دانشگاه آزاد اسلامی واحد اهواز

دانشکده فنی مهندسی: گروه مکانیک

مقاومت مصالح (۲)

مدرس : مهندس محمدی

فصل ۷ : تبدیل های تنش و کرنش

❋ تبدیل تنش صفحه ای:

هدف : تعیین چگونگی تبدیل مؤلفه های تنش بر اثر چرخش محورهای مختصات است، در این مبحث به طور عمده به تنش صفحه ای می پردازیم.

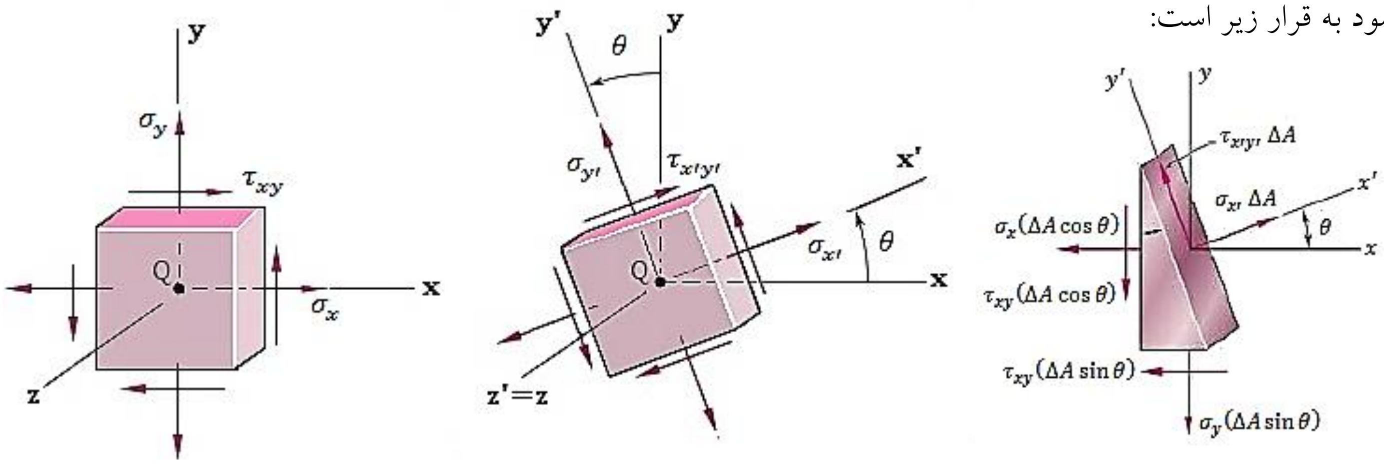
می دانیم تنش صفحه ای، **(Plane Stress)** حالتیست که در آن دو وجه جزء مکعبی فارغ از هرگونه تنش اند، اگر مثلاً محور z عمود بر این وجوه انتخاب شود آنگاه $\Longleftarrow$

$$\boldsymbol{\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0}$$

و تنها مولفه های باقی مانده عبارتند از : $\boldsymbol{\tau_{xy}}$ و $\boldsymbol{\sigma_y}$ و $\boldsymbol{\sigma_x}$

نکتۀ: مخزنهای تحت فشار جدار نازک کاربرد مهمی از تحلیل تنش صفحه ای هستند.

– حال اگر المان تنش همانند شکل زیر باشد مقادیر تنشی که بر سطح مایلی(با زاویۀ θ نسبت به صفحه قائم)حاصل می شود به قرار زیر است:



اگر از تعادل نیرو ها استفاده کنیم داریم :

$$\begin{cases} \sum \boldsymbol{f_{x'} = 0} \\ \sum \boldsymbol{f_{y'} = 0} \end{cases}$$

(صفحۀ **254** به طور کامل شده اثبات است)

$$\sum \boldsymbol{f_{x'} = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{1-7}$$

$$\sum \boldsymbol{f_{y'} = 0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{2-7}$$

رابطۀ تنش عمـودی $\sigma_{y'}$ را مـی تـوان بـا جـایگزین θ در معادلـۀ (۷-۱) بـا زاویـۀ $\theta + 90°$ کـه محـور y' بـا محـور x' تشکیل می دهد به دست آورد ⟵

$$\boxed{\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta} \qquad \rightarrow \qquad 3-7$$

نکتۀ: مجموع تنش های عمودی بر دو سطح قائم پیوسته با هم برابر است و عدد ثابتی است. با جمع کردن عضو به عضو معادله های (۷-۱) و (۷-۳) می توان این موضوع را متوجه شد.

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

- از آنجا که در تنش صفحه ای $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$ لذا مجموع تنش های عمودی وارد شده به جزء مکعب شکل مستقل از سمت گیری آن جزء است.

❋ تنش های اصلی(تنش عمودی ماکزیمم) و تنش برشی ماکزیمم:

معادله های (۷-۱) و (۷-۲) معادله های پارامتری دایره اند، یعنی اگر مجموعه ای از محور های متعامد انتخاب کنیم و به ازای هر مقدار معین پارامتر θ ، نقطۀ M را طوری رسم نماییم که طول آن برابر با $\sigma_{x'}$ و عرض آن برابـر بـا $\tau_{x'y'}$ باشـد کلیـۀ نقاطی که بدین ترتیب به دست می آیند بر روی یک دایره واقع می شوند.برای نشان دادن این خاصیت θ را از معادلـه هـای (۷-۱) و (۷-۲) حذف می نماییم:

توضیحات:

❶ در معادلۀ $(1-7)$ $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ را به سمت چپ برده و به توان 2 می رسانیم

❷ معادلۀ $(2-7)$ را به توان 2 رسانده با معادلۀ $(1-7)$ جمع می نماییم

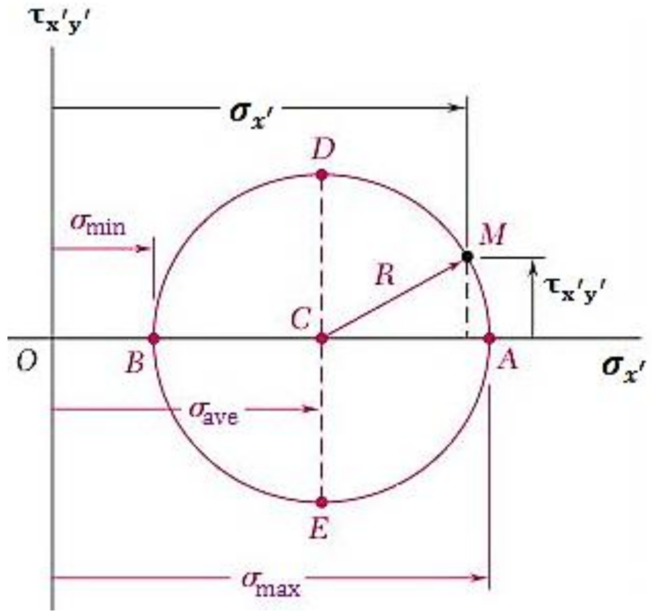
$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{x'y'}}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2$$

رابطۀ فوق معادلۀ دایره ای به شعاع R و به مرکز C به طول σ_{ave} و به عرض صفر:

$$\boxed{(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + {\tau_{x'y'}}^2 = R^2} \quad \rightarrow \quad 4-7 \qquad\qquad \boxed{\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} \quad \rightarrow \quad 5-7$$

$$\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}} \qquad \rightarrow \qquad 6-7$$

❃ در شـکل زیـر نقـاط **A** و **B** کـه از تقـاطع دایـره بـا محـور افقـی بـه دسـت مـی آینـد دارای خاصـیت مهمـی هسـتند. نقطـهٔ **A** متنـاظر بـا مقـدار مـاکزیمم و نقطـهٔ **B** متنـاظر بـا مقـدار مینـیمم تـنش عمـودی $\sigma_{x'}$ اسـت و نیـز مقـدار تـنش برشی در هر دو نقطه صفر است.



شکل $(7-2)$ $\Leftarrow$

توضیحات:

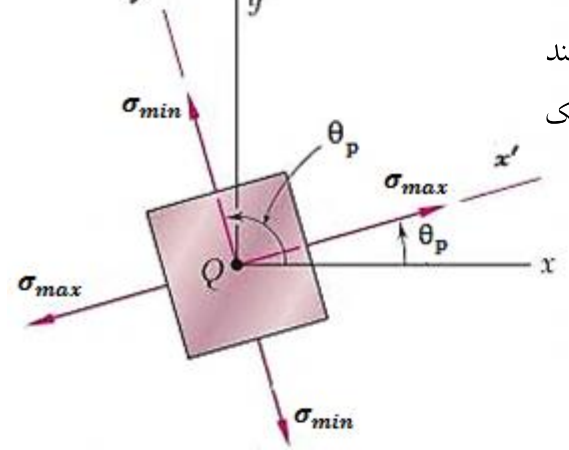
* اگر در معادلهٔ $(7-2) \Longleftarrow \underline{\tau_{x'y'} = 0}$ پس مقادیر θ_P پارامتر θ را که متناظر با نقاط A و B است به ما نشان می دهد

$$\boxed{\tan 2\theta_P = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad \rightarrow \quad 7-7$$

در مقاومت ۱ نیز خواندیم،(سطوحی که تنش برشی روی آنها صفر است دارای تنش عمودی ماکزیمم اند).

اکنون به این تنش ها ، تنش هـای اصـلی مـی گـوییم و صـفحهٔ شـامل ایـن تـنش هـا را صـفحات اصـلی. ایـن سـطوح از رابطهٔ بالا به دست می آیند .

❃ از رابطهٔ (۷–۷) دو جواب برای θ_P به دست می آید که با هم $180°$ اختلاف دارند و در نتیجه دو مقدار θ_P با یکدیگر $90°$ اختلاف خواهند داشت، از هر دو این مقدارها می توان برای سمت گیری جزء کوچک متناظر استفاده نمود.



شکل $(7-3)$ $\Leftarrow$

از شکل (۷-۲) داریم :

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

پس داریم $\Rightarrow \boxed{\sigma_{max} \text{ و } \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}} \quad \rightarrow \quad 8-7$

❋ علامت $(+)$ را برای $\underline{\sigma_{max}}$ و علامت $(-)$ را برای $\underline{\sigma_{min}}$ قرار می دهیم.

توجه : اگر یکی از مقادیر θ_p را در معادلهٔ (۷-۱) بگذاریم تعیین می شود کدام یک از این صفحات متناظر با مقدار تنش عمودی است.

❋ با مراجعهٔ مجدد به دایرهٔ شکل (۷-۲) داریم:

ماکزیمم است $\tau_{x'y'} \Rightarrow$ در نقاط D و E

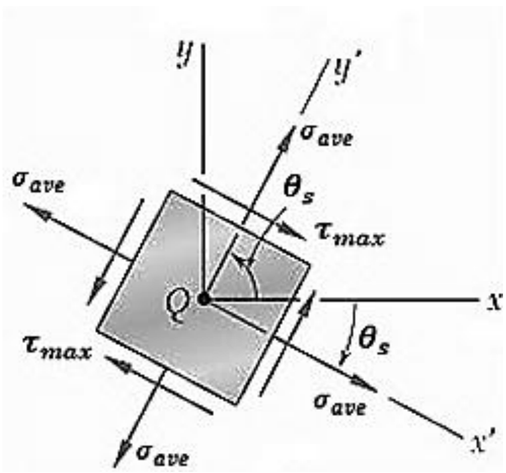
⊂ مقادیر $\underline{\theta_S}$ پارامتر θ را که متناظر با نقاط D و E است، نشان می دهد.

⊂ طول این نقاط $\boxed{\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}$ می باشد ، پس با قرار دادن $\underline{\sigma_{x'} = \sigma_{ave}}$ داریم:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\theta_S + \tau_{xy}\, cos\, 2\theta_S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 2\theta_S = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} \quad \rightarrow \quad 9-7$$

❋ از رابطهٔ (۷-۹) دو جواب برای $2\theta_S$ به دست می آید که با یکدیگر $180°$ اختلاف دارند و در نتیجه دو مقدار θ_S با یکدیگر $90°$ اختلاف خواهند داشت. از هر دو مقادیر به دست آمده می توان برای سمت گیری جزء کوچک متناظر استفاده نمود.



