ نشان داده شده است، متوازی الاضلاع با رأسهای A ، $A+1$ ، $B+1$ ، و B را که در آنها

$$B = -\frac{1}{2} + Re^{\pi i/4} \quad \text{و} \quad A = -\frac{1}{2} - Re^{\pi i/4}$$

توصیف نماید. چون از f در امتداد γ انتگرال بگیریم، حاصل می شود



شکل ۷.۱۶

$$\int_{\gamma} f = \int_A^{A+1} f + \int_{A+1}^{B+1} f + \int_{B+1}^B f + \int_B^A f.$$

در انتگرال f تغییر متغیر $w = z + 1$ می‌دهیم، و سپس با استفاده از (۴۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{A+1}^{B+1} f(w) dw = \int_A^B f(z+1) dz = \int_A^B f(z) dz + \int_A^B \varphi(z) dz.$$

بنابراین، (۴۶) بدین صورت در می‌آید:

$$(۴۷) \quad S(a, n) = \int_A^B \varphi(z) dz + \int_A^{A+1} f(z) dz - \int_B^{B+1} f(z) dz.$$

حال نشان می‌دهیم که وقتی $R \rightarrow +\infty$ ، انتگرالها در امتداد پاره‌خطهای افقی از A تا $A+1$ و از B تا $B+1$ به 0 می‌گریند. برای این کار انتگرالده را بر این پاره‌خطها تخمین می‌زنیم. می‌نویسیم

$$(۴۸) \quad |f(z)| = \frac{|g(z)|}{|e^{\gamma\pi iz} - 1|},$$

و صورت و مخرج آن را جداگانه تخمین می‌زنیم.
بر پاره خطی که B را به $B+1$ وصل می‌کند فرار می‌دهیم

$$-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \text{که در آن} \quad \gamma(t) = t + Re^{\pi i t}$$

از (۴۳) خواهیم داشت

$$(۴۹) \quad |g[\gamma(t)]| \leq \sum_{r=0}^{n-1} \left| \exp \left\{ \frac{\pi i a (t + Re^{\pi i t} + r)^2}{n} \right\} \right|,$$

که در آن $e^z = \exp z$. عبارت داخل دو ابرو دارای قسمت حقیقی

$$-\pi a(\sqrt{r}tR + R^2 + \sqrt{r}rR)/n$$

است (تمرین ۴۱.۱۶). چون $|e^{x+iy}| = e^x$ و $|\exp\{-\pi a\sqrt{r}rR/n\}| \leq 1$ هر جمله در (۴۹) دارای قدر مطلقى نايستتر از

$$\exp\{-\pi aR^2/n\} \exp\{-\sqrt{r}\pi atR/n\}$$

مى باشد. اما $-\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{4}$ ، پس تخمين زير را خواهيم داشت

$$|g[\gamma(t)]| \leq n e^{\pi\sqrt{r}aR/(2n)} e^{-\pi aR^2/n}.$$

براي مخرج موجود در (۴۸) نامساوي مثلي را به شكل

$$|e^{2\pi iz} - 1| \geq |e^{\pi iz} - 1|$$

بكار مى بريم. چون

$$|\exp\{2\pi i\gamma(t)\}| = \exp\{-2\pi R \sin(\pi/4)\} = \exp\{-\sqrt{2}\pi R\},$$

نتيجه مى شود كه

$$|e^{2\pi i\gamma(t)} - 1| \geq 1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}.$$

بنا بر اين، تخمين زير بر پاره خطي كه B را به $B+1$ وصل مى كند وجود دارد:

$$|f(z)| \leq \frac{ne^{\pi\sqrt{r}aR/(2n)} e^{-\pi aR^2/n}}{1 - e^{-\sqrt{2}\pi R}} = o(1) \quad R \rightarrow +\infty$$

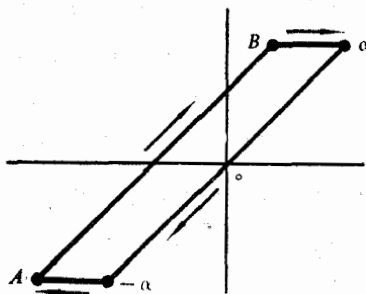
در اين جا $o(1)$ عبارت است از تابعي از R كه وقتي كه $R \rightarrow +\infty$ به صفر مى گرايد.

با بيان مشابهي مى توان نشان داد كه وقتي كه $R \rightarrow +\infty$ ، انتگرالده بر پاره خط واصل بين A و $A+1$ به o مى گرايد. چون در هر حالت درازاي گذر انتگرالگيري مساوي 1 است، پس وقتي كه $R \rightarrow +\infty$ ، دومين و سومين انتگرال طرف راست (۴۷) به o مى گرايند. بنا بر اين، مى توان (۴۷) را به شكل زيرين نوشت:

$$(50) \quad S(a, n) = \int_A^B \varphi(z) dz + o(1) \quad R \rightarrow +\infty$$

براي بررسي انتگرال $\int_A^B \varphi$ ، قضيه کشي را بكار مى بريم، از اطراف متوازي الاضلاعي با راسهاي A ، B ، α ، و $-\alpha$ ، كه در آنها

$$\alpha = B + \frac{1}{4} = Re^{\pi i/4},$$



شکل ۸.۱۶

انتگرال می‌گیریم. (ر. ک. شکل ۸.۱۶). چون φ همه جا تحلیلی است، انتگرال آن در اطراف این متوازی الاضلاع صفر است، پس

$$(۵۱) \quad \int_A^B \varphi + \int_B^{\alpha} \varphi + \int_{\alpha}^{-\alpha} \varphi + \int_{-\alpha}^A \varphi = 0.$$

به دلیل وجود سازهٔ نمائی $e^{\pi i a z^2/n}$ در (۴۵)، می‌توان با بیانی مشابه بالا نشان داد که وقتی که $R \rightarrow +\infty$ ، انتگرال φ در امتداد هر پاره خط افقی به ۰ می‌گراید. بنابراین، از (۵۱) نتیجه می‌شود که

$$\int_A^B \varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi + o(1), \quad \text{وقتی که } R \rightarrow +\infty$$

(۵۰) بدین صورت در می‌آید:

$$(۵۲) \quad S(a, n) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(z) dz + o(1), \quad \text{وقتی که } R \rightarrow +\infty$$

که در آن $\alpha = Re^{\pi i/4}$ با استفاده از (۴۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(z) dz &= \sum_{m=0}^{a-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\pi i a z^2/n} e^{\pi i m z} dz \\ &= \sum_{m=0}^{a-1} e^{-\pi i n m^2/a} I(a, m, n, R), \end{aligned}$$

که در آن

$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp \left\{ \frac{\pi i a}{n} \left(z + \frac{nm}{a} \right)^2 \right\} dz.$$

اگر باز هم قضیهٔ کشی را در مورد متوازی الاضلاع با رأسهای $-\alpha$ ، α ، $\alpha - nm/a$ و $-\alpha - nm/a$ بکار ببریم، مانند قبل نتیجه می‌گیریم که وقتی که

$R \rightarrow +\infty$ ، انتگرالها در امتداد پاره خطهای افقی به 0 می‌گرایند، پس
وقتی که $R \rightarrow +\infty$ ،

$$I(a, m, n, R) = \int_{-\alpha - nm/a}^{\alpha - mn/a} \exp \left\{ \frac{\pi ia}{n} \left(z + \frac{nm}{a} \right)^2 \right\} dz + o(1).$$

با تغییر متغیر $w = \sqrt{a/n} (z + nm/a)$ این رابطه به شکل زیر در می‌آید:
وقتی که $R \rightarrow +\infty$ ،

$$I(a, m, n, R) = \sqrt{\frac{n}{a}} \int_{-\alpha\sqrt{a/n}}^{\alpha\sqrt{a/n}} e^{\pi i w^2} dw + o(1).$$

اگر در (52) $R \rightarrow +\infty$ ، خواهیم داشت

$$(53) \quad S(a, n) = \sum_{m=0}^{a-1} e^{-\pi i nm^2/a} \sqrt{\frac{n}{a}} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R\sqrt{a/n}}^{R\sqrt{a/n}} e^{\pi i w^2} dw.$$

با قرار دادن $T = \sqrt{a/n} R$ دیده می‌شود که برای آخرین حد می‌توان نوشت

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-Te^{\pi i/4}}^{Te^{\pi i/4}} e^{\pi i w^2} dw = I,$$

که در آن I عددی است که از a و n مستقل است. بنابراین، از (53) نتیجه می‌شود که

$$(54) \quad S(a, n) = \sqrt{\frac{n}{a}} I S(n, a).$$

برای ارزیابی I ، $a = 1$ و $n = 2$ را در رابطه (54) قرار می‌دهیم. در این صورت $S(1, 2) = 1 + i$ و $S(2, 1) = 1$ ، پس از رابطه (54) نتیجه می‌شود که $I = (1 + i)/\sqrt{2}$ و (54) به رابطه (42) تحویل می‌گردد.

۲۶.۱۶ کاربرد قضیه باقیمانده در دستور معکوس کردن برای تبدیلهای لاپلاس

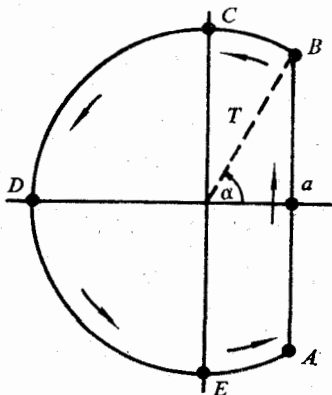
در بسیاری حالات، قضیه زیرین، ساده‌ترین روش برای ارزیابی حدی است که در دستور معکوس کردن برای تبدیلهای لاپلاس ظاهر می‌شود. (ر. ک. تمرین ۰۳۸.۱۱)

قضیه ۲۹.۱۶ فرض کنیم تابع F همه جا در C تحلیلی باشد بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب. همچنین سه عدد پایای مثبت مانند M ، b ، c وجود داشته باشند قسمی که

هر گاه $|z| \geq b$ ، آنگاه $|F(z)| < \frac{M}{|z|^c}$.

فرض کنیم a عدد مثبتی باشد که به ازای آن خط عمودی $x = a$ حاوی هیچ یک از قطبهای F نباشد. همچنین z_1, \dots, z_n آن قطبهای F باشند که در طرف چپ این خط واقعند. در این صورت، برای هر عدد حقیقی $t > 0$ داریم

$$(55) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T e^{(a+iv)t} F(a+iv) dv = 2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}\{e^{zt} F(z)\}.$$



شکل ۹.۱۶

برهان. قضیه باقیمانده کشی را در مورد گذر Γ که در شکل ۹.۱۶ نشان داده شده است و جهت دار با جهت مثبت است بکار می‌بریم. در این شکل شعاع T قسمت مستدیر را آن قدر بزرگ اختیار می‌کنیم که همه قطبهای F را که در طرف چپ خط $x = a$ قرار دارند در بر گیرد، و همچنین $T > b$ از قضیه باقیمانده نتیجه می‌شود که

$$(56) \quad \int_{\Gamma} e^{zt} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}\{e^{zt} F(z)\}.$$

حال می‌نویسیم

$$\int_{\Gamma} = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^E + \int_E^A,$$

که در آنها A, B, C, D, E نقطه‌هائی هستند که در شکل ۹.۱۶ نشان داده

شده اند. این انتگرالها را با I_1, I_2, I_3, I_4 و I_5 نشان می دهیم. ثابت می کنیم به ازای هر $k > 1$ ، وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، $I_k \rightarrow 0$. ابتدا ملاحظه می کنیم که

$$|I_2| < \frac{M}{T^c} \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{iT \cos \theta} T d\theta \leq \frac{M e^{aT}}{T^{c-1}} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ = \frac{M e^{aT}}{T^c} T \arcsin \left(\frac{a}{T} \right).$$

چون وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، $T \arcsin(a/T) \rightarrow a$ ، نتیجه می شود که وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، $I_2 \rightarrow 0$. به همین نحو، ثابت می شود که وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، $I_5 \rightarrow 0$.

حال I_3 را در نظر می گیریم. داریم

$$|I_3| < \frac{M}{T^{c-1}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{iT \cos \theta} d\theta = \frac{M}{T^{c-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-iT \sin \varphi} d\varphi.$$

اما اگر $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ، $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$ ، و در نتیجه وقتی که $T \rightarrow +\infty$

$$|I_3| < \frac{M}{T^{c-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2iT \varphi/\pi} d\varphi = \frac{\pi M}{2T^c} (1 - e^{-iT}) \rightarrow 0.$$

به همین نحو، نتیجه می شود که وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، $I_4 \rightarrow 0$. اما وقتی که $T \rightarrow +\infty$ ، طرف راست (۵۶) تغییر نمی کند. از این روی $\lim_{T \rightarrow +\infty} I_1$ وجود دارد و

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} I_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T e^{(a+iv)t} F(a+iv) idv \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \{ e^{zt} F(z) \}.$$

مثال. فرض می کنیم $F(z) = z/(z^2 + \alpha^2)$ ، که در آن α حقیقی باشد. در این صورت F در $\pm i\alpha$ دارای قطبهای ساده است. چون

$$z/(z^2 + \alpha^2) = \frac{1}{2} [1/(z + i\alpha) + 1/(z - i\alpha)],$$

نتیجه می شود که

$$\operatorname{Res}_{z=i\alpha} \{e^{zt} F(z)\} = \frac{1}{t} e^{i\alpha t}, \quad \operatorname{Res}_{z=-i\alpha} \{e^{zt} F(z)\} = \frac{1}{t} e^{-i\alpha t}.$$

بنابر این، مقدار حد مذکور در (۵۵) مساوی $2\pi i \cos \alpha t$ است. از تمرین ۳۸.۱۱ می بینیم که تابع f ، که بر $+\infty$ و 0 پیوسته است و تبدیل لاپلاس آن مساوی F است، با رابطه $f(t) = \cos \alpha t$ تعریف می شود.

۲۷.۱۶ نگاشتهای همشکلی

فرض کنیم تابع تحلیلی f دو خط متقاطع در نقطه c را به دو خم متقاطع در $f(c)$ بنگارد. در این بخش نشان می دهیم که اگر $f'(c) \neq 0$ ، زاویه بین خطهای مماس بر این دو خم مساوی زاویه بین دو خط متقاطع مفروض است.

این خاصیت از دید هندسی برای تابعهای خطی واضح است. مثلاً، فرض کنیم که $f(z) = z + b$. این نمایش انتقالی است که هر خط را به موازات خود حرکت می دهد، و در این صورت واضح است که زاویهها محفوظ خواهند ماند. مثال دیگر $f(z) = az$ ، که در آن $a \neq 0$. هرگاه $|a| = 1$ ، آنگاه $a = e^{i\alpha}$ و این یک دوران حول مبدأ با زاویه α را نشان می دهد. هرگاه $|a| \neq 1$ ، آنگاه $a = Re^{i\alpha}$ و f ترکیبی است از یک دوران با یک انبساط (اگر $R > 1$)، یا با یک انقباض (اگر $R < 1$). در این جا نیز زاویهها حفظ می شوند. یک تابع خطی کلی $f(z) = az + b$ با $a \neq 0$ ترکیبی از این نوعها است، و در نتیجه برای این نیز زاویهها تغییر نمی کنند.

در حالت کلی، مشتق پذیری در c به معنی وجود تقریبی است خطی در نزدیکی c ، یعنی

$$f'(c) \neq 0 \text{ اگر } f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + o(z - c)$$

می توان انتظار داشت که زاویهها در نزدیکی c محفوظ بمانند.

برای صوری کردن این مفهوما، فرض می کنیم که دو گذر هموار قطعه وار γ_1 و γ_2 ، برتریب، دارای نمودارهای Γ_1 و Γ_2 باشند، و این نمودارها یکدیگر را در c قطع کنند. همچنین γ_1 بر بازه ای حاوی t_1 ، و γ_2 بر بازه ای حاوی t_2 یک به یک باشد، که در آنها $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = c$. بعلاوه $\gamma_1'(t_1) \neq 0$ و $\gamma_2'(t_2) \neq 0$ تفاضل

$$\arg[\gamma_2'(t_2)] - \arg[\gamma_1'(t_1)]$$

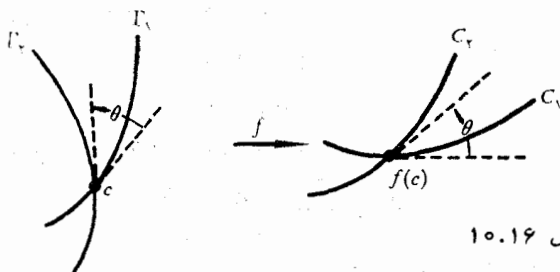
را زاویه از Γ_1 تا Γ_2 در c می نامیم.

حال فرض می کنیم که $f'(c) \neq 0$. در این صورت (بنا بر قضیه ۴.۱۳) گردهای $B(c)$ چون f بر آن یک به یک است. از این روی، تابعهای مرکب

$$w_1(t) = f[\gamma_1(t)] \quad \text{و} \quad w_2(t) = f[\gamma_2(t)]$$

بترتیب، نزدیک t_1 و t_2 یک به یک موضعی هستند، و کمانهای C_1 و C_2 متقاطع در $f(c)$ را توصیف می کنند. (ر.ک. شکل ۱۰.۱۶). بنا بر قاعده زنجیره ای،

$$w_2'(t_2) = f'(c) \gamma_2'(t_2) \neq 0 \quad \text{و} \quad w_1'(t_1) = f'(c) \gamma_1'(t_1) \neq 0$$



شکل ۱۰.۱۶

پس، بنا بر قضیه ۴.۸.۱، عددهای صحیحی مانند n_1 و n_2 وجود دارند بقسمی که

$$\arg[w_1'(t_1)] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_1'(t_1)] + 2\pi n_1,$$

$$\arg[w_2'(t_2)] = \arg[f'(c)] + \arg[\gamma_2'(t_2)] + 2\pi n_2,$$

پس زاویه از C_1 تا C_2 در $f(c)$ مساوی زاویه از Γ_1 تا Γ_2 در c بعلاوه مضرب صحیحی از 2π است. به این دلیل می گوئیم که f زاویه ها را در c حفظ می کند، و نیز یک چنین تابعی را می گوئیم در c همشکلی است.

