اصول اقلیدس

سیزده مقاله

تامس ال. هیث

ترجمهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
زندگینامه	۱
مقالهٔ اول تعاریف	۳
تعاریف	۳
اصلهای موضوع	۵
اصلهای بدیهی (بدیهیّات)	۵
قضیه‌ها	۵
مقالهٔ دوم	۴۰
تعاریف	۴۰
قضیه‌ها	۴۰
مقالهٔ سوم	۵۴
تعاریف	۵۴
قضیه‌ها	۵۵
مقالهٔ چهارم	۸۵
تعاریف	۸۵

عنوان	صفحه

قضیه‌ها	۸۶
مقالهٔ پنجم	۱۰۲
تعاریف	۱۰۲
قضیه‌ها	۱۰۴
مقالهٔ ششم	۱۲۵
تعاریف	۱۲۵
مقالهٔ هفتم	۱۶۰
تعاریف	۱۶۰
مقالهٔ هشتم	۱۸۸
مقالهٔ نهم	۲۱۳
مقالهٔ دهم (X)	۲۳۹
تعریفهای I	۲۳۹
قضیه‌ها	۲۴۰
مقالهٔ یازدهم	۳۷۷
تعاریف	۳۷۷
قضیه‌ها	۳۷۹
مقالهٔ دوازدهم قضیه‌ها	۴۲۲
قضیه‌ها	۴۲۲
مقالهٔ سیزدهم قضیه‌ها	۴۵۹
قضیه‌ها	۴۵۹

زندگینامه

اقلیدس، شکوفایی، حدود ۳۰۰ ق. م.

گفته‌اند که اقلیدس از نخستین شاگردانِ افلاطون (۴۲۷ـ۳۴۷ق.م.) از همه کوچکتر، ولی از ارشمیدس (حـ.۲۸۷ـ۲۱۲ق.م.) بزرگتر بوده است. با این گفته دوران شکوفایی وی حدود ۳۰۰ق.م. قرار می‌گیرد. وی تحصیلات ریاضی اوّلیّهٔ خود را احتمالاً در آتن، از شاگردان افلاطون کسب کرده است، زیرا بیشتر هندسه‌دانان و ریاضیدانانی که با آنان حشرونشر داشته از آن مکتب بوده‌اند. به گفتهٔ پروکلوس، نوافلاطونی سدهٔ پنجم، اقلیدس از نحلهٔ افلاطون بوده و با «آن فلسفه همدلی داشته است». ولی عقیدهٔ او ممکن است فقط بر این نظرش مبتنی باشد که اقلیدس بحث در پنج جسم منتظم («افلاطونی») را در مقالهٔ XIII «در پایان تمامیِ اصول» خود آورده است.

تنها امر مسلّم دیگر دربارهٔ اقلیدس این است که او در دوران فرمانروایی بطلمیوس I، که از ۳۰۶ تا ۲۸۳ ق.م. سلطنت می‌کرده، مکتبی را در اسکندریّه پایه‌گذاری و در آنجا تدریس کرده است. گواهِ اقامت وی در این محل نقلِ قولی است از پاپوس (سدهٔ چهارم ب.م.) حاکی از اینکه آپولونیوس «مدتی دراز با شاگردان اقلیدس در اسکندریّه به‌سر برده، و به همین سبب چنین سیرتِ علمیِ تفکّر را آموخته است.» به گفتهٔ پروکلوس، این، بطلمیوس I بوده که از اقلیدس پرسیده است که آیا راهی کوتاهتر از راه اصول برای [آموختن] هندسه وجود ندارد؟ و این پاسخ را دریافت کرده است که: «راهی شاهانه به هندسه وجود ندارد»[1]. داستان دیگری از اقلیدس که از دوران کهن به ما رسیده مربوط به پاسخِ وی به شاگردی است که در پایان نخستین درسش در هندسه می‌پرسد که از فرا گرفتن این چیزها چه عایدش می‌شود، که بر اثر آن اقلیدس غلامش را فرا می‌خواند و می‌گوید «سکّه‌ای به او بده زیرا او باید از آنچه که فرا می‌گیرد عایدی‌ای ببرد».

۱. زیرا اقلیدس از راه شاهانهٔ روش تحلیلی (هندسهٔ تحلیلی) آگاه نبوده است.ـم.

از اظهارنظر پاپوس دربارهٔ اقلیدس این خصوصیّت اخلاقی وی آشکار می‌شود که «انصافِ بیش از اندازه و محبّت استثنایی نسبت به همهٔ کسانی داشته که در پیشبرد علم ریاضی، ولو اندک، تلاش کرده‌اند.» ولی سیاق عبارت وی نشان می‌دهد که پاپوس ظاهراً گزارش متداول رسمی از خصوصیّات اقلیدس نمی‌دهد، بلکه ضمن توضیح از پیشرفته‌تر بودن تحقیقات خود از اقلیدس یاد می‌کند که نتوانسته است در بررسی یکی از مسائل قطع مخروطی همپای او باشد.

کار معروف و مهم اقلیدس، ۱۳ مقالهٔ اصول، احتمالاً بلافاصله پس از انتشار به صورت یک اثر کلاسیک در آمده است. از زمان ارشمیدس این مقاله‌ها پیوسته مورد مراجعه بوده‌اند و به عنوان یک کتاب درسیِ اساسی مورد استفاده قرار می‌گرفته‌اند. در دوران کهن این نکته مورد قبول همگان واقع شده بود که اقلیدس همهٔ کارهای پیشینیان خود را گردآوری کرده است. به گفتهٔ پروکلوس بسیاری از قضیّه‌های ائودوکسوس و تئایتتوس را تکمیل کرده و برای آنهایی که پیشینیانش آنها را فقط به طور سطحی ثابت کرده بودند، اثباتِ قابل قبول و بی‌چون و چرایی آورده است. آثار موجود دیگرِ وی شامل معطیات (= داده‌ها) برای استفاده در حلّ مسائل از راه تحلیل هندسی، در تقسیم (شکلها)، نورشناخت، و نمودها (=عربی، الظواهر)، و رساله‌ای اندر هندسهٔ کرات برای استفاده در نجوم بوده است. اصول موسیقی گمشده‌اش ممکن است پایه‌ای برای تقسیم درجات الحان موجود دربارهٔ آموزهٔ فیثاغورسی موسیقی بوده است. از آثار هندسی گم‌شده‌اش همه، به استثنای یکی، در زمینهٔ هندسهٔ عالی هستند.

از آنجا که یونانیان بعدی چیزی از زندگی اقلیدس نمی‌دانستند مترجمان سده‌های میانه و گردآورندگان اصول هریک به سلیقهٔ خود در این بابِ اظهار نظرکرده‌اند. به علّت اشتباه با اقلئیدس، فیلسوفِ مگاراییِ معاصرِ افلاطون، او را معمولاً «مگارنسیس» نامیده‌اند. دانشمندان عربی‌نویس چنین دریافته بودند که نام اقلیدس، که آن را ترکیبی از $ucli$ (کلید) و dis (اندازه) می‌گرفتند، «کلید هندسه» را نشان می‌داده است. اینان مدّعی بودند که فلاسفهٔ یونان بر سردرِ مدرسه‌های خود این نوشتهٔ معروف را نقل می‌کردند که: «کسی که اصول اقلیدس را فرا نگرفته حقِ ورود ندارد.» و بدین ترتیب نوشتهٔ سردرِ آکادمی افلاطون را به سردرِ همهٔ آموزشگاهها نسبت می‌دادند و اصول را مرادف با هندسه می‌گرفتند.

مقالهٔ اول

تعاریف

۱. نقطه آن است که جزء ندارد.

۲. خط طولی است بدون عرض.

۳. هر خط به دو نقطه محدود است.

۴. خط راست خطی است که به گونه‌ای هموار بر نقطه‌های خودش قرار دارد.

۵. رویه آن است که فقط طول و عرض دارد.

۶. حدود هر رویه خطها هستند.

۷. رویهٔ مستوی رویه‌ای است که به گونه‌ای هموار بر خطهای راست خود قرار دارد.

۸. یک زاویهٔ مستوی میل دو خطّ واقع در یک صفحه است نسبت به هم، که یکدیگر را می‌برند و بر یک خط راست قرار ندارند.

۹. و وقتی خطهایی که زاویه را در بر دارند خطهای راست باشند زاویه را راست‌خط می‌نامند.

۱۰. وقتی خط راستی بر خط راستی فرود آید و دو زاویهٔ مجاور مساوی با هم بسازد هریک از آن زاویه‌ها یک قائمه است و خط راست فرود آمده بر خطّ اوّل عمود بر آن خط نامیده می‌شود.

۱۱. زاویهٔ منفرجه (باز) زاویه‌ای است بزرگتر از یک زاویهٔ قائمه.

۱۲. زاویهٔ حاده (تند) زاویه‌ای است کوچکتر از یک زاویهٔ قائمه.

۱۳. مرز یک چیز حدّ آن چیز است.

۱۴. شکل آن است که از یک یا چند مرز حادث شده است.

۱۵. دایره شکلی است مستوی، حادث از یک خط که همهٔ خطهای راستی که از یکی از نقطه‌های درون این شکل بر آن فرود می‌آیند با هم مساوی‌اند.

۱۶. و این نقطه مرکز دایره نامیده می‌شود.

۱۷. قطر دایره خط راستی است که از مرکز آن رسم و از هر دو سو به محیط دایره ختم می‌شود. و چنین خط راستی دایره را نیز نصف می‌کند.

۱۸. نیم‌دایره شکلی است حاصل از قطر و قسمتی از محیط که توسّط قطر جدا می‌شود. مرکز نیم‌دایره همان مرکز دایره است.

۱۹. شکلهای راست خط شکلهایی هستند که از خطهای راست حادث شده‌اند، شکلهای سه‌ضلعی از سه خط راست، و چهارضلعی از چهار خط راست، و چندضلعی از بیش از چهار خط راست.

۲۰. از شکلهای سه‌ضلعی، یا مثلث، مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع آن با هم مساوی‌اند، مثلث متساوی‌الساقین مثلثی است که فقط دو ضلع آن با هم مساوی هستند، و مثلث مختلف‌الاضلاع مثلثی است که هر سه ضلع آن با هم نامساوی باشند.

۲۱. باز، از شکلهای سه‌ضلعی، مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ قائمه دارد، مثلث منفرج‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ منفرجه دارد، مثلث حادالزوایا مثلثی است که هر سه زاویه‌اش حادّه‌اند.

۲۲. از شکلهای چهارضلعی، مربع شکلی است که هم اضلاعش متساوی‌اند و هم چهار زاویه‌اش قائمه. مستطیل یک چهارضلعی است با زاویه‌های قائمه ولی اضلاع آن با هم مساوی نیستند؛ لوزی یک چهارضلعی است با چهار ضلع متساوی ولی زاویه‌هایش قائمه نیستند؛ متوازی‌الاضلاع یک چهارضلعی است که در آن ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم، ولی نه متساوی‌الاضلاع است، و نه زاویه‌های قائمه دارد. چهارضلعیهایی جز اینها را چهارضلعیهای نامنتظم می‌نامند.

۲۳. خطهای راست متوازی خطهای راستی هستند در یک صفحه که اگر از دو سو تا بینهایت امتداد داده شوند یکدیگر را در هیچ طرف نمی‌برند.

اصلهای موضوع

حکمهای زیر را مسلّم می‌گیریم:

۱. هر دو نقطه را می‌توان با یک خطّ راست به هم وصل کرد.

۲. هر خط راست متناهی را می‌توان پیوسته به صورت خط راست امتداد داد.

۳. به هر مرکز و با هر شعاع می‌توان دایره‌ای رسم کرد.

۴. همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و مجموع دو زاویهٔ درونی که در یک طرف خود تشکیل می‌دهد از دو قائمه کمتر باشد، آن دو خط راست اگر بینهایت امتداد داده شوند، یکدیگر را در همان طرف که مجموع دو زاویه در آن کمتر از دو قائمه است، می‌برند.

اصلهای بدیهی (بدیهیّات)

۱. چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با هم مساوی‌اند.

۲. اگر به چیزهای متساوی چیزهای متساوی افزوده شوند نتیجه‌ها با هم مساوی‌اند.

۳. اگر از چیزهای متساوی چیزهای متساوی کم شده باشند باقیمانده‌ها با هم مساوی‌اند.

۴. چیزهای قابل انطباق بر هم با هم مساوی‌اند.