شکل $(4-7)$ ⟸

با مقایسهٔ(7_7) و (9_7)داریم ← $tan\,2\theta_S$ معکوس منفی $tan\,2\theta_P$ است ← زاویه های$2\theta_S$ و $2\theta_P$ با یکدیگر$90°$ اختلاف دارند
⇐ زاویه های θ_S و θ_P با یکدیگر $45°$ اختلاف دارند ⇐ صفحه های تنش برشی ماکزیمم با صفحه های اصلی زاویهٔ $45°$ می سازند
⇐ موضوعی که در بالا بیان شد مطالب مربوط به مقاومت (1) را مجددا تأیید می کند .

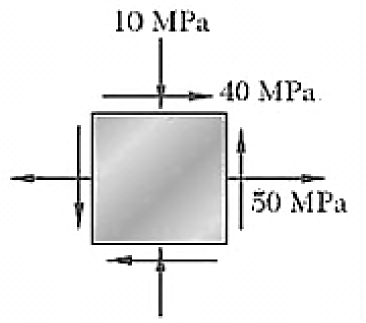
با توجه به شکل (۷–۲) که در آن مقدار تنش برشی ماکزیمم برابر شعاع دایره است پس داریم :

$$\boldsymbol{\tau_{max} = R}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau_{max}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\sigma_x - \sigma_y}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\tau_{xy}}^{\mathbf{2}}}} \qquad \mathbf{9-7}$$

تنش برشی ماکزیمم در صفحه

مثال ۷. ۱ :



در حالت تنش صفحه ای نشان داده شده در شکل روبه رو مطلوبست:

الف) صفحه های اصلی ب) تنش های اصلی

ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش عمودی متناظر با آن

حل) الف) صفحه های اصلی :

$\boldsymbol{\sigma_x} = 50\text{ MPa}$, $\boldsymbol{\sigma_y} = -10\text{ MPa}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}} = 40\text{ MPa} \Longrightarrow \underline{\mathbf{7-7}} \longleftarrow$ جایگزین در معادلهٔ

$$\boldsymbol{tan\,2\theta_P} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\tau_{xy}}}{\boldsymbol{\sigma_x - \sigma_y}} = \frac{2(40)}{50-(-10)} = \frac{80}{60}$$

$\mathbf{2}\boldsymbol{\theta_P} = 53.1°$ و $180° + 53.1° = 233.1°$

$\boldsymbol{\theta_P} = 26.6°$ و $116.6°$

ب) تنش های اصلی :

از $\mathbf{8-7}$ داریم $\Longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{max}}$ و $\boldsymbol{\sigma_{min}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_x + \sigma_y}}{\mathbf{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\sigma_x - \sigma_y}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\tau_{xy}}^{\mathbf{2}}} = \frac{50-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50+10}{2}\right)^2 + (40)^2}$

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} = 20 + 50 = 70\ MPa$$

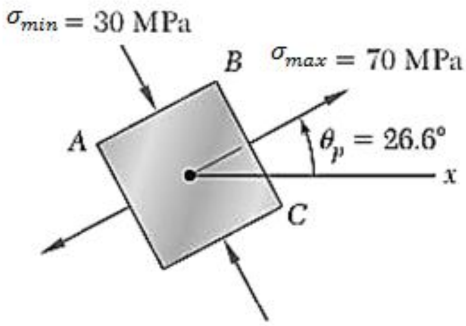
$$\boldsymbol{\sigma_{min}} = 20 - 50 = -30\ MPa$$

ادامهٔ حل قسمت (ب)

با قرار دادن $\theta = 26.6°$ در معادلهٔ (۷-۱) داریم :

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\theta + \boldsymbol{\tau_{xy}}\, sin\, 2\theta = \frac{50 - 10}{2} + \frac{50 + 10}{2} \cos 53.1° + \tau_{xy} \sin 53.1°$$

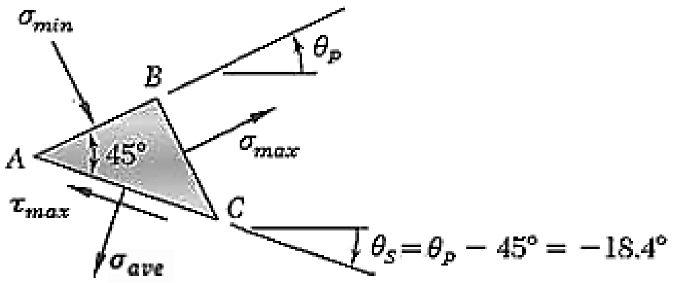
$$\Longrightarrow\ = 70\ MPa \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_{max}} = 70\ MPa$$



ج) تنش برشی ماکزیمم :

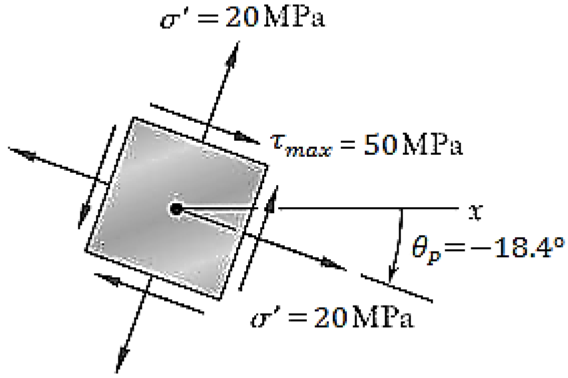
$$\underline{\textbf{9 - 7} \text{ رابطهٔ}} \Longrightarrow \boldsymbol{\tau_{max}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\sigma_x - \sigma_y}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\tau_{xy}}^{\mathbf{2}}} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ MPa$$

نکتهٔ: از آنجا که وجه های ***AB*** و ***BC*** از جزء نشان داده شده در بالا، صفحه های اصلی می باشند، لذا صفحهٔ قطری ***AC*** باید یکی از صفحه های تنش برشی ماکزیمم باشد.



$$\text{می دانیم} : \Longrightarrow \boldsymbol{\sigma_{ave}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_x + \sigma_y}}{\mathbf{2}} = \frac{50 - 10}{2} = 20\ MPa$$

$$\boldsymbol{\theta_S = \theta_P - 45° = -18.4°}$$



* دایرهٔ مور برای تنش های صفحه ای:

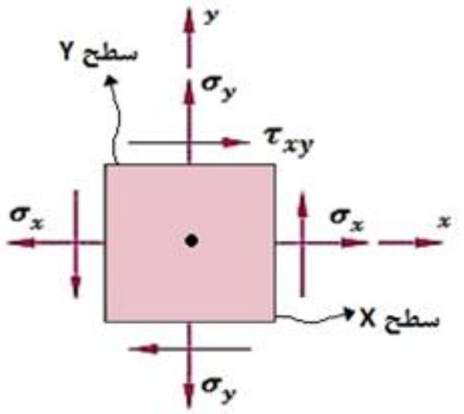
دایره ای که در قسمت قبل برای به دست آوردن فرمول های اساسی مربوط به تبدیل تنش صفحه ای استفاده شد، اولین بار توسط یک مهندس آلمانی به نام اتومور (**1835 – 1918**) معرفی شد.

این روش مبتنی بر مطالب سادهٔ هندسی است و احتیاج به استفاده از فرمول های پیچیده ندارد. اساساً این روش، روش ترسیمی برای حل مسائل است.

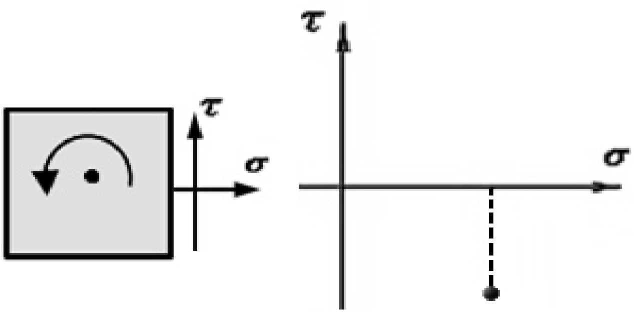
* رسم دایرهٔ مور:

اگر جزئی مربعی شکل از ماده ای را که تحت اثر تنش صفحه ای قرار دارد در نظر بگیریم برای رسم دایرهٔ مور می بایست توجه به نکات اشاره شده در ذیل عمل نمود.

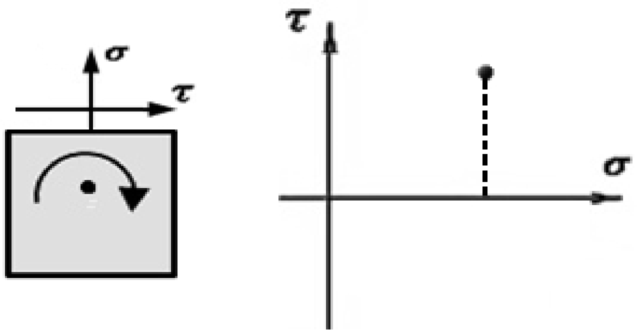
۱) برای رسم دایرهٔ مور دو سطح **X** و **Y** را مشخص می کنیم.



۲) **الف:** وقتی که تنش برشی اعمال شده بر یک وجه معین تمایل به چرخاندن جزء در جهت پادساعتگرد را دارد نقطهٔ متناظر با آن وجه بر روی دایرهٔ مور در پایین محور σ واقع است.



۲) **ب:** وقتی که تنش برشی روی یک وجه تمایل به چرخاندن جزء در جهت ساعتگرد دارد نقطهٔ متناظر با آن وجه در بالای محور σ قرار دارد



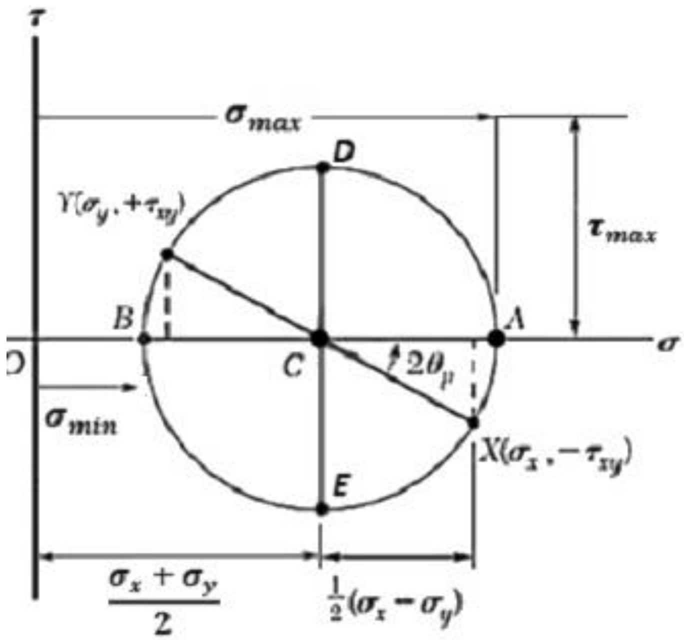
قرارداد

روی جزء مربع شکل جهت مثبت تنش برشی (τ) پادساعتگرد است ولی روی دایرهٔ مور جهت مثبت تنش برشی (τ) ساعتگرد می باشد.

۳) تنش کششی (مثبت) در طرف راست محور τ رسم می شود ولی تنش فشاری منفی در طرف چپ محور τ رسم می شود .

$$\text{پس} \quad \Leftarrow \quad Y(+\sigma_y\ ,+\tau_{xy}) \qquad \text{و} \qquad X(+\sigma_x\ ,-\tau_{xy})$$

حال با فرض : $\underline{\sigma_x > \sigma_y}$ نقاط X و Y را در صفحه ای با دو محور مختصات $\underline{\sigma}$ و $\underline{\tau}$ مشخص می نماییم.