در نقطه هایی که مشتق صفر باشد زاویه ها محفوظ نمی مانند. مثلاً، اگر $f(z) = z^2$ ، خط مستقیمی که بر مبدأ می گذرد و با محور حقیقی زاویه α می سازد، با f روی خط مستقیمی که با محور حقیقی زاویه 2α می سازد نگاشته می شود. در حالت کلی، وقتی که $f'(c) = 0$ ، بسط تیلور f به شکل

$$f(z) - f(c) = (z - c)^k [a_k + a_{k+1}(z - c) + \dots]$$

است، که در آن $k \geq 2$. با استفاده از این معادله، با آسانی می توان دید که زاویه های بین خمهای متقاطع در c اگر با f نگاشته شوند در سازه k ضرب می شوند.

یک دسته از نگاشتهای مهم همشکلی تبدیلهای میبوس هستند. این تبدیلهای بدین صورت تعریف می‌شوند: اگر a, b, c, d چهار عدد مختلط باشند بقسمی که $ad - bc \neq 0$ ، به ازای هر z که $cz + d \neq 0$ ، تعریف می‌کنیم

$$(57) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

مناسب آن است که، با قرار دادن $f(-d/c) = \infty$ و $f(\infty) = a/c$ ، f را همه جا بر C^* ، یعنی صفحه وسعت یافته، تعریف کرد. (اگر $c = 0$ ، معادله واحد $f(\infty) = \infty$ جای دو معادله اخیر را می‌گیرد.) حال (57) را می‌توان برای z بر حسب $f(z)$ حل کرد و نتیجه گرفت که

$$z = \frac{-d f(z) + b}{c f(z) - a}.$$

یعنی تابع معکوس f^{-1} وجود دارد و با رابطه

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a},$$

با این معنی که $f^{-1}(a/c) = \infty$ و $f^{-1}(\infty) = -d/c$ ، مشخص می‌شود. بنابراین، تبدیلهای میبوس نگاشتهایی یک به یک از C^* روی خودش می‌باشند. همچنین این تبدیلهای در هر نقطه متناهی $z \neq -d/c$ همشکلی هستند، زیرا

$$f'(z) = \frac{bc - ad}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

یکی از مهمترین خاصیت‌های این نگاشتهای این است که آنها دایره‌ها را روی دایره‌ها می‌نگارند (این حکم شامل خطوط مستقیم که حالت‌های خاصی از دایره‌ها هستند نیز هست). اثبات این مطلب در تمرین ۴۶.۱۶ آمده است. خاصیت‌های دیگر تبدیلهای میبوس در تمرینهای نزدیک آخر فصل توصیف شده‌اند.

تمرین

انتگرالگیری مختلط؛ دستوره‌های انتگرال کشی

۱.۱۶ فرض کنید γ یک گذر هموار قطعه‌وار با قلمرو $[a, b]$ و نمودار Γ باشد. همچنین فرض کنید که انتگرال $\int_{\gamma} f$ وجود داشته باشد. بعلاوه S یک ناحیه باز

حاوی Γ ، و g تابعی باشد که به ازای هر z بر Γ ، $g'(z)$ وجود داشته و مساوی $f(z)$ باشد. ثابت کنید که

$B = \gamma(b)$ و $A = \gamma(a)$ که در آن $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} g' = g(B) - g(A)$ ،
 خصوصاً، هر گاه γ یک مدار باشد، آنگاه $A = B$ و انتگرال مساوی ۰ است.
 (دهنمائی). قضیه ۳۴.۷ را در هر بازه پیوستگی γ' بکار برید.

۲۰۱۶ فرض کنید γ یک گذر مستدیر جهت دار با جهت مثبت به مرکز o و شعاع r باشد. با استفاده از یکی از دستورهای انتگرال کشی، صحت هر یک از رابطه‌های زیرین را تحقیق کنید.

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \quad (A)$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz = \pi i \quad (B)$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz = \frac{\pi i}{3} \quad (C)$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e \quad (D)$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)} dz = 2\pi i(e-1) \quad (E)$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz = 2\pi i(e-2) \quad (F)$$

۳۰۱۶ فرض کنید که $f = u + iv$ بر گرده‌ای چون $B(a; R)$ تحلیلی باشد. اگر $0 < r < R$ ، ثابت کنید که

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta.$$

۴۰۱۶ (آ) صورت قویتر قضیه لیوویل را که در زیر بیان شده است ثابت کنید:
 هرگاه f یک تابع تمام باشد بقسمی که $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)/z| = 0$ آنگاه f پایا است.

(ب) درباره یک تابع تمام مانند f که به ازای هر z مختلط در نامساوی

صدق کند چه می توان نتیجه گرفت؟
 که در آن $c > 0$ ، $|f(z)| \leq M|z|^c$

۵.۱۶ فرض کنید f بر $B(0; R)$ تحلیلی باشد. همچنین γ دایره ای جهت دار با جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع r را نشان دهد، که در آن $0 < r < R$. اگر a در داخل γ قرار داشته باشد، نشان دهید که

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left\{ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-r^2/\bar{a}} \right\} dz.$$

اگر $a = Ae^{i\alpha}$ ، نشان دهید که این رابطه به دستور

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - A^2) f(re^{i\theta})}{r^2 - 2rA \cos(\alpha - \theta) + A^2} d\theta$$

تحویل می شود. با مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی این معادله عبارتی بدست می آید که به دستور انتگرال پواسن معروف است.

۶.۱۶ فرض کنید f بر بست گرده $B(0; 1)$ تحلیلی باشد. اگر $|a| < 1$ ، نشان دهید که

$$(1 - |a|^2) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{1 - z\bar{a}}{z-a} dz,$$

که در آن γ دایره یکه به مرکز 0 است و جهت دار با جهت مثبت می باشد. نامساوی زیر را نتیجه بگیرید:

$$(1 - |a|^2) |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

۷.۱۶ اگر $|z| < 3/2$ ، قرار دهید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n / 3^n$ ؛ اگر $|z| > 1/2$ ، قرار دهید $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^{-n}$. فرض کنید γ یک گذر مستدیر جهت دار با جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع 1 باشد، و به ازای $1 \neq |a|$ ، $h(a)$ را به صورت

$$h(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{a^2 g(z)}{z^2 - az} \right) dz$$

تعریف کنید. ثابت کنید که

$$h(a) = \begin{cases} \frac{3}{3-2a}, & |a| < 1 \\ \frac{2a^2}{1-2a}, & |a| > 1 \end{cases}$$

بسطهای تیلور

۸۰۱۶ تابع f را برگردانده $B(0; 1)$ با معادله $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تعریف کنید. بسط تیلور f را حول نقطه $a = 1/2$ و همچنین حول نقطه $a = -1/2$ بیابید. در هر حالت شعاع همگرایی را مشخص کنید.

۹۰۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)z^n$ را داشته باشد، که در $B(0; R)$ معتبر باشد. همچنین فرض کنید که

$$g(z) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(ze^{\gamma \pi i k/p}).$$

ثابت کنید که بسط تیلور g از هر جمله p ام در بسط f تشکیل شده است. یعنی، اگر $z \in B(0; R)$ داریم

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(pn)z^{pn}.$$

۱۰۰۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ را داشته باشد، که در $B(0; R)$ معتبر باشد. قرار دهید $s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ اگر $0 < r < R$ و $|z| < r$ نشان دهید که

$$s_n(z) = \frac{1}{\gamma \pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \frac{w^{n+1} - z^{n+1}}{w - z} dw,$$

که در آن γ دایره‌ای است جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع r .

۱۱۰۱۶ دو بسط تیلور $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ، که بترتیب به‌ازای $|z| \leq R_1$ و $|z| < R_2$ معتبرند، داده شده‌اند. ثابت کنید که اگر $|z| < R_1 R_2$

$$\frac{1}{\gamma \pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w} g\left(\frac{z}{w}\right) dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

که در آن γ دایره‌ای است جهت‌دار با جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع R_1 .

۱۲۰۱۶ فرض کنید که f بسط تیلور $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ را داشته

باشد، که در گوی $B(a; R)$ معتبر باشد.

(آ) اگر $0 \leq r < R$ ، اتحاد پادسوال را نتیجه بگیرید:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(ب) اگر $M(r)$ ماکزیم $|f|$ بر دایره $|z - a| = r$ باشد، نامساوی $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2$ را با استفاده از (آ) نتیجه بگیرید.

(ج) با استفاده از (ب) برهان دیگری از اصل کالبد ماکزیم موضعی (قضیه ۲۷.۱۶) را بدست آورید.

۱۳.۱۶ لم شواتز را ثابت کنید: فرض کنید f بر گرده $B(0; 1)$ تحلیلی باشد. همچنین $f(0) = 0$ ، و اگر $|z| < 1$ ، $|f(z)| \leq 1$ ، دراین صورت

$$|f'(0)| \leq 1، \text{ و اگر } |z| < 1، |f(z)| \leq |z|.$$

هر گاه $|f'(0)| = 1$ ، دست کم به ازای یک مقدار z_0 در $B(0; 1)$ ، $|f(z_0)| = |z_0|$ ، آنگاه $f(z) = e^{i\alpha} z$ ، که در آن α عددی است حقیقی.

داهمنائی. فرض کنید که $g(0) = f'(0)$ ، و اگر $g(z) = f(z)/z$ ، $z \neq 0$ ، حال قضیه کالبد ماکزیم را در مورد g بکار برید.

بسطهای لوران، نقطه‌های استثنائی، باقیمانده‌ها

۱۴.۱۶ فرض کنید که f و g بر ناحیه باز S تحلیلی باشند. همچنین γ یک مدار ژردان با نمودار Γ باشد قسمی که Γ و ناحیه داخلی آن در S قرار گیرند. فرض کنید به ازای هر z بر Γ ، $|g(z)| < |f(z)|$.

(آ) نشان دهید که

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

داهمنائی. قرار دهید $m = \inf \{|f(z)| - |g(z)| \mid z \in \Gamma\}$. این صورت $m > 0$ ، و در نتیجه به ازای هر t در $[0, 1]$ و هر z بر Γ ،

$$|f(z) + tg(z)| \geq m > 0.$$

حال اگر $0 \leq t \leq 1$ ، قرار می‌دهیم

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz.$$

در این صورت φ بر $[0, 1]$ پیوسته، و در نتیجه پایا است. پس

$$\varphi(0) = \varphi(1).$$

(ب) با استفاده از (آ) ثابت کنید که تعداد صفرهای f و $g + f$ در داخل Γ برابرند (قضیه روزه).

۱۵.۱۶ فرض کنید p یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، مثلاً

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

که در آن $a_n \neq 0$. با فرض $f(z) = a_n z^n$ و $g(z) = p(z) - f(z)$ در قضیه روزه، ثابت کنید که p درست دارای n صفر در C می‌باشد.

۱۶.۱۶ فرض کنید f بر بست گرده $B(0; 1)$ تحلیلی باشد، و اگر $|z| = 1$ ، $|f(z)| < 1$ نشان دهید که یک، و فقط یک، نقطه مانند z_0 در $B(0; 1)$ هست قسمی که $f(z_0) = z_0$. قضیه روزه را بکار برید.

۱۷.۱۶ فرض کنید $p_n(z)$ مجموع جزئی n بسط تیلور $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ را نشان دهد. با استفاده از قضیه روزه (یا به روشی دیگر)، ثابت کنید که به ازای هر $r > 0$ ، عددی مانند N (وابسته به r) وجود دارد قسمی که اگر $n \geq N$ ، به ازای هر z در $B(0; r)$ ، $p_n(z) \neq 0$.

۱۸.۱۶ اگر $a > e$ ، تعداد صفرهای تابع $f(z) = e^z - az^n$ را که در داخل دایره $|z| = 1$ واقعند پیدا کنید.

۱۹.۱۶ تابعی را مثال بزنید که همه خواص زیرین را داشته باشد، یا توضیح دهید که چرا چنین تابعی نمی‌تواند وجود داشته باشد: f همه جا در C تحلیلی باشد، جز برای یک قطب از مرتبه ۲ در نقطه 0 و قطبهای ساده در z و $-z$ ؛ به ازای هر z ، $f(z) = f(-z)$ ؛ $f(1) = 1$ ؛ تابع $g(z) = f(1/z)$ در $z = 0$ دارای صفر از مرتبه ۲ باشد؛ و $\text{Res}_{z=i} f(z) = 2i$.

۲۰.۱۶ نشان دهید که هر یک از بسطهای لوران زیرین در ناحیه نشان داده شده معتبر است:

$$(آ) \text{ اگر } 1 < |z| < 2$$

$$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

(ب) اگر $|z| > 2$

$$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2^{n-1}}{z^n}$$

۲۱.۱۶ به ازای هر t ثابت در C ، فرض کنید که $J_n(t)$ ضرب z^n در بسط لوران

$$e^{(z-1/t)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n$$

باشد. نشان دهید که به ازای $n \geq 0$

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta$$

و $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. بسط به صورت رشته توانی زیرین را نتیجه بگیرید:

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}t\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad (n \geq 0).$$

تابع J_n را تابع بسل از مرتبه n می نامند.

۲۲.۱۶ قضیه ریمان را ثابت کنید: هرگاه z_0 یک نقطه استثنائی تنهای f باشد و $|f|$ بر یکی از همسایگیهای سفته چون $B'(z_0)$ کراندار باشد، آنگاه z_0 یک نقطه استثنائی دفع شدنی است.

داهمنائی. انتگرالهای ضرایب a_n در بسط لوران f را تخمین بزنید و نشان دهید که به ازای هر $n < 0$ ، $a_n = 0$.

۲۳.۱۶ قضیه کازوداتی^۱ - دایراشتراس را ثابت کنید: فرض کنید که z_0 یک نقطه استثنائی لازم f ، و c یک عدد مختلط دلخواه باشد. در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر گرده $B(z_0)$ ، نقطه ای مانند z در $B(z_0)$ باشد بقسمی که

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

داهمنائی. فرض کنید که قضیه درست نباشد. با فرض $g(z) = 1/[f(z) - c]$ و بکار بردن تمرین ۲۲.۱۶ در مورد آن، تناقضی بدست آورید.

۲۴.۱۶ نقطه در بی نهایت. تابع f را در ∞ تحلیلی گوئیم در صورتی که تابع g تعریف شده با معادله $g(z) = f(1/z)$ در مبدأ تحلیلی باشد. بهمین نحو، گوئیم f یک صفر، یک قطب، یک نقطه استثنائی رفع شدنی، یا یک نقطه استثنائی لازم در ∞ دارد در صورتی که g یک صفر، یک قطب، و مانند اینها، در 0 داشته باشد. بنا بر قضیه لیوویل، یک تابع که همه جا در C^* تحلیلی است باید پایا باشد. ثابت کنید که

(آ) f وقتی، فقط وقتی، یک چندجمله‌ای است که تنها نقطه استثنائی f در C^* یک قطب در ∞ باشد، که در این حالت مرتبه قطب مساوی درجه چندجمله‌ای خواهد بود.

(ب) f وقتی، و فقط وقتی، یک تابع گویا است که هیچ نقطه استثنائی بجز قطبها در C^* نداشته باشد.

۲۵.۱۶ روشهای «مختصر» زیر را برای محاسبه باقیماندهها نتیجه بگیرید:

(آ) هرگاه a یک قطب مرتبه اول برای f باشد، آنگاه

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

(ب) هرگاه a یک قطب مرتبه دو برای f باشد، آنگاه

$$\text{Res } f(z) = g'(a), \text{ که در آن } g(z) = (z - a)^2 f(z).$$

(ج) فرض کنید که f و g هر دو در a تحلیلی باشند، $f(a) \neq 0$ ، و a یک صفر مرتبه اول برای g باشد. نشان دهید که

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g'(a)}, \quad \text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{[g(z)]^2} = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{[g'(a)]^3}.$$

(د) هرگاه f و g مانند (ج) باشند، بجز آن که a یک صفر مرتبه دوم برای g باشد، آنگاه

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3[g''(a)]^2}.$$

۲۶.۱۶ باقیماندههای هر یک از این تابعها را در قطبهای آن محاسبه کنید:

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1} \quad (\text{آ})$$

، $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ (د) ، $f(z) = \frac{\sin z}{z \cos z}$ (ج)

، $f(z) = \frac{1}{1-z^n}$ (هـ) $(n$ عدد صحیح مثبتی است).

۲۷.۱۶ اگر $\gamma(a; r)$ دایره جهت دار با جهت مثبت به مرکز a و شعاع r باشد، نشان دهید که

، $\int_{\gamma(0;4)} \frac{3z-1}{(z+1)(z-3)} dz = 6\pi i$ (آ)

، $\int_{\gamma(0;2)} \frac{2z}{z^2+1} dz = 4\pi i$ (ب)

، $\int_{\gamma(0;2)} \frac{z^2}{z^4-1} dz = 2\pi i$ (ج)

، $\int_{\gamma(2;1)} \frac{e^z}{(z-2)^2} dz = 2\pi i e^2$ (د)

انتگرالهای موجود در تمرینهای ۲۸.۱۶ تا ۳۵.۱۶ را به وسیله باقیمانده‌ها ارزیابی کنید.

، $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b \cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$ اگر $0 < b < a$ ۲۸.۱۶

، $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t dt}{1-2a \cos t + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}$ اگر $a^2 < 1$ ۲۹.۱۶

، $\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 3t) dt}{1-2a \cos t + a^2} = \frac{\pi(a^2-a+1)}{1-a}$ اگر $0 < a < 1$ ۳۰.۱۶

، $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t dt}{a+b \cos t} = \frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}$ اگر $0 < b < a$ ۳۱.۱۶

، $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ ۳۲.۱۶

، $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^4)^2} dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$ ۳۳.۱۶

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{200} \quad ۳۴.۱۶$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^5} dx = \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \quad (\bar{\Gamma} \quad ۳۵.۱۶)$$

دانهائی. از اطراف کرانه قطع مستدیر

$$S = \{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi/5\}$$

انتگرال بگیرید، و سپس فرض کنید که $R \rightarrow \infty$.