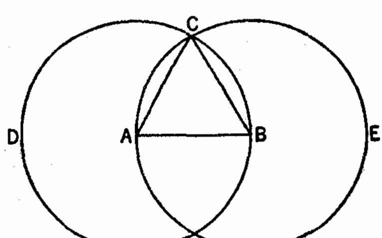
۵. کلّ بزرگتر از جزء است.

مقالهٔ I. قضیه‌ها

قضیهٔ I

مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر یک خط راست متناهی مفروض.

فرض می‌کنیم AB خط راستی متناهی باشد. پس مطلوب بنا کردن مثلثی است متساوی‌الاضلاع بر خط راست AB.



فرض می‌کنیم دایرهٔ BCD به مرکز A و شعاع AB رسم شده است؛ [اصـ.م.۳]

باز فرض می‌کنیم به مرکز B و شعاع BA دایرهٔ ACE رسم شده است؛ [اصـ.م.۳]

و C، نقطهٔ تلاقی دو دایره، به A و B وصل شده است. [اصـ.م.۱]

حال چون A مرکز دایرهٔ CDB است، AC و AB با هم برابرند. [تع.۱۵]

باز چون B مرکز دایرهٔ CAE است، BC با BA برابر است. [تع.۱۵]

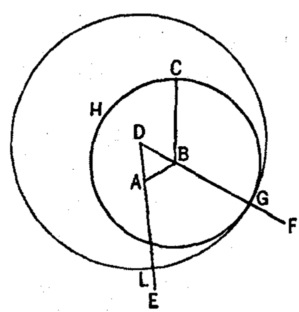
اما ثابت شده بود که CA هم با AB برابر است؛ بنابراین هر یک از خطهای راست CA و CB با AB برابر است. و چیزهای مساوی با یک چیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین CA هم با CB مساوی است. [اص.ب.۱] بنابراین سه خط راست CA، AB، و BC با یکدیگر مساوی‌اند. لذا ABC مثلثی است متساوی‌الاضلاع که بر خط راست متناهی AB بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲

مطلوب رسم خط راستی است از یک نقطهٔ مفروض، مساوی با خط راستی مفروض که آن نقطه یک سرِ آن باشد.

فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروض باشد و BC خطّ راست مفروض.



پس مطلوب رسم خط راستی است از نقطهٔ A مساوی با خط راست مفروضِ BC که A یک سَرِ آن باشد.

فرض می‌کنیم نقطهٔ A با خط راست AB به نقطهٔ B وصل شده است؛ [اص.م.۱]

و فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع DAB رسم شده است. [I.۱]

فرض می‌کنیم AE و BF امتدادهای DA و DB باشند؛ [اص.م.۲]

به مرکز B و شعاع BC دایرهٔ CGH را رسم می‌کنیم؛ [اص.م.۳]

و باز به مرکز D و شعاع DG دایرهٔ GKL را رسم می‌کنیم. [اص.م.۳]

در این صورت چون نقطهٔ B مرکز دایرهٔ CGH است، BC با BG مساوی است.

باز چون D مرکز دایرهٔ GKL است DG با DL مساوی است. و از آنجا که DA با DB مساوی است؛ بنابراین باقیماندهٔ AL با باقیماندهٔ BG مساوی است. [اص.ب.۳]

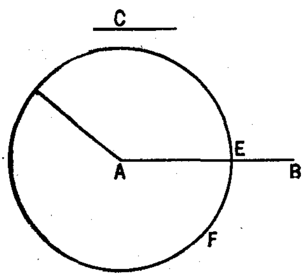
اما BC با BG مساوی بود؛ بنابراین هریک از خطهای راست AL و BC با BG مساوی می‌شود. و چیزهای مساوی با یک چیز نیز با هم مساوی‌اند؛ [اص.ب.۱]

بنابراین AL نیز با BC مساوی است. پس، از نقطهٔ مفروض A خط راست AL مساوی با خط راست مفروض BC رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳

دو خطّ راست نامساوی داده شده‌اند. مطلوب جدا کردن خط راستی است مساوی با خطّ راست کوچکتر از خطّ راست بزرگتر.



فرض می‌کنیم AB و C دو خط راست نامساوی باشند و AB بزرگتر از C باشد. پس مطلوب جدا کردن طولی است از خط بزرگتر AB مساوی با خط کوچکتر C.

فرض می‌کنیم خط راست AD از نقطهٔ A مساوی با خط راست C کشیده شده است؛ [۲.I]

و به مرکز A به شعاع AD دایرهٔ DEF رسم شده است. [اص.م.۳]

حال، چون نقطهٔ A مرکز دایرهٔ DEF است، AE با AD مساوی است. [تع.۱۵]

اما C نیز با AD مساوی است.

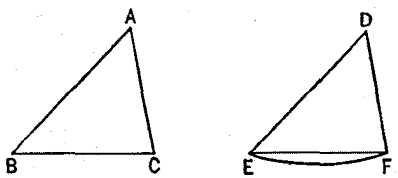
بنابراین هریک از خطهای راست AE و C با AD مساوی است؛ لذا AE نیز با C مساوی است. [اص.ب.۱]

بنابراین در دو خط راست مفروض AB و C از خط راست بزرگتر AB طول AE مساوی با خط کوچکتر C جدا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴

هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر مساوی باشند ضلعهای سوم آنها نیز با هم مساوی‌اند، در نتیجه دو مثلث متساوی و زاویه‌های دیگر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نیز نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلثی باشند که اضلاع AB و AC از یکی به ترتیب با ضلعهای DE و DF از دیگری مساوی و زاویه‌های BAC و EDF نیز با هم مساوی باشند.

می‌گوییم که ضلع BC هم با ضلع EF و در نتیجه مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است و زاویه‌های دیگر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متساوی هم‌نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند، یعنی زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE.

زیرا اگر مثلث ABC را بر مثلث DEF چنان بنهیم، که A بر D و AB بر DE قرار گیرد، نقطهٔ B نیز به علت تساوی AB و DE بر E منطبق خواهد شد.

باز وقتی AB بر DE منطبق شد، خط راست AC نیز، به علّت تساوی زاویه‌های BAC و EDF، بر DF منطبق می‌شود، و لذا C نیز بر F منطبق خواهد شد زیرا AC با DF مساوی است. اما B هم که بر E منطبق بود؛ بنابراین ضلع BC هم بر ضلع EF منطبق خواهد شد. [زیرا وقتی B بر E منطبق بود و C بر F، اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF منطبق نشود، این دو خط راست یک فضا را محصور خواهند کرد: که غیرممکن است. بنابراین BC بر EF منطبق و با آن مساوی خواهد شد]. [اص.ب.۴]

پس تمامی مثلث ABC بر تمامی مثلث DEF منطبق، و با آن مساوی خواهد شد. و بقیهٔ زاویه‌ها نیز بر بقیهٔ زاویه‌ها منطبق و با آنها مساوی خواهند شد، زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF، و زاویهٔ ACB با زاویهٔ DFE.

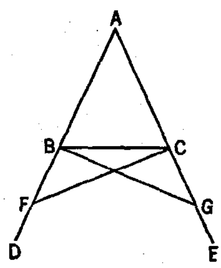
آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم.

قضیهٔ ۵

در مثلثهای متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به قاعده با هم مساوی‌اند، و اگر ساقهای متساوی امتداد داده شوند زاویه‌های زیر قاعده‌ها هم با هم مساوی‌اند.

فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الساقین با ساقهای AB و AC باشد؛ و خطهای راست BD و CE به ترتیب امتدادهای AB و AC باشند. [اص.م.۲]

می‌گوییم که زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی است، و زاویهٔ CBD با زاویهٔ BCE.



نقطهٔ دلخواه F را بر BD می‌گیریم؛ و بر AE که بزرگتر است AG را مساوی با خط کوچکتر AF جدا و F را. [۳.I] به C وصل می‌کنیم و G را به B. [اص.م.I]

در این صورت چون AF با AG مساوی است و AB با AC، و ضلعهای FA و AC نیز به ترتیب با ضلعهای GA و AB مساوی‌اند؛ لذا دو مثلث AFC و AGB، که در زاویهٔ FAG مشترک‌اند، با هم مساوی می‌شوند، و لذا قاعدهٔ FC با قاعدهٔ GB مساوی می‌شود. از تساوی همین دو مثلث زوایای متناظر آنها، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع متساوی نیز با هم مساوی خواهند شد، یعنی زاویهٔ ACF با زاویهٔ ABG و زاویهٔ AFC با زاویهٔ AGB. [۴.I]

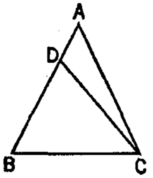
و چون تمام AF با تمام AG مساوی است، و در آنها AB مساوی است با AC، پس بقیهٔ BF با بقیهٔ CG مساوی می‌شود.

اما ثابت شده بود که FC هم با GB مساوی است؛ بنابراین دو ضلع BF و FC به ترتیب با دو ضلع CG و GB مساوی هستند؛ و زاویهٔ BFC هم با زاویهٔ CGB مساوی است، بنابراین مثلث BFC نیز با مثلث CGB مساوی خواهد شد، و بقیهٔ زاویه‌ها به ترتیب (روبه‌رو به ضلعهای متساوی) با هم مساوی می‌شوند، یعنی زاویهٔ FBC با زاویهٔ GCB، و زاویهٔ BCF با زاویهٔ CBG. از این‌رو، چون تساوی تمامی زاویهٔ ABG با تمامی زاویهٔ ACF ثابت شده بود، و در این زاویه‌ها زاویهٔ CBG با زاویهٔ BCF مساوی بود، لذا زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی می‌شود؛ و این دو زاویه زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث ABC هستند. اما تساوی زاویهٔ FBC هم با زاویهٔ GCB ثابت شده بود که زاویه‌های زیر قاعده هستند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۶

اگر در مثلثی دو زاویه با هم مساوی باشند اضلاع روبه‌رو به آنها نیز با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی است که در آن زاویهٔ ABC با زاویهٔ ACB مساوی است؛ می‌گوییم که ضلع AB نیز با ضلع AC مساوی است. زیرا اگر AB با AC مساوی نباشد، یکی از آنها بزرگتر از دیگری است.

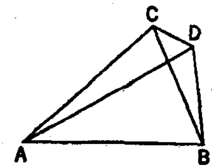
فرض می‌کنیم AB ضلع بزرگتر باشد؛ از AB طول DB را مساوی با ضلع کوچکتر AC جدا و D را به C وصل می‌کنیم. در این صورت در دو مثلث DBC و ACB چون DB با AC مساوی و CB مشترک است؛ و DB و BC به ترتیب با AC و BC مساوی‌اند و زاویهٔ DBC با زاویهٔ ACB مساوی است؛ بنابراین DC با AB و در نتیجه مثلث DBC با مثلث ACB مساوی می‌شود، یعنی مثلثِ کوچکتر با مثلثِ بزرگتر مساوی می‌شود: که نامعقول است. پس AB نامساوی با AC نیست؛ یعنی با آن مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۷

از دو سرِ خطّ راستی مفروض و در یک طرف آن، دو خطِ راست رسم شده‌اند که یکدیگر را در نقطه‌ای بریده‌اند. از دو سرِ همان خط راست (و در همان طرف) نمی‌توان دو خط راست دیگر

چنان رسم کرد که یکدیگر را در نقطهٔ دیگری ببرند و هریک با خط راست مرسومِ قبلیِ از همان سر مساوی باشد.



زیرا، اگر چنین چیزی ممکن باشد، فرض می‌کنیم دو خط راست AC و CB از دو سر خط راستِ AB رسم شده و یکدیگر را در نقطهٔ C بریده باشند، و فرض می‌کنیم دو خط راست دیگر AD و DB از دو سر همان خط راست AB و در همان طرف رسم شده‌اند و یکدیگر را در نقطهٔ دیگرِ D بریده‌اند و هر یک با خط راست مرسوم قبلی از همان سر مساوی‌اند، یعنی CA و DA که از یک سر A رسم شده‌اند با هم مساوی‌اند و CB و DB که از یک سر B رسم شده‌اند با هم؛ حال C را به D وصل می‌کنیم.