با اتصال نقاط X و Y با یک خط راست نقطهٔ C که محل تقاطع خط XY با محور σ است را به دست می آوریم ، سپس دایره ای با مرکز C و قطر XY رسم می کنیم (حال طول نقطهٔ C و شعاع دایره به ترتیب برابر با σ_{ave} و R خواهند بود .همچنین نقاط A و B به ترتیب σ_{max} و σ_{min} در نقطهٔ Q را نشان می دهند و ...)

$$\begin{cases} A\,,B \supset \sigma_{max}\,,\sigma_{min} \\ C \supset \sigma_{ave} \\ D \supset \tau_{max} \\ C \supset R \end{cases} \qquad \begin{array}{l} XCA \rightarrow 2\theta_P \\ XCD \rightarrow 2\theta_S \end{array}$$

نکتهٔ ❸

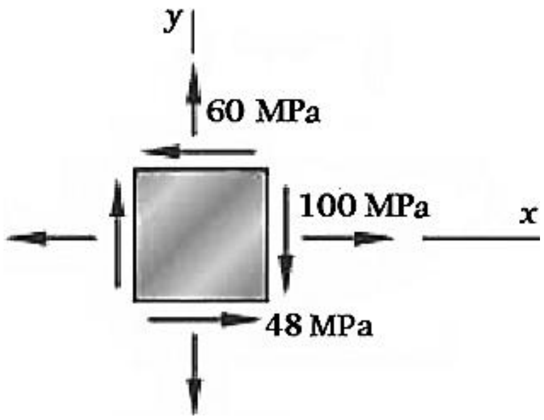
روی دایرهٔ مور چرخشی پادساعتگرد لازم است تا نقطه X را روی A بیاورد ، در المان تنش صفحه ای نیز چرخشی پادساعتگرد لازم است تا المان را روی صفحات اصلی بیاندازد با این تفاوت که زاویه $\underline{2\theta_P}$ روی دایرهٔ مور است ولی روی المان تنش نصف مقدار فوق یعنی $\underline{\theta_P}$ باید بچرخانیم تا روی صفحهٔ اصلی قرار گیرد.

نکتهٔ ۴

$\boldsymbol{\theta_S = \theta_P + 45°} \quad \Leftarrow$ روی المان تنش

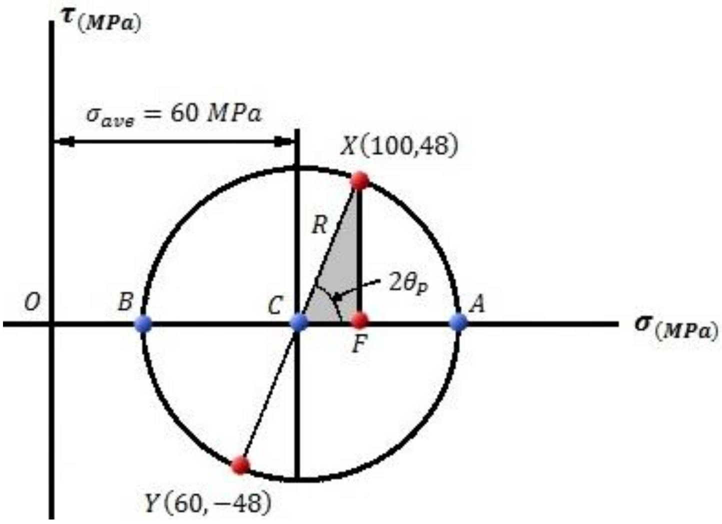
$\boldsymbol{2\theta_S = 2\theta_P + 90°} \quad \Leftarrow$ روی دایره مور نشان داده شده

مسئلهٔ نمونه ۲.۷ :



در حالت تنش صفحه ای نشان داده شده، مطلوبست: صفحه های اصلی تنش و تنش های اصلی با استفاده از روش دایرهٔ مور؟

حل)



نقطهٔ $X(100,48)$ و $Y(60,-48)$ را مطابق قرار داد در صفحه $(\boldsymbol{\sigma,\tau})$ در نظر می گیریم و با خطی راست به هم وصل می نماییم.

❋ $\boldsymbol{\sigma_{ave}}$ و $\mathbf{R}$ مستقیما قابل اندازه گیری است یا به روش ذیل به دست می آید؛

$$\boldsymbol{\sigma_{ave} = oc} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\sigma_x + \sigma_y}\right) = \frac{1}{2}(100+60) = 80\ MPa$$

از مثلث هاشور خورده و قائدهٔ فیثاغورث داریم $\Longrightarrow R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{20^2 + 48^2 = 52\ MPa}$

حل الف) صفحه های اصلی:

قطر XY را به اندازهٔ $2\theta_P$ در جهت ساعتگرد می چرخانیم تا بر AB منطبق گردد.

$$\tan 2\theta_P = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4 \quad \Longrightarrow \quad 2\theta_P = 67.4° \rightarrow \underline{\theta_P = 33.7°}$$

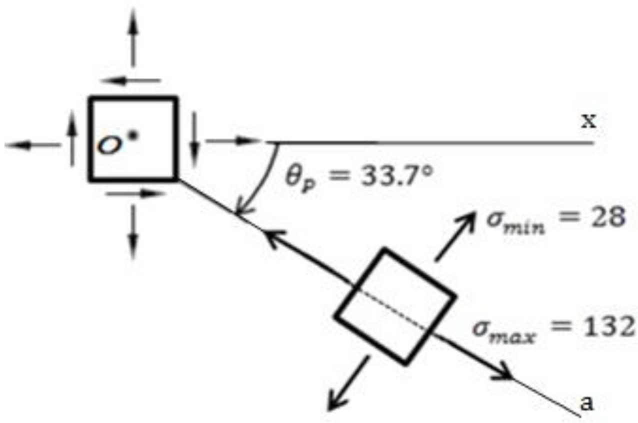
تنش های اصلی:

σ_{max} و σ_{min} از روی شکل قابل اندازه گیری است یا به طریق ذیل به دست می آیند.

$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = 80 + 52 = 132\ MPa \quad \Longrightarrow \quad \underline{\sigma_{max} = +132\ MPa}$$

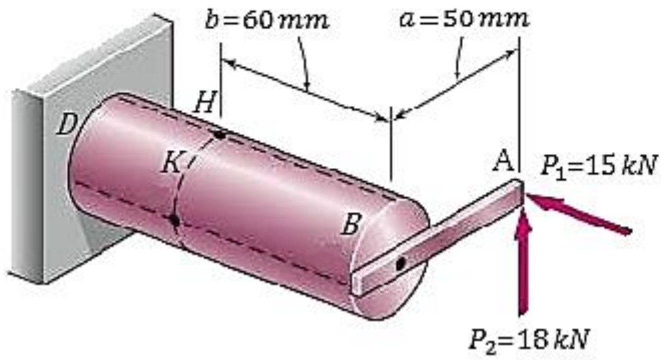
$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = 80 - 52 = 28\ \ MPa \quad \Longrightarrow \quad \underline{\sigma_{min} = \ +28\ \ MPa}$$

چون چرخشی که XY را بر روی AB می آورد ساعتگرد است، پس المان تنش نیز با چرخشی ساعتگرد و به اندازهٔ $\underline{\theta_P}$ روی صفحه های اصلی می افتد.



مثال ۸. ۱ :

دو نیــــروی $\mathbf{P_1}$ و $\mathbf{P_2}$ بـــه مقـــدار $\mathbf{P_1 = 15\ KN}$ و $\mathbf{P_2 = 18\ KN}$ مطـــابق شـــکل بـــر نقطـــۀ **A** انتهـــای میلـــۀ **AB** ، کـــه بـــه عضـــو اســـتوانه ای **BD** بـــه شـــعاع $\boldsymbol{c = 20\ mm}$ جـــوش خـــورده (شـــکل ۸. ۲۱) ، وارد مـــی شـــوند. اگـــر فاصـــلۀ نقطـۀ **A** تـــا محـــور عضـــو **BD** برابـــر بـــا $\boldsymbol{a = 50\ mm}$ باشـــد بـــا فـــرض اینکـــه همـۀ تنشـــها کمتـــر از حـــد تناســـب مـــاده بـــاقی مـــی ماننـــد، مطلـــوب اســـت (**الـــف**) تـــنش هـــای برشـــی و عمـــودی در نقطـــۀ **K** مقطـــع عرضـــی عضـــو **BD** ، کـــه بـــه فاصـــلۀ $\boldsymbol{b = 60\ mm}$ از انتهـــای **B** قـــرار گرفتـــه انـــد، (**ب**) محورهای اصلی و تنش های اصلی در **K** ، (**ج**) تنش برشی ماکزیمم در **K** .



حل)

الف) با توجه به مطالبی که در <u>مقاومت ۱</u> آموختیم برای قسمت (الف) این مثال، مقادیر تنش های عمودی و برشی را در المان K به دست می آوریم:

تنش عمودی $\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma_x} = +107.4\ MPa$

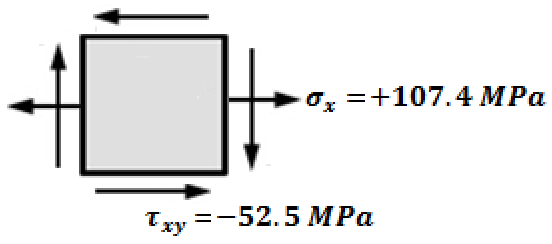
تنش های برشی $\Longrightarrow \quad (\boldsymbol{\tau}_{xy})_V = +19.1\ MPa$

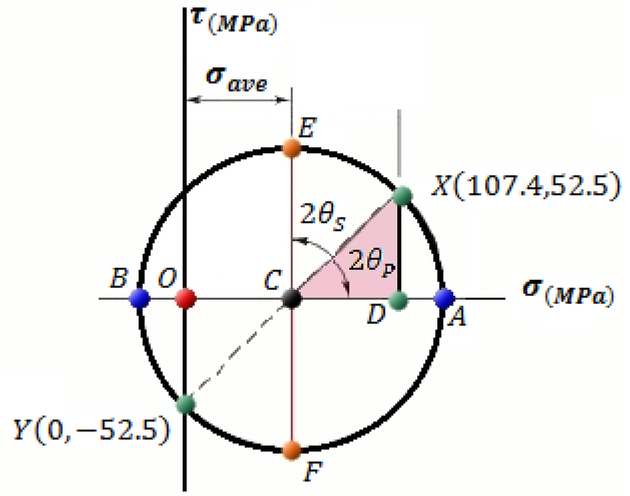
$(\boldsymbol{\tau}_{xy})_{\text{پیچشی}} = -71.6\ MPa$

بـــا جمـــع کـــردن مقـــادیر بـــه دســـت آمـــده بـــرای هرکـــدام از دو تـــنش برشـــی بـــه دســـت آمـــده، مقـــدار تـــنش برشـــی در المان *K* به دست می آید:

$$\boldsymbol{\tau}_{xy} = (\boldsymbol{\tau}_{xy})_V + (\boldsymbol{\tau}_{xy})_{\text{پیچشی}} = +19.1\ MPa - 71.6\ MPa = -52.5\ MPa$$

ب) محور های اصلی و تنش های اصلی در المان K





$$\boldsymbol{\sigma_{ave}} = OC = CD = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma_x} + \boldsymbol{\sigma_y}) = \frac{1}{2}(107.4) = 53.7\ MPa$$

$$\boldsymbol{R} = \sqrt{\boldsymbol{CD^2} + \boldsymbol{DX^2}} = \sqrt{53.7^2 + 52.5^2} = 75.1\ MPa \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{R} = 75.1\ MPa$$