(ب) اگر m و n عددهائی صحیح باشند و

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n} \sin \left(\frac{2m+1}{2n} \pi \right), \quad 0 < m < n$$

۳۶.۱۶ اگر f به صورت خارج قسمت دو چندجمله‌ای باشد، مثلاً $f = P/Q$ ، و در آن درجه Q دست کم دو تا از درجه P بیشتر باشد، ثابت کنید که دستور (۳۸) برقرار خواهد بود.

۳۷.۱۶ اگر $f(z) = e^{imz} P(z)/Q(z)$ ، که در آن $m > 0$ ، و P و Q چندجمله‌ایهائی باشند که درجه Q دست کم یکی از درجه P بیشتر باشد، ثابت کنید که دستور (۳۸) برقرار خواهد بود. این، امکان ارزیابی انتگرالهائی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

را به وسیله روش توصیف شده در قضیه ۳۷.۱۶ بدست می‌دهد.

۳۸.۱۶ با استفاده از روشی که در تمرین ۳۷.۱۶ پیشنهاد شده است این انتگرالها را ارزیابی کنید:

(آ) اگر $m \geq 0$ و $a > 0$ ،

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-am}).$$

(ب) اگر $m > 0$ و $a > 0$ ،

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2a^2} e^{-ma/\sqrt{2}} \sin \left(\frac{ma}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right).$$

۳۹.۱۶ فرض کنید که $w = e^{2\pi i/3}$ و γ یک دایره جهت‌دار با جهت مثبت باشد

که نمودار آن از $1, w, w^2$ یا w^2 نگذرد. (عددهای $1, w, w^2$ ریشه‌های سوم یک هستند.) ثابت کنید که انتگرال

$$\int_{\gamma} \frac{(z+1)}{z^3-1} dz$$

مساوی $\frac{2\pi i(m+nw)}{3}$ است، که در آن m و n عددهائی صحیح می‌باشند. مقادیرهای ممکن m و n را معین کنید و چگونگی بستگی آنها را با γ توصیف نمایید.

۴۰.۱۶ فرض کنید γ دایره‌ای جهت‌دار بنا جهت مثبت به مرکز 0 و شعاع کوچکتر از 2π باشد. اگر a عددی مختلط، و n عددی صحیح باشد، قرار دهید

$$I(n, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z^{n-1} e^{az}}{1-e^z} dz.$$

ثابت کنید که

$$I(n, a) = 0, n > 1 \text{ و اگر } I(1, a) = -1, I(0, a) = \frac{1}{\gamma} - a$$

وقتی که $n \geq 1$ ، $I(-n, a)$ را بر حسب چند جمله‌ایهای برنولی محاسبه کنید (ر. ک. تمرین ۳۸.۹).

۴۱.۱۶ در این تمرین قسمتی از جزئیات برهان قضیه ۳۸.۱۶ مورد حاجت است. فرض کنید که

$$f(z) = g(z)/(e^{\gamma \pi i z} - 1) \text{ و } g(z) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\pi i a(z+r)\gamma/n}$$

که در آن a و n عددهای صحیح مثبتی باشند و na زوج باشد. ثابت کنید که:

$$g(z+1) - g(z) = e^{\pi i a z \gamma/n} (e^{\gamma \pi i z} - 1) \sum_{m=0}^{a-1} e^{\gamma \pi i m z} \quad (\text{آ})$$

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = g(0)/(2\pi i) \quad (\text{ب})$$

(ج) قسمت حقیقی $(t + Re^{\pi i t \gamma} + r)^2$ مساوی $(\sqrt{\gamma} t R + R^2 + \sqrt{\gamma} r R)$ است.

تابهای تحلیلی يك به يك

۴۲.۱۶ فرض کنید S یک زیرمجموعه باز C ، و f بر S تحلیلی و یک به یک باشد. ثابت کنید که:

(آ) به ازای هر z در S ، $f'(z) \neq 0$. (از این روی f در هر نقطه S همشکلی است.)

(ب) هر گاه g معکوس f باشد، آنگاه g بر $f(S)$ تحلیلی است و اگر

$$g'(w) = 1/f'(g(w)), \quad w \in f(S)$$

۴۳.۱۶ فرض کنید که $f: C \rightarrow C$ بر C تحلیلی و یک به یک باشد. ثابت کنید که $f(z) = az + b$ ، که در آن $a \neq 0$. اگر f بر C^* یک به یک بوده بر C^* بجز احتمالاً در تعدادی متناهی قطب تحلیلی باشد، چه می توان نتیجه گرفت؟

۴۴.۱۶ اگر f و g تبدیلهای میوس باشند، نشان دهید که ترکیب $f \circ g$ نیز یک تبدیل میوس است.

۴۵.۱۶ از نظرهندسی توصیف کنید که وقتی نقطه z به وسیله یکی از تبدیلهای میوس خاص زیرین به $f(z)$ تبدیل می شود چه روی می دهد:

(آ) $f(z) = z + b$ (انتقال).

(ب) $f(z) = az$ ، که در آن $a > 0$ (انبساط یا انقباض).

(ج) $f(z) = e^{i\alpha}z$ ، که در آن α حقیقی است (دوران).

(د) $f(z) = 1/z$ (انعکاس).

۴۶.۱۶ اگر $c \neq 0$ ، داریم

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

از این روی هر تبدیل میوس را می توان به صورت ترکیبی از حالت های خاص که در تمرین ۴۵.۱۶ توصیف شده اند درآورد. با استفاده از این مطلب نشان دهید که تبدیلهای میوس هر دایره را به یک دایره تبدیل می کنند (در این جا خط های راست حالت های خاص دایره در نظر گرفته می شوند.)

۴۷.۱۶ (آ) نشان دهید که همه تبدیلهای میوس را، که قسمت بالائی صفحه، یعنی

$$T = \{x + iy \mid y \geq 0\}$$

را روی بست گرده $B(0; 1)$ بنگارند، می توان به شکل $f(z) = e^{i\alpha}(z - a)/(z - \bar{a})$ بیان کرد، که در

$$a \in T \text{ و } \alpha \text{ حقیقی باشد}$$

(ب) نشان دهید که همواره می توان a و α را بقسمی اختیار کرد که هر سه

نقطه مفروض محور حقیقی روی سه نقطه مفروض دایره یک‌گانه نگاشته شوند.

۴۸.۱۶ همه تبدیلهای میبوس را که نیمه راست صفحه، یعنی

$$S = \{x + iy \mid x \geq 0\}$$

را روی بست $B(0; 1)$ نقش می‌کند بیابید.

۴۹.۱۶ همه تبدیلهای میبوس که بست $B(0; 1)$ را روی خودش می‌نگارد بیابید.

۵۰.۱۶ نقطه‌های ثابت تبدیل میبوس

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

عبارتند از نقطه‌هایی چون z که به‌ازای آنها $f(z) = z$ فرض کنید که

$$D = (d - a)^2 + 4bc.$$

(آ) همه نقطه‌های ثابت را برای حالت $c = 0$ بیابید.

(ب) اگر $c \neq 0$ و $D \neq 0$ ، ثابت کنید که f درست γ نقطه ثابت z_1 و z_2 دارد (هر دو متناهی هستند) و این دو در معادله زیرین صدق می‌کنند:

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = Re^{i\theta} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

که در آن $R > 0$ و θ حقیقی است.

(ج) اگر $c \neq 0$ و $D = 0$ ، ثابت کنید که f درست یک نقطه ثابت چون z_1 دارد که در معادله زیرین صدق می‌کند:

$$\frac{1}{f(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + C, \quad C \neq 0$$

به‌ازای یک مقدار $C \neq 0$.

(د) اگر تبدیل میبوس f مفروض باشد، نقشهای متوالی نقطه مفروض w را بررسی کنید. یعنی، فرض کنید که

$w_1 = f(w), w_2 = f(w_1), \dots, w_n = f(w_{n-1}), \dots$ و رفتار دنباله $\{w_n\}$ را مورد مطالعه قرار دهید. حالت خاصی را که a, b, c, d حقیقی هستند، و $ad - bc = 1$ در نظر بگیرید.

تمرینهای گوناگون

۵۱.۱۶ همه عددهای مختلط z را که

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n e^{\gamma \pi i k z / n}$$

یابید.

۵۲.۱۶ اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یک تابع تمام باشد بقسمی که به ازای یک مقدار $M > 0$ و یک مقدار $k > 0$ و هر $r > 0$ $|f(re^{i\theta})| \leq M e^{rk}$ ، ثابت کنید که

$$|a_n| \leq \frac{M e^{n/k}}{(n/k)^{n/k}}, \quad n \geq 1$$

۵۳.۱۶ فرض کنید که f بر یک همسایگی سفته چون $B'(0; a)$ تحلیلی باشد. ثابت کنید که $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ وقتی، و فقط وقتی، وجود دارد (احتمالاً نامتناهی) که عدد صحیحی چون n و تابعی چون g که بر $B(0; a)$ تحلیلی است باشند بقسمی که $g(0) \neq 0$ ، و در $B'(0; a)$ داشته باشیم $f(z) = z^n g(z)$.

۵۴.۱۶ فرض کنید که $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ یک چندجمله‌ای از درجه n با ضریبهای حقیقی باشد که این ضریبها در نامساویهای

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{n-1} > a_n > 0$$

صدق کنند. ثابت کنید که $p(z) = 0$ نامساوی $|z| > 1$ را ایجاب می‌کند. دانهائی. $p(z)(1-z)$ را در نظر بگیرید.

۵۵.۱۶ گوئیم تابع f که بر گرده $B(a; r)$ تعریف شده است دارای یک صفر از مرتبه نامتناهی در a است در صورتی که به ازای هر عدد صحیح $k > 0$ ، تابعی چون g_k که در a تحلیلی است وجود داشته باشد بقسمی که $f(z) = (z-a)^k g_k(z)$ بر $B(a; r)$ باشد. اگر f دارای یک صفر از مرتبه نامتناهی در a باشد، ثابت کنید $f = 0$ همه جا در $B(a; r)$.

۵۶.۱۶ مطلوب است اثبات قضیه مرزا: هر گاه f بر ناحیه باز S دد C پیوسته باشد، و به ازای هر مسدود چند ضلعی γ دد S ، $\int_{\gamma} f = 0$ ، آنگاه f بر S تحلیلی است.

فهرست چند کتاب به زبان انگلیسی که برای کسب اطلاعات بیشتر می توان به آنها مراجعه کرد.

- 16.1 Ahlfors, L. V., *Complex Analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill, New-York, 1966.
- 16.2 Caratheodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, 2 vols. F. Steinhardt, translator. Chelsea, New York, 1954.
- 16.3 Estermann, T., *Complex Numbers and Functions*. Athlone Press, London, 1962.
- 16.4 Heins, M., *Complex Function Theory*. Academic Press, New York, 1968.
- 16.5 Heins, M., *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
- 16.6 Knopp, K., *Theory of Functions*, 2 vols. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1945.
- 16.7 Saks, S., and Zygmund, A., *Analytic Functions*, 2nd ed., E. J. Scott, translator. *Monografie Matematyczne* 28, Warsaw, 1965.
- 16.8 Sansone, G., and Gerretsen, J., *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, 2 vols. P. Noordhoff, Gröningen, 1960.
- 16.9 Titchmarsh, E. C., *Theory of Functions*, 2nd ed. Oxford University Press, 1939.

فهرست علامتهای خاص

۵۲، ۱۰	تعلق دارد به (تعلق ندارد به)	$\in (\notin)$
۵۲، ۱۰	زیر مجموعه ... است	\subseteq
۱۰	مجموعه عددهای حقیقی	\mathbb{R}
۱۱	مجموعه عددهای حقیقی مثبت (منفی)	\mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^-)
	x در P صدق می کند $\{x \mid$ مجموعه همه x هایی که در خاصیت P	
۵۲، ۱۳	صدق می کنند	
۱۳	بازه باز ($[a, b]$) با نقطه های انتهایی a و b	$[a, b[$ ($]a, b]$)
۱۳	بازه های نیم باز	$]a, b[$ ، $]a, b]$
۱۳	بازه های نامتناهی	$]a, +\infty[$ ، $]a, +\infty[$ ، $]-\infty, a[$ ، $]-\infty, a[$
۱۴	مجموعه عددهای صحیح مثبت	\mathbb{Z}^+
۱۴	مجموعه عددهای صحیح (مثبت، منفی، و صفر)	\mathbb{Z}
۱۷	مجموعه عددهای گویا	\mathbb{Q}
۲۰	بزرگترین (کوچکترین) عضو S	$\max S$ ($\min S$)
۲۱	سوپریمم (اینفیمم)	\sup (\inf)
۲۴	بزرگترین عدد صحیح نایبتر از x	$[x]$
۲۸	دستگاه عددهای حقیقی وسعت یافته	\mathbb{R}^*
۳۰	مجموعه عددهای مختلط (صفحه مختلط)	\mathbb{C}
۴۱	دستگاه عددهای مختلط وسعت یافته	\mathbb{C}^*
۵۳	حاصل ضرب دکارتی A و B	$A \times B$
۵۵	نقش S با F	$F(S)$
۵۵	تابع F از S به T	$F: S \rightarrow T$
۵۸	دنباله ای که جمله n آن F_n است	$\{F_n\}$

۶۲	اجتماع	\cup, U
۶۳	اشتراک	\cap, \cap
۶۳	مجموعه نقطه‌هایی که در B اند ولی در A نیستند	$B - A$
۱۲۰، ۶۸ (تمرین ۷۰۲)	نقش معکوس Y با f	$f^{-1}(Y)$
۷۳	فضای اقلیدسی n بعدی	R^n
۷۳	نقطه در R^n	(x_1, \dots, x_n)
۷۴	هنج یا درازای یک بردار	$\ x\ $
۷۵	بردار مختصات یکه k ام	u_k
۷۵	گوی n بعدی باز به مرکز a (و به شعاع r)	$(B(a; r))B(a)$
۹۲، ۷۵	درون S	$\text{int } S$
۷۶	بازه باز n بعدی	$]a, b[$
۷۹	بازه بسته n بعدی	$[a, b]$
۹۴، ۸۱	بست S	S
۹۴، ۸۱	مجموعه نقطه‌های انباشتگی S	S'
۹۱	فضای متری M با متر d	(M, d)
۹۱	فاصله از x تا y در فضای متری	$d(x, y)$
۹۲	گوی در فضای متری M	$B_M(a; r)$
۹۶	کرانه مجموعه S	∂S
۱۳۷	حد دست راستی (چپی)	$(\lim) \lim_{x \rightarrow c+}$
۱۳۷	حد دست راستی (چپی) f در c	$(f(c-)) f(c+)$
۲۴۷، (تمرین ۲۴۰۴)	نوسان f بر مجموعه T	$\Omega_f(T)$
۲۴۷، (تمرین ۲۴۰۴)	نوسان f در نقطه x	$\omega_f(x)$
۱۷۲، ۱۶۸، ۱۵۵	مشتق f در c	$f'(c)$
۱۶۹	مشتق جزئی f بر حسب مختص k ام	$D_k f$
۱۷۰	مشتق جزئی مرتبه دوم	$D_{r,k} f$
۲۰۹، ۱۸۸	مجموعه همه افزایش‌های $[a, b]$	$\mathcal{P}[a, b]$
۱۹۱	تغییرکل f	V_f
۱۹۷	درازای گذر با درازای متناهی f	Λ_f
۲۰۹	مجموع ریمان - اشتیل‌یس	$S(P, f, \alpha)$

۲۵۹	$f \in R(a, b)$ است بر حسب α بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد	$f \in R(a, b)$ است
۲۱۰	$f \in R$ است بر $[a, b]$ انتگرال ریمان دارد	$f \in R$ است
۲۲۱	$\alpha \setminus$ بر $[a, b]$ است	α صعودی است
۲۲۲	مجموع اشتیل یس بالائی (پائینی)	$(L(P, f, \alpha)) U(P, f, \alpha)$
۲۶۷	حد اعلا (حد بالائی)	$\lim \sup$
۲۶۸	حد اسفل (حد پائینی)	$\lim \inf$
۲۷۸	نماد اوی بزرگ (کوچک)	$a_n = O(b_n)$ $(a_n = o(b_n))$
۳۳۴	به طور میانگینی به f همگرا است	$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ l.i.m.
۳۴۵	f از هر مرتبه مشتق دارد	$f \in C^\infty$
۳۶۵	تقریباً همهجا بر S	ت. ه. بر S
	f_n دنباله $\{f_n\}$ بر S صعودی است و ت. ه. بر S	$f_n \setminus$ ت. ه. بر S
۳۶۵	به تابع f همگرا است	
۳۶۸	مجموعه تابعهای پله‌ای بر بازه I	$S(I)$
۳۶۸	مجموعه تابعهای بالائی بر بازه I	$U(I)$
۳۷۴	مجموعه تابعهایی که بر بازه I انتگرال لبگ دارند	$L(I)$
۳۷۶	قسمت مثبت (منفی) تابع f	$(f^-) f^+$
۳۹۹	مجموعه تابعهای اندازه پذیر بر بازه I	$M(I)$
۴۱۳	تابع مشخص کننده S	χ_S
۴۱۳	اندازه لبگ S	$\mu(S)$
۴۲۰، ۴۱۸	حاصل ضرب داخلی f و g	(f, g)
۴۲۰، ۴۱۸	هنج L^2 تابع f	$\ f\ $
۴۱۸	مجموعه تابعهایی که مربعیشان بر I انتگرال پذیرند	$L^2(I)$
۴۶۴	پیچش f و g	$f * g$
۴۸۷	مشتق جهتی f در c در جهت u	$f'(c; u)$
۴۹۰	مشتق کل	$f'(c), T_c$
۴۹۲	بردار گرادیان f	∇f
۴۹۴	ماتریس تابع خطی T	$m(T)$
۴۹۶	ماتریس ژاکوبی f در c	$Df(c)$
۵۰۱	پاره خطی که x و y را بهم وصل می کند	$L(x, y)$
۵۱۹	دترمینان ماتریس $[a_{ij}]$	$\det[a_{ij}]$
۵۲۰	دترمینان ژاکوبی f	J_f