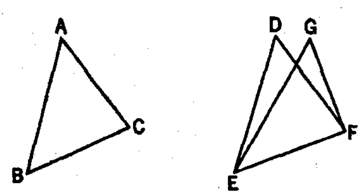
چون AC مساوی AD است، زاویهٔ ACD هم با زاویهٔ ADC مساوی است؛ [۵.I]

بنابراین زاویهٔ ADC از زاویهٔ DCB بزرگتر است؛ و لذا زاویهٔ CDB خیلی بزرگتر از زاویهٔ DCB است. باز چون CB با DB مساوی است؛ زاویهٔ CDB نیز با زاویهٔ DCB مساوی است. اما ثابت شده بود که CDB خیلی بزرگتر از DCB است: که غیرممکن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۸

اگر دو ضلع از مثلثی به ترتیب با دو ضلع از مثلثی دیگر مساوی و قاعده‌های آنها هم با هم مساوی باشند، زاویه‌های بین آن دو ضلعِ متساوی هم با یکدیگر مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF دو مثلثی باشند که دو ضلع AB و AC از اولی به ترتیب با دو ضلعِ DE و DF از دومی مساوی باشند؛ گیریم که قاعدهٔ BC با قاعدهٔ EF مساوی باشد؛ می‌گوییم که زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ EDF مساوی است.

زیرا اگر مثلث ABC را بر مثلث DEF بنهیم و نقطهٔ B را بر نقطهٔ E بگذاریم و خط راست BC را بر EF قرار دهیم، نقطهٔ C نیز بر F منطبق خواهد شد، زیرا BC مساوی است با EF.

در این صورت، وقتی BC بر EF منطبق شد، BA و AC نیز بر ED و DF منطبق خواهند شد. زیرا اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF منطبق شود و ضلعهای BA و AC بر ED و DF منطبق نشوند و به صورت EG و GF قرار گیرند، آنگاه از دو سر خط راستِ EF و در یک طرف آن خطهای راستِ متساویِ ED و EG و خطهای راست متساویِ DF و GF رسم

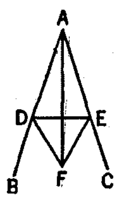
شده‌اند که یکدیگر را در دو نقطهٔ متمایز D و G بریده‌اند: که غیرممکن است. [۷.I]

بنابراین ممکن نیست که اگر قاعدهٔ BC بر قاعدهٔ EF نهاده شود، ضلعهای BA و AC بر ضلعهای ED و DF منطبق نشوند؛ لذا بر هم منطبق و با هم مساوی می‌شوند، و زاویهٔ BAC نیز بر زاویهٔ EDF منطبق و با آن مساوی می‌شود.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۹

مطلوب نصف کردن یک زاویهٔ راست‌خطِ مفروض است.



فرض می‌کنیم زاویهٔ راست‌خط BAC داده شده باشد. پس مطلوب نصف کردن آن است. نقطهٔ دلخواه D را بر AB می‌گیریم و بر AC طول AE را مساوی با AD جدا می‌کنیم؛ [۳.I]

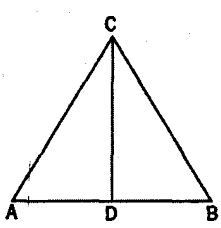
DE را وصل می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع DEF را بر DE بنا و AF را وصل می‌کنیم. می‌گوییم که AF زاویهٔ BAC را نصف کرده است. زیرا در دو مثلثِ DAF و EAF، DA و AF به ترتیب با EA و AF مساوی‌اند و قاعده‌های DF و EF نیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین زاویهٔ DAF با زاویهٔ EAF مساوی است. [۸.I]

پس زاویهٔ راست‌خط BAC به وسیلهٔ خط راست AF نصف شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۰

مطلوب نصف کردن یک خط راست متناهیِ مفروض است.



فرض می‌کنیم AB خط راست متناهی مفروض باشد.

پس مطلوب نصف کردن آن است.

فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر آن بنا شده، [۱.I]

وزاویهٔ ACB توسط خط CD نصف‌شده‌باشد؛ [۹.I]

می‌گوییم که خط راست AB در نقطهٔ D نصف شده است.

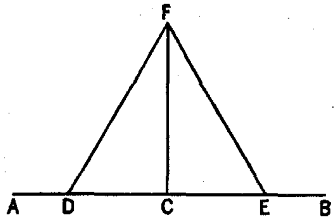
زیرا در دو مثلث ACD و BCD دو ضلع AC و CD از یکی به ترتیب با دو ضلع BC و CD از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ ACD با زاویهٔ BCD مساوی است؛ بنابراین ضلع AD با ضلع BD مساوی است. [۴.I]

لذا خط راست متناهیِ مفروض AB در نقطهٔ D نصف شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۱

مطلوب اخراج خط راستی است عمود بر خط راست مفروض از نقطهٔ مفروضی واقع بر آن.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض و C نقطهٔ داده شده‌ای بر آن باشد. پس مطلوب اخراج عمودی است از نقطهٔ C بر AB.

نقطهٔ اختیاری D را بر AC می‌گیریم و CE را مساوی با CD جدا می‌کنیم. [۳.I]

مثلث متساوی‌الاضلاع FDE را بر DE بنا می‌کنیم، [۱.I]

و F را به C وصل می‌کنیم.

می‌گوییم که خط راست FC از نقطهٔ داده شدهٔ C بر خط راست مفروض AB عمود شده است.

زیرا در دو مثلث DCF و ECF دو ضلع DC و CF از یکی به ترتیب با دو ضلع EC و CF از دیگری مساوی‌اند؛ و ضلع DF نیز با EF مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ DCF با زاویهٔ ECF مساوی است؛ [۸.I]

و این زاویه‌ها دو زاویهٔ مجاورند.

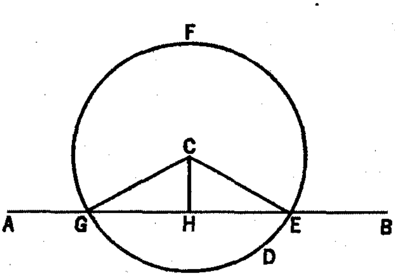
اما وقتی خط راستی بر خط راست دیگری فرود آمده باشد و دو زاویهٔ متساوی مجاور با هم بسازد، هر یک از آنها یک قائمه خواهد بود. [تع. ۱۰]

بنابراین هر یک از زاویه‌های DCF و FCE یک قائمه است. پس خط راست CF عمودی است بر خط راست مفروض AB که از نقطهٔ مفروض C بر آن اخراج شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۲

مطلوب رسم خط راستی است عمود بر یک خط راست نامتناهیِ مفروض، از نقطه‌ای مفروض ناواقع بر آن.



فرض می‌کنیم AB خط راست نامتناهی مفروض باشد، و C نقطهٔ مفروضی ناواقع بر آن. پس مطلوب رسم خط راستی است عمود بر خط راست نامتناهی مفروض AB از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر آن.

فرض می‌کنیم D نقطهٔ دلخواهی در طرف دیگر خط راست AB باشد. به‌مرکز C

و شعاع CD دایرهٔ EFG را رسم می‌کنیم [اص.م.۳]

فرض می‌کنیم EG در نقطهٔ H نصف شده است، [I.۱۰]

و G به C و E به C و H به C وصل شده‌اند. [اص.م.۱]

می‌گوییم که CH خطی است که از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر AB بر آن عمود شده است.

زیرا، در دو مثلث GCH و HCE دو ضلع GH و HC از یکی به ترتیب با دو ضلع EH و HC از دیگری مساوی‌اند، و ضلع CG با ضلع CE مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ CHG با زاویهٔ EHC مساوی است. [I.۸]

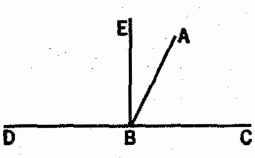
و این دو زاویه، دو زاویهٔ مجاورند. اما وقتی خط راستی بر خطی فرود آمده باشد و با آن دو زاویهٔ متساوی مجاور با هم ساخته باشد، هر یک از آنها مساوی یک زاویهٔ قائمه است و خط راست فرود آمده بر خط راستی که بر آن فرود آمده، عمود است. [تع. ۱۰]

بنابراین CH بر خط راستِ نامتناهی AB از نقطهٔ مفروض C ناواقع بر AB عمود شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۳

اگر خط راستی بر خط راستی اخراج شود و دو زاویه با آن بسازد، یا دو زاویهٔ قائمه با آن می‌سازد یا زاویه‌های مساوی دو قائمه با آن می‌سازد.



فرض می‌کنیم خط راست دلخواه AB بر خط راست CD اخراج شده و با آن زاویه‌های CBA و ABD را بسازد.

می‌گوییم که زاویه‌های CBA و ABD یا دو زاویهٔ قائمه هستند یا [مجموع آنها] مساوی با دو قائمه است.

حال، اگر زاویهٔ CBA با زاویهٔ ABD مساوی باشد، این زاویه‌ها هر دو قائمه‌اند، [تع. ۱۰]

ولی، اگر مساوی نباشد فرض می‌کنیم BE از B بر CD عمود شده باشد؛ [I.۱۱]

بنابراین زاویه‌های CBE و EBD دو قائمه هستند.

در این صورت، چون زاویهٔ CBE با دو زاویهٔ CBA و ABE مساوی است، زاویهٔ EBD را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های CBE و EBD با سه زاویهٔ CBA و ABE و EBD مساوی می‌شوند. [اص.ب.۲]

باز، چون زاویهٔ DBA با دو زاویهٔ DBE و EBA مساوی است، زاویهٔ ABC را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های DBA و ABC با سه زاویهٔ DBE و EBA و ABC مساوی‌اند. [اص.ب.۲]

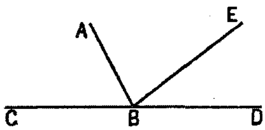
اما ثابت شده بود که زاویه‌های CBE و EBD با همین سه زاویه مساوی‌اند؛ و چیزهای مساوی با یک چیز خود نیز با یکدیگر مساوی‌اند؛ [اص.۱]

بنابراین زاویه‌های CBE و EBD نیز با زاویه‌های DBA و ABC مساوی‌اند. اما زاویه‌های CBE و EBD دو زاویهٔ قائمه‌اند؛ بنابراین زاویه‌های DBA و ABC نیز دو قائمه می‌شوند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۴

اگر از نقطه‌ای واقع بر یک خط راست دو خط راست چنان رسم شوند که در یک طرف آن خط نباشند و دو زاویهٔ مجاور مساوی دو قائمه با آن بسازند، این دو خط راست بر یک خط راست واقع‌اند.



خط راستِ AB و نقطهٔ B واقع بر آن را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم دو خط راست BC و BD در یک طرفِ AB نباشند و زاویه‌های مجاورِ ABC و ABD مساوی با دو زاویهٔ قائمه باشند. می‌گوییم که BC و BD بر یک خط راست واقع‌اند.

زیرا، اگر BD با BC بر یک خط راست واقع نباشد، فرض می‌کنیم BE با BC بر یک خط راست واقع باشد.

در این صورت، چون خط راست AB بر خط راست CBE فرود آمده است، زاویه‌های ABC و ABE مساوی با دو قائمه‌اند. [I.۱۳]

اما زاویه‌های ABC و ABD نیز مساوی با دو قائمه بودند؛ بنابراین زاویه‌های CBA و ABE با زاویه‌های CBA و ABD مساوی‌اند. [اص.م.۴ و، اص.ب.۱]

حال، زاویهٔ CBA را از هر یک از آنها کم می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های باقیماندهٔ ABE و ABD با هم مساوی‌اند [اص.ب.۳]

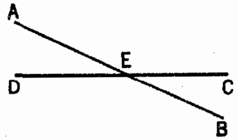
زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ بزرگتر مساوی شده: که غیرممکن است. بنابراین BE با CB بر یک خط راست واقع نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که، هیچ خط راست دیگری جز BD با آن بر یک خط راست واقع نیست. بنابراین CB با BD بر یک خط راست واقع است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۵

اگر دو خط راست یکدیگر را ببرند، زاویه‌های متقابل به رأس مساوی با هم می‌سازند.