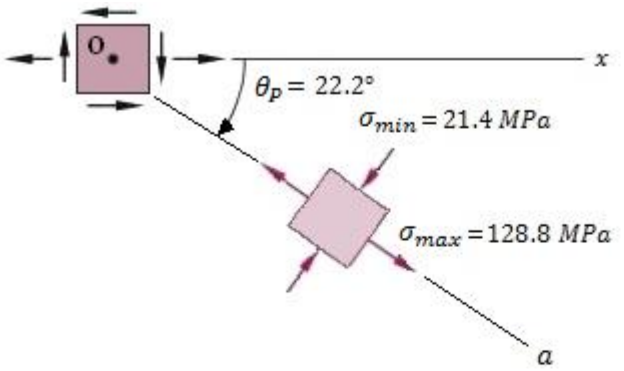
صفحه های اصلی :

$$tan\ 2\theta_P = \frac{DX}{CD} = \frac{52.5}{53.7} = 0.97765 \quad \Longrightarrow \quad 2\theta_P = 44.4° \curvearrowright \quad \longrightarrow \quad \underline{\theta_P = 22.2° \ \curvearrowright}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} = DC + R = 53.7 + 75.1 = 128.8\ MPa \quad \Longrightarrow \quad \underline{\boldsymbol{\sigma_{max}} = 128.8\ MPa}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{min}} = OC - R = 53.7 - 75.1 = -21.4\ MPa \quad \Longrightarrow \quad \underline{\boldsymbol{\sigma_{min}} = -21.4\ MPa}$$

چون چرخش ساعتگرد به اندازهٔ $2\boldsymbol{\theta_P}$ ، ***XY*** را روی ***AB*** می اندازد پس روی المان تنش نیز می بایست در جهت ساعتگرد و به اندازهٔ $\boldsymbol{\theta_P}$ چرخید تا المان روی صفحه های اصلی بیافتد. (روی محور ***oa***)



ج) تنش برشی ماکزیمم در المان K

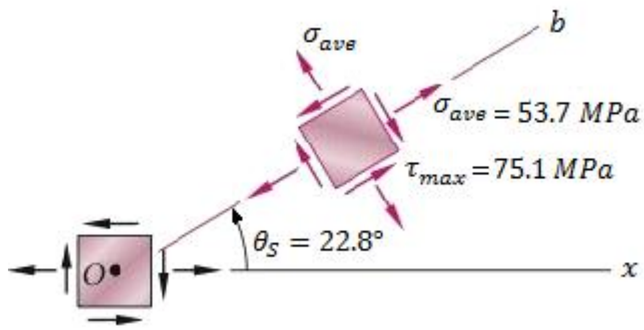
از روی دایره داریم $\implies \quad \boldsymbol{\tau_{max}} = CE = R = 75.1\ MPa$

$\boldsymbol{\sigma_{ave}} = 53.7\ MPa$ $\qquad \Longleftarrow$ تنش عمودی متناظر با تنش برشی ماکزیمم

$2\boldsymbol{\theta_S} = 90° - 2\theta_P = 90° - 44.4° = 45.6° \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\theta_S} = 22.8° \ \circlearrowleft \qquad \Longleftarrow$ با مراجعه به دایره مور داریم

با یک چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ $2\boldsymbol{\theta_S}$ محور ***xy*** روی ***EF*** می افتد. پس برای المان تنش نیز با یک چرخش پاد ساعتگرد به اندازهٔ $\boldsymbol{\theta_S}$ ، روی محور ***ob*** که متناظر با تنش برشی ماکزیمم است می افتد.

❋ چون نقطهٔ ***E*** (روی دایره مور) بالای محور $\boldsymbol{\sigma}$ واقع است، تنش های برشی وارد بر وجوه عمود بر ***od*** نیز باید در جهتی باشند که بخواهند جزء را در جهت عقربه های ساعت بچرخانند.



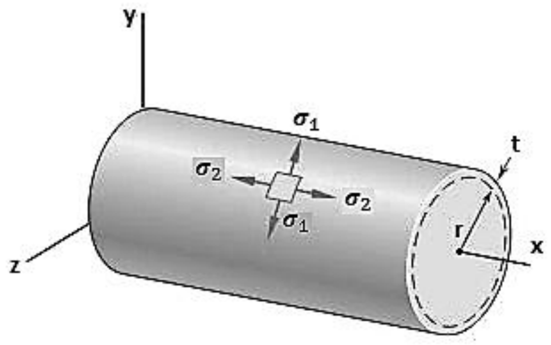
* تنش در مخازن تحت فشار جدار نازک

مخازنی که ضخامت دیوار یا گوشت دیواره شان از $\frac{1}{20}$ قطر متوسط یا $\frac{1}{10}$ شعاع متوسط آن ها کمتر است را، مخازن جدار نازک می نامند. این مخازن کاربرد مهمی از تحلیل تنش صفحه ای به شمار می آیند.

(می توان فرض کرد نیروهای داخلی وارد بر جداره بر سطح مخزن مماس هستند)

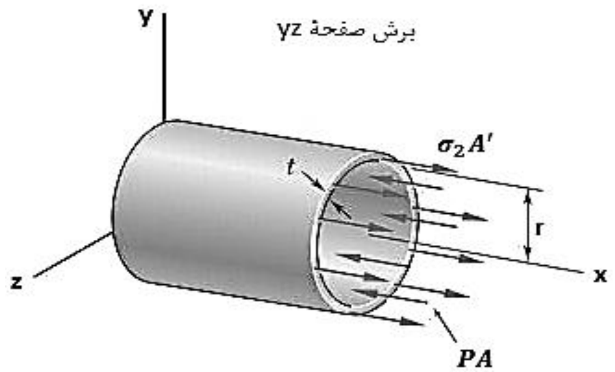
مخازن جدار نازک به دو گونه می باشند. **۱- مخازن استوانه ای** **۲- مخازن کروی**

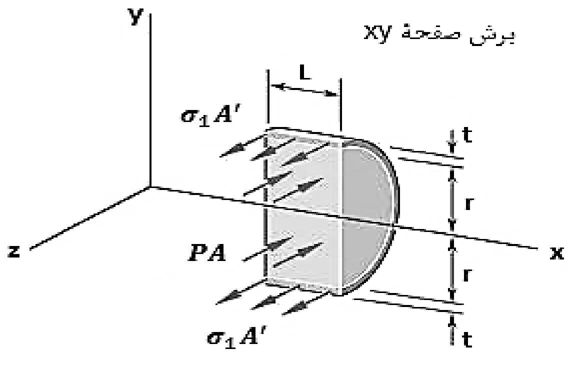
* مخازن جدار نازک استوانه ای



به دلیل تقارن محوری مخزن و مایع درون آن روشن است که هیچ گونه تنش برشی بر این جزء اثر نمی کند از این رو تنش محیطی (σ_1) و تنش طولی (σ_2) تنش های اصلی هستند.

با زدن دو برش بر محور های طولی و محیطی تنش ها در مخازن استوانه ای جدار نازک که تحت فشار ثابت $\boldsymbol{P}$ قرار دارند به دست می آیند.





$$\sum F_x = 0$$

$$-P(\pi r^2) + \sigma_2(2\pi r t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_2 = \frac{Pr}{2t}}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$-P(2rL) + 2\sigma_1(tL) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{Pr}{t}}$$

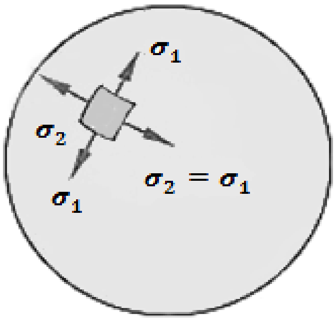
با مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا داریم $\Leftarrow$ $\underline{\sigma_1 = 2\sigma_2}$

✻ تنش برشی ماکزیمم در جدار مخزن استوانه ای:

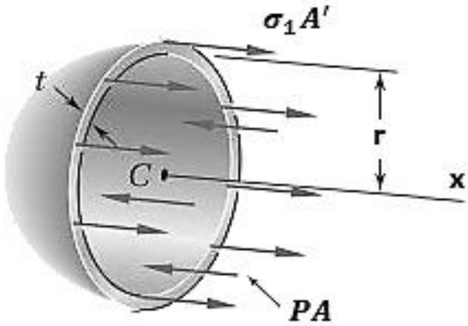
$$\boxed{\tau_{max} = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}}$$

✻ مخازن کروی جدار نازک

مخزنی به شعاع r و ضخامت t را در نظر بگیرید، به دلیل تقارن در آن داریم $\Leftarrow$ $\underline{\sigma_1 = \sigma_2}$



با زدن یک برش داریم:

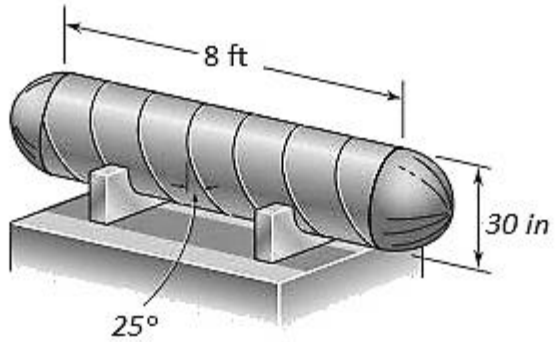


$$\sigma_1(2\pi r t) - P(\pi r^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t}}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{Pr}{4t}}$$

مسئلۀ نمونۀ ۵.۷ :

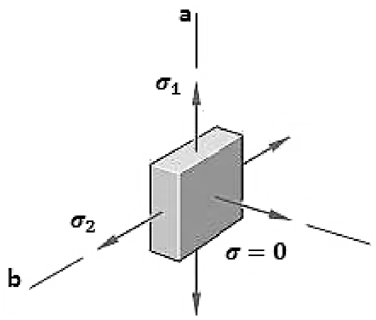


یک مخزن هوای فشرده مطابق شکل بر روی دو پایۀ نگهدارنده قرار داده شده است. یکی از پایه ها طوری طراحی شده است که هیچ گونه نیروی طولی بر مخزن وارد نمی کند.بدنۀ استوانه ای مخزن به قطر خارجی ***30 in*** از ورق فولادی به ضخامت $\frac{3}{8} in$ و با جوشکاری در طول مارپیچی که زاویۀ $25°$ با صفحۀ عرضی می سازد، درست شده است.کلاهکهای انتهایی کروی اند و جدار آنها دارای ضخامت یکنواخت $\frac{5}{16} in$ است. برای فشار داخلی نسبی ***180 psi*** مطلوب است:

(الــــف) تـــنش عمـــودی و تـــنش برشــی مـــاکزیمم در کلاهکهـــای کـــروی و **(ب)** تنشـــهای موجـــود در دو جهت موازی با خط مارپیچی جوش و عمود بر آن.

حل)

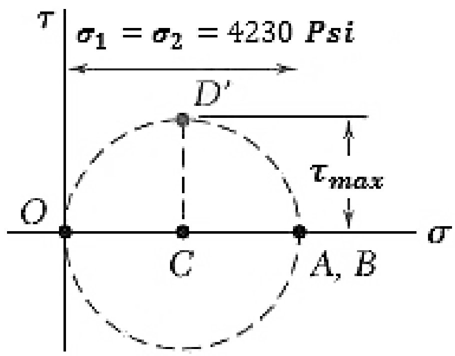
الف) کلاهک کروی



$$P = 180\ Psi \quad ,, \quad t = \frac{5}{16} in = 0.3125\ in \quad ,, \quad r = 15 - 0.3125 = 14.688\ in$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Pr}{2t} = \frac{(180\ Psi)(14.688\ in)}{2(0.3125\ in)} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 4230\ Psi$$

می بینیم که برای تنشهای موجود در صفحه ای مماس بر کلاهک ، دایرۀ مور به نقطۀ (***A,B***) روی محور افقی تبدیل می شود و تمام تنشهای برشی در صفحۀ مساوی صفراند. روی سطح کلاهک سومین تنش اصلی برابر با صفر و متناظر با نقطۀ ***O*** است. روی دایرۀ موری به قطر ***AO*** نقطۀ D' نشانگر تنش برشی ماکزیمم است، که روی صفحه ای با زاویۀ $45°$ نسبت به صفحۀ مماس بر کلاهک قرار دارد.