۵۲۴	مؤلفه‌های f دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند	$f \in C^1$
۵۲۳، ۵۲۹	انتگرال چندگانه	$\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$
۵۵۸	محتوای ژردان داخلی (خارجی) S	$(c(S)) c(S)$
۵۵۸	محتوای ژردان S	$c(S)$
۶۱۲	انتگرال پیرامنی f در امتداد γ	$\int_{\gamma} f$
۶۱۵	حلقه دایره به مرکز a	$A(a; r_1, r_2)$
۶۲۴	عدد گردشی یک مدار بر حسب z	$n(\gamma, z)$
۶۴۱	همسایگی سفته a (به شعاع r)	$(B'(a; r)) B'(a)$
۶۴۴	باقیمانده f در a	$\text{Res } f(z)$ $z=a$

واژه نامه

فارسی به انگلیسی

hyperplane	ابرفضا
identity	اتحاد
Parseval	پارسوال
algebraic	جبری
Lagrange	لاگرانژ
trigonometric	مثلثاتی
set-theoretic	نظریه مجموعه‌ای
union	اجتماع
arrangement	آرایش
array	آرایش
rectangular	مستطیلی
vibration	ارتعاش
bounded above by ...	از بالا به ... کراندار
unbounded above	از بالا بی کران
bounded above	از بالا کراندار
bounded below	از پایین کراندار
continuous from the left	از چپ پیوسته
continuous from the right	از راست پیوسته
test	آزمون
Abel	آبل
Weierstrass M	M وایر اشتراس
integral	انتگرال
Tonelli-Hobson	تنلی-ها بسن

Dirichlet	دیریکله
Dini	دینی
root	ریشه
Jordan	ژردان
second derivative	مشتق دوم
comparison	مقایسه‌ای
limit comparison	مقایسه‌ای حدی
ratio	نسبت
disjoint	از هم جدا
singularity	استثنائی
removable	رفع شدنی
essential	لازم
induction	استقرا
mathematical	ریاضی
scalar	اسکالر
intersection	اشترک
terminology	اصطلاح
principle	اصل
of induction	استقرا
well-ordering	خوش‌ترتیبی
absolute maximum modulus	کالبد ماکزیمم مطلق
local maximum modulus	کالبد ماکزیمم موضعی
minimum modulus	کالبد مینیمم
axiom	اصل موضوع
of continuity	پیوستگی
completeness	تامیت
least upper bound	کوچکترین کران بالائی
axioms	اصلهای موضوع
order	ترتیب
field	میدان
partition	افراز
horizontal	افقی
extremum	اکسترمم
local	موضعی
aleph nought	الف صفر
direction	امتداد
horizontal	افقی

vertical	قائم
analysis	آنالیز
vector	برداری
mathematical	ریاضی
advanced	عالی
accumulation	انباشتگی
expansion, stretching	انبساط
ordered n -tuple	n تائی مرتب
translation	انتقال
integral	انتگرال
slobbovian	اسلوبووی
n -fold	n گونا
upper	بالائی
lower	پائینی
contour	پیرامنی
Gamma function	تابع گاما
multiple	چندگانه
complex line	خط مختلط
Dirichlet	دیریکله
Riemann	ریمان
Riemann-Stieltjes	ریمان-اشتیل‌یس
Fourier	فوریه
Lebesgue	لبگ
triple	مثلث
definite	معین
integrand	انتگرالده
multiple Riemann integral	انتگرال ریمان چندگانه
Riemann-integrable	انتگرال ریمان دارد
improper Riemann integral	انتگرال ریمان مجازی
integrator	انتگرالکیر
integration	انتگرالکیری
by parts	به طریقه جزء به جزء
multiple Lebesgue integral	انتگرال لبگ چندگانه
measure	اندازه
n	n
n -dimensional	n بعدی
Jordan	ژردان

zero	صفر
Lebesgue	لبگ
n -measure zero	اندازه n صفر
measurable	اندازه پذیر
nonmeasurable	اندازه ناپذیر
injective	انژکتیو
inversion, reflection	انعکاس
reflexive	انعکاسی
contraction	انقباض
prime	اول
first member	اولین عضو
O	اوی بزرگ
o	اوی کوچک
stationary	ایستا
infimum	اینفیمم
bounded variation	با تغییر کر انداز
rectifiable	با درازای متناهی
nonrectifiable	با درازای نامتناهی
open	باز
interval	بازه
of integration	انتگرالگیری
open	باز
n -dimensional open	باز n بعدی
closed	بسته
n -dimensional closed	بسته n بعدی
degenerate closed	بسته تیه شده
time	زمان
compact	فشرده
component	مؤلف
infinite	نامتناهی
half-open	نیمباز
half-infinite	نیمه نامتناهی
of convergence	همگرایی
remainder, residue	باقیمانده
upper	بالائی
label	بر حسب

relabel	بر حسب مجدد
with respect to	بر حسب
range	برد
vector	بردار
n -dimensional	n بعدی
with n components	با n مؤلفه
column	ستونی
zero	صفر
gradient	گرادیان
unit coordinate	مختصات یکه
unit	یکه
basis vectors	بردارهای پایه
cross section	برش متقاطع
is defined on the set ...	بر مجموعه ... تعریف شده است
onto	برو
exterior	برونی
greatest integer in x	بزرگترین عدد صحیح در x
largest member	بزرگترین عضو
greatest lower bound	بزرگترین کران پائینی
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
$\gcd(a, b)$	(a, b) بعم
closure	بست
expansion	بسط
decimal	اعشاری
power series	به صورت رشته توانی
Laurent	لوران
plus infinity	به علاوه بی نهایت
belongs to the set ...	به مجموعه ... تعلق دارد
infinity	بی نهایت
lower	پائینی
line segment, segment	پاره خط
vertical	عمودی
constant	پایا
contraction	انقباض
Euler	اویلر
distributive	پخشپذیر

Gibbs' phenomenon	پدیده گیبس
parameter	پارما
covering	پوشش
open	باز
finite	متناهی
convolution	پیچش
span	پیما
continuity	پیوستگی
uniform	یکشکل
continuous	پیوسته
absolutely	مطلق
uniformly	یکشکل
function	تابع
measurable	اندازه پذیر
nonmeasurable	اندازه ناپذیر
of bounded variation	با تغییر کراندار
upper	بالائی
beta	بتا
vector-valued	برداری
Bernoulli	برنولی
greatest-integer	بزرگترین عدد صحیح
constant	پایا
step	پله ای
continuous	پیوسته
uniformly continuous	پیوسته یکشکل
theta	تتا
analytic	تحلیلی
entire	تمام
additive	جمع پذیر
limit	حد
real-valued	حقیقی
linear	خطی
piecewise linear	خطی قطعه وار
arc-length	درازای کمان
of two variables	دو متغیر
two-valued	دو مقداری

Riemann zeta	زتای ریمان
increasing	صعودی
strictly increasing	صعودی اکید
implicit	ضمنی
bounded	کراندار
Riemann-integrable	که انتگرال ریمان دارد
Lebesgue-integrable	که انتگرال لِبِسگ دارد
square-integrable	که مربعش انتگرالپذیر است
Gamma	گاما
rational	گویا
logarithmic	لگاریتمی
orthogonal	متعامد
periodic	متناوب
sum	مجموع
complex-valued	مختلط
composite	مرکب
differentiable	مشتقپذیر
continuously differentiable	مشتقپذیر پیوسته
characteristic	مشخص کننده
inverse	معکوس
local inverse	معکوس موضعی
nonnegative	نامنفی
decreasing	نزولی
strictly decreasing	نزولی اکید
exponential	نمایی
real exponential	نمایی حقیقی
complex exponential	نمایی مختلط
wronskian	ورونسکی
identity	همانی
homogeneous	همگن
one-to-one	یک به یک
of one real variable	یک متغیر حقیقی
of a complex variable	یک متغیر مختلط
monotonic	یکنوا
strictly monotonic	یکنوای اکید

complete

completeness

تام

تام بودن

completeness	تامیت
inverse tangent	تاثرانت معکوس
transform, transformation	تبدیل
integral	انتگرالی
linear	خطی
Fourier sine	سینوسی فوریه
exponential Fourier	فوریه نمائی
Fourier cosine	کسینوسی فوریه
Laplace	لاپلاس
Moebius	مبیوس
coordinate	مختصات
elementary	مقدما تی
Mellin	ملین
nonsingular	نا استثنائی
degenerate	تبدیه شده
rearrangement	تجدید آرایش
partial-fraction decomposition	تجزیه به کسرها ی جزئی
restriction	تحدید
reduction	تحویل
estimate	تخمین
condensation	تراکم
order, ordering	ترتیب
order-preserving	ترتیب را حفظ می کند
pseudo-ordering	ترتیب نما
linear combination	ترکیب خطی
projection	تصویر
stereographic	جسم نما
refinement	تظریف
commutative	تعویض پذیر
change	تغییر
of parameter	پرما
of variable	متغیر
variation	تغییر
total	کل
positive	مثبت
negative	منفی
difference	تفاضل

subtraction	تفریق
symmetry	تقارن
symmetric	تقارنی
approximation	تقریب
almost everywhere	تقریباً همه جا
division	تقسیم
multiplier	تکثیرکن
n th iterate	تکرار n
entire	تمام
correspondence	تناظر
one-to-one	یک به یک
isolation	تنهایی
power	توان
n th	n
integral	صحیح
complex	مختلط
point set topology	توپولوژی مجموعه‌های نقطه‌ای
extension	توسیع
empty	تهی
fixed	ثابت
substitution	جانشانی
algebra	جبر
linear	خطی
set	مجموعه‌ای
algebraic	جبری
separable	جدائی‌پذیر
pair	جفت
ordered	مرتب
addition	جمع
additive	جمع‌پذیر
countably	شمارش‌پذیر
finitely	متناهی
term	جمله
n th	n
remainder	باقی‌مانده

constant error	پایا نماینده خطا
direction	جهت
orientation	جهت
reversing	برگردان
preserving	نگهدار
oriented	جهت‌دار
positively	با جهت مثبت
negatively	با جهت منفی
jump	جهش
lefthand	دست چپی
righthand	دست راستی
adherent	چسبیده
dense	چگال
polynomial	چند-جمله‌ای
linear	خطی
quadratic	درجه دوم
Legendre	لژاندر
polygon	چندضلعی
inscribed	محاط شده
polygonally connected	چندضلعی وار همبند
product	حاصل ضرب
Euler	اویلر
partial	جزئی
nth partial	جزئی n
inner	داخلی
cartesian	دکارتی
Cauchy	کشی
infinite	نامتناهی
dot	نقطه‌ای
divergent	واگرا
convergent	همگرا
volume	حجم
generalized	تعمیم یافته
limit	حد

inferior	اسفل
superior	اعلا
upper	بالائی
symmetric	تقارنی
lefthand	دست چپی
righthand	دست راستی
double	مضاعف
iterated	مکرر
limits of integration	حدهای انتگرالگیری
arithmetic	حساب
residue calculus	حساب باقیمانده
differential calculus	حساب دیفرانسیل
multivariable	چند متغیره
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
proper	حقیقی
annulus	حلقه دایره
quotient	خارج قسمت
difference	تفاضلی
property	خاصیت
Archimedean	ارشمیدسی
continuity	پیوستگی
approximation	تقریب
topological	توپولوژیک
additive	جمعپذیری
linear	خطی
global	کلی
sign-preserving	محفوظ ماندن علامت
comparison	مقایسه‌ای
local	موضعی
line	خط
of symmetry	تقارن
real	حقیقی
error	خطا
linearity	خطی
piecewise linear	خطی قطعه وار
curve	خم

rectifiable با درازای متناهی
 nonrectifiable با درازای نامتناهی
 simple closed بسته ساده
 Jordan ژردان
 space-filling فضا پرکن
 described by ... که به وسیله ... توصیف می شود
 piecewise smooth هموار قطعه وار

circle دایره
 positively oriented جهت دار با جهت مثبت
 unit یکه
 determinant دترمینان
 jacobian ژاکوبی
 length درازا
 arc کمان
 degree of freedom درجه آزادی
 quadratic درجه دوم
 interior درون
 system دستگاه
 binary عددها در پایه دو
 real number عددهای حقیقی
 extended real number عددهای حقیقی وسعت یافته
 complex number عددهای مختلط
 extended complex number عددهای مختلط وسعت یافته
 orthogonal متعامد
 orthonormal متعامد بهنجار
 formula دستور
 Poisson's integral انتگرال پواسن
 Cauchy's integral انتگرال کشی
 recursion بازگشتی
 Parseval پارسوال
 convolution پیچش
 transformation تبدیل
 reduction تحویل
 Taylor تیلور
 Euler's summation جمع‌بندی اویلر
 Poisson's summation جمع‌بندی پواسن

partial summation	جمع‌بندی جزئی
De Moivre	دمو آور
Leibnitz	لایب نیتز
inversion	معکوس کردن
collection	دسته
countable	شمارش‌پذیر
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
Kronecker delta	دلتای کرونگر
sequence	دنباله
unbounded	بی کران
of functions	توابع
real-valued	حقیقی
increasing	صعودی
multiplicative	ضرب‌پذیر
completely multiplicative	ضرب‌پذیر تام
bounded	کراندار
uniformly bounded	کراندار یک‌شکل
Cauchy	کشی
finite	متناهی
complex-valued	مختلط
double	مضاعف
infinite	نامتناهی
decreasing	نزولی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
boundedly convergent	همگرای کراندار
pointwise convergent	همگرای نقطه وار
bounded away from zero	دور از صفر کراندار
rotation	دوران
period	دوره تناوب
second member	دومین عضو
relation	رابطه
reflexive	انعکاسی
pseudo-ordering	ترتیب‌نما
order	ترتیبی

symmetric	تقارنی
inclusion	شمول
transitive	متعدی
plane	مسطح
equivalence	هم‌ارزی
class	رده
category	رسته
series	رشته
of functions	توابع
power	توانی
telescoping	توی هم رونده
Taylor	تیلور
binomial	دوجمله‌ای
Dirichlet	دیریکله
Fourier	فوریه
Laurent	لوران
alternating	متناوب
double	مضاعف
iterated	مکرر
infinite	نامتناهی
divergent	واگرا
convergent	همگرا
geometric	هندسی
digit	رقم
version	روایت
surface	رویه
quadric	درجه دو
mathematics	ریاضیات
applied	کار بسته
pure	محض
root	ریشه
n th	n
integral	صحیح
n th root of unity	ریشه n واحد
even	زوج
subinterval	زیر بازه

k th	k ام
subcovering	زیر پوشش
finite	متناهی
subcollection	زیر دسته
finite	متناهی
subsequence	زیر دنباله
subseries	زیر رشته
subspace	زیر فضا
closed	بسته
metric	متری
subset	زیر مجموعه
closed	بسته
complete	تام
dense	چگال
proper	حقیقی
countable	شمارش پذیر
compact	فشرده
infinite	نامتناهی
connected	همبند
index, subscript	زیر نویس
factor	سازه
n th	n ام
prime	اول
linear	خطی
square	مربع
thick	ستبر
velocity	سرعت
instantaneous	لحظه ای
area, surface	سطح
supremum	سوپریمم
parabola	سه می
sine	سینوس
complex	مختلط
index	شاخص
condition	شرط

side	جنبی
Riemann	ریمان
Cauchy	کشی
Lipschitz	لیپشیتس
right-handed Lipschitz	لیپشیتس دست راستی
uniform Lipschitz	لیپشیتس یکشکل
associative	شرکتپذیر
denumerable	شمارا
countable	شمارشپذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
inclusion	شمول
argument	شناسه
principal	عمده
integral	صحیح
increasing	صعودی
strictly	اکید
plane	صفحه
complex	مختلط
extended complex	مختلط وسعت یافته
tangent	مماس
formal	صوری
multiplication	ضرب
multiplicative	ضربپذیر
completely	تام
coefficient	ضریب
slope	ضریب زاویه‌ای
finer	ظریفتر
divides	عادمی‌کند
expression, statement	عبارت
number	عدد
cardinal	اصلی
decimal	اعشاری
prime	اول