زیرا فرض می‌کنیم خطهای AB و CD یکدیگر را در E بریده‌اند؛ می‌گوییم که زاویهٔ AEC با زاویهٔ DEB مساوی است، و زاویهٔ CEB با زاویهٔ AED. زیرا، چون خط راست AE بر خط راست CD فرود آمده و زاویه‌های CEA و AED را پدید آورده است، پس زاویه‌های CEA و AED مساوی با دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

باز چون خط راست DE بر خط راست AB فرود آمده و زاویه‌های AED و DEB را پدید آورده است، پس زاویه‌های AED و DEB مساوی دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

اما ثابت شده بود که زاویه‌های CEA و AED نیز مساوی دو قائمه‌اند؛ بنابراین زاویه‌های CEA و AED با زاویه‌های AED و DEB مساوی می‌شوند. [اصـ.۴م و، اصـ.ب.۱]

اگر زاویهٔ AED را از هر یک کم کنیم، زاویهٔ باقیماندهٔ CEA با زاویهٔ باقیماندهٔ BED مساوی می‌شود. [اصـ.ب.۳]

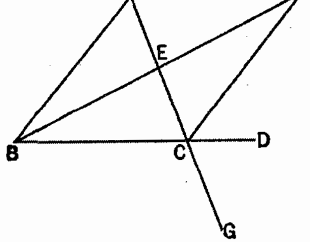
به همین طریق می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های CEB و DEA نیز با هم مساوی‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

[فرع. از این قضیه چنین بر می‌آید که اگر دو خط راست یکدیگر را ببرند، [مجموع] زاویه‌هایی که در نقطهٔ تقاطع می‌سازند مساوی است با چهار قائمه.]

قضیهٔ ۱۶

در هر مثلث اگر یکی از ضلعها را امتداد دهیم زاویهٔ خارجیِ حاصل، از هر یک از زاویه‌های داخلیِ غیرمجاورِ با آن بزرگتر است.



در مثلث ABC ضلع BC را تا D امتداد می‌دهیم؛ می‌گوییم که زاویهٔ خارجی ACD از هر یک از زاویه‌های داخلیِ غیرمجاورِ CBA و BAC بزرگتر است.

فرض می‌کنیم نقطهٔ E وسط AC باشد،[۱۰.I] E را به B وصل می‌کنیم و بر امتداد آن نقطهٔ F را چنان می‌گیریم که BE مساوی EF باشد،[۳.I] C را به F وصل می‌کنیم. [اصـ.م.۱]

و AC را تا G امتداد می‌دهیم. [اصـ.م.۲]

در این صورت در دو مثلث AEB و FEC، دو ضلع AE و BE از یکی به ترتیب با دو ضلع EC و EF از دیگری مساوی‌اند و زاویه‌های متقابل به رأس AEB و FEC با هم مساوی‌اند، [۱۵.I]

لذا AB با FC مساوی و این دو مثلث با هم مساوی و در نتیجه بقیّهٔ زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم مساوی می‌شوند، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به اضلاع مساوی با هم مساوی می‌شوند، بنابراین زاویهٔ ABE با زاویهٔ CFE مساوی می‌شود. [۴.I]

اما زاویهٔ ECD بزرگتر از زاویهٔ ECF است؛ [اصـ.ب.۵]

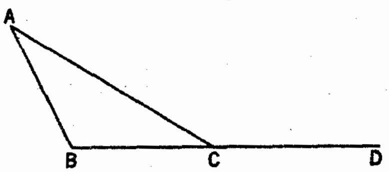
در نتیجه زاویهٔ ACD از زاویهٔ BAE بزرگتر است. به همین طریق اگر BC را نصف می‌کردیم، ثابت می‌شد که زاویهٔ BCG، یعنی زاویهٔ ACD، [۱۵.I]

از زاویهٔ ABC بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۷

در هر مثلث مجموع هر دو زاویه کمتر از دو قائمه است.



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم؛ می‌گوییم که مجموع هر دو زاویه از این مثلث از دو قائمه کمتر است. زیرا، فرض می‌کنیم BC را تا نقطهٔ D امتداد داده‌ایم. [اصـ.م.۲]

در این صورت، چون زاویهٔ ACD زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، از هر یک از زاویه‌های درونی غیرمجاور ABC بزرگتر است. [۱۶.I]

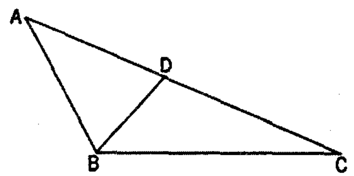
حال زاویهٔ ACB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های ACD، و ACB از زاویه‌های ABC و BCA بزرگترند. اما ACD و ACB مساوی دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

بنابراین ABC و BCA از دو قائمه کمترند. به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که BAC و ACB نیز از دو قائمه کمترند، و زاویه‌های CAB و ABC هم کمتر از دو قائمه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۸

در هر مثلث ضلع بزرگتر روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر است.



فرض می‌کنیم در مثلث ABC ضلع AC بزرگتر از AB است. می‌گوییم که زاویهٔ ABC نیز از زاویهٔ BCA بزرگتر است.

چون AC بزرگتر از AB است، فرض می‌کنیم AD را مساوی با AB جدا کرده‌ایم، [۳.I]

B را به D وصل می‌کنیم.

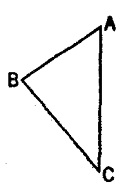
در این صورت، چون زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث BCD است از زاویهٔ داخلی غیرمجاور DCB بزرگتر است. [۱۶.I]

اما زاویهٔ ADB با زاویهٔ ABD مساوی است، زیرا ضلع AB با ضلع AD مساوی است. بنابراین زاویهٔ ABD نیز از زاویهٔ ACB بزرگتر است، لذا زاویهٔ ABC به طریق اولی بزرگتر از زاویهٔ ACB است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۱۹

در هر مثلث زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی باشد که در آن زاویهٔ ABC از زاویهٔ BCA بزرگتر است؛ می‌گوییم ضلع AC نیز از ضلع AB بزرگتر است.

زیرا، اگر بزرگتر از AC نباشد یا با AB مساوی است یا از آن کوچکتر است. اما AC نمی‌تواند مساوی با AB باشد، زیرا در این صورت زاویهٔ ABC نیز باید با زاویهٔ ACB مساوی باشد، [۵.I]

که نیست؛ بنابراین AC مساوی با AB نیست.

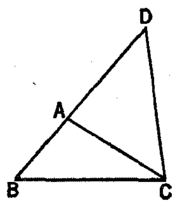
AC کوچکتر از AB هم نیست، زیرا در این صورت زاویهٔ ABC باید کوچکتر از زاویهٔ ACB باشد؛ [۱۸.I]

که نیست. بنابراین AC نه با AB مساوی است، و نه کوچکتر از آن، پس باید بزرگتر از آن باشد.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۰

در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است.



فرض می‌کنیم ABC مثلثی داده شده باشد. می‌گوییم مجموع هر دو ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است، یعنی مجموع BA و AC از BC بزرگتر است، مجموع AB و BC از AC بزرگتر است، و مجموع BC و CA از AB بزرگتر است. زیرا، فرض می‌کنیم BA را امتداد داده و بر آن DA را مساوی CA جدا، و DC را وصل کرده‌ایم. در این صورت، چون DA مساوی است با AC، زاویهٔ ADC نیز با زاویهٔ ACD مساوی است؛ [۵.I]

بنابراین زاویهٔ BCD از زاویهٔ ADC بزرگتر است، [اصـ.ب.۵]

و چون DCB مثلثی است که زاویهٔ BCDی آن از زاویهٔ BDC بزرگتر است، و زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است، [۱۹.I]

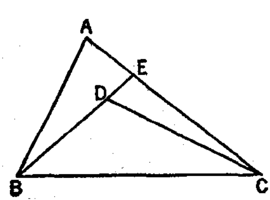
بنابراین DB از BC بزرگتر است. اما DA با AC مساوی است؛ لذا مجموع BA و AC از BC بزرگتر است.

همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که مجموع AB و BC نیز از CA بزرگتر است و مجموع BC و CA از AB.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۱

اگر از دو سر یک ضلع مثلثی و در یک طرف آن دو خط راست چنان رسم کنیم که یکدیگر را در داخل مثلث ببرند، مجموع این دو خط راست از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچکتر ولی زاویهٔ بین آن دو از زاویهٔ سوم مثلث بزرگتر است.



در مثلث ABC از دو رأس B و C دو خط راست BD و DC چنان رسم شده‌اند که یکدیگر را درون مثلث بریده‌اند. می‌گوییم که مجموع BD و DC از مجموع دو ضلع BA و AC کوچکتر ولی زاویهٔ BDC از زاویهٔ BAC بزرگتر است.

زیرا، فرض می‌کنیم که امتداد BD ضلع AC را در E بریده است. چون در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است، [۲۰.I]

بنابراین در مثلث ABE مجموع AB و AE از BE بزرگتر است.

حال EC را به هریک اضافه می‌کنیم؛ لذا مجموع BA و AC از مجموع BE و EC بزرگتر است.

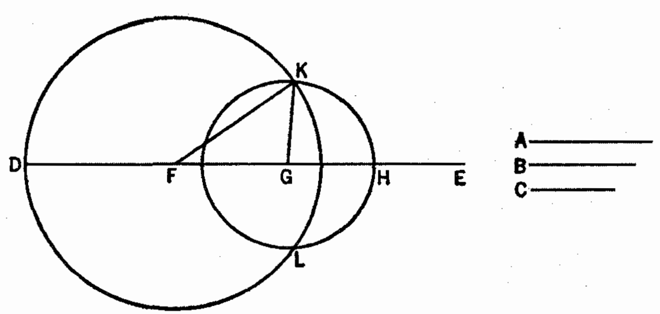
باز، چون در مثلث CED مجموع دو ضلع CE و ED از CD بزرگتر است، DB را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مجموع CE و EB از مجموع CD و DB بزرگتر است. اما ثابت شده بود که مجموع BA و AC از مجموع BE و EC بزرگتر است؛ بنابراین مجموع BA و AC به طریق اولی از مجموع BD و DC بزرگتر است.

باز، چون در هر مثلث زاویهٔ خارجی از زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگتر است، [I.۱۶] بنابراین در مثلث CDE، زاویهٔ خارجی BDC از زاویهٔ داخلی CED بزرگتر است. به همین دلیل در مثلث ABE نیز زاویهٔ خارجی CEB از زاویهٔ BAC بزرگتر است. اما ثابت شده بود که زاویهٔ BDC از زاویهٔ CEB بزرگتر است؛ بنابراین زاویهٔ BDC از زاویهٔ BAC بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۲

مطلوب رسم مثلثی است که ضلعهای آن با سه خط راست مفروض مساوی باشند: پس لازم است که مجموع هر دو خط راست از این سه خط راست از سومی بزرگتر باشد. [I.۲۰]



فرض می‌کنیم A، B، و C سه خط راست مفروض باشند و مجموع هر دو خط از این سه خط از سومی بزرگتر باشد یعنی A و B بزرگتر از C باشد؛ A و C بزرگتر از B؛ B و C بزرگتر از A؛ پس مطلوب رسم مثلثی است با خطهای راستی مساوی با A، B، و C.

فرض می‌کنیم خط راست DE به منتهای D و به طول بینهایت در امتداد E باشد، بر آن طول DF را مساوی با A جدا می‌کنیم، و FG را مساوی با B، و GH را مساوی با C. [I.۳]

به مرکز F و شعاع FD دایرهٔ DKL را رسم می‌کنیم؛ باز به مرکز G و شعاع GH دایرهٔ KLH را می‌کشیم؛ و KF و KG را وصل می‌کنیم.

حال می‌گوییم که مثلث KFG مثلثی است که با سه خط راست مساوی با A، B، و C رسم شده است. زیرا، چون F مرکز دایرهٔ DKL است، FD مساوی است با FK. اما FD

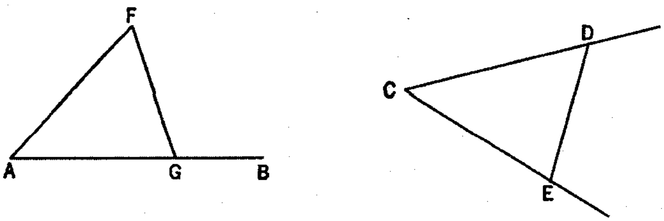
مساوی است با A؛ پس KF نیز مساوی با A است. باز، چون G مرکز دایرهٔ LKH است، GH مساوی است با GK. اما GH مساوی است با C؛ پس KG نیز مساوی است با C. و FG نیز مساوی با B است؛ بنابراین سه خط راست KF، FG، و GK مساوی با سه خط راست A، B، و C هستند.

لذا با سه خط راست KF، FG، و GK، که مساوی با سه خط راست مفروض A، B، و C هستند، مثلث KFG رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۳

مطلوب رسم زاویهٔ راست‌خطّی است بر خط راستی مفروض از نقطه‌ای واقع بر آن که با زاویهٔ راست خطّ مفروضی مساوی باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض باشد و A نقطه‌ای بر آن، و زاویهٔ DCE زاویهٔ راست‌خطِّ مفروض؛ پس مطلوب رسم زاویهٔ راست‌خطّی است به ضلع AB و به رأس A که با زاویهٔ راست‌خطِّ مفروض DCE مساوی باشد.