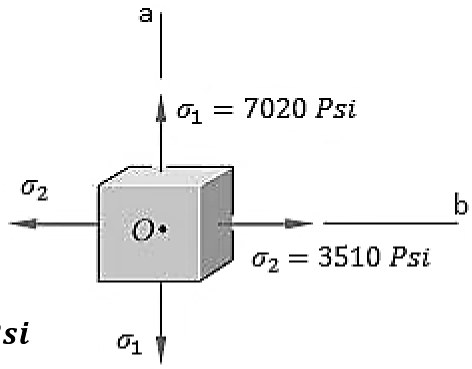


$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(4230\ Psi) \quad \Longrightarrow \quad \tau_{max} = 2115\ Psi$$

ب) بدنهٔ استوانه ای مخزن

نخست تنش محیطی $\boldsymbol{\sigma_1}$ و تنش طولی $\boldsymbol{\sigma_2}$ را تعیین می کنیم:

$$\boldsymbol{P = 180\ Psi} \quad ,, \quad \boldsymbol{t = \frac{3}{8}\ in = 0.375\ in} \quad ,, \quad \boldsymbol{r = 15 - 0.375\ in}$$



$$\boldsymbol{\sigma_1} = \frac{\boldsymbol{Pr}}{\boldsymbol{t}} = \frac{(180\ Psi)(14.625\ in)}{0.375\ in} = 7020\ \boldsymbol{Psi}$$

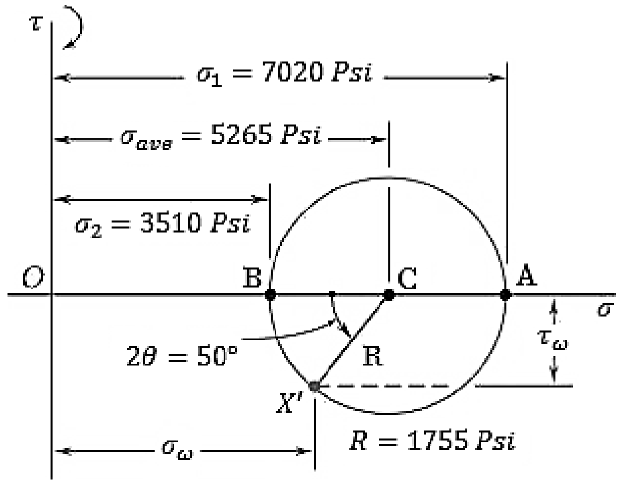
$$\boldsymbol{\sigma_2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{\sigma_1} = 3510\ \boldsymbol{Psi}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{ave}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\sigma_1} + \boldsymbol{\sigma_2}) = 5265\ \boldsymbol{Psi} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{\sigma_1} - \boldsymbol{\sigma_2}) = 1755\ \boldsymbol{Psi}$$

تنش در خط جوش:

با توجه به اینکه هر دو تنش محیطی و طولی، تنش های اصلی هستند، دایرهٔ مور را رسم می کنیم.

یک وجه از جزء موازی با خط جوش از چرخاندن وجه عمود بر محور $\boldsymbol{Ob}$ به اندازهٔ $\boldsymbol{25°}$ در جهت پادساعتگرد به دست می آید. بنابراین روی دایرهٔ مور نقطهٔ $\boldsymbol{X'}$ متناظر با مولفه های تنش روی خط جوش را با چرخاندن شعاع $\boldsymbol{CB}$ به اندازهٔ $\boldsymbol{2\theta = 50°}$ در جهت پادساعتگرد مشخص می کنیم.

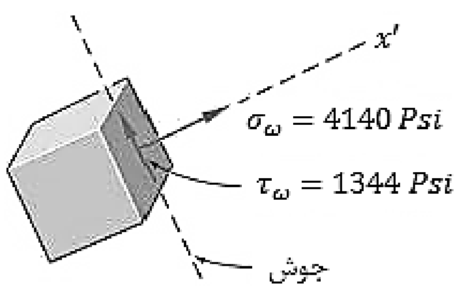


$$\boldsymbol{\sigma_\omega} = \boldsymbol{\sigma_{ave}} - \boldsymbol{R}\cos 50° = 5265 - 1755\cos 50°$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{\sigma_\omega} = +4140\ \boldsymbol{Psi}$$

$$\boldsymbol{\tau_\omega} = \boldsymbol{R}\sin 50° = 1755\sin 50° \Longrightarrow\ \boldsymbol{\tau_\omega} = 1344\ \boldsymbol{Psi}$$

از آنجا که $\boldsymbol{X'}$ زیر محور افقی واقع شده است، $\boldsymbol{\tau_\omega}$ تمایل به چرخاندن جزء در جهت پادساعتگرد دارد.

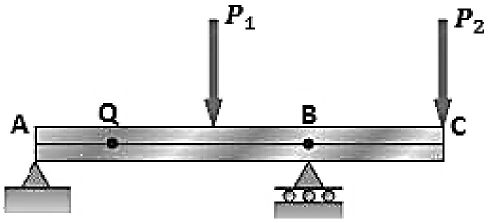


فصل ۹ : تغییر مکان تیرها

مقدمه :

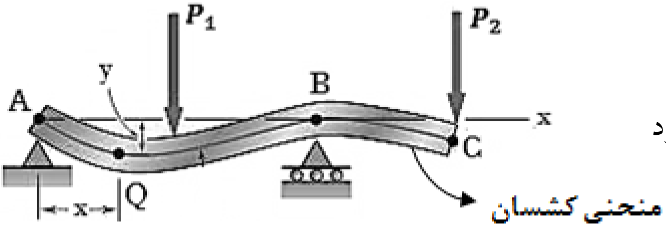
❋ در فصل هشتم طراحی تیرها را از نظر استحکام آموختیم و در این فصل به طراحی تیرها از نقطه نظر تغییر مکان (خیز) می پردازیم.

❋ تیرها را می توان با در نظر گرفتن مقدار ماکزیمم مجاز تغییر مکان آن ها طراحی نمود.



❋ در این فصل با روشی برای تحلیل تیرهای نا معین استاتیکی آشنا می شویم.

❋ تغییر مکان ناشی از ممان خمشی را خیز گویند.(y).(تا این فصل، y فاصله از تار خنثی بود ولی در این فصل منظور خیز تیر است)



❋ **معادلهٔ منحنی کشسان :**

معادلهٔ منحنی است که تیر در زیر بار مفروض، به آن تبدیل می شود

از ریاضیات داریم: شعاع انحنای یک منحنی واقع در صفحه، در نقطهٔ **Q(x,y)** منحنی از رابطهٔ ذیل بدست می آید:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right.$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ مشتق های اول و دوم تابع (y) اند که به وسیلهٔ منحنی مذکور نشان داده شوند$\Big)$

در منحنی کشسان تیر $\Leftarrow$ $\frac{dy}{dx}$(شیب تیر) بسیار کوچک است $\Leftarrow$ پس می توان از توان **2** آن در مقابل عدد **1** صرف نظر نمود

در نتیجه خواهیم داشت $\Rightarrow$ $\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}$ **(1)**

در مقاومت **1** برای شعاع انحناء تیر بر اثر خمش به وجود آمده در آن داشتیم $\Rightarrow$ $\frac{1}{\rho}=\frac{M_{(x)}}{EI}$ **(2)**

– معادلهٔ زیر، معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم است.

– معادلهٔ زیر حاکم بر منحنی کشسان است.

$$(1) \text{ و } (2) \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI}$$

$$\implies \boxed{EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_{(x)}} \qquad \underline{1.9}$$

$\underline{M_{(x)}}$: ممان خمش (N.M) $\underline{EI}$: صلابت خمشی $\underline{I}$: ممان اینرسی مقطع تیر حول تار خنثی

– به دست آوردن تغییر مکان تیرها به روش انتگرال گیری :

$\mathbf{1.9}$ از x با انتگرال گیری بر حسب $\implies EI\frac{dy}{dx} = \int_0^x M_{(x)}dx + C_1 \qquad \underline{2.9}$

$\theta_{(x)}$: زاویهٔ بین خط مماس بر منحنی در نقطهٔ **Q** با امتداد افق (rad)

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \simeq \theta_{(x)}$$

$$\implies \boxed{EI\,\theta_{(x)} = \int_0^x M_{(x)}dx + C_1} \qquad \underline{3.9}$$

x با انتگرال گیری مجدد از $\mathbf{2.9}$ بر حسب $\implies EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M_{(x)}dx + C_1\right]dx + C_2$

$$\implies \boxed{EI\,y = \int_0^x dx \int_0^x M_{(x)}dx + C_1x + C_2} \qquad \underline{4.9}$$

قرارداد:

✍ شیب در جهت پادساعتگرد مثبت است.

✍ اگر جابجایی نقطه به سمت پایین باشد دارای خیز منفی است.

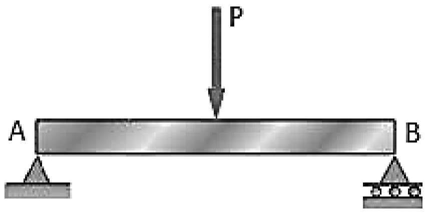
رابطهٔ **3.9** ⟵ معین کنندهٔ شیب تیر در نقطهٔ **Q**

رابطهٔ **4.9** ⟵ معین کنندهٔ خیز تیر در نقطهٔ **Q**

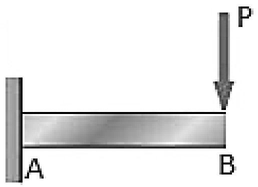
* ثابت های C_2 و C_1 از شرایط مرزی (تکیه گاهها) به دست می آیند.

– شرایط مرزی تیرها :

$\begin{cases} y_B = 0 \\ M_B = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_A = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$ (تکیه گاه غلتکی و مفصلی)



$\begin{cases} V_B = 0 \\ M_B = 0 \\ y_{max} \text{ و } \theta \neq 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} y_A = 0 \\ \theta_A = 0 \\ M \neq 0 \end{cases}$ (تکیه گاه گیر دار)

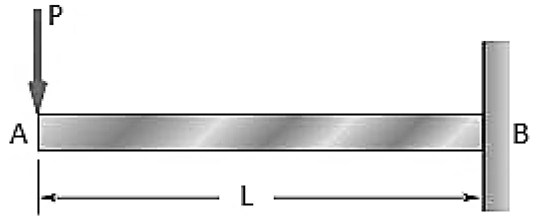


تغییر مکان تیرها به روش انتگرال گیری:

۱– تیر های معین استاتیکی ⟵ **روش مستقیم**

۲– تیرهای نامعین استاتیکی ⟵ **الف) روش مستقیم** **ب) روش بر هم نهی (جمع آثار)**

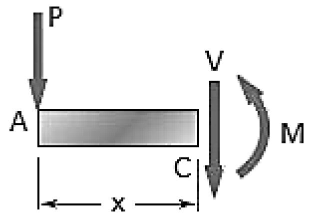
مثال ۱.۹ :



بر انتهای آزاد A تیر یک سر گیردار AB با سطح مقطع یکنواخت بار P وارد می شود.

– معادلهٔ منحنی کشسانی و تغییر مکان (خیز) و شیب در نقطهٔ A را معین کنید.