Fermat prime	اول فرما
Mersenne prime	اول مرسن
constant	پایا
algebraic	جبری
real	حقیقی
even	زوج
odd	فرد
winding	گردشی
irrational	گنگ
rational	گویا
complex	مختلط
composite	مرکب
Fibonacci numbers	عددهای فیبوناچی
spherical cap	عرقچین کروی
member	عضو
converse	عکس
symbol, symbolism	علامت
principal	عمده
operation	عمل
algebraic	جبری
operator	عملگر
integral	انتگرالی
element	عنصر
first	اول
second	دوم
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
distance	فاصله
euclidean	اقلیدسی
process	فرایند
Gauss-Jordan	گائوس-ژردان
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت
form	فرم
symmetric	تقارنی
quadratic	درجه دوم
positive definite	معین مثبت

negative definite	معین منفی
compactness	فشردهگی
compact	فشرده
space	فضا
euclidean	اقلیدسی
n -dimensional euclidean	اقلیدسی n بعدی
n	n بعدی
finite dimensional	با بعد متناهی
infinite dimensional	با بعد نامتناهی
linear	خطی
metric space	فضای متری
complete	تام
separable	جدائی پذیر
compact	فشرده
discrete	مجزا
disconnected	ناهمبند
connected	همبند
semimetric space	فضای نیمه متری
vertical	قائم
rule	قاعده
chain	زنجیره ای
Cramer	کرامر
law	قانون
distributive	بخش پذیری
commutative	تعویض پذیری
reciprocity	تقابل
associative	شرکت پذیری
parallelogram	متوازی الاضلاع
of exponents	نماها
absolute value	قدر مطلق
negative	قرینه
part	قسمت
real	حقیقی
principal	عمده
positive	مثبت
negative	منفی

regular	موزون
imaginary	موهومی
sector	قطاع
circular	مستدیر
pole	قطب
south	جنوب
simple	ساده
north	شمال
diagonal	قطر
main	اصلی
square brackets	قلاب
domain	قلمرو
modulus	کالبد
perfect	کامل
text	کتاب درسی
reference	کتاب مرجع
hyperbolic cotangent	کتابت زانت هذلولوی
bound	کران
upper	بالائی
lower	پائینی
uniform	یکشکل
bounded	کراندار
uniformly	یکشکل
boundary	کرانه
sphere	کره
spherical solid	کره جامد
fraction	کسر
cosine	کسینوس
complex	مختلط
arc	کمان
polygonal	چندضلعی
Jordan	ژردان
simple	ساده
circular	مستدیر
parentheses	کمانکها
smallest member	کوچکترین عضو

least upper bound	کوچکترین کران بالایی
convex	کوز
path	گذر
positively oriented	جهت دار با جهت مثبت
negatively oriented	جهت دار با جهت منفی
polygonal	چندضلعی
circular	مستدیر
piecewise smooth	هموار قطعه وار
disk	گردد
open	باز
circular	مستدیر
of convergence	همگرایی
statement	تزاره
ball	گوی
n	n بعدی
open	باز
closed	بسته
logarithm	لگاریتم
principal	تمده
complex	مختلط
matrix	ماتریس
jacobian	ژاکوبی
elementary	مقدماتی
identity	همانی
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیمم
global	کلی
absolute	مطلق
local	موضعی
relative	نسبی
elements	میانی
origin	مبدأ
metric	متر
euclidean	اقلیدسی

discrete	مجزا
relative metric induced by ...	متر نسبی القا شده به وسیله ...
equilateral	متساوی الاضلاع
triangle	مثلث
similar	متشابه
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بهنجار
transitive	متعدی
belongs to	متعلق است به
variable	متغیر
random	تصادفی
dummy	فریبان
independent	مستقل
reciprocal	متقابل
symmetrization	متقارن شده
complement	متمم
periodic	متناوب
finite	متناهی
parallelogram	متوازی الاضلاع
positive	مثبت
triangle	مثلث
right	قائم الزاویه
trigonometric	مثلثاتی
sum	مجموع
(C, 1)	از نوع (C, 1)
Stieltjes	اشتیل یس
upper Stieltjes	اشتیل یس بالائی
lower Stieltjes	اشتیل یس پائینی
telescoping	توی هم رونده
partial	جزئی
nth partial	جزئی nم
Cesaro	چزارو
Riemann	ریمان
upper Riemann	ریمان بالائی
lower Riemann	ریمان پائینی
Gauss	گاوس
summable	مجموع پذیر

(C, 1)	از نوع (C, 1)
Cesaro	چزارو
Cesaro summability	مجموعه پذیر ی چزارو
set	مجموعه
inductive	استقرائی
measurable	اندازه پذیر
nonmeasurable	اندازه ناپذیر
open	باز
closure	بست
closed	بسته
empty	تهی
dense	چگال
Jordan-measurable	دارای اندازه ژردان
denumerable	شمارا
countable	شمارش پذیر
uncountable	شمارش ناپذیر
of real numbers	عددهای حقیقی
of integers	عددهای صحیح
of rational numbers	عددهای گویا
of complex numbers	عددهای مختلط
ordinate	عرضها
compact	فشرده
perfect	کامل
Cantor	کانتور
convex	کوژ
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بهنجار
finite	متناهی
abstract	مجرد
ordered	مرتب
derived	مشتق
nondenumerable	ناشمارا
infinite	نامتناهی
countably infinite	نامتناهی شمارش پذیر
connected	همبند
simply connected	همبند ساده
arcwise connected	همبند کمانوار
pathwise connctced	همبند گذرور

sets	مجموعه‌های
disjoint	از هم جدا
similar	متشابه
equinumerous	همعدد
content	محتوا
contained in	محتوا در
Jordan content	محتوای ژردان
outer	خارجی
inner	داخلی
criterion	محك
Lebesgue	لبگ
real axis	محور حقیقی
coordinates	مختصات
cylindrical	استوانه‌ای
rectangular	قائم
polar	قطبی
spherical	کروی
k th coordinate	مختص k م
denominator	مخرج
circuit	مدار
square	مربع
perfect	کامل
unit	یکه
ordered	مرتب
composite	مرکب
complex conjugate	مزدوج مختلط
area	مساحت
boundary value problem	مسأله با مقدار کرانه‌ای
circular	مستدیر
rectangle	مستطیل
linearly independent	مستقل خطی
derivative	مشتق
n th	n م
partial	جزئی
mixed partial	جزئی مخلوط
directional	جهتی
left hand	دست چپی

right hand	دست راستی
schwarzian	شوارتزی
total	کل
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
one-sided	یکطرفی
differentiable	مشتق پذیر
continuously	پیوسته
differentiation	مشتق گیری
partial	جزئی
multiple	مضرب
integral	صحیح
equation	معادله
scalar	اسکالر
integral	انتگرال
vector	برداری
functional	تابعی
algebraic	جبری
quadratic	درجه دوم
differential	دیفرانسیل
characteristic	مشخص کننده
equations	معادله های
of motion	حرکت
Cauchy-Riemann	کشی-ریمان
inverse	معکوس
positive definite	معین مثبت
negative definite	معین منفی
eigenvalue	مقدار ویژه
divisor	مقسوم علیه
common	مشترک
scale	مقیاس
mechanics	مکانیک
statistical	آماری
quantum	کوانتمی
cube	مکعب
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
reflection	متعکس

negative	منفی
minus infinity	منهای بی نهایت
component	مؤلفه
k th	k ام
imaginary	موهومی
average	میانگین
weighted	وزندار
field	میدان
minimum	مینیمم
global	کلی
absolute	مطلق
local	موضعی
relative	نسبی
nonsingular	نا استثنائی
discontinuity	نا پیوستگی
jump	جهشی
removable	رفع شدنی
irremovable	رفع ناشدنی
discontinuuous	نا پیوسته
nonempty	نا تهی
region	ناحیه
n -dimensional	n بعدی
of integration	انتگرالگیری
open	باز
closed	بسته
outer (or exterior)	خارجی (یا برونی)
inner (or interior)	داخلی (یا درونی)
triangular	مثلثی شکل
simply connected	همبند ساده
nondenumerable	نا شمارا
nonzero	نا صفر
invariant	نا متغیر
invariance	نا متغیر بودن
infinite	نا متناهی
countably	شمارش پذیر
inequality	نامساوی

Bessel	بسل
Cauchy-Schwarz	کشی-شوارتز
triangle	مثلثی
Minkowski	مینکوفسکی
linearly dependent	نامستقل خطی
nonnegative	نامنفی
disconnected	ناهمبند
decreasing	نزولی
strictly	اکید
relative to, with respect to	نسبت به
relativity	نسبیت
theory	نظریه
image	نقش
of ... under	... با ...
continuous	پیوسته
topological	توپولوژیک
inverse	معکوس
inverse image of ... under ...	نقش معکوس ... با ...
point	نقطه
isolated singular (singularity)	استثنائی تنها
removable singular (singularity)	استثنائی رفع شدنی
essential singular (singularity)	استثنائی لازم
accumulation	انباشتگی
n - dimensional	n بعدی
stationary	ایستا
turning	برگشت
condensation	تراکم
isolated	تنها
fixed	ثابت
adherent	چسبیده
interior	درونی
saddle	زینی
boundary	کرانه‌ای
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
mapping	نگاشت
from ... to ...	از ... به ...

open	باز
onto	برو
closed	بسته
continuous	پیوسته
topological	توپولوژیک
conformal	همشکلی
exponent	نما
notation	نمادگذاری
notation	نمادها
decimal representation	نمایش اعشاری
finite	متناهی
infinite	نامتناهی
phase	نمود
graph	نمودار
band	نوار
oscillation	نوسان
structure	نهاد
half-open	نیمباز
semi-axes	نیم محورها
upper half-plane	نیمه بالائی صفحه
right half-plane	نیمه راست صفحه
semimetric	نیمه متر
diffeomorphism	واپرسانی
unity	واحد
divergent	واگرا
diverges to zero	واگرا به صفر
kernel	هسته
octahedron	هشت وجهی
equivalent	هم‌ارز
equivalence	هم‌ارزی
homeomorphic	هم‌انسان
homeomorphism	هم‌انسانی
identity	هم‌انی
connected	همبند
connectedness	همبندی

simply	ساده
arcwise	کمانوار
pathwise	گذروار
homotopic	همجا
homotopy	همجائی
to a point	با یک نقطه
linear	خطی
neighborhood	همسایگی
deleted	سفته
conformal	همشکلی
equinumerous	همعدد
convergent	همگرا
convergensto	همگرا به
convergence	همگرایی
boundedly	کراندار
conditional	مشروط
absolute	مطلق
mean	میانگینی
pointwise	نقطه‌وار
homogeneous	همگن
homogeneity	همگنی
smooth	هموار
piecewise	قطعه‌وار
norm	هنج
L^2	L^2
sup	سوپریمم
geometry	هندسه
euclidean	اقلیدسی
analytic	تحلیلی
uniform	یکشکل
isometry	یکمتری
monotonic	یکنوا
strictly	اکید
unit	یکه
imaginary	موهومی

واژه نامه

انگلیسی به فارسی

Abel's test	آزمون آبل
absolute	مطلق
maximum	ماکزیمم
maximum modulus principle	اصل کالبد ماکزیمم
minimum	مینیمم
value	قدر
absolutely continuous	پیوسته مطلق
abstract set	مجموعه مجرد
accumulation	انباشتی
point	نقطه
addition	جمع
additive	جمعپذیر (ی)
function	تابع
property	خاصیت
adherent	چسبیده
point	نقطه
advanced analysis	آنالیز عالی
aleph nought	الف صفر
algebra	جبر
algebraic	جبری
equation	معادله
identity	اتحاد
number	عدد
operation	عمل

almost everywhere	تقریباً همه جا
alternating series	رشته متناوب
analysis	آنالیز
analytic	تحلیلی
function	تابع
geometry	هندسه
applied mathematics	ریاضیات کاربردی
approximation	تقریب
arc	کمان
archimedean property	خاصیت ارشمیدسی
arc length	درازای کمان
function	تابع
arcwise	کمانوار
connectedness	همبندی
connected set	مجموعه همبند
area	سطح، مساحت
argument	شناسه
arrangement	آرایش
array	آرایش
associative	شرکتپذیری (ی)
law	قانون
average	میانگین
axiom	اصل موضوع
of continuity	پیوستگی
ball	گوی
basis vectors	بردارهای پایه
belongs to	متعلق است به
belongs to the set...	به مجموعه... تعلق دارد
Bernoulli function	تابع برنولی
Bessel inequality	نامساوی بسل
beta function	تابع بتا
binary system	دستگاه عددها ددپایه دو
binomial series	رشته دو جمله‌ای
bound	کران
boundary point	نقطه کرانه‌ای
boundary value problem	مسئله با مقدار کرانه‌ای

bounded	کراندار
above	از بالا
above by ...	از بالا به ...
away from zero	دور از صفر
function	تابع
sequence	دنباله
variation	با تغییر
boundedly convergence	همگرایی کراندار
boundedly convergent sequence	دنباله همگرایی کراندار
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
Cantor set	مجموعه کانتور
cardinal number	عدد اصلی
cartesian product	حاصل ضرب دکارتی
category	رسته
Cauchy	کشی
condition	شرط
integral formula	دستور انتگرال
product	حاصل ضرب
Riemann equations	معادله‌های ... ریمان
Schwarz inequality	نامساوی ... شوارتز
Cesaro	چزارو
sum	مجموع
summability	مجموع‌پذیری
summable	مجموع‌پذیر
chain rule	قاعده زنجیره‌ای
change	تغییر
of parameter	پارامتر
of variable	متغیر
characteristic	مشخص‌کننده
equation	معادله
function	تابع
circuit	مدار
circular	مستدیر
arc	کمان
disk	گردد
path	گذر

sector	قطاع
class	رده
closed	بسته
ball	گوي
interval	بازه
mapping	نگاشت
region	ناحيه
set	مجموعه
closure	بست
set	مجموعه
coefficient	ضريب
collection	دسته
column vector	بردار ستوني
common divisor	مقسوم عليه مشترك
commutative	تعويضي پذير (ي)
law	قانون
compact	فشرده
interval	بازه
metric space	فضاي متري
set	مجموعه
compactness	فشرديگي
comparison	مقايسه (اي)
property	خاصيت
test	آزمون
complement	متمم
complete	تام
metric space	فضاي متري
set	مجموعه
completely multiplicative	ضرب پذير تام
sequence	دنباله
completeness	تاميت (تام بودن)
axiom	اصل موضوع
complex	مختلط
conjugate	مزدوج
cosine	كسينوس
exponential function	تابع نمائي
line integral	انتگرال خط

logarithm	لگاریتم
number	عدد
number system	دستگاه عددهای
plane	صفحه
power	توان
complex-valued function	تابع مختلط
complex-valued sequence	دنباله مختلط
component	مؤلفه
component interval	بازه مؤلف
composite	مرکب
function	تابع
number	عدد
condensation	تراکم
point	نقطه
condition	شرط
conformal	همشکلی
mapping	نگاشت
connected	همبند
metric space	فضای متریک
set	مجموعه
connectedness	همبندی
constant	پایا
function	تابع
number	عدد
term	جمله
contained in	محتوا در
content	محتوا
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
from the left	از چپ
from the right	از راست
function	تابع
image	نقش
mapping	نگاشت
continuously differentiable	مشتقپذیر پیوسته
function	تابع
contour integral	انتگرال پیرامنی

contraction	انقباض
constant	پایا (ی)
convergence	همگرایی
converges to	همگرا به
convergent	همگرا
product	حاصل ضرب
sequence	دنباله
series	رشته
converse	عکس
convex	کوژ
set	مجموعه
convolution	پیچش
formula	دستور
coordinates	مختصات
coordinate transformation	تبدیل مختصات
correspondence	تناظر
cosine	کسینوس
countable	شمارشپذیر
collection	دسته
set	مجموعه
countably additive	جمعه‌پذیر شمارشپذیر
countably infinite	نامتناهی شمارشپذیر
covering	پوشش
Cramer's rule	قاعده کرامر
criterion	محک
cross section	برش متقاطع
cube	مکعب
curve	خم
decimal	اعشاری
expansion	بسط
number	عدد
representation	نمایش
decreasing	نزولی
function	تابع
sequence	دنباله
definite integral	انتگرال معین

degenerate	تبه شده
closed interval	بازه بسته
degree of freedom	درجه آزادی
deleted neighborhood	همسایگی سفته
De Moivre formula	دستور دمو آور
denominator	مخرج
dense	چگال
set	مجموعه
denumerable	شمارا
set	مجموعه
derivative	مشتق
derived set	مجموعه مشتق
determinant	دترمینان
diagonal	قطر
diffeomorphism	واپرسانی
difference	تفاضل
difference quotient	خارج قسمت تفاضلی
differentiable	مشتق پذیر
function	تابع
differential	دیفرانسیل
calculus	حساب
equation	معادله
differentiation	مشتق گیری
digit	رقم
Dini test	آزمون دینی
direction	امتداد، جهت
directional derivative	مشتق جهتی
Dirichlet	دیریکله
integral	انتگرال
series	رشته
test	آزمون
disconnected	ناهمبند
metric space	فضای متریک
discontinuity	ناپیوستگی
discontinuous	ناپیوسته
discrete	مجزا
metric	متر

metric space	فضای متریک
disjoint sets	از هم جدا مجموعه‌ها (ی)
disk of convergence	گرد همگرایی
distance	فاصله
distributive law	پخشپذیری (ی) قانون
divergent product sequence series	واگرا حاصل ضرب دنباله رشته
diverges to zero	واگرا به صفر
division	تقسیم
divisor	مقسوم علیه
domain	قلمرو
double limit sequence series	مضاعف حد دنباله رشته
dummy variable	متغیر فریبان
eigenvalue	مقدار ویژه
element	عنصر
elementary matrix transformation	مقدماتی ماتریس تبدیل
elements	مبانی
empty set	تهی مجموعه
entire function	تمام تابع
equation	معادله
equations of motion	معادله‌های حرکت
equilateral triangle	مثلث متساوی الاضلاع
equinumerous sets	همعدد مجموعه‌ها (ی)

equivalence relation	هم‌ارزی رابطه
equivalent	هم‌ارز
error term	خطا جمله نماینده
essential singularity (singular point)	نقطه استثنائی لازم
estimate	تخمین
euclidean distance	اقلیدسی فاصله
geometry	هندسه
metric space	متن فضا (ی)
Euler constant	اویلر پایا (ی)
product	حاصل ضرب
summation formula	دستور جمع‌بندی
expansion	انبساط، بسط
exponent	نما
exponential	نمائی
Fourier transform	تبدیل فوریه
function	تابع
expression	عبارت
extended	وسعت یافته
complex number system	دستگاه عددهای مختلط
complex plane	صفحه مختلط
real number system	دستگاه عددهای حقیقی
extension	توسیع
exterior region	برونی ناحیه
extremum	اکسترمم
factor	سازه
Fermat prime number	عدد اول فرما
Fibonacci numbers	عددهای فیبوناچی
field	میدان
axioms	اصولهای موضوع
finer	ظریفتر