بر خطهای راست CD و CE به ترتیب نقاط دلخواه D، E را اختیار، و DE را وصل می‌کنیم، و با سه خط راست مساوی با سه خط راست CD، DE، و CE مثلث AFG را رسم می‌کنیم به طوری که CD مساوی با AF باشد، CE مساوی با AG، و DE مساوی با FG. [۲۲.I]

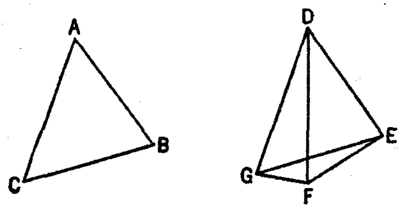
در این صورت، چون دو ضلع DC و CE به ترتیب با دو ضلعِ FA و AG مساوی‌اند، و قاعدهٔ DE با قاعدهٔ FG مساوی است، پس زاویهٔ DCE با زاویهٔ FAG مساوی است.[۸.I]

بنابراین بر خط راست مفروضِ AB و در نقطهٔ A بر آن، زاویهٔ راست‌خطِّ FAG مساوی با زاویهٔ راست‌خطِّ مفروضِ DCE رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۴

هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ولی زاویهٔ بین آنها در یکی از زاویهٔ نظیرش در دیگری بزرگتر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر هم در یکی از ضلع متناظرش در دیگری بزرگتر است.



گیریم ABC و DEF دو مثلث باشند که در آنها AB و AC به ترتیب با DE و DF مساوی باشند و زاویهٔ رأس A بزرگتر از زاویهٔ رأس D باشد. می‌گوییم که قاعدهٔ BC نیز از قاعدهٔ EF بزرگتر است.

زیرا چون زاویهٔ BAC بزرگتر از زاویهٔ EDF است، از نقطهٔ D واقع بر خط راست DE زاویهٔ EDG به ضلع DE را مساوی با زاویهٔ BAC رسم می‌کنیم. [۲۳.I]

DG را مساوی با یکی از دو ضلع AC یا DF جدا، و EG و FG را وصل می‌کنیم. در این صورت چون AB مساوی با DE و AC مساوی با DG است، دو ضلع BA و AC به ترتیب با دو ضلع ED و DG مساوی می‌شوند، و زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDG مساوی است؛ بنابراین قاعدهٔ BC با قاعدهٔ EG مساوی می‌شود. [۴.I]

باز، چون DF با DG مساوی است، و زاویهٔ DGF نیز با زاویهٔ DFG مساوی است. [۵.I]

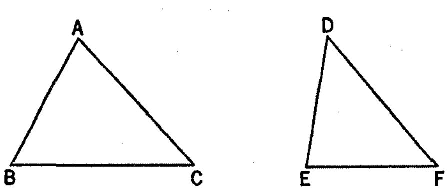
بنابراین زاویهٔ DFG از زاویهٔ EGF بزرگتر، و در نتیجه زاویهٔ EFG به طریق اولی از زاویهٔ EGF بزرگتر می‌شود، و در مثلث EFG، زاویهٔ بزرگتر روبه‌رو به ضلع بزرگتر است، [۱۹.I]

و ضلع EG نیز از EF بزرگتر می‌شود. اما EG مساوی است با BC. بنابراین BC نیز از EF بزرگتر است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۵

هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند ولی قاعدهٔ یکی از قاعدهٔ دیگری بزرگتر باشد، زاویهٔ بین دو ضلع متساوی نیز در یکی از زاویهٔ نظیرش در دیگری بزرگتر است.



در دو مثلث ABC و DEF فرض می‌کنیم ضلعهای AB و AC به ترتیب با دو ضلع DE و DF مساوی باشند و قاعدهٔ BC بزرگتر از قاعدهٔ EF باشد. می‌گوییم که زاویهٔ BAC نیز از زاویهٔ

EDF بزرگتر است. زیرا اگر BAC بزرگتر از EDF نباشد یا مساوی با آن است و یا کوچکتر از آن. اما زاویهٔ BAC مساوی با زاویهٔ EDF نیست؛ زیرا در این صورت قاعدهٔ BC نیز با قاعدهٔ EF مساوی خواهد شد، [۴.I]

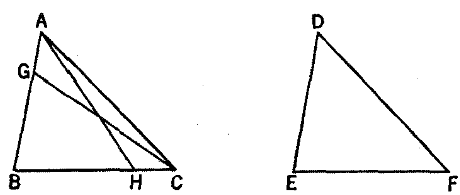
که چنین نیست، بنابراین زاویهٔ BAC مساوی با زاویهٔ EDF نیست. زاویهٔ BAC کوچکتر از زاویهٔ EDF هم نیست؛ زیرا در آن صورت قاعدهٔ BC نیز کوچکتر از قاعدهٔ EF خواهد شد، [۲۴.I]

که چنین نیست؛ بنابراین زاویهٔ BAC نه مساوی با زاویهٔ EDF است و نه کوچکتر از آن؛ پس بزرگتر از آن است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۶

هرگاه در دو مثلث دو زاویه از یکی به ترتیب با دو زاویه از دیگری مساوی باشند و ضلع واقع بین دو زاویهٔ مساوی یا مقابل به یکی از زاویه‌های مساوی از یکی با ضلع نظیرش از دیگری مساوی باشد بقیهٔ اضلاع با هم و زاویه‌های باقیمانده نیز با هم مساوی می‌شوند.



در دو مثلث ABC و DEF فرض می‌کنیم دو زاویهٔ ABC و BCA به ترتیب با دو زاویهٔ DEF و EFD مساوی باشند و یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری مساوی باشد؛

ابتدا فرض می‌کنیم ضلعهای واقع بین زاویه‌های مساوی، یعنی BC و EF، متساوی باشند. می‌گوییم که بقیهٔ ضلعهای دو مثلث نیز به ترتیب با هم مساوی می‌شوند، یعنی AB با DE و AC با DF؛ و زاویه‌های دیگر یعنی، BAC با EDF. زیرا اگر AB مساوی با DE نباشد یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم AB بزرگتر باشد، BG را مساوی با DE جدا و GC را وصل می‌کنیم. در دو مثلث GBC و DEF دو ضلع GB و BC از یکی به ترتیب با دو ضلع DE و EF از دیگری مساوی‌اند و زاویهٔ GBC با زاویهٔ DEF مساوی است؛ بنابراین قاعدهٔ GC با قاعدهٔ DF مساوی می‌شود، و لذا این دو مثلث با هم مساوی و زاویه‌های باقیمانده، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نیز با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

بنابراین زاویهٔ GCB با زاویهٔ DFE مساوی می‌شود، اما زاویهٔ DFE بنا به فرض با زاویهٔ BCA مساوی است؛ بنابراین زاویهٔ BCG با زاویهٔ BCA مساوی می‌شود، زاویهٔ کوچکتر با زاویهٔ

بزرگتر: که غیرممکن است. لذا AB نامساوی با DE نبوده و با آن مساوی است. اما BC نیز با EF مساوی است؛ پس دو ضلع AB و BC به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویهٔ ABC با زاویهٔ DEF مساوی است. پس، قاعدهٔ AC با قاعدهٔ DF مساوی و زاویهٔ سوم BAC با زاویهٔ سوم EDF مساوی می‌شود. [۴.I]

باز، فرض می‌کنیم ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های مساوی، مثلاً AB و DE متساوی باشند؛ باز می‌گوییم که بقیهٔ اضلاع با هم مساوی‌اند، یعنی AC با DF و BC با EF. و نیز زاویهٔ BAC با زاویهٔ EDF مساوی است. زیرا اگر BC با EF مساوی نباشد یکی از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم، چنین چیزی ممکن، و BC بزرگتر باشد، BH را مساوی با EF جدا، و A را به H وصل می‌کنیم. در این صورت چون دو ضلع AB و BH به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز مساوی‌اند، بنابراین قاعدهٔ AH با قاعدهٔ DF، و در نتیجه مثلث ABH با مثلث DEF مساوی است، و زاویه‌های دیگر، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی با هم مساوی‌اند؛[۴.I]

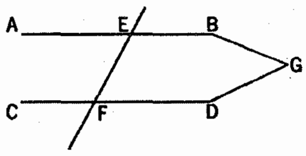
بنابراین زاویهٔ BHA با زاویهٔ EFD مساوی است. اما زاویهٔ EFD با زاویهٔ BCA مساوی بود؛ لذا در مثلثِ AHC زاویهٔ خارجی BHA با زاویهٔ داخلی غیرمجاور BCA مساوی می‌شود: که غیرممکن است. [۱۶.I]

بنابراین BC با EF نامساوی نیست و بنابراین با آن مساوی است. اما AB نیز با DE مساوی است؛ پس، دو ضلعِ AB و BC به ترتیب با دو ضلع DE و EF مساوی‌اند و زاویه‌های بین آنها نیز با هم مساوی‌اند؛ بنابراین قاعدهٔ AC با قاعدهٔ DF مساوی است، و مثلثِ ABC با مثلث DEF، و زاویه‌های دیگر BAC و EDF متساوی‌اند. [۴.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۷

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید و با آنها دو زاویهٔ متبادل داخلی متساوی بسازد، آن دو خط راست متوازی‌اند.



زیرا، فرض می‌کنیم خط راست EF بر دو خط راست AB و CD فرود آمده باشد و زاویه‌های متبادلِ داخلیِ AEF و EFD متساوی بسازد. می‌گوییم AB با CD موازی است. زیرا اگر موازی نباشند وقتی آنها را امتداد دهیم یا در امتداد B و D، یا در امتداد A و C یکدیگر را می‌برند. فرض می‌کنیم این دو خط راست در امتداد B و D یکدیگر را در G ببرند.

در این صورت، در مثلث GEF زاویهٔ خارجی AEF با زاویهٔ داخلی غیرمجاور EFG مساوی می‌شود: که غیرممکن است. [۱۶.I]

بنابراین AB و CD یکدیگر را در امتداد B و D نمی‌برند. به همین طریق می‌توان ثابت کرد که در امتداد A و C هم یکدیگر را نمی‌برند.

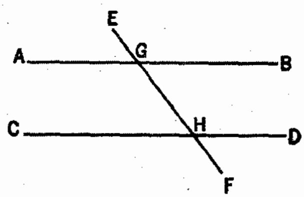
اما خطهایِ راستی که در هیچ طرفی یکدیگر را نبرند با هم موازی‌اند؛ [تع. ۲۳]

بنابراین AB با CD موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۸

اگر خط راستی بر دو خط راست فرود آید، و دو زاویهٔ متقابل خارجی و داخلی متساوی یا دو زاویهٔ متقابل داخلی مساوی با دو زاویهٔ قائمه، با آنها بسازد، آن دو خط راست با یکدیگر موازی خواهند بود.



فرض می‌کنیم که خط راست EF بر دو خط راست AB و CD فرود آمده و زاویه‌های متقابل خارجی و داخلی EGB و GHD متساوی، یا زاویه‌های متقابل داخلی BGH و GHD مساوی با دو قائمه پدید آورده است. می‌گوییم AB با CD موازی است.

زیرا چون زاویهٔ EGB با زاویهٔ GHD مساوی است و زاویهٔ EGB با زاویهٔ AGH، [۱۵.I]

پس زاویهٔ AGH نیز با زاویهٔ GHD مساوی است، که دو زاویهٔ متبادلِ داخلی‌اند. بنابراین AB با CD موازی است. [۲۷.I]

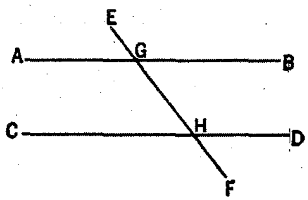
باز چون زاویه‌های BGH و GHD مساوی با دو قائمه‌اند و زاویه‌های AGH و BGH نیز مساوی با دو قائمه‌اند، [۱۳.I]

زاویه‌های AGH و BGH با زاویه‌های BGH و GHD مساوی‌اند. زاویهٔ BGH را از هر دو کم می‌کنیم. بنابراین زاویهٔ باقیماندهٔ AGH با زاویهٔ باقیماندهٔ GHD مساوی است و این دو زاویه متبادلِ داخلی هستند؛ بنابراین AB با CD موازی است. [۲۷.I]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۲۹

اگر خط راستی بر دو خط راستِ متوازی فرود آید، زاویه‌های متبادلِ داخلیِ متساوی، زاویه‌های متقابلِ خارجی و داخلیِ متساوی، و زاویه‌های متقابل داخلی مساوی با دو قائمه با آنها می‌سازد.