حل)



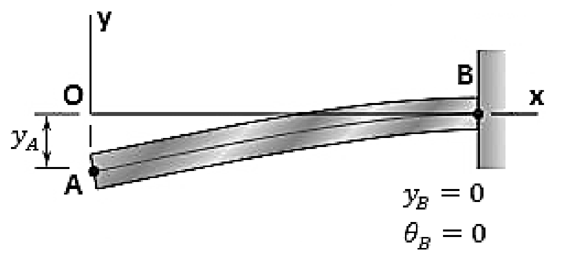
مقطع

$$\sum M_{\text{برش}} = 0 \implies +P\cdot x + M = 0 \implies M = -P\cdot x$$

جایگزینی در رابطهٔ 1.9 $\implies EI\dfrac{d^2y}{dx^2} = M(x) = -P\cdot x$

یکبار انتگرال گیری بر حسب x $\implies EI\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}Px^2 + C_1$

$$if \quad x = L \implies \theta = \frac{dy}{dx} = 0 \implies C_1 = \frac{1}{2}PL^2$$



$$\implies EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{2}PL^2 \quad ❶$$

انتگرال گیری از ❶ $\implies EI\,y = -\dfrac{1}{6}Px^3 + \dfrac{1}{2}PL^2x + C_2$

$$if \quad x = L \implies y = 0 \implies 0 = -\frac{1}{6}PL^3 + \frac{1}{2}PL^3 + C_2 \implies C_2 = -\frac{1}{3}PL^3$$

$$\Rightarrow \quad EI\, y = -\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}PL^2x - \frac{1}{3}PL^3$$

$$y = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \qquad ❷$$

$x = 0$ ❶ و ❷ از رابطهٔ $\Rightarrow \quad y_A = -\frac{PL^3}{3EI}$ و $\theta_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{PL^2}{2EI}$

<u>توجه</u>: در جدول پیوست (د) ، صفحهٔ (۴۶۸) تغییر مکان و شیب تیرهای مهم آورده شده است.

❋ در مثال قبل با یک برش ممان خمش در کل تیر به دست آمد. حال در صورت وجود چند بار نقطه ای و یا ناپیوستگی در بار گسترده می بایست گشتاور خمشی هر قسمت تیر با تابع متفاوت $M_{(x)}$ نشان داده شده و هر تابع $M_{(x)}$ به رابطهٔ جداگانه ای برای شیب و خیز منتهی گردد.

نکتهٔ ❶

نیروی برشی و گشتاور خمشی می توانند در طول تیر ناپیوسته باشند ولی خیز و شیب تیر در هیچ نقطه ای از تیر نمی توانند ناپیوسته باشند.

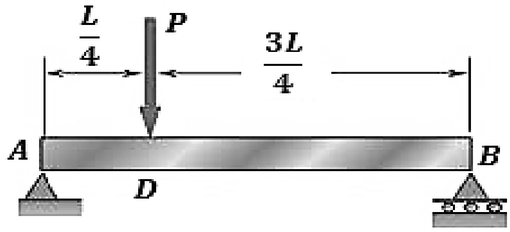
نکتهٔ ❷

خیز ماکزیمم در جایی که شیب تیر صفر است رخ می دهد.(به استثناء انتهای تیر یک سر گیر دار)

نکتهٔ ❸

اگر بارگذاری متقارن باشد خیز ماکزیمم در وسط تیر رخ می دهد ولی در بارگذاری نا متقارن مکان خیز ماکزیمم مشخص نیست.

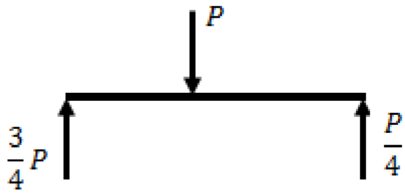
مثال ۳.۹ :



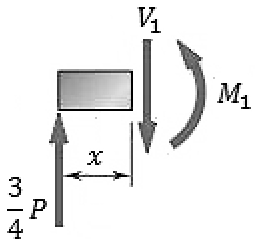
خیز و شیب تیر را در نقطهٔ D به دست آورید.

حل)

برای حل تیر را به دو دهانهٔ AD و DB تقسیم می کنیم:



$\left(x < \frac{L}{4}\right)$ از A تا D :



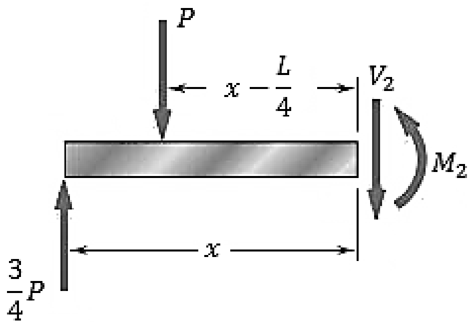
$$M_1 = \frac{3}{4}P \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad EI\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{3}{4}P \cdot x$$

یکبار انتگرال گیری $\Rightarrow EI\dfrac{dy_1}{dx} = EI\,\theta_1 = \dfrac{3}{8}Px^2 + C_1$ ❶

انتگرال گیری مجدد $\Rightarrow EI\,y_1 = \dfrac{1}{8}\,Px^3 + C_1x + C_2$ ❷

$\left(x > \frac{L}{4}\right)$ از D تا B :



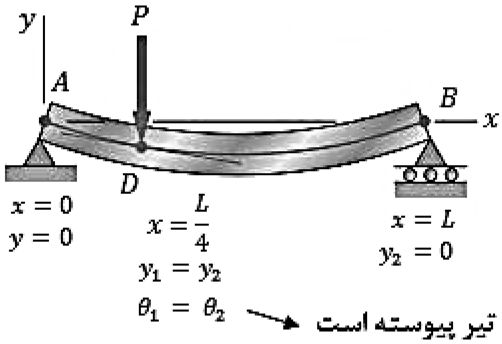
$$M_2 = \frac{3}{4}P \cdot x - P\left(x - \frac{L}{4}\right) = -\frac{1}{4}P \cdot x + \frac{1}{4}PL$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2y_2}{dx^2} = -\frac{1}{4}P \cdot x + \frac{1}{4}PL$$

با یکبار انتگرال گیری $\Rightarrow \quad EI\frac{dy_2}{dx} = EI\,\theta_2 = -\frac{1}{8}Px^2 + \frac{1}{4}PLx + C_3$ ❸

انتگرال گیری مجدد $\Rightarrow \quad EI\,y_2 = -\frac{1}{24}Px^3 + \frac{1}{8}PLx^2 + C_3x + C_4$ ❹

شرایط مرزی مسئله :



چون خیز و شیب در کلیهٔ نقاط تیر پیوسته است

$$if \quad x = 0 \Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad ❶ \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$if \quad x = L \Rightarrow \quad y_2 = 0 \quad ❹ \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{12}PL^3 + C_3L + C_4$$

$$if \quad x = \frac{L}{4} \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 \quad ❶ \text{ و } ❸ \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{128}PL^2 + C_1 = \frac{7}{128}PL^2 + C_3$$

$$if \quad x = \frac{L}{4} \Rightarrow \quad y_1 = y_2 \quad ❷ \text{ و } ❹ \quad \Rightarrow \quad \frac{PL^3}{512} + C_1 \cdot \frac{L}{4} = \frac{11PL^3}{1536} + C_3\frac{L}{4} + C_4$$

با حل همزمان معادلات فوق داریم :

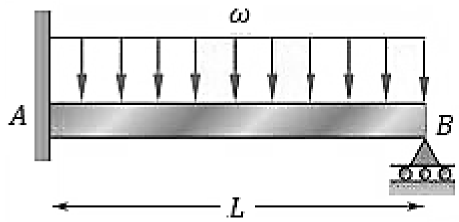
$$C_1 = -\frac{7PL^2}{128} \quad ,, \quad C_2 = 0 \quad ,, \quad C_3 = -\frac{11PL^2}{128} \quad ,, \quad C_4 = \frac{PL^3}{384}$$

با قرار دادن C_2 و C_1 در معادلات ❶ و ❷ $\Leftarrow$

$$EI\,\theta_1 = \frac{3}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128} \quad \Rightarrow x = \frac{L}{4} \Rightarrow \quad \theta_D = -\frac{PL^2}{32EI}$$

$$EI\,y_1 = \frac{1}{8}Px^2 - \frac{7PL^2}{128}x \;\Rightarrow x = \frac{L}{4} \Rightarrow \;\; y_D = -\frac{3PL^3}{256EI}$$

*** <u>تیرهای نامعین استاتیکی</u>**



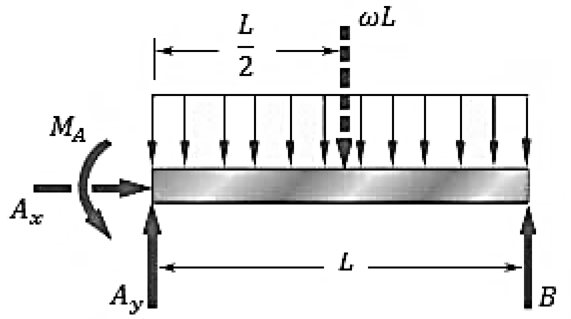
مثال ۵.۹ :

عکس العمل تکیه گاهها را به دست آورید؟

(توجه : به جهت یادگیری روشهای حل تیرهای نامعین استاتیکی این مثال در ادامه به <u>۵</u> روش حل می گردد.)

حل)

دیاگرام آزاد



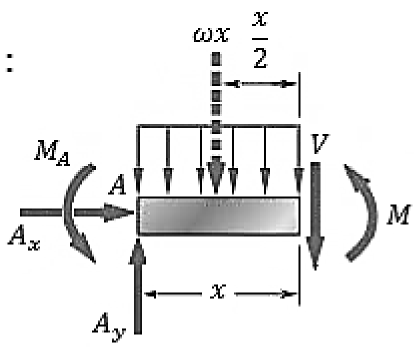
$$\sum f_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \qquad ❶$$

$$\sum f_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B - \omega L = 0 \qquad ❷$$

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A + BL - \frac{\omega L^2}{2} = 0 \qquad ❸$$

در بالا ۳ معادله و <u>٤ مجهول می بینیم</u>، پس یک درجه نا معینی دارد.

مقطع C :



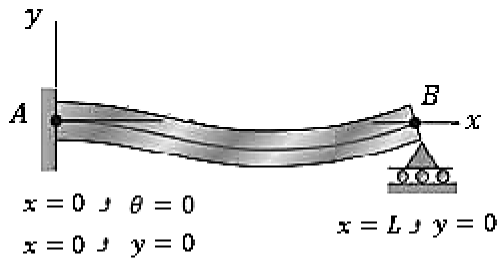
$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; M + \frac{\omega x^2}{2} + M_A - A_y x = 0$$

بر اساس x مرتب می کنیم $\;\Rightarrow\; M = -\frac{\omega x^2}{2} + A_y x - M_A$

حال داریم $\;\Rightarrow\; EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\omega x^2}{2} + A_y x - M_A$

انتگرال گیری $\;\Rightarrow\; EI\,\theta = EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}\omega x^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1$

$$EI\,y = -\frac{1}{24}\omega x^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2 + C_1 x + C_2$$



$$if \quad x = 0 \;\rightarrow\; \theta = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$$

$$if \quad x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

$$\Rightarrow\; EI\,y = -\frac{1}{24}\omega x^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{2}M_A x^2$$

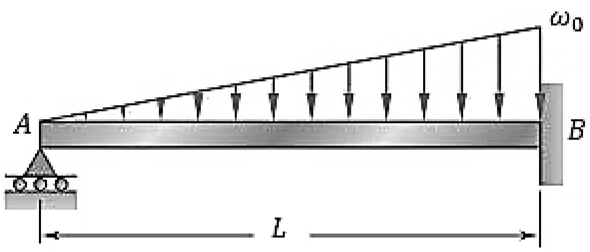
$$if \quad x = L \;\rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = -\frac{1}{24}\omega L^4 + \frac{1}{6}A_y L^3 - \frac{1}{2}M_A L^2$$

بر $6L^2$ تقسیم می کنیم $\;\Rightarrow\; \frac{\omega L^2}{4} + A_y L - 3M_A = 0$ 4

با حل همزمان ٤ معادله خواهیم داشت :

$A_x = 0$,, $A_y = \frac{5}{8}\omega L$,, $M_A = \frac{1}{8}\omega L^2$,, $B = \frac{3}{8}\omega L$

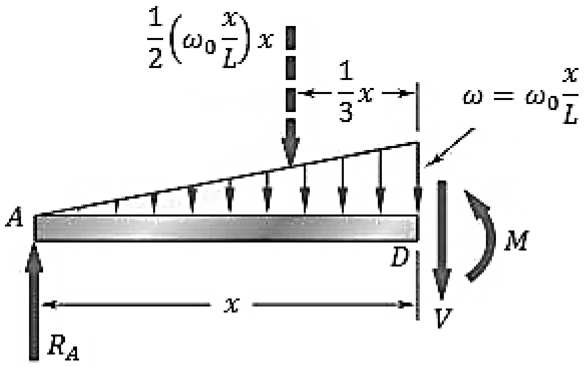
مسئلهٔ نمونهٔ ۳.۹ :



برای تیر یکنواخت AB (**الف**) عکس العمل در A را تعیین کنید، (**ب**) معادلهٔ منحنی کشسانی را به دست آورید، و (**ج**) شیب در نقطهٔ A را معین کنید.(توجه کنید که تیر از نظر استاتیکی یک درجه نا معین است.)