finite	متناهی
collection	دسته
covering	پوشش
decimal representation	نمایش اعشاری
derivative	مشتق
dimensional space	فضا با بعد
point	نقطه
sequence	دنباله
set	مجموعه
subcollection	زیر دسته
subcovering	زیر پوشش
finitely additive	جمعپذیر متناهی
fixed	ثابت
point	نقطه
form	فرم
formal	صوری
formula	دستور
Fourier	فوریه
integral	انتگرال
series	رشته
sine transform	تبدیل سینوسی
fraction	کسر
function	تابع
of a complex variable	یک متغیر مختلط
of bounded variation	با تغییر کراندار
of one real variable	یک متغیر حقیقی
of two variables	دو متغیر
functional equation	معادله تابعی
gamma function	تابع گاما
integral	انتگرال
Gauss	گوس
-Jordan process	فرایند . . . ژردان
sum	مجموع
gcd (a, b)	(a, b) بعم
generalized volume	حجم تعمیم یافته
geometric series	رشته هندسی

geometry	هندسه
Gibbs' phenomenon	پدیده گیبس
global	کلی
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
property	خاصیت
gradient vector	بردادگرادیان
Gram-Schmidt process	فرایند گرام-اشمیت
graph	نمودار
greatest	بزرگترین
common divisor	مقسوم علیه مشترك
integer function	تابع . . . عدد صحیح
integer in x	عدد صحیح در x
lower bound	کران پائینی
half-infinite	نیمه نامتناهی
interval	بازه
half-open	نیمباز
interval	بازه
homeomorphic	همانسان
homeomorphism	همانسانی
homogeneity	همگنی
homogeneous	همگن
function	تابع
homotopic	همجا
homotopy	همجائی
to a point	با يك نقطه
horizontal	افقی
direction	امتداد
hyperbolic cotangent	کتانزانت هذلولوی
hyperplane	ابر صفحه
identity	اتحاد، همانی
identity	همانی
function	تابع
matrix	ماتریس
image	نقش

of ... under با ...
imaginary	موهومی
part	قسمت
unit	یکه
implicit function	تابع ضمنی
improper Riemann integral	انتگرال ریمان مجازی
inclusion	شمول
relation	رابطه
increasing	صعودی
function	تابع
sequence	دنباله
independent variable	متغیر مستقل
index	زیر نویس، شاخص
induction	استقرا
inductive set	مجموعه استقرائی
inequality	نامساوی
infimum	اینفیمم
infinite	نامتناهی
collection	دسته
decimal representation	نمایش اعشاری
derivative	مشتق
dimensional space	فضای با بعد
point	نقطه
product	حاصل ضرب
sequence	دنباله
series	رشته
set	مجموعه
infinity	بی نهایت
injective	انژکتیو
inner	داخلی
Jordan content	محتوای ژردان
product	حاصل ضرب
region	ناحیه
inscribed polygon	چندضلعی محاط شده
instantaneous velocity	سرعت لحظه‌ای
integral	انتگرال (ی)
equation	معادله

operation	عملگر
test	آزمون
transform	تبدیل
integral	صحیح
power	توان
root	ریشه
integrand	انتگرالده
integration	انتگرالگیری
by parts	به طریقه جزء به جزء
integrator	انتگرالگیر
interior	درون (ی)
point	نقطه
region	ناحیه
intersection	اشتراک
interval	پازه
of convergence	همگرایی
of integration	انتگرالگیری
invariance	نامتغیر بودن
invariant	نامتغیر
inverse	معکوس
function	تابع
tangent	تاثرات
inverse image	نقش معکوس
of ... under با ...
inversion	انعکاس
inversion formula	دستور معکوس کردن
irrational number	عدد گنگ
irremovable discontinuity	ناپایوستگی رفع ناشدنی
is defined on the set ...	بر مجموعه ... تعریف شده است
isolated point	نقطه تنها
isolated singularity (singular point)	نقطه استثنائی تنها
isolation	تنهایی
isometry	یکمتری
iterated	مکرر
limit	حد
series	رشته

jacobian	ژاکوبی
determinant	دترمینان
matrix	ماتریس
Jordan	ژردان
arc	کمان
content	محتوا (ی)
curve	خم
measurable set	مجموعه دارای اندازه
measure	اندازه
test	آزمون
jump discontinuity	ناپیوستگی جهشی
kernel	هسته
Kronecker delta	دلتای کرونکر
kth	k ام
component	مؤلفه
coordinate	مختص
subinterval	زیر بازه
label	برچسب
Lagrange identity	اتحاد لاگرانژ
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
largest member	بزرگترین عضو
Laurent	لوران
expansion	بسط
series	رشته
law of exponents	قانون نمها
least upper bound	کوچکترین کران بالایی
axiom	اصل موضوع
Lebesgue	لبگ
criterion	محک
integrable function	تابعی که انتگرال . . . دارد
integral	انتگرال
measure	اندازه
left hand	دست چپی
derivative	مشتق
jump	جهش

Legendre polynomial	چند جمله‌ای لژاندر
Leibnitz formula	دستور لایب نیتز
length	دراز
limit comparison test	آزمون مقایسه‌ای حدی
limit	حد
function	تابع
inferior	اسفل
superior	اعلا
limits of integration	حدهای انتگرالگیری
linear	خطی
algebra	جبر
combination	ترکیب
factor	سازه
function	تابع
homotopy	همجائی
polynomial	چند جمله‌ای
property	خاصیت
space	فضا (ی)
transformation	تبدیل
linearity	خطی
linearly dependent	نامستقل خطی
linearly independent	مستقل خطی
line of symmetry	خط تقارن
line segment	پاره خط
Lipschitz condition	شرط لیب شیتس
L^2 -norm	هنج L^2
local	موضعی
extremum	اکسترمم
inverse function	تابع معکوس
maximum	ماکزیمم
maximum modulus principle	اصل کالبد ماکزیمم
minimum	مینیمم
logarithm	لگاریتم
logarithmic function	تابع لگاریتمی
lower	پائینی
bound	کران
integral	انتگرال

Riemann sum	مجموع ریمان
Stieltjes sum	مجموع اشتیل‌یس
main diagonal	قطر اصلی
mapping	نگاشت
from ... to ...	از ... به ...
mathematical	ریاضی
analysis	آنالیز
induction	استقرا (ی)
matrix	ماتریس
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیمم
element	عنصر
mean convergence	همگرایی میانگینی
measurable	اندازه‌پذیر
function	تابع
set	مجموعه
measure	اندازه
Mellin transform	تبدیل ملین
member	عضو
Mersenne prime number	عدد اول مرسن
metric	متر
metric space	فضای متری
minimum	مینیمم
element	عنصر
modulus principle	اصل کالبد
Minkowski inequality	نامساوی مینکوفسکی
minus infinity	منهای بی‌نهایت
mixed partial derivative	مشتق جزئی مخلوط
modulus	کالبد
Moebius transformation	تبدیل مبیوس
monotonic	یکنوا
function	تابع
multiple	چندگانه
integral	انتگرال
Riemann integral	انتگرال ریمان
multiplication	ضرب

multiplicative sequence	ضربپذیر دنباله
multiplier	تکثیرکن
multivariable differential calculus	حساب دیفرانسیل چند متغیره
n -ball	گوی n بعدی
n -dimensional	n بعدی
closed interval	بازه بسته
euclidean space	فضای اقلیدسی
measure	اندازه
open interval	بازه باز
point	نقطه
region	ناحیه
vector	بردار
negative	قرینه، منفی
negative part	منفی قسمت
variation	تغییر
negative definite form	معین منفی فرم
negatively oriented path	جهت دار با جهت منفی گذر
neighborhood	همسایگی
n -fold integral	انتگرال n گونا
n -measure	اندازه n
zéro	صفر
nondenumerable set	ناشمارا مجموعه
nonempty	نا تهی
nonmeasurable function	اندازه ناپذیر تابع
set	مجموعه
nonnegative function	نامنفی تابع
nonrectifiable curve	با درازای نامتناهی خم
nonsingular	نا استثنائی

transformation	تبدیل
nonzero	ناصفر
norm	هنج
north pole	قطب شمال
notation	نمادگذاری، نمادها
n -space	فضای n بعدی
n th	n ام
derivative	مشتق
factor	سازه
iterate	تکرار
partial product	حاصل ضرب جزئی
partial sum	مجموع جزئی
power	توان
root	ریشه
root of unity	ریشه ... واحد
term	جمله
O	اوی بزرگ
o	اوی کوچک
octahedron	هشت وجهی
odd number	عدد فرد
one-sided derivative	مشتق یکطرفی
one-to-one correspondence	تناظر یک به یک
function	تابع
onto	تابع
mapping	نکاشت
open	باز
ball	گوی
covering	پوشش
disk	گرده
interval	پازه
mapping	نکاشت
region	ناحیه
set	مجموعه
operation	عمل
operator	عملگر
order	ترتیب (ی)

axioms	اصولهای موضوع
relation	رابطه
ordered	مرتب
n -tuple	n تایی
pair	جفت
set	مجموعه
ordering	ترتیب
order-preserving	ترتیب را حفظ می کند
orientation	جهت
preserving	نگهدار
reversing	برگردان
oriented	جهت دار
origin	مبدأ
orthogonal	متعامد
function	تابع
set	مجموعه
system	دستگاه
orthonormal	متعامد بهنجار
set	مجموعه
system	دستگاه
oscillation	فونان
outer	خارجی
Jordan content	محتوای ژردان
region	ناحیه
pair	جفت
parabola	سهمی
parallelogram	متوازی الاضلاع
law	قانون
parameter	پارما
parenthesis	کمانکها
Parseval	پارسوال
formula	دستور
identity	اتحاد
partial	جزئی
derivative	مشتق
differentiation	مشتقگیری

fraction decomposition	تجزیه به کسرها (ی)
product	حاصل ضرب
sum	مجموع
summation formula	دستور جمع بندی
partition	افراز
path	گذر
pathwise connectedness	همبندی گذر وار
pathwise connected set	مجموعه همبند گذر وار
perfect	کامل
set	مجموعه
square	مربع
period	دوره تناوب
periodic	متناوب
function	تابع
phase	نمود
piecewise linear	خطی قطعه وار
function	تابع
piecewise smooth	هموار قطعه وار
curve	خم
path	گذر
plane relation	رابطه سطح
plus infinity	به علاوه بی نهایت
point set topology	توپولوژی مجموعه های نقطه ای
pointwise convergence	همگرایی نقطه وار
pointwise convergent	همگرایی نقطه وار
sequence	دنباله
Poisson	پواسن
integral formula	دستور انتگرال
summation formula	دستور جمع بندی
polar coordinates	مختصات قطبی
pole	قطب
polygon	چند ضلعی
polygonal arc	کمان چند ضلعی
polygonal path	گذر چند ضلعی
polygonally connected	چند ضلعی وار همبند
polynomial	چند جمله ای
positive	مثبت

part	قسمت
variation	تغییر
positive definite form	معین مثبت فرم
positively oriented path	گذر جهت دار با جهت مثبت
power	توان
power series expansion	رشته توانی بسط (به صورت)
prime factor	اول ساز
principal argument	عمده شناسه
logarithm	لگاریتم
part	قسمت
principle of induction	اصل استقرا
process	فرایند
product	حاصل ضرب
projection	تصویر
proper subset	حقیقی زیر مجموعه
pseudo-ordering relation	ترتیب‌نما رابطه
pure mathematics	ریاضیات محض
quadratic equation form	درجه دوم معادله فرم
polynomial	چند جمله‌ای
quadric surface	روی درجه دو
quantum mechanics	مکانیک کوانتمی
quotient	خارج قسمت
random variable	متغیر تصادفی
range	برد
ratio test	آزمون نسبت
rational number	عدد گویا
real	حقیقی

axis	محور
exponential function	تابع نمائی
line	خط
number	عدد
number system	دستگاه عددها (ی)
part	قسمت
real-valued	حقیقی
function	تابع
sequence	دنباله
rearrangement	تجدید آرایش
reciprocal	متقابل
reciprocity law	قانون تقابل
rectangle	مستطیل
rectangular array	آرایش مستطیلی
rectangular coordinates	مختصات قائم
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
rectifiable	بادرازای متناهی
curve	خم
recursion formula	دستور بازگشتی
reduction	تحویل
formula	دستور
reference	کتاب مرجع
reflection	انعکاس، منعکس
reflexive	انعکاسی
relation	رابطه
region	ناحیه
of integration	انتگرالگیری
regular part	قسمت هموزون
relabel	برچسب مجدد
relation	رابطه
relative	نسبی
maximum	ماکزیمم
metric induced by ...	متر ... القا شده به وسیله ...
minimum	مینیمم
relative to	نسبت به
relativity	نسبیت
remainder	باقیمانده

term	جمله
removable	رفع شدنی
discontinuity	ناپیوستگی
singularity	استثنائی
singular point	نقطه استثنائی
residue	باقیمانده
calculus	حساب
restriction	تحدید
Riemann	ریمان
condition	شرط
integrable	انتگرال دار
integral	انتگرال
Stieltjes integral	انتگرال اشتیلز
sum	مجموع
zeta function	تابع زتا (ی)
right half-plane	نیمه راست صفحه
right hand	دست راستی
derivative	مشتق
limit	حد
right-handed Lipschitz condition	شرط لیبشیتز دست راستی
right triangle	مثلث قائم الزاویه
root	ریشه
rotation	دوران
rule	قاعده
saddle point	نقطه زیننی
scalar	اسکالر
equation	معادله
scale	مقیاس
schwarzian derivative	مشتق شوارتز
second derivative test	آزمون مشتق دوم
sector	قطاع
semimetric space	فضای نیمه متریک
separable	جدائی پذیر
space	فضا (ی)
sequence	دنباله
of functions	توابع

series	رشته
of functions	توابع
set	مجموعه
of complex numbers	عددهای مختلط
of integers	عددهای صحیح
of rational numbers	عددهای گویا
of real numbers	عددهای حقیقی
set algebra	جبر مجموعه‌ای
set-theoretic identity	اتحاد نظریه مجموعه‌ای
side condition	شرط جنبی
sign-preserving property	خاصیت محفوظ ماندن علامت
similar	متشابه
sets	مجموعه‌ها (ی)
simple	ساده
arc	کمان
closed curve	خم بسته
simply connected	همبند ساده
region	ناحیه
set	مجموعه
simply connectedness	همبندی ساده
sine	سینوس
singularity	استثنائی
slobbovian integral	انتگرال اسلوبووی
slope	ضریب زاویه‌ای
smallest member	کوچکترین عضو
smooth	هموار
space-filling curve	خم فضا پرکن
span	پیمای
sphere	کره
spherical	کروی
cap	عرقچین
coordinates	مختصات
spherical solid	کره جامد
square	مربع
factor	سازه
square integrable function	تابعی که مربعش انتگرالپذیر است
statement	گزاره، عبارت

stationary	ایستا
point	نقطه
statistical mechanics	مکانیک آماری
step function	تابع پله‌ای
Stieltjes sum	مجموع اشتیل‌یس
stretching	انبساط
strictly decreasing	نزولی اکید
function	تابع
strictly increasing	صعودی اکید
function	تابع
strictly monotonic	یکنوای اکید
function	تابع
subcollection	زیر دسته
subinterval	زیر بازه
subscript	زیر نویس
subsequence	زیر دنباله
subseries	زیر رشته
subset	زیر مجموعه
subspace	زیر فضا
substitution	جای نشانی
subtraction	تفریق
sum	مجموع
function	تابع
summable	مجموع پذیر
sup norm	هنج سوپر هم
surface	رویه، سطح
symmetric	تقارنی
form	فرم
limit	حد
relation	رابطه
symmetrization	متقارن شده
symmetry	تقارن
tangent plane	صفحه مماس
telescoping	توی هم رونده
series	رشته
sum	مجموع

term	جمله
terminology	اصطلاح
test	آزمون
text	کتاب درسی
theory	نظریه
theta function	تابع تتا
thick	ستبر
time interval	بازه زمان
topological	توپولوژیک
image	نقش
mapping	نگاشت
property	خاصیت
total	کل
derivative	مشتق
variation	تغییر
transform	تبدیل
transformation	تبدیل
formula	دستور
transitive	متعدی
relation	رابطه
translation	انتقال
triangle	مثلث
triangle inequality	نامساوی مثلثی
triangular region	ناحیه مثلثی شکل
trigonometric	مثلثاتی
identity	اتحاد
triple integral	انتگرال مثلث
turning point	نقطه برگشت
two-valued function	تابع دو مقدری
Taylor formula	دستور تیلور
unbounded	بی کران
above	از بالا
sequence	دنباله
uncountable	شمارش ناپذیر
set	مجموعه
uniform	یک شکل

bound	کران
continuity	پیوستگی
Lipschitz condition	شرط لیبشیتس
uniformly bounded	کراندار یکشکل
sequence	دنباله
uniformly continuous	پیوسته یکشکل
function	تابع
union	اجتماع
unit	یکه
circle	دایره
coordinate vector	بردار مختصات
vector	بردار
unity	واحد
upper	بالائی
bound	کران
function	تابع
half-plane	نیمه . . . صفحه
integral	انتگرال
limit	حد
Riemann sum	مجموع ریمان
Stieltjes sum	مجموع اشتیلیس
variable	متغیر
variation	تغییر
vector	بردار (ی)
analysis	آنالیز
equation	معادله
with n components	با n مؤلفه
vector-valued function	تابع برداری
version	روایت
vertical	قائم
direction	امتداد
vibration	ارتعاش
volume	حجم
Weierstrass M -test	آزمون M وایر اشتراس
weighted average	میانگین وزندار

well-ordering principle
winding number
with respect to
wronskian

اصل خوش ترتیبی
عددگردشی
بر حسب، نسبت به
تابع ورونسکی

zero vector

بردار صفر

فهرست راهنما

۲۷۹	نسبت	۵۵۶	بر صفحه
	آزمون دیریکله		آبل (Neils-Henrik) (۱۸۰۲-۱۸۲۹)
۲۸۱	برای همگرایی رشته‌ها	۳۵۶، ۳۵۰، ۲۸۱	
۳۳۱	برای همگرایی یک شکل رشته‌ها		آبل
	استثنائی		آزمون ... برای همگرایی رشته‌ها
۶۴۱	تنها	۳۵۶، ۲۸۲ (تمرین ۱۳۰۹)	
۶۴۲	رفع شدنی	۲۸۱	دستور جمع بندی جزئی
۶۴۲	قطب	۳۵۱	قضیه حدی
۶۴۲	لازم	۶۲	اجتماع مجموعه‌ها
۳۶۳	استون (Marshall.H.) (-۱۹۰۳)	۵۴۵ (۱۸۶۵-۱۹۶۳)	آدامار (Jacques)
۷۴	اسکالر	۵۴۵ (تمرین ۱۶۰۱۳)	قضیه دترمینان
۶۳	اشتراک مجموعه‌ها		آرزولا (Cesare) (۱۸۴۷-۱۹۱۲)
	اشتیل یس (Thomas-Jan)	۳۹۱، ۳۲۸	
۱۸۷	(۱۸۵۶-۱۸۹۴)	۳۹۱، ۳۲۸	قضیه
۲۰۷	انتگرال		آرگان (Jean-Robert) (۱۷۶۸-۱۸۲۲)
	اشمیت (Erhard) (۱۸۷۶-۱۹۵۹)	۳۲	آزمون
۴۷۳			تنلی-ها بسن
۴۷۳	فرایند گرام-	۵۸۴	ریشه
۱۴	اصل استقرا	۲۸۰	مشق دوم برای اکستر ممها
(۴۳ (تمرین ۶۰۱)	اصل خوش ترتیبی	۵۳۳	مقایسه‌ای
	اصل کالبد	۲۷۶	