فرض می‌کنیم خط راست EF بر خطهای راست متوازی AB و CD فرود آمده است؛ می‌گوییم که زاویه‌های متبادلِ داخلی AGH و GHD با هم مساوی‌اند و زاویه‌های متقابلِ خارجی و داخلی EGB و GHD با هم؛ و زاویه‌های متقابل داخلی یعنی، BGH و GHD مساوی با دو قائمه‌اند.

زیرا، اگر زاویهٔ AGH با زاویهٔ GHD مساوی نباشد، یکی از آنها از دیگری بزرگتر است. فرض می‌کنیم AGH زاویهٔ بزرگتر باشد. زاویهٔ BGH را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مجموع زاویه‌های AGH و BGH از مجموع زاویه‌های BGH و GHD بزرگتر است. اما [مجموع] زاویه‌های AGH و BGH مساوی با دو قائمه است. [۱۳.I]

بنابراین [مجموع] زاویه‌های BGH و GHD کمتر از دو قائمه می‌شود. اما اگر خطهای راست را تا بینهایت امتداد دهیم، یکدیگر را در طرفی که مجموع زاویه‌ها کمتر از دو قائمه است می‌برند. [اصـ.م.۵]

بنابراین اگر AB و CD تا بینهایت امتداد داده شوند یکدیگر را خواهند برید. اما یکدیگر را نمی‌برند، زیرا بنا به فرض با هم موازی‌اند. بنابراین زاویهٔ AGH با زاویهٔ GHD نامساوی نیست، و لذا با هم مساوی‌اند.

باز زاویهٔ AGH با زاویهٔ EGB مساوی است؛ [۱۵.I]

بنابراین زاویهٔ EGB نیز با زاویهٔ GHD مساوی است. [اصـ.ب.۱]

حال زاویهٔ BGH را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین زاویه‌های EGB و BGH با زاویه‌های BGH و GHD مساوی می‌شوند. [اصـ.ب.۲]

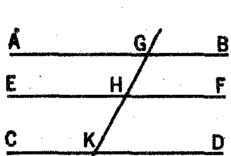
اما زاویه‌های EGB و BGH مساوی با دو قائمه‌اند؛ [۱۳.I]

بنابراین زاویه‌های BGH و GHB نیز مساوی با دو قائمه می‌شوند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۰

خطهای راست موازی با یک خط راست با هم موازی‌اند.



فرض می‌کنیم هر یک از خطهای راست AB و CD با خط راست EF موازی باشد؛ می‌گوییم که AB هم با CD موازی است. زیرا فرض می‌کنیم خط راست GK بر آنها فرود آمده باشد. در این صورت، چون خط راست GK بر خطهای

راست AB و EF فرود آمده است، پس زاویهٔ AGK با زاویهٔ GHF مساوی است. [۲۹.I]

باز، چون خط راست GK بر خطهای راست EF و CD فرود آمده است، پس زاویهٔ GHF با زاویهٔ GKD مساوی است. [۲۹.I]

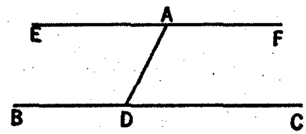
اما زاویهٔ AGK با زاویهٔ GHF مساوی بود؛ بنابراین زاویهٔ AGK نیز با زاویهٔ GKD مساوی است؛ [اصـ.ب.۱]

و این دو زاویه، متبادل داخلی هستند. لذا AB با CD موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۱

از نقطهٔ مفروض خط راستی به موازات خط راست مفروضی بکشید.



فرض می‌کنیم A نقطهٔ مفروض باشد، و BC خط راست مفروض. پس مطلوب رسم خط راستی است از نقطهٔ A به موازات خط راست BC.

نقطهٔ دلخواه D را بر BC می‌گیریم و A را به D وصل می‌کنیم. بر خط راست AD و از نقطهٔ A واقع بر آن زاویهٔ DAE را مساوی با زاویهٔ ADC رسم می‌کنیم؛ [۲۳.I]

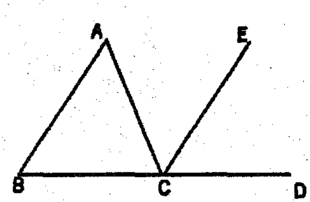
و فرض می‌کنیم AF در امتداد EA کشیده شده است. در این صورت، چون AD دو خط راست BC و EF را بریده و زاویه‌های متبادلِ داخلی متساوی EAD و ADC را درست کرده است، لذا EAF با BC موازی است. [۲۷.I]

بنابراین از نقطهٔ مفروضِ A خط راست EAF موازی با خط راست مفروضِ BC رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۲

در هر مثلث، اگر یک ضلع را امتداد دهیم، زاویهٔ خارجی حاصل با دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن مساوی است، و سه زاویهٔ داخلی مثلث برابر با دو قائمه است.



مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ضلع BC را تا D امتداد می‌دهیم. می‌گوییم که زاویهٔ خارجی ACD با دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن، یعنی CAB و ABC، مساوی است و سه زاویهٔ داخلی ABC، BCA، و CAB مساوی با دو قائمه‌اند.

زیرا، CE را از C به موازات AB رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

چون AB موازی با CE است و AC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های متبادلِ داخلیِ BAC و ACE با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

باز، چون AB موازی است با CE و BD بر آنها فرود آمده است دو زاویهٔ متقابل خارجی و داخلی ECD و ABC با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

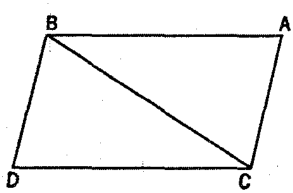
اما ثابت شده بود که زاویهٔ ACE نیز با زاویهٔ BAC مساوی است؛ بنابراین تمامی زاویهٔ ACD با دو زاویهٔ غیرمجاور داخلی BAC و ABC مساوی است. حال، زاویهٔ ACB را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین زاویه‌های ACD و ACB با سه زاویهٔ ABC، BCA، و CAB مساوی می‌شوند. اما زاویه‌های ACD و ACB مساوی با دو قائمه‌اند. [۱۳.I]

بنابراین زاویه‌های ABC، BCA، و CAB نیز مساوی با دو قائمه‌اند.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۳

خطهای راست هم جهت و اصل به دو سر خطهای راست متساوی و متوازی هم جهت، خود نیز متساوی و متوازی‌اند.



فرض می‌کنیم که AB و CD متساوی و متوازی و هم جهت هستند. خطهای راست هم جهت AC و BD را به ترتیب به دو سر آنها وصل می‌کنیم. می‌گوییم AC و BD نیز متساوی و متوازی‌اند. B را به C وصل می‌کنیم. چون AB با CD موازی و BC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های متبادل داخلی ABC و BCD با هم مساوی می‌شوند. [۲۹.I]

حال در دو مثلث ABC و BCD، AB با CD مساوی و BC در هر دو مشترک و زاویهٔ ABC با زاویهٔ BCD مساوی است، بنابراین قاعدهٔ BD با قاعدهٔ AC مساوی می‌شود، و مثلث ABC با مثلث DCB؛ در نتیجه زاویه‌های دیگر، یعنی زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای متساوی نظیر به نظیر با هم مساوی می‌شوند. [۴.I]

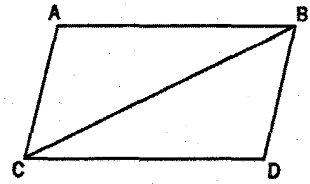
بنابراین زاویهٔ ACB با زاویهٔ CBD مساوی می‌شود. و چون خط راست BC بر خطهای راست AC و BD فرود آمده و زاویه‌های متبادل داخلی متساوی درست کرده است، پس AC با BD موازی است. [۲۷.I]

و ثابت شده بود که با آن مساوی هم هست.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۴

در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی، ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم. و قطر ناحیه را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند.



فرض می‌کنیم $ACDB$ یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی باشد و BC قطر آن. می‌گوییم در این متوازی‌الاضلاع ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روبه‌رو با هم؛ و قطر BC، ناحیه را نصف می‌کند.

زیرا، چون AB با CD موازی و خط راست BC بر آنها فرود آمده است زاویه‌های متبادلِ داخلیِ ABC و BCD با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

باز، چون AC با BD موازی و BC بر آنها فرود آمده است، زاویه‌های ACB و CBD با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

بنابراین در دو مثلث ABC و DCB دو زاویهٔ ABC و BCA از یکی به ترتیب با دو زاویهٔ DCB و CBD از دیگری با هم مساوی‌اند و ضلع BC در هر دو مشترک است، پس این دو مثلث با هم مساوی می‌شوند و نیز ضلعها و زاویه‌های دیگر به ترتیب با هم مساوی می‌شوند؛ [۲۶.I]

یعنی ضلع AB با ضلع CD مساوی می‌شود و AC با BD، و زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ CDB مساوی می‌شود. و چون زاویهٔ ABC با زاویهٔ BCD، و زاویهٔ CBD با زاویهٔ ACB مساوی است، تمامی زاویهٔ ABD با تمامی زاویهٔ ACD مساوی خواهد شد. [اص.ب.۲]

اما ثابت شده بود که زاویهٔ BAC نیز با زاویهٔ CDB مساوی است. بنابراین در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی ضلعهای روبه‌رو با هم مساوی‌اند، و زاویه‌های روبه‌رو با هم.

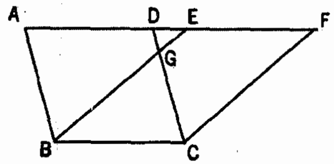
حال می‌گوییم که قطر ناحیه‌ها را نیز نصف می‌کند. زیرا در بالا ثابت کردیم اجزای مثلث ABC با اجزای مثلث DCB مساوی، و در نتیجه خود آنها با هم مساوی‌اند. [۴.I]

بنابراین قطر BC متوازی‌الاضلاع $ACDB$ را به دو قسمت متساوی تقسیم کرده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۵

متوازی‌الاضلاعهایی که یک قاعده داشته باشند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر یک خط راست واقع باشند با هم مساوی‌اند.



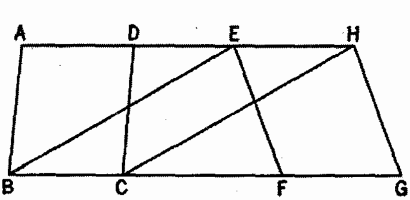
فرض می‌کنیم دو متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و $EBCF$ بر یک قاعدهٔ BC هستند و ضلعهای AD و EF از آنها بر یک خط AF واقع‌اند. می‌گوییم که $ABCD$ با $EBCF$ مساوی است.

زیرا، چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است، پس AD با BC مساوی است. [۳۴.I]
به همین دلیل هم EF با BC مساوی است. لذا AD نیز با EF مساوی است؛ [اصـ.ب.۱]
و DE مشترک است؛ بنابراین تمام AE با تمام DF مساوی است. [اصـ.ب.۲]
اما AB نیز با DC مساوی است؛ [۳۴.I]
بنابراین در دو مثلث EAB و FDC دو ضلع EA و AB به ترتیب با دو ضلع FD و DC مساوی‌اند، و زاویهٔ FDC با زاویهٔ EAB متبادل داخلی و خارجی و در نتیجه با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]
لذا قاعدهٔ EB با قاعدهٔ FC مساوی است و مثلث ABE با مثلث FDC. [۴.I]
حال مثلث DGE را از هر دو کم می‌کنیم، بنابراین ذوزنقهٔ باقیماندهٔ $ABGD$ با ذوزنقهٔ باقیماندهٔ $EGCF$ مساوی است. [اصـ.ب.۳]
مثلث GBC را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین تمام متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با تمام متوازی‌الاضلاع $EBCF$ مساوی می‌شود. [اصـ.ب.۲]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۶

متوازی‌الاضلاعهایی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست واقع باشند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها نیز بر یک خط راست واقع باشند با هم مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم $ABCD$ و $EFGH$ متوازی‌الاضلاعهایی باشند با قاعده‌های متساوی BC و FG که مطابق صورت قضیه رسم شده‌اند. می‌گوییم $ABCD$ با $EFGH$ مساوی است.