حل)

نمودار جسم آزاد :



گشتاور خمشی :

$$+↺ \sum M_D = 0 \;\Rightarrow\; R_A x - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 x^2}{L}\right)\frac{x}{3} - M = 0 \qquad \Rightarrow \quad M = R_A x - \frac{\omega_0 x^3}{6L}$$

معادلهٔ دیفرانسیل منحنی کشسانی :

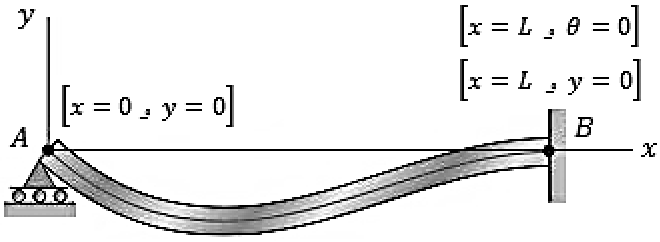
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A x - \frac{\omega_0 x^3}{6L}$$

با توجه به اینکه صلابت خمشی EI ثابت است، با دو بار انتگرال گیری چنین به دست می آید

$$EI\frac{dy}{dx} = EI\,\theta = \frac{1}{2}R_A x^2 - \frac{\omega_0 x^4}{24L} + C_1 \qquad ❶$$

انتگرال گیری مجدد $\Rightarrow$ $$EI\,y = \frac{1}{6}R_A x^3 - \frac{\omega_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \qquad ❷$$

شرایط مرزی :



$$if \quad x=0 \;\rightarrow\; y=0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad ❸$$

$$if \quad x=L \;\rightarrow\; \theta=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}R_A L^2 - \frac{\omega_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \qquad ❹$$

$$if \quad x=L \;\rightarrow\; y=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}R_A L^3 - \frac{\omega_0 L^4}{120} + C_1 L + C_2 = 0 \qquad ❺$$

الف) با ضرب کردن معادلهٔ ❹ در $\underline{L}$ و کم کردن جمله به جملهٔ معادلهٔ ❺ از معادلهٔ به دست آمده، و در نظر گرفتن $\underline{C_2 = 0}$ داریم :

$$\frac{1}{3}R_A L^3 - \frac{1}{30}\omega_0 L^4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad R_A = \frac{1}{10}\omega_0 L \uparrow$$

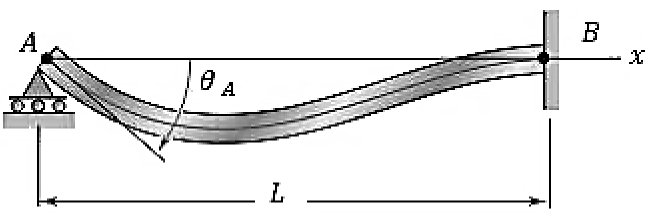
با قرار دادن مقدار R_A در معادلهٔ ❹ $\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\omega_0 L\right)L^2 - \frac{\omega_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{120}\omega_0 L^3$

ب) معادلهٔ منحنی کشسانی : با جایگذاری R_A , C_1 و C_2 در معادلهٔ ❷ داریم :

$$EI\,y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{10}\omega_0 L\right)x^3 - \frac{\omega_0 x^5}{120L} - \left(\frac{1}{120}\omega_0 L^3\right)x + 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\omega_0}{120EIL}\left(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x\right)$$

ج) شیب در A:



$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega_0}{120EIL}\left(-5x^4 + 6L^2x^2 - L^4\right)$$

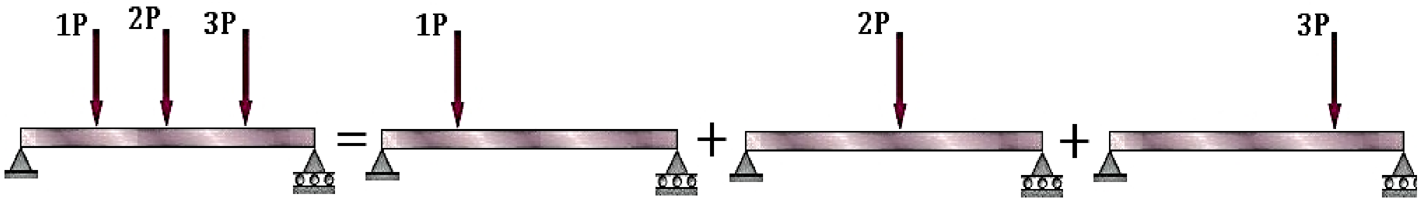
با گذاشتن $x = 0$ ، داریم $\Rightarrow \quad \theta_A = -\frac{\omega_0 L^3}{120EI}$ یا $\theta_A = \frac{\omega_0 L^3}{120EI}$ ↺

* روش بر هم نهی

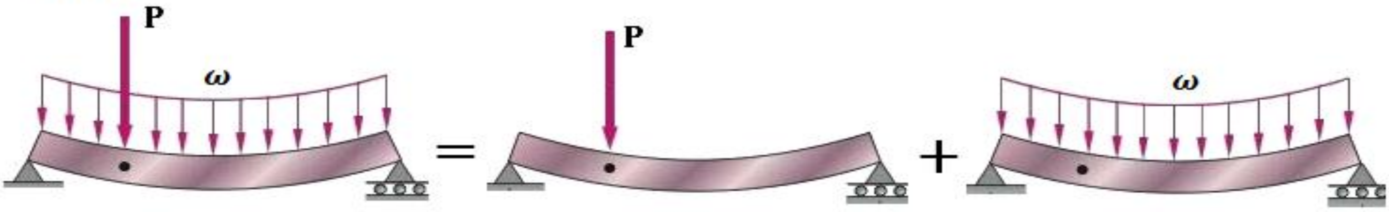
وقتی تیری در معرض چند بار متمرکز یا گسترده قرار می گیرد، اغلب آسانتر است شیب و تغییر مکان ناشی از هر کدام از بارهای مفروض را جداگانه محاسبه نمود سپس نتایج را با استفاده از اصل بر هم نهی با یکدیگر جمع نمود (تیرهای ۱ و ۲). در تیرهایی که از نظر استاتیکی نا معین هستند می توان یکی از عکس العملها را نیروی اضافی فرض نمود که تأثیر آن می بایست با تکیه گاه اولیه سازگار باشد.(تیرهای ۳ و ٤)

تیرهای معین

تیر (۱)

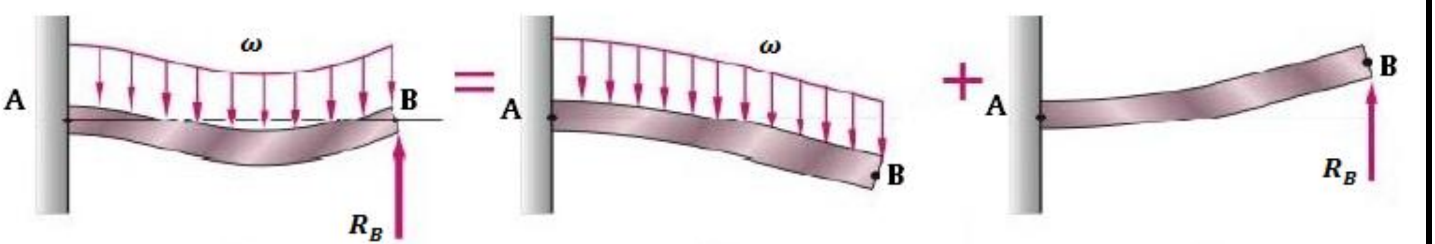


تیر (۲)

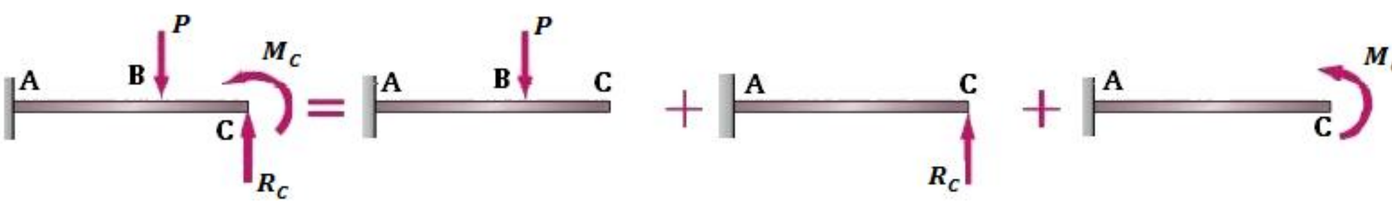


تیر های نا معین

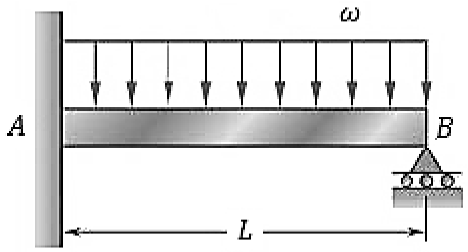
تیر (۳)



تیر (۴)



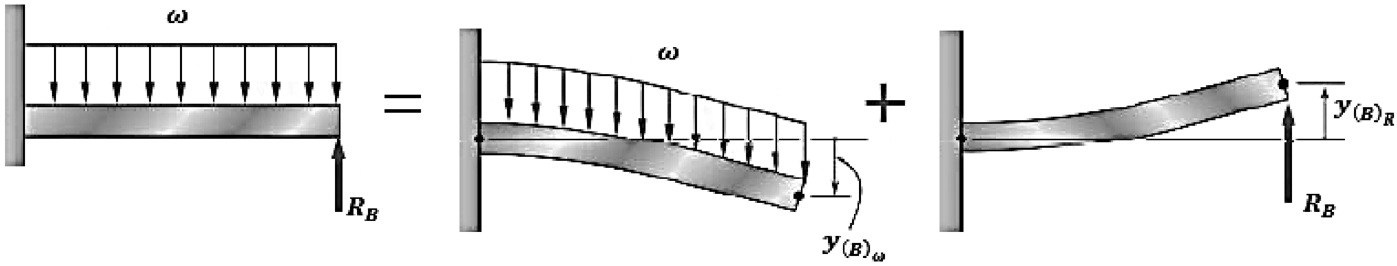
مثال ۸.۹ :



بـا اسـتفاده از روش بـر هـم نهـی عکـس العمـل تیـر ذیـل را بـه دسـت آورید؟ تیر یک درجه نامعینی دارد.

حل)

عکس العمل در ***B*** را یک نیروی اضافی فرض می نماییم.