اندازه ناپذیر	۶۳۶، ۶۳۵	ماکزیم
تابع	۶۳۶	مینیم
مجموعه	۲۱	اصل موضوع تامیت
انقباض		اصلهای موضوع برای عددهای حقیقی
پایای	۲۱، ۱۱، ۱۰	
قضیه نقطه ثابت	(تمرین ۲۲.۰۱) ۴۵، ۲۵، ۲۳	اعشاریها
نگاشت	۲۰۸، ۱۸۸	افراز یک بازه
اولیار (Leonard) (۱۷۰۷-۱۷۸۳)		اقلیدسی
۵۱۵، ۳۰۱، ۲۷۹، ۲۲۰	۷۲	فضای R^n
اولیار	۹۱، ۷۴	متر
پایای	(تمرین ۲۵.۰۴) ۱۴۶	اکسترمم موضعی
حاصل ضرب ... برای $\zeta(s)$		انتگرال
دستور جمع بندی	۲۷۷	آزمون
قضیه ... در مورد تابعهای همگن	(تمرین ۱۷.۰۹) ۳۵۷	اسلوبوی
۵۱۵ (تمرین ۱۸.۱۲)	۲۰۷	اشتیلیس
ای، e ، گنگ بودن	۲۲۳	پائینی
اینفیمم	۴۶۴	پیشش
باز	۶۱۲	پیرامنی
بازه ... در R	۵۷۲، ۵۴۹	چندگانه
بازه ... در R^n	۳۹۴	ریمان مجازی
پوشش	۲۶۳	معادله
قضیه نگاشت	۴۱۰، ۲۴۳	مکرر
مجموعه ... در R^n	۲۱۰	انتگرال کبیر
مجموعه ... در یک فضای متری		انتگرال کبیری به طریقه جزء به جزء
نگاشت	۳۹۷، ۲۱۲	
بازه		اندازه
در R	۵۷۴	n (n بعدی)
در R^n	۵۷۱، ۵۵۱، ۴۱۴، ۲۴۶	صفر
مؤلف	۵۷۴، ۴۱۳	مجموعه
نیمباز	۵۷۳، ۳۹۹	اندازه پذیر
باقیمانده	۵۷۴، ۴۱۳	تابع
		مجموعه

بسل (Friedrich-wilhelm)	۶۴۴	قضیه
۶۶۶، ۴۴۰ (۱۷۸۴-۱۸۴۶)		بالائی
بسل	۲۲۴	انتگرال
تابع ۶۶۶ (تمرین ۲۱۰۱۶)	۵۷۲، ۳۶۸	تابع
نامساوی ۴۴۰	۲۶۷	حد
بورل (Emile) (۱۸۷۱-۱۹۳۸)	۱۹	کران
قضیه پوششی هایته - ۸۷	۲۰	کوچکترین کران
بولتزانو (Bernard) (۱۷۸۱-۱۸۴۸)	۶۴۸	نیم صفحه
۱۲۵، ۸۲	۷۳	بردار
بولتزانو		بردارهای
قضیه ۱۲۶	۷۵	پایه
قضیه . . . - وایراشتراس ۸۲	۷۵	مختصات یک
بوتنه (Ossian) (۱۸۱۹-۱۸۹۲)	۵۴	برد یک رابطه
قضیه ۲۴۱		برنشتاین (Sergei-Natanovic)
بی نهایت	۳۴۷	(۱۸۸۰-)
در R* ۲۸	۳۴۸	قضیه
در C* ۴۱		بزئولی (James) (۱۶۵۴-۱۷۰۵)
	۶۷۰، ۴۷۸، ۳۶۱	
پتانو (Giuseppe) (۱۸۵۸-۱۹۳۲)		برئولی
پارسوال (Mark-Antoine)		تابعهای متناوب ۴۷۸ (تمرین ۱۸۰۱۱)
۶۶۴، ۴۴۰ (۱۷۷۶-در حدود)		چند جمله ایهای
پارسوال		۳۶۱ (تمرین ۳۸۰۹)، ۶۷۰ (تمرین ۴۰۰۱۶)
اتحاد ۶۶۴		عددهای ۳۶۱ (تمرین ۳۸۰۹)
دستور ۴۴۰		بسته
پاره خط در R ⁿ ۱۳۰	۷۹، ۱۳	بازه
پدیده گیبس ۴۷۸ (تمرین ۱۹۰۱۱)	۶۱۱	خم
پواسن (Simeon-Denis)		گوی ۱۰۱ (تمرین ۳۱۰۳)
۶۶۲، ۴۶۹ (۱۷۸۱-۱۸۴۰)	۹۲، ۷۹	مجموعه
پواسن	۱۳۳	ناحیه
دستور انتگرال ۶۶۲ (تمرین ۵۰۱۶)	۱۴۷ (تمرین ۳۲۰۴)	نگاشت
دستور جمع بندی ۴۶۹	۸۱	بست یک مجموعه
پوشش یک مجموعه ۸۵	۶۳۷	بسط لوران

۵۴۹، ۲۰۹	ریمان	۱۱۶	پیوستگی
۵۷۲، ۳۷۴	لبگ	۱۳۳	یکشکل
	تابع زتا		
۳۰۱	حاصل ضرب اویلر برای		تابع
۳۹۷	نمایش انتگرالی برای	۴۶۸	بتا
۲۷۹	نمایش رشته‌ای برای	۱۱۵	بررداری
	تابع گاما	۵۵	برو
۴۰۲	پیوستگی	۵۷۱، ۲۱۸	پله‌ای
۳۹۶	تعریف	۲۰۵	پیوسته مطلق
	دستور دوجزئی برای	۴۷۱	تتا
(۳۱۰۱۱) ۴۸۲		۵۵	تحدید
(۳۱۰۱۰) ۴۳۲	رشته برای	۶۰۹	تحلیلی
(۲۹۰۱۰) ۴۳۲، ۴۰۶	مشتق	۵۴	تعریف
۳۹۷	معادله تابعی برای	۵۵	توسیع
	تابعهائی که مربعهایشان انتگرالپذیرند	۷۰ (تمرین ۲۲۰۲)	جمعپذیر
۴۱۸		۳۱۴	حد
۵۸	تابعی که ترتیب را حفظ می‌کند	۱۲۷	دومقداری
۴۲۵	تانری (Jules) (۱۸۴۸-۱۹۱۰)	۲۲۱، ۱۳۹	صعودی
	قضیه همگرایی . . . برای انتگرالهای	۱۳۹	صعودی اکید
۴۲۵	ریمان	۳۱۲ (تمرین ۴۵۰۸)	ضررپذیر
(۱۸۶۶-۱۹۴۷) Alfred	تاوبر (در حدود ۱۹۴۷-۱۸۶۶)	۹۱	فاصله (متر)
۳۵۳		۶۴۷، ۱۲۰	گویا
۳۵۳	قضیه	۴۴۹، ۳۲۳	متناوب
۵۵	تبدیل	۵۷	مرکب
۴۶۲	انتگرالی	۵۲۴	مشتقپذیر پیوسته
۶۵۵، ۴۸۳، ۴۶۲	لاپلاس	۴۱۳	مشخص کننده
۶۶۰	میوس	۵۶	معکوس
۵۸۶	مختصات	۳۵، ۱۸	نمائی
۲۸۳	تجدید آرایش رشته‌ها	۱۷۹ (تمرین ۹۰۵)	ورونسکی
۵۵۶	تصویر	۵۱۵ (تمرین ۱۸۰۱۲)	همگن
۳۲	جسمنا	۵۶	یک به یک

۱۶۹	مشتق	۵۵۱، ۲۵۰	تقریباً همه جا
۱۷۰	مشتق ... از مرتبه بالاتر		تغییر
	جمعپذیری	۱۸۸	کراندار
۴۱۵	اندازه لبگ	۱۹۱	کل
۴۱۵	شمارشپذیر		تغییر متغیر
۶۲۷	جهت یک مدار	۲۳۹	در یک انتگرال ریمان
۱۳۸	جهش یک تابع	۲۱۳	در یک انتگرال ریمان-اشتیل یس
	جزارو (Ernesto) (۱۸۵۹-۱۹۰۶)	۳۷۷	در یک انتگرال لبگ
۴۵۴، ۲۹۶	جزارو	۵۹۱	در یک انتگرال لبگ چندگانه
	مجموع	۶۳	تفاضل دو مجموعه
۲۹۶	مجموعپذیری ... رشته‌های فوریه	۵۸۴ (۱۸۸۵-۱۹۴۶)	تلی (Leonida)
۴۵۴	چند جمله‌ای	۵۸۴	آزمون ... هابسن
۱۲۰	از دو متغیر	۴۰، ۳۸	توانهای اعداد مختلط
۶۴۷	صفرهای ۶۳۲، ۶۶۵ (تمرین ۱۵۰۱۶)		توپولوژی
	چند جمله‌ایهای لژاندر		مجموعه نقطه‌ای
(۷۰۱۱) ۴۷۵	حاصل ضرب	۷۲	توپولوژیک
	داخلی	۱۲۵	خاصیت
۴۱۸، ۷۴	دکارتی	۱۲۴	نگاشت
۵۳	نقطه‌ای		تیلور (Brook) (۱۶۸۵-۱۷۳۱)
۷۴	حجم	۶۳۰، ۵۰۹، ۳۴۵، ۱۶۶	
۵۵۹، ۵۴۷	حد		تیلور
	اسفل		بسط
۲۶۸	اعلا	۶۳۰	دستور ... با باقیمانده
۲۶۷	بالائی	۱۶۶	دستور ... برای تابعهای از R^* به R^1
۲۶۸	پائینی	۵۰۹	رشته ... که از یک تابع تولید می‌شود
۳۱۴	تابع	۳۴۵	
۱۰۶	در یک فضای متری	۶۲	جبر مجموعه‌ای
		۲۸۱	جزئی
		۲۷۰	دستور جمع‌بندی
			مجموع

۴۳۶	توابع متعامد	۲۸۸	مکرر
۳۲۳	عددها در پایه ۲	۶۱۵	حلقه دایره
۲۸	عددهای حقیقی وسعت یافته		
	دستور		خارج قسمت
(۱۲۰۱۶)	پاراسوال ۴۴۰، ۶۶۴ (تمرین ۱۶)	۱۱	عددهای حقیقی
	دوجزئی برای تابع گاما	۳۰	عددهای مختلط
(۳۱۰۱۱)	۴۸۲ (تمرین ۱۱)		خاصیت
(۶۰۵)	۱۷۸ (تمرین ۵)	۲۳	ارشمیدسی عددهای حقیقی
۱۶۶	دستور تیلور با باقیمانده	۱۱۸	کلی
۵۱۰	برای تابعهای چند متغیره	۱۱۸	موضعی
	دستور معکوس کردن		خم
۴۶۳	برای تبدیلهای فوریه	۱۹۷	با درازای متناهی
	برای تبدیلهای لاپلاس	۶۱۱	بسته
۶۵۵	۴۸۴ (تمرین ۱۱-۳۸)	۱۳۲	چندضلعی
(۶۰۱۳)	۵۴۳ (تمرین ۱۳)	۶۱۱	ژردان
۴۸	دموآور (Ham) (۱۶۶۷-۱۷۵۴)	۳۳۲	فضا پرکن
۴۸	قضیه دنباله	۶۱۱	هموار قطعه وار
۵۸	تعریف	۲۲۴ (۱۸۴۲-۱۹۱۷)	داربو (Gaston)
۳۱۹	کراندار یکشکل	۳۶۳ (۱۸۸۹-۱۹۴۶)	دانیل (P.J.)
	دنباله صعودی	۵۱۹	دترمینان
۳۶۵	از تابعها	(۱۸۳۱-۱۹۱۶)	ددکیند (Richard)
۲۶۹	از عددها	۱۹	
۱(۱۸۳۱-۸۸۹)	دوبوآریموند (Paul)	۱۹۷	درازای یک گذر
۴۴۳	دولواواله-پوسن (C.J.) (۱۸۶۶-۱۹۶۲)		درون
	دیریکله (Peter-Gustav-Lejeune)	۶۲۶	(یا ناحیه داخلی) یک خم ژردان
(۱۸۵۵-۱۸۵۹)		۹۲، ۷۵	یک مجموعه
۶۵۰، ۴۵۰، ۳۳۱، ۳۱۰، ۲۹۵، ۲۸۱		۱۳۷	دست راستی
	دیریکله	۱۵۹	حد
۴۴۶	انتگرالهای		مشتق
			دستگاه

ریس (Frigyés) (۱۸۸۰-۱۹۵۶)	۲۹۵	حاصل ضرب
۴۴۲، ۴۳۵، ۴۲۲، ۳۶۳	۳۱۰ (تمرین ۳۴۰۸)	رشته
۴۴۲، ۴۲۲ قضیه . . . - فیشر	۴۵۰	هسته
۳۸ ریشه‌های اعداد مختلط	(۱۸۴۵-۱۹۱۸) (Ulisse) دینی	
ریمان (Georg-Friedrich-Bernard) (۱۸۲۶-۱۸۶۶)	۴۵۲، ۴۴۳، ۳۵۶	دینی
۳۰۱، ۲۷۹، ۲۲۵، ۲۱۰، ۳۲	۴۵۲	آزمون
۶۶۶، ۵۴۸، ۴۵۱، ۴۴۴، ۴۴۳	۳۵۶	قضیه
ریمان		
۵۴۸، ۲۱۰ انتگرال	۵۴	رابطه
۳۰۱، ۲۷۹ تابع زتای	۶۶ (تمرین ۲۰۲)	انعکاسی
۲۲۵ شرط	۶۶ (تمرین ۲۰۲)	تقارنی
۴۵۱ قضیه تمرکز	۶۶ (تمرین ۲۰۲)	متعدی
قضیه . . . درباره استثنائیها		رشته
۶۶۶ (تمرین ۲۲۰۱۶)	۲۷۲	توافقی
۳۲ کره	۳۳۶	توانی
۴۴۴ لم . . . - لبگ	۲۷۱	توی هم رونده
	۶۳۰، ۳۴۵	تیلور
۵۹ زیر دنباله	۳۴۹	دو جمله‌ای
۵۲، ۱۰ زیر مجموعه	۴۴۳	مثلثاتی
	۲۹۲	مکرر
ژاکوبی (Carl-Gustav-Jacob) (۱۸۰۴-۱۸۵۱)	۲۸۲، ۲۷۶	هندسی
۵۲۰، ۴۹۶ ژاکوبی	۲۷۴	رشته همگرای مشروط
	۲۸۵	تجدید آرایش
۵۲۰ دترمینان		رفع شدنی
۴۹۶ ماتریس	۶۴۲	استثنائی
ژردان (Camille) (۱۸۳۸-۱۹۲۲)	۱۳۷	ناپوستگی
۶۲۶، ۶۱۱، ۵۵۸، ۴۵۲، ۴۴۳ ژردان	۱۶۲ (۱۶۵۲-۱۷۱۹) (Michel) رل	قضیه
	۱۶۲	روشه (Eugen) (۱۸۳۲-۱۹۱۰)
۶۱۱ خم	۶۶۵ (تمرین ۱۴۰۱۶)	قضیه
۶۲۶ قضیه خم	۵۴۰	رویه درجه دو
۴۵۲ قضیه . . . در مورد رشته‌های فوریه		