زیرا فرض می‌کنیم B به E وصل شده است و C به H. در این صورت، چون BC با FG مساوی است و FG با EH، BC نیز با EH مساوی است. [اصـ.ب.۱]
اما این دو خط راست متوازی نیز هستند و EB و HC آنها را به هم وصل می‌کنند؛ اما خطهای راست هم‌جهت و اصل به دو سر خطهای راست متساوی و متوازی هم‌جهت خود نیز

متساوی و متوازی‌اند. [۳۳.I]

بنابراین $EBCH$ متوازی‌الاضلاع است، [۳۴.I]

و با $ABCD$ مساوی؛ زیرا قاعده‌های آنها یکی هستند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر یک خط راست قرار دارند. [۳۵.I]

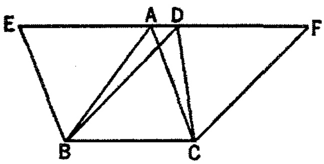
به همین دلیل $EFGH$ نیز با همان $EBCH$ مساوی است؛ [۳۵.I]

لذا متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نیز با $EFGH$ مساوی است. [اصـ.ب.۱]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۷

مثلثهایی که یک قاعده داشته باشند و رأسهای روبه‌رو به قاعده در آنها بر خط راستی موازی با قاعده واقع باشند با هم مساوی[1] اند.



فرض می‌کنیم ABC و DBC مثلثهایی با یک قاعدهٔ BC هستند که رأسهای A و D در آنها بر خط AD موازی با BC واقع‌اند. می‌گوییم که مثلثهای ABC و DBC متساوی‌اند. AD را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا خطهای مرسوم از B و C به موازات AC و BD را به ترتیب در نقطه‌های E و F ببرند. [۳۱.I]

در این صورت شکلهای $EBCA$ و $DBCF$ متوازی‌الاضلاعهای متساوی‌اند، زیرا یک قاعدهٔ BC دارند و ضلعهای موازی با قاعده در آنها بر خط EF، موازی با BC، قرار دارند. [۳۵.I]

به علاوه مثلث ABC نصف متوازی‌الاضلاع $EBCA$ است، زیرا قطر AB آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

و مثلث DBC نیز نصف متوازی‌الاضلاع $DBCF$ است، زیرا قطر CD آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

[اما نصفهای چیزهای متساوی، با هم مساوی‌اند]. بنابراین مثلث ABC با مثلث DBC مساوی است.

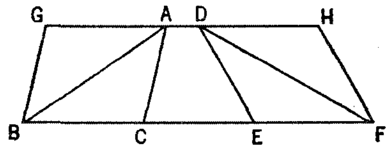
آنچه می‌خواستیم.

---

۱. در اینجا منظور از تساوی دو مثلث، تساوی مساحتهای آنهاست.ـم.

قضیهٔ ۳۸

مثلثهایی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست قرار دارند و رأسهای روبه‌رو به قاعده‌ها در آنها بر خطی موازی با قاعده‌ها واقع‌اند با هم مساوی[1] اند.



فرض می‌کنیم ABC و DEF مثلثهایی با قاعده‌های متساوی BC و EF هستند که بر یک خط راست BF قرار دارند و رأسهای D و A نیز بر خط GH موازی با BF واقع‌اند.

می‌گوییم مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است.

زیرا از B و F به ترتیب خطهایی به موازات AC و DE می‌کشیم تا امتداد AD را به ترتیب در نقطه‌های G و H ببرند. [۳۱.I]

در این صورت شکلهای $GBCA$ و $DEFH$ متوازی‌الاضلاعهایی متساوی‌اند، زیرا دارای قاعده‌های متساوی BC و EFاند که ضلعهای روبه‌رو به قاعده‌ها در آنها بر یک خط راست قرار دارند. [۳۶.I]

به علاوه مثلث ABC نصف متوازی‌الاضلاع $GBCA$ است؛ زیرا قطر AB آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

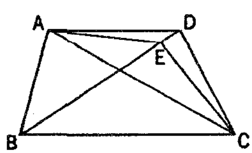
و مثلث DEF نیز نصف متوازی‌الاضلاع $DEFH$ است؛ زیرا قطر DF آن را نصف کرده است. [۳۴.I]

[اما نصفهای چیزهای متساوی، با هم مساوی‌اند.] بنابراین مثلث ABC با مثلث DEF مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳۹

مثلثهای متساوی که یک قاعده داشته باشند و در یک طرف قاعده‌ها واقع باشند رأسهای‌شان بر خطی موازی قاعده قرار دارند.



فرض می‌کنیم که ABC و DBC مثلثهای متساوی با یک قاعدهٔ BC باشند که در یک طرف BC قرار دارند. [می‌گوییم که D و A بر خطی موازی BC قرار دارند]. [زیرا] فرض می‌کنیم D به A وصل شده است می‌گوییم که AD با BC موازی است. زیرا، اگر موازی نباشد، از A خط راست AE را به موازات BC می‌کشیم. [۳۱.I]

۱. منظور تساوی مساحتهای دو مثلث است.ـم.

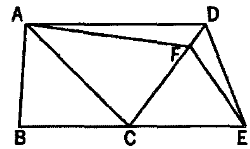
و C را به E وصل می‌کنیم. بنابراین مثلث ABC با مثلث EBC مساوی است؛ زیرا که قاعدهٔ آنها همان BC است و رأسهای آنها بر خطی موازی با قاعده‌ها قرار دارند. [۳۷.I]

اما ABC مساوی با DBC بود، بنابراین DBC نیز با EBC مساوی است، [اصـ.ب.۱] که مثلث بزرگتر با مثلث کوچکتر مساوی شده: که غیرممکن است. بنابراین AE با BC موازی نیست. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط راست دیگری جز AD با BC موازی نیست. بنابراین AD با BC موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۰

مثلثهای متساوی که قاعده‌های آنها متساوی و بر یک خط راست و در یک طرف آن خط واقع‌اند رأسهای آنها نیز بر خطی موازی با همان خط قرار دارند.



فرض می‌کنیم ABC و CDE مثلثهای متساوی هستند با قاعده‌های متساویِ BC و CE واقع در یک طرف قاعده‌ها. می‌گوییم که D و A نیز بر خطی موازی با BE قرار دارند. A را به D وصل می‌کنیم و می‌گوییم که AD با BE موازی است. زیرا اگر موازی نباشد AF را از A به موازات BE می‌کشیم، [۳۱.I] و F را به E وصل می‌کنیم.

بنابراین مثلث ABC با مثلث FCE مساوی است؛ زیرا قاعده‌های BC و CE در آنها متساوی و بر یک خط راست قرار دارند و رأسهای A و F بر خطی موازی با BE قرار دارند. [۳۸.I]

اما مثلث ABC با مثلث DCE مساوی است؛ بنابراین مثلث DCE با مثلث FCE نیز مساوی است، [اصـ.ب.۱]

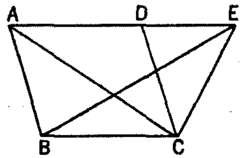
یعنی مثلث بزرگتر با مثلث کوچکتر مساوی است: که غیرممکن است. بنابراین AF با BE موازی نیست.

به همین طریق می‌توانیم ثابت کنیم که هیچ خط دیگری جز AD با BE موازی نیست. بنابراین AD با BE موازی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۱

اگر متوازی‌الاضلاع و مثلثی یک قاعده داشته باشند و رأس مثلث بر امتداد ضلع موازی با قاعده از متوازی‌الاضلاع قرار داشته باشد متوازی‌الاضلاع دو برابر مثلث است.



زیرا فرض می‌کنیم قاعدهٔ BC از مثلث EBC با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع $ABCD$ یکی است، و E بر امتداد ضلع AD، موازی با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع، واقع است. می‌گوییم که متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دو برابر مثلث BEC است.

زیرا فرض می‌کنیم C به A وصل شده است. در این صورت مثلث ABC با مثلث EBC مساوی است؛ زیرا قاعده‌های آنها یکی هستند و رأسهای آنها بر خط راستی موازی با قاعده‌ها قرار دارند. [۳۷.I]

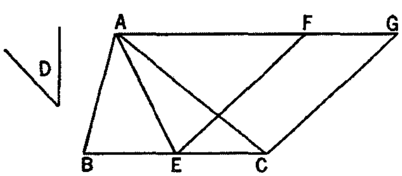
اما متوازی‌الاضلاع $ABCD$ دو برابر مثلث ABC است؛ زیرا قطر آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است. [۳۴.I]

پس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ نیز دو برابر مثلث EBC است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۲

مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ راست‌خط مفروض، مساوی با مثلثی مفروض.



فرض می‌کنیم ABC مثلث مفروض است و D زاویهٔ راست‌خطِ مفروض. پس مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی به زاویهٔ راست‌خط D است که با مثلث ABC مساوی باشد.

فرض می‌کنیم E وسط BC باشد و A را به E وصل می‌کنیم. بر خط راست EC و در نقطهٔ E بر آن زاویهٔ CEF را مساوی با D می‌سازیم. [۲۳.I]

از A خطی به موازات BC و از C خطی به موازات EF می‌کشیم تا یکدیگر را در G ببرند. [۳۱.I]

در این صورت $FECG$ یک متوازی‌الاضلاع است. و، چون BE مساوی با EC است، مثلث ABE نیز با مثلث AEC مساوی است، زیرا قاعده‌های آنها، BE و EC، با هم مساوی‌اند و رأسهای روبه‌رو به قاعده‌ها بر خطی موازی با قاعده‌ها قرار دارند؛ [۳۸.I]

بنابراین مثلث ABC دو برابر مثلث AEC است. اما متوازی‌الاضلاع $FECG$ نیز دو برابر مثلث AEC است، زیرا قاعده‌های آنها یکی است، و رأس مثلث بر امتداد ضلع موازی با قاعده از متوازی‌الاضلاع قرار دارد؛ [۴۱.I]

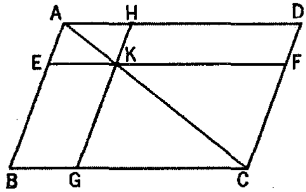
بنابراین متوازی‌الاضلاع $FECG$ با مثلث ABC مساوی و زاویهٔ CEF از آن با زاویهٔ مفروض D مساوی است.

بنابراین متوازی‌الاضلاع $FECG$ مساوی با مثلث مفروض ABC، به زاویهٔ CEF مساوی با D، رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۳

در هر متوازی‌الاضلاع، متممهای متوازی‌الاضلاعهای حول یک قطر با یکدیگر مساوی‌اند.



فرض می‌کنیم $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و AC یک قطر آن؛ و EH و FG متوازی‌الاضلاعهای حول این قطر هستند، و BK و KD به اصطلاح، متممهای آنها.

می‌گوییم که این متممها، یعنی BK و KD، با هم مساوی‌اند.

زیرا، چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع و AC قطر آن است، پس مثلث ABC با مثلث ACD مساوی است. [۳۴.I]

باز، چون EH یک متوازی‌الاضلاع و AK قطر آن است، پس مثلث AEK با مثلث AHK مساوی است.

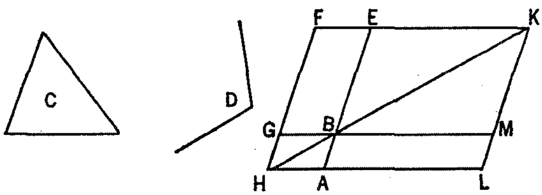
به همین دلیل مثلث KFC نیز با مثلث KGC مساوی است. اما، چون مثلث AEK با مثلث AHK مساوی، و KFC با KGC، پس مثلث AEK به اضافهٔ مثلث KGC با مثلث AHK به اضافهٔ KFC مساوی است. [اص.ب.۲]

و تمامی مثلث ABC نیز با تمامی مثلث ADC مساوی است؛ بنابراین متمم BK که باقی می‌ماند با متمم KD که باقیمانده است مساوی است. [اص.ب.۳]

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۴

مطلوب اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی بر خط راستِ مفروض به زاویهٔ راست خط مفروض است که با مثلث مفروضی مساوی باشد.



فرض می‌کنیم AB خط راستِ مفروض و C و D به ترتیب مثلث و زاویهٔ راست‌خطِّ مفروض‌اند. پس، مطلوب اضافه کردنِ متوازی‌الاضلاعی بر خط راست مفروض AB به زاویهٔ راست‌خط D است که با مثلث مفروض C مساوی باشد.

فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع $BEFG$ مساوی با مثلث C به زاویهٔ EBG که مساوی با D است رسم شده است. [۴۲.I]

آن را طوری قرار می‌دهیم که BE با AB بر یک خط راست واقع شود. از A خطی به موازات BG یا EF رسم می‌کنیم تا امتداد FG را در H ببرد. [۳۱.I]

H را به B وصل می‌کنیم.

در این صورت چون خط راستِ HF بر موازیهای AH و EF فرود آمده است، زاویه‌های AHF و HFE مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

بنابراین زاویه‌های BHG و GFE کمتر از دو قائمه‌اند؛ و اگر خطهای راست HB و FE تا بینهایت امتداد داده شوند، در طرفی یکدیگر را می‌برند که دو زاویه کمتر از دو قائمه‌اند؛[اصـ.م.۵]

فرض می‌کنیم امتداد آنها در K یکدیگر را ببرند؛ از نقطهٔ K خط راست KL را به موازات EA یا FH رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

تا امتدادهای HA و GB را در L و M ببرد. پس $HLKF$ یک متوازی‌الاضلاع است، و HK قطر آن. AG و ME متوازی‌الاضلاعهای حول قطرند، و LB و BF متممهای آنها حول HK؛

بنابراین LB با BF مساوی است؛ [۴۳.I]

اما BF با مثلث C مساوی است، بنابراین LB نیز با C مساوی است. [اصـ.ب.۱]

و چون زاویهٔ GBE با زاویهٔ ABM مساوی است، [۱۵.I]

و زاویهٔ GBE مساوی با D است، پس زاویهٔ ABM نیز با زاویهٔ D مساوی است.

بنابراین LB متوازی‌الاضلاعی است مساوی با مثلث مفروض C، به زاویهٔ ABM مساوی با D، که بر خط راست مفروض AB اضافه شده است.

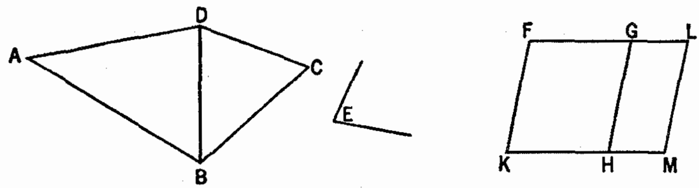
آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۵

مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ راست‌خط مفروض و مساوی[۱] با یک شکل راست خط مفروض.

فرض می‌کنیم $ABCD$ شکل راست خط مفروض است و E زاویهٔ راست خطِّ مفروض. پس مطلوب رسم متوازی‌الاضلاعی است به زاویهٔ E که با شکل راست خط $ABCD$ مساوی باشد.

۱. منظور مساوی از لحاظ مساحت است.ـم.



DB را وصل و فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع FH به زاویهٔ HKF مساوی با E، و مساوی با مثلث ABD رسم شده است. [۴۲.I]

متوازی‌الاضلاع GM به زاویهٔ GHM مساوی با E، را مساوی با مثلث DBC بر خط راست GH اضافه می‌کنیم. [۴۴.I]

چون هر یک از زاویه‌های HKF و GHM با E مساوی است، لذا خودِ این دو زاویه با هم مساوی می‌شوند. [اص.ب.۱]

حال زاویهٔ KHG را به هر یک اضافه می‌کنیم. بنابراین زاویه‌های FKH و KHG با زاویه‌های KHG و GHM مساوی می‌شوند. اما زاویه‌های FKH و KHG مساوی دو قائمه‌اند؛ [۲۹.I] بنابراین زاویه‌های KHG و GHM نیز مساوی با دو قائمه‌اند. بدین ترتیب از نقطهٔ H واقع بر GH و در دو طرف آن، دو خط راست KH و HM رسم شده و دو زاویهٔ مجاور مساوی با دو زاویهٔ قائمه ساخته‌اند، بنابراین KH و HM بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

و چون خط راست HG بر موازیهای KM و FG فرود آمده است، دو زاویهٔ متبادل داخلی HGF و MHG با هم مساوی‌اند. [۲۹.I]

اکنون زاویهٔ HGL را به هر یک اضافه می‌کنیم بنابراین زاویه‌های MHG و HGL با زاویه‌های HGF و HGL مساوی‌اند. [اص.ب.۲]

اما زاویه‌های MHG و HGL مساوی با دو قائمه‌اند، [۲۹.I]

بنابراین زاویه‌های HGF و HGL نیز مساوی با دو قائمه‌اند. [اص.ب.۱]

از این‌رو FG با GL بر یک خط راست قرار دارند. [۱۴.I]

و، چون FK موازی و مساوی با HG است، [۳۴.I]

و HG هم مساوی و موازی با ML است، ML نیز مساوی و موازی است با KF؛ [اص.ب.۱؛ ۳۰.I]

و KM و FL واصل بین آنها هستند، بنابراین KM و FL نیز مساوی و موازی‌اند [۳۳.I]

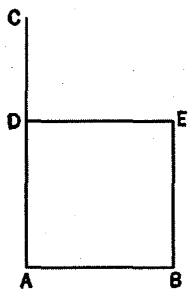
لذا $KFLM$ یک متوازی‌الاضلاع است. و، چون مثلث ABD با متوازی‌الاضلاع FH مساوی و DBC با متوازی‌الاضلاع GM مساوی است، پس تمامی شکل راست خط $ABCD$ با تمامی متوازی‌الاضلاع $KFLM$ مساوی است.

بنابراین $KFLM$ متوازی‌الاضلاعی است که مساوی با شکل راست‌خطِ مفروضِ $ABCD$، به زاویهٔ FKM مساوی با زاویهٔ مفروض E رسم شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۶

مطلوب بنا کردن مربعی است بر خط راست مفروض.



فرض می‌کنیم AB خط راست مفروض است؛ پس مطلوب بنا کردن مربعی است بر خط راست AB.

فرض می‌کنیم خط راست AC از نقطهٔ A واقع بر AB بر آن عمود، [۱۱.I]

و بر آن AD مساوی با AB جدا شده است؛ از نقطهٔ D خط راستِ DE را موازی با AB، و از نقطهٔ B، خط راست BE را موازی با AD رسم می‌کنیم. [۳۱.I]

بنابراین $ADEB$ یک متوازی‌الاضلاع است؛ لذا، AB با DE مساوی است، و AD با BE. [۳۴.I]

اما AB با AD مساوی است؛ بنابراین چهار خط راست BA، AD، DE و EB با هم مساوی‌اند؛ و در نتیجه متوازی‌الاضلاع $ADEB$ متساوی‌الاضلاع است.

حال می‌گوییم که زاویه‌های آن نیز قائمه‌اند. زیرا، چون خط راست AD بر موازیهای AB و DE فرود آمده است، زاویه‌های BAD و ADE مساوی با دو قائمه‌اند. [۲۹.I]

اما زاویهٔ BAD قائمه است، بنابراین زاویهٔ ADE نیز قائمه است. و در ناحیه‌های متوازی‌الاضلاعی اضلاع و زاویه‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند. [۳۴.I]

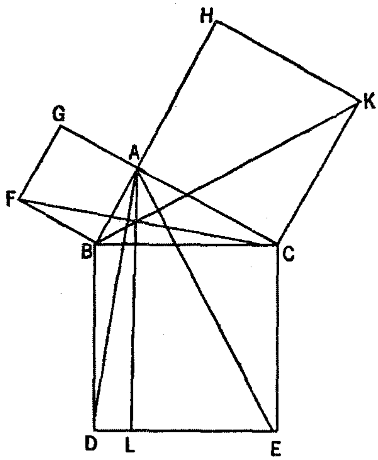
بنابراین هر یک از زاویه‌های ABE و BED نیز قائمه‌اند.

بنابراین هر چهار زاویهٔ $ABED$ قائمه هستند؛ متساوی‌الاضلاع بودن آن هم ثابت شده بود. پس چهارضلعی $ABED$ مربعی است که بر خط راست AB بنا شده است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۷

در مثلثهای قائم‌الزاویه مربع ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه با مربعهای [مجموع] ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه مساوی است.



فرض می‌کنیم ABC مثلث قائم‌الزاویه‌ای به زاویهٔ قائمه BAC باشد.

می‌گوییم که مربع ضلع BC با مربعهای ضلعهای BA و AC مساوی است. زیرا، فرض می‌کنیم مربع $BDEC$ بر BC و مربعهای GB و HC به ترتیب بر ضلعهای BA و AC ساخته شده‌اند؛ [I.۴۶]

AL را از A به موازات BD یا CE می‌کشیم و AD و FC را وصل می‌کنیم.

چون هریک از زاویه‌های BAC و BAG یک قائمه است، پس نتیجه می‌شود که با یک خط راست BA و از نقطهٔ A بر آن، دو خط راست AC و AG در دو طرف آن رسم شده‌اند که زاویه‌های مجاور مساوی با دو قائمه ساخته‌اند، لذا AG و CA بر یک خط راست قرار دارند. [I.۱۴]

به همین دلیل BA و AH نیز بر یک خط راست قرار دارند. و چون زاویهٔ DBC و زاویهٔ FBA، به علت قائمه بودن، مساوی‌اند، اگر زاویهٔ ABC را به هر یک اضافه کنیم تمام زاویهٔ DBA با تمام زاویهٔ FBC مساوی می‌شود؛ [اص.ب.۲]

و به دلیل تساوی ضلعهای DB و FB به ترتیب با دو ضلع BC و BA و تساوی زاویه‌های ABD و FBC، قاعده‌های AD و FC با هم مساوی می‌شوند و مثلثهای ABD و FBC با هم؛[I.۴]

اما متوازی‌الاضلاع BL دو برابر مثلث ABD است، زیرا قاعدهٔ BD در آنها یکی است و رأس مثلث بر خط AL که موازی با قاعدهٔ BD است قرار دارد. [I.۴۱]

و مربع GB دو برابر مثلث FBC است، زیرا آنها هم در قاعدهٔ FB مشترک‌اند و رأس مثلث بر خط GC، موازی با FB قرار دارد. [I.۴۱]

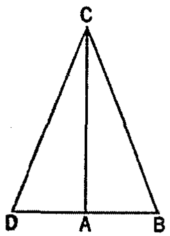
[اما دو برابرهای چیزهای مساوی، با هم مساوی‌اند.]. بنابراین متوازی‌الاضلاع BL نیز با مربع GB مساوی است. به همین طریق اگر E را به A و K را به B وصل کنیم، ثابت می‌شود که متوازی‌الاضلاع CL نیز با مربع HC مساوی است؛ بنابراین تمامی مربع $BDEC$ با دو مربع GB و HC مساوی است. [اص.ب.۲]

و مربع $BDEC$ بر BC رسم شده است و مربعهای GB و HC بر BA و AC؛ لذا مربع BC با مربعهای BA و AC مساوی است.

آنچه می‌خواستیم.

قضیهٔ ۴۸

اگر در مثلثی مربع یکی از ضلعها با [مجموع] مربعهای دو ضلع دیگر مثلث مساوی باشد، زاویهٔ بین این دو ضلعِ مثلث، قائمه است.



در مثلث ABC فرض می‌کنیم مربع ضلع BC با مربعهای ضلعهای BA و AC مساوی است؛

می‌گوییم که زاویهٔ BAC قائمه است.

فرض می‌کنیم AD از نقطهٔ A بر AC عمود شده و AD مساوی با BA جدا و DC وصل شده است. چون DA با AB مساوی است، مربع DA هم با مربع AB مساوی است.

مربع AC را به هر یک اضافه می‌کنیم؛ بنابراین مربعهای DA و AC با مربعهای BA و AC مساوی می‌شوند. اما مربع DC با مربعهای DA و AC مساوی است، زیرا زاویهٔ DAC قائمه است؛ [۴۷.I]

و بنا به فرض مربع BC با مربعهای BA و AC مساوی است؛ بنابراین مربع DC با مربع BC مساوی است، لذا ضلع DC نیز با ضلع BC مساوی است، و چون در دو مثلث CAB و CAD، DA با AB مساوی و AC مشترک است، دو ضلع DA و AC با دو ضلع BA و AC مساوی می‌شوند؛ و DC با BC مساوی است؛ در نتیجه زاویهٔ DAC با زاویهٔ BAC مساوی می‌شود. [۸.I]

اما زاویهٔ DAC قائمه است، بنابراین زاویهٔ BAC نیز قائمه است.

آنچه می‌خواستیم.