	صفر	۶۱۱	کمان
۵۷۱، ۵۵۱، ۲۴۶	اندازه	۵۵۸	محتوا
۷۴	بردار		
۶۳۳	تابع تحلیلی		ساده
۶۳۳	تنها	۶۱۱	خم
	عدد	۶۲۲	ناحیه همبند
۵۹	اصلی	۵۵۸	سطح (محتوای) یک ناحیه مسطح
۱۴	اول	۲۱	سوپریم
(۶۹ (تمرین ۱۵۰۲)	جبری		شرط کشی
۹	حقیقی	۲۹۹	برای حاصل ضربها
۱۳	صحیح	۲۶۶، ۱۰۹	برای دنبالهها
۶۲۴	گردشی	۲۷۱	برای رشتهها
۱۷	گنگ	۳۲۱، ۳۲۰	برای همگرایی یکشکل
۱۷	گویا		شرط لیپشیتس
۲۹	مختلط		۱۷۷ (تمرین ۱۰۵)
۵۶	عکس یک رابطه		۲۰۱ (تمرین ۲۰۶)، ۴۴۹
۴۶۳	عملگر	۳۳۶	شعاع همگرایی
۵۱	عنصر یک مجموعه		شکل نمائی
		۴۵۷	رشتههای فوریه
۴۲۶ (۱۸۷۸-۱۹۲۹) (Pierre)	فاتو	۴۶۱	قضیه انتگرال فوریه
۴۲۶	لم	۳۷	شناسه عدد مختلط
(۱۸۸۰-۱۹۵۹) (Leopold)	فجر	۳۲۲	شنبرگ (Issac-J.) (-۱۹۰۳)
۴۵۴، ۴۴۴، ۲۵۹			شوارتز (Hermann-Amandus)
۴۵۴ (تمرین ۲۳۰۷)، ۲۵۹	قضیه		(۱۸۴۳-۱۹۲۱)
(۳۰۱۱ (تمرین ۴۷۳	فرایند گرام-اشمیت	۴۱۹، ۲۵۷، ۱۷۹، ۴۹، ۴۵، ۲۷	
۵۳۴	فرم درجه دوم		نامساوی کشی-
۵۳۴	تقارنی	۴۱۹، ۲۵۷، ۴۹، ۴۵، ۲۷	
۷۴	فضای خطی		
(۴۰۶ (تمرین ۲۰۲	از تابعها		صفحه
۹۰	فضای متری	۳۱	مختلط
۱۱۱	تام	۴۲	مختلط وسعت یافته

قسط	موضوع	شماره	موضوع
۲۹	حقیقی	۹۱	جدائی پذیر مجزا
۶۳۹	عمده	۴۲۱	فضای نیمه متری
۲۹	موهومی	۲۵۹	فکته (Michel)
	قضیه	۲۵۹	قضیه
۳۹۱، ۳۲۸	آرزلا		فوبینی (Guido) (۱۸۷۹-۱۹۴۳)
۳۴۷	برنشتاین	۵۸۱، ۵۷۷، ۵۷۰	
۸۶	پوششی لیدلف	۵۸۱، ۵۷۷	قضیه
۵۲۸	تابع ضمنی		فوریه (Joseph) (۱۷۵۸-۱۸۳۰)
۵۲۵	تابع معکوس	۴۶۲، ۴۵۹، ۴۴۳، ۴۴۰، ۴۳۶	
۴۲۵ (تمرین ۷۰۱۰)	تانری		فوریه
۳۶۰، ۳۵۳ (تمرین ۳۷۰۹)	تاوبری	۴۶۲	تبدیل
۴۵۶	تقریب و ایراشتراس	۴۴۰	رشته
۴۵۱	تمرکز	۴۴۰	ضریب
۳۴۲	جانمایی برای رشته‌های توانی	۴۵۹	قضیه انتگرال
۳۵۱	حدی آبل		فیشر (Ernst) (۱۸۷۵-۱۹۵۴)
۵۴۵ (تمرین ۱۶۰۱۳)	دترمینان آدامار	۴۴۲، ۴۲۲	
۴۸ (تمرین ۴۴۰۱)	دمو آور	۴۴۲، ۴۲۲	قضیه ریس-
	دوم مقدار میانگین برای انتگرالهای		
۱۶۲	رل		قاعده زنجیره‌ای
۶۶۵ (تمرین ۱۴۰۱۶)	روشه	۱۶۸	تابعهای برداری
۴۴۲، ۴۲۲	ریس-فیشر	۱۵۸	تابعهای حقیقی
۲۴۰	ریمان	۱۷۲	تابعهای مختلط
۲۵۵ (تمرین ۱۰۰۷)	عددهای اول،	۴۹۹	شکل ماتریسی
۴۵۴ (تمرین ۲۳۰۷)	فجر	۵۱۹	قاعده کرامر
۵۸۱، ۵۷۷	فوبینی		قانون
	کازوراتی-و ایراشتراس	۳۰، ۱۰	پخشپذیری
۶۶۶ (تمرین ۲۳۰۱۶)		۳۰، ۱۰	تعویضپذیری
۶۳۲	لیووویل	۶۵۰	تقابل برای مجموعه‌های گاوس
۲۹۴	مرتس	۳۰، ۱۰	شرکتپذیری
۶۳۴	همانی برای تابعهای تحلیلی	۳۱	متوازی الاضلاع
۳۸۷	همگرایی تسلطی	۳۳، ۲۶	قدرمطلق

۴۴۴	کارلسون (Lennart)	۱۶	یکتائی تجزیه
۳۳	کالبد یک عدد مختلط		قضیه اساسی
	کانتور (Georg) (۱۹۱۸-۱۸۴۵)		جبر ۲۹، ۳۲، ۶۳، ۶۵ (تمرین ۱۶-۱۵)
۴۴۳، ۲۶۱، ۱۰۰، ۸۴، ۵۱، ۱۹	کانتور	۲۳۷	حساب انتگرال
	قضیه اشتراکی	۸۶	قضیه پوششی
۸۴	قضیه ... بندیکسون	۸۷	لیندلف
	مجموعه کران	۴۶۶	هاینه-بورل
(۲۵۰۳) ۱۰۰ (تمرین ۳)			قضیه پیچش
(۳۲۰۷) ۲۶۱ (تمرین ۷)			برای تبدیلهای فوریه
	بالائی	۴۸۳ (تمرین ۱۱-۳۶)	برای تبدیلهای لاپلاس
۱۹	بزرگترین ... پائینی		قضیه دینی
۲۱	پائینی	۴۵۲	در مورد رشتههای فوریه
۲۰	کوچکترین ... بالائی		در مورد همگرایی یکشکل
۲۰	یکشکل	۳۵۶ (تمرین ۹-۹)	قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها
۳۱۹	کراندار		چند گانه
	با تغییر	۵۶۴	ریمان
۱۸۹	تابع	۲۴۰	ریمان-اشتیل یس
۱۲۳	دور از صفر	۲۳۵	قضیه مقدار میانگین برای مشتقها
۱۹۲	مجموعه		تابعهای برداری
۹۵، ۸۲	همگرایی	۵۰۲	تابعهای حقیقی
۳۹۱، ۳۲۷	کرانه یک مجموعه	۱۶۲	قضیه مقدار میانگین
۹۶	کسلمن (Hyman)		برای تابعهای پیوسته
۲۶۵، ۲۴۰	کشی (Augustin-Louis)	۱۲۶	برای مشتقها
	(۱۸۵۷-۱۷۸۹)	۱۶۵	قضیه همگرایی یکنوای لوی
۲۵۷، ۱۷۳، ۱۰۸، ۲۷			برای تابعهای پلهای
۳۲۰، ۲۹۹، ۲۶۶	کشی	۳۸۰	برای دنبالهها
	حاصل ضرب	۳۸۴	برای رشتهها
۲۹۴	دستور انتگرال	۱۳۳	قلمرو (ناحیه باز)
۶۲۲	دنباله	۵۴	یک رابطه
۱۰۹	قضیه انتگرال		
۶۲۱، ۶۱۶			

۴۵ (تمرین ۲۳۰۱)	اتحاد	۶۴۴	قضیه باقیمانده
۴۹ (تمرین ۴۸۰۱)		۱۷۳	معادله‌های ... - ریمان
۵۳۷	تکثیرکنها	۳۹۶	مقدار عمده
۵۰ (۱۸۷۷-۱۹۳۸) (Edmund)	لاندو	۶۳۲	نامساویهای
	لایب نیتز (Gottfried-Wilhelm)	۶۱۱، ۱۳۰	کمان
۱۷۸	(۱۶۴۶-۱۷۱۶)	۱۹۷	درازای
۱۷۸	دستور		
	لبگ (Henri) (۱۸۷۵-۱۹۴۱)		گاوس (Karl-Friedrich)
۳۸۷، ۳۷۴، ۲۴۸، ۲۰۸		۶۴۹، ۳۲	(۱۷۷۷-۱۸۵۵)
۴۴۴، ۴۱۶، ۴۱۳، ۳۹۱		۶۴۹	مجموع
۵۷۰، ۵۵۱		۶۱۰، ۱۹۶، ۱۳۰	گذر
	لبگ	۱۹۷	با درازای متناهی
۳۷۴	انتگرال... تابعهای حقیقی	۶۱۱	هموار قطعه‌وار
۴۱۶	انتگرال... تابعهای مختلط	۶۱۷	گذرهای همجا
۵۷۴، ۴۱۳	اندازه	۴۹۲	گرادیان
۳۸۷	قضیه همگرایی تسلطی		گرام (Jørgen-Pedersen)
۳۹۱	قضیه همگرایی کراندار	۴۷۳	(۱۸۵۰-۱۹۱۶)
	محک... برای انتگرالپذیری ریمان	۴۷۳	فرایند... - اشمیت
۵۵۱، ۲۴۸		۷۵	گرده
	لژاندر (Adrien-Marie)	۳۳۶	همگرایی
۴۷۵	(۱۷۵۲-۱۸۳۳)		گورسا (Edouard) (۱۸۵۸-۱۹۳۶)
(۷۰۱۱) ۴۷۵	چند جمله‌ایها	۶۱۰	
۳۹	لگاریتم		گوی
	لم	۷۵	R^n در
۱۶	اقلیدس	۹۲	دریک فضای متری
(۱۳۰۱۶) ۶۶۴	شوارتز		لاپلاس (Pierre-Simon)
(۸۰۱۰) ۴۲۶	فاتو	۶۵۵، ۴۸۳، ۴۶۲	(۱۷۲۹-۱۸۲۷)
	لوران (Pierre-Alphonse)	۶۵۵، ۴۸۳، ۴۶۲	تبدیل
۶۳۷	(۱۸۱۳-۱۸۵۴)		لاگرانژ (Joseph-Louis)
۶۳۷	بسط	۵۳۷، ۴۹، ۴۵	(۱۷۳۶-۱۸۱۳)
	لوی (Beppo) (۱۸۷۵-۱۹۶۱)		لاگرانژ
۵۷۳، ۳۸۴، ۳۸۲، ۳۸۰			

۹۹ (تمرین ۱۴۰۳)	کوژ	(Rudolph) (۱۸۳۱-۱۹۰۴)	لیپ شیتس
۴۳۷	متعامد بهنجار از تابعها	۴۴۹، ۴۴۳، ۲۰۱، ۱۷۷	
۴۷۵ (تمرین ۶۰۱۱)	متعامد بهنجار تام	شرط ۱۷۷ (تمرین ۱۰۵)	
۵۹	متناهی	۲۰۱ (تمرین ۲۰۶)، ۴۴۹	
	مستقل خطی از تابعها	لیتل وود (John-Edensor) (-۱۸۸۵)	
۴۷۳ (تمرین ۲۰۱۱)		۴۴۴	
۹۴، ۸۱	مشق	لیندلف (Ernst) (۱۸۷۰-۱۹۴۶)	۸۵
۱۰	ناتهی	قضیه پوششی	۸۶
	نامستقل خطی از تابعها	لیوویل (Joseph) (۱۸۰۹-۱۸۸۲)	۶۳۱
۱۸۰ (تمرین ۹۰۵)		قضیه	۶۳۲
۱۲۷	ناهمبند	ماتریس	۴۹۴
۱۳۰	همبند کمانواز	حاصل ضرب	۴۹۵
۶۳	مجموعه‌های از هم جدا	ماکزیم و مینیم	۵۳۰، ۱۲۳
۶۴	دسته‌ای از	میوس (Augustus-Ferdinand)	
۵۹	مجموعه‌های متشابه (همعدد)	(۱۷۹۰-۱۸۶۸)	۶۶۰
۵۵۸	محتوا	تبدیل	۶۶۰
۵۵۸	محتوای ژردان	متر	۹۱
۵۵۸	خارجی	متمم	۶۳
۵۵۸	داخلی	مجموع گاوس	۶۴۹
	مختصات	مجموعه	
۵۸۸	استوانه‌ای	استقرائی	۱۴
۵۸۸، ۳۶	قطبی	اندازه پذیر ژردان	۵۵۸
۵۸۹	کروی	تهی	۵۲
۶۱۱	مدار	چگال	۱۰۲ (تمرین ۳۲۰۳)
	مرتب	چندضلعی وار همبند	۱۳۲
۷۲	n تائی	شمارا	۶۰
۵۳	جفت	شمار شپذیر	۶۰
	مرتبه	شمارش نا پذیر	۶۰
۶۳۳	صفر	عرضها	۵۶۸ (تمرین ۱۱۰۱۴)
۶۴۲	قطب	فشرده	۹۵، ۸۸
۲۹۴ (۱۸۴۰-۱۹۲۷)	مرتنس (Franz)	کامل	۱۰۰ (تمرین ۲۵۰۳)
۲۹۴	قضیه		

۱۳۷	نایبوستگی	۴۶ (تمرین ۲۹۰۱)	مزدوج عدد مختلط
۱۳۸	جهشی	۵۳۰	مسأله‌های اکستریم
۱۳۲	ناحیه	۱۶۸	مشتق (ها)
	ناحیهٔ یک خم ژردان	۱۵۵	تابعهای برداری
۶۲۶	خارجی (یا برونی)	۱۷۲	تابعهای حقیقی
۶۲۶	داخلی (یا درونی)	۱۶۹	تابعهای مختلط
	نامتناهی	۴۸۷	جزئی
۲۹۷	حاصل ضرب	۱۷۹ (تمرین ۷۰۵)	جهتی
۲۷۰	رشتهٔ	۴۹۰	شوارتزی
۵۹	مجموعهٔ		کل
۱۵۹	مشتق	۲۲۲، ۲۳۶	مشتقگیری
	نامساوی	۳۲۹	از انتگرالها
۴۴۰	بسل	۳۳۱	از دنباله‌ها
	کشی-شوارتز		از رشته‌ها
۴۱۹، ۲۷، ۲۵۷ (تمرین ۱۶۰۷)		۵۷۳، ۵۴۹	مضاعف
۴۱۹، ۲۶	مثلی	۲۸۸	انتگرال
۴۵ (تمرین ۲۵۰۱)	مینکوفسکی	۲۸۹	دنبالهٔ
	نامساوی کشی-شوارتز	۵۴	رشتهٔ
	برای انتگرالها	۱۴	مقدار یک تابع
۴۱۹، ۲۵۷ (تمرین ۱۶۰۷)		۱۵	مقسوم علیه
۴۱۹	برای حاصل ضربهای داخلی	۱۶	مشترک
	برای مجموعه‌ها		بزرگترین... مشترک
۴۵، ۲۷ (تمرین ۲۳۰۱)		۱۲۹	مؤلفه
۴۹ (تمرین ۴۸۰۱)		۷۳	یک فضای متری
۱۲	نامنفی	۲۹۶	یک بردار
۵۵	نقش		میانگین حسابی
۶۸ (تمرین ۷۰۲)	معکوس	۱۰	میدان
	نقطه	۱۷۱	عددهای حقیقی
۹۴، ۷۹	انباشتگی		عددهای مختلط
۵۳۲	ایستا	۴۵	مینکوفسکی (Hermann)
۱۰۰ (تمرین ۲۳۰۳)	تراکم	۴۵ (تمرین ۲۵۰۱)	(۱۸۶۴-۱۹۰۹)
			نامساوی

	۸۰	تنها
ها بسن (Ernest-William)	۹۴، ۷۹	چسبیده
۵۸۴، ۴۴۴ (۱۸۵۶-۱۹۳۳)	۷۳	در R^n
۵۸۴	۹۱	درفضای متری
هاردی (Godfrey-Harold)	۹۲، ۷۵	درونی
(۱۸۷۷-۱۹۴۷)	۵۳۲	زینی
۴۴۴، ۳۶۱، ۳۱۳، ۲۹۷، ۵۰	۹۶	کرانه‌ای
هاینه (Eduard) (۱۸۲۱-۱۸۸۱)		نقطه ثابت
۴۴۳، ۱۳۴، ۸۷	۱۳۶	قضیه
هاینه	۱۳۵	یک تابع
۱۳۴	۵۵	نگاشت
قضیه پوششی... بورل	۶۵۹	همشکلی
۸۷	۲۷۸	نمادهای O و o
هم ارزی		نوسان یک تابع
۶۶ (تمرین ۲۰۲)	۱۴۵ (تمرین ۲۴۰۴)، ۲۴۷	
۲۰۰		نیون (Ivan-M.) (۱۹۱۵-)
۱۲۴	۲۶۲ (تمرین ۳۳۰۷)	
همانسانی		
همبند		
۱۲۷		واگرا
۱۲۷		حاصل ضرب
۷۶	۲۹۸	دنباله
۴۲، ۲۹	۲۶۶	رشته
۶۴۱	۲۷۰	وایراشتراس (Karl) (۱۸۱۵-۱۸۹۷)
همگرایی		۶۶۶، ۴۵۶، ۳۲۲، ۸۲، ۱۹
۲۹۸		وایراشتراس
۱۰۶		آزمون M
۲۶۶	۳۲۲	قضیه بولترانو-
۲۷۰	۸۲	قضیه تقریب
۳۲۷	۴۵۶	قضیه کازوراتی-
۲۷۴	۶۶۶	ورونسکی (J.M.H.) (۱۷۷۸-۱۸۵۳)
۲۷۴		
۳۳۳	۱۷۹	
۳۱۴	۱۷۹	تابع

۱۵۱ (تمرین ۶۶۰۴)	تابع	۳۱۸	یکشکل
۱۵۱ (تمرین ۶۶۰۴)	سوپریم		همگرایی مطلق
		۳۰۰	حاصل ضربها
	یانگ (William-Henry)	۲۷۴	رشتهها
۴۴۴، ۳۶۳	(۱۸۶۳-۱۹۴۲)		همگرایی یکشکل
۱۲۵	یکمتری	۳۱۸	دنبالهها
	یکنوا	۳۲۱	رشتهها
۱۳۹	تابع		هنج
۲۶۹	دنباله	۲۰۹	افراز
۳۲	یکه موهومی	۴۲۰، ۴۱۸	L^2
		۷۴	بردار

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

www.riazisara.ir

سایت ویژه ریاضیات