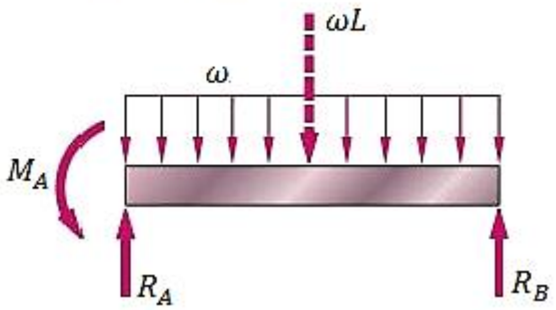
با استفاده از جدول $P.468$ داریم :

$$(y_B)_\omega = -\frac{\omega L^4}{8EI} \quad , \quad (y_B)_R = +\frac{R_B L^3}{3EI}$$

$$y_B = (y_B)_\omega + (y_B)_R = 0$$

$$\Rightarrow \; y_B = -\frac{\omega L^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{3}{8}\omega L \; \uparrow$$

دیاگرام آزاد تیر :



$$\sum f_y = 0 \;\Rightarrow\; R_B + R_A - \omega L = 0 \quad \Rightarrow R_A = \omega L - R_B = \omega L - \frac{3}{8}\omega L = \frac{5}{8}\omega L$$

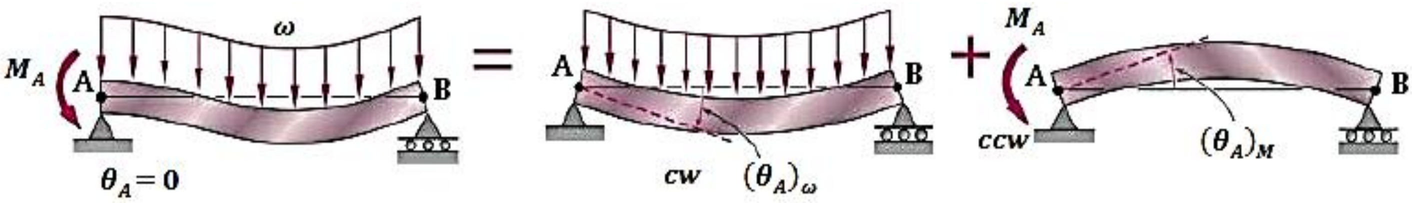
$$R_A = \frac{5}{8}\omega L \quad \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A + R_B L - \omega L\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; M_A = R_B L + \omega L\left(\frac{L}{2}\right) \;\Rightarrow\; M_A = \frac{3}{8}\omega L^2 + \frac{\omega L^2}{2} \quad\Rightarrow\quad M_A = \frac{1}{8}\omega L^2 \;\circlearrowleft$$

راه دوم :

فرض کنیم کوپل وارد بر انتهای $\boldsymbol{A}$ بار اضافی است ولی با این شرط که شیب تیر در $\boldsymbol{A}$ باید صفر شود.



با استفاده از جدول داریم :

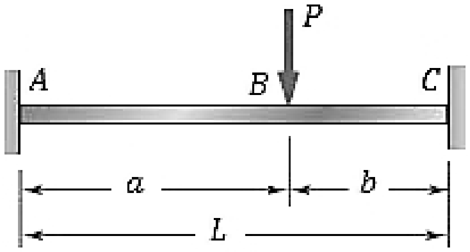
$$(\theta_A)_\omega = -\frac{\omega L^3}{24EI} \qquad , \qquad (\theta_A)_M = \frac{+M_A L}{3EI}$$

$$\theta_A = (\theta_A)_\omega + (\theta_A)_M = 0$$

$$\theta_A = -\frac{\omega L^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad M_A = \frac{1}{8}\omega L^2 \;\circlearrowleft$$

با استفاده از دیاگرام آزاد و نوشتن معادلات تعادل $\boldsymbol{R_A}$ و $\boldsymbol{R_B}$ نیز به دست می آیند.

مسئلۀ نمونۀ ۹.۹:

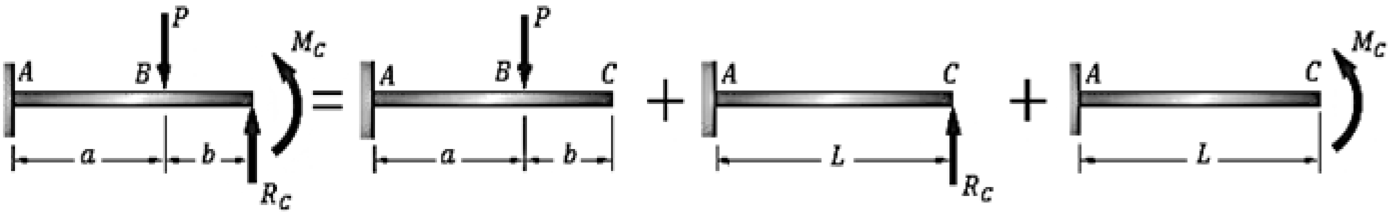


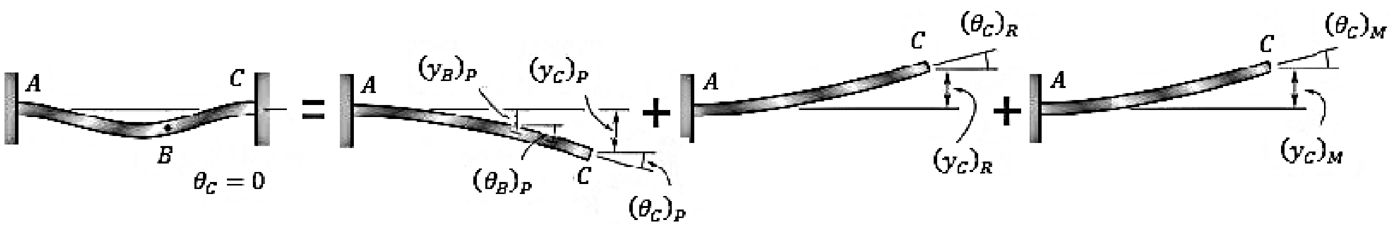
برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، عکس العمل در تکیه گاه ثابت C را تعیین کنید.

حل)

با فرض اینکه نیروی محوری در تیر صفر است $\Longleftarrow$ تیر ABC دو درجه نا معینی دارد.

✼ R_C و M_C را به صورت دو نیروی خارجی در نظر می گیریم:





✪ P بار :

می دانیم : $(\boldsymbol{\theta_C})_P = (\boldsymbol{\theta_B})_P = -\dfrac{\boldsymbol{Pa^2}}{\boldsymbol{2EI}}$ با استفاده از جدول **468**

$$(y_C)_P = (y_B)_P + (\theta_B)_P \cdot b = -\frac{Pa^3}{3EI} - \frac{Pa^2}{2EI} \cdot b = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a + 3b)$$

✪ R_C نیروی :

$(\boldsymbol{\theta_C})_R = \dfrac{+R_C L^2}{2EI}$ علامت + پاد ساعتگرد $\boldsymbol{CCW}$

$$(y_C)_R = +\frac{+R_C L^3}{3EI}$$

✪ M_C کوپل :

$(\theta_C)_M = +\frac{M_C L}{EI}$ علامت + پاد ساعتگرد CCW

$(y_C)_M = +\frac{M_C L^2}{2EI}$

شرایط مرزی $if \quad x = L \quad \longrightarrow \quad \theta_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_C = (\theta_C)_P + (\theta_C)_R + (\theta_C)_M$

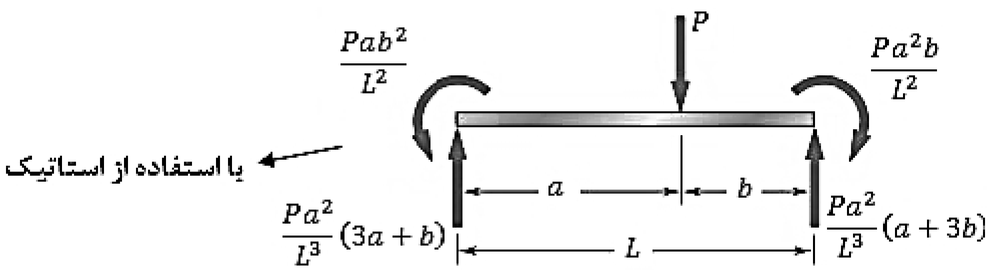
$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{Pa^2}{2EI} + \frac{R_C L^2}{2EI} + \frac{M_C L}{EI}$ ❶

$if \quad x = L \quad \longrightarrow \quad y_C = 0 \quad \Rightarrow \quad y_C = (y_C)_P + (y_C)_R + (y_C)_M$

$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{Pa^2}{6EI}(2a+3b) + \frac{R_C L^3}{3EI} + \frac{M_C L^2}{2EI}$ ❷

با حل همزمان ❶ , ❷ داریم $\Rightarrow \quad R_C = \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b) \uparrow$

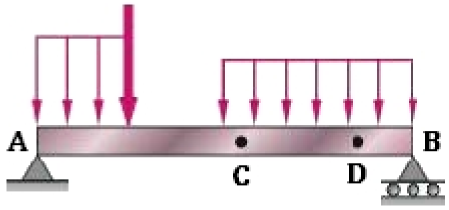
$M_C = \frac{-Pa^2 b}{L^2} \circlearrowleft \Rightarrow M_C = \frac{+Pa^2 b}{L^2} \circlearrowright$

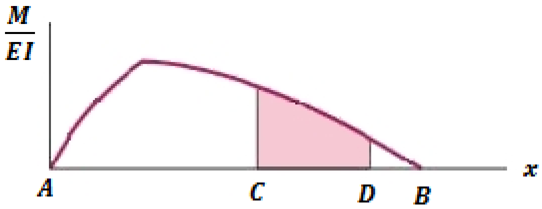


* روش گشتاور سطح

✓ قضیه اول گشتاور سطح :

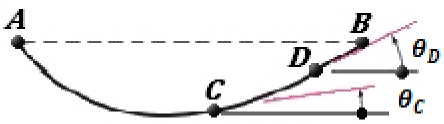
تیر روبه رو با بارگذاری دلخواه را در نظر می گیریم :



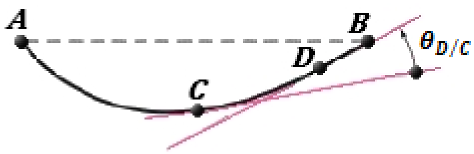


$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} \cdot dx$$



$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} \cdot dx$$



$$\theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} \cdot dx$$

قضیهٔ اول گشتاور سطح :

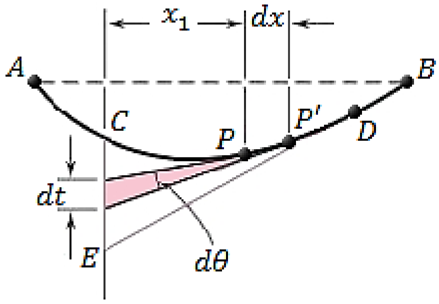
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta_{D/C} = \frac{M}{EI}}$ سطح زیر نمودار در فاصله بین $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{D}$

قرارداد

- سطح مثبت (بالای محور $\boldsymbol{x}$) $\Longleftarrow$ چرخش پادساعتگرد مماس بر منحنی کشسانی وقتی از $\boldsymbol{C}$ به $\boldsymbol{D}$ حرکت می کنیم.

- سطح منفی (پایین محور $\boldsymbol{x}$) $\Longleftarrow$ چرخش ساعتگرد مماس بر منحنی کشسانی وقتی از $\boldsymbol{C}$ به $\boldsymbol{D}$ حرکت می کنیم.

✓ قضیه دوم گشتاور سطح :



حال دو نقطهٔ $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{P'}$ را به فاصلهٔ $\boldsymbol{dx}$ بین $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{D}$ در نظر می گیریم :

چون شیب $\boldsymbol{\theta}$ در $\boldsymbol{P}$ و زاویهٔ $\boldsymbol{d\theta}$ هر دو کوچکند پس داریم :

$$dt = x_1 \cdot d\theta \qquad \Longrightarrow \qquad dt = x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx$$

انتگرال گیری $\longrightarrow \quad t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \cdot \frac{M}{EI} \cdot dx = x_1 \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI} \cdot dx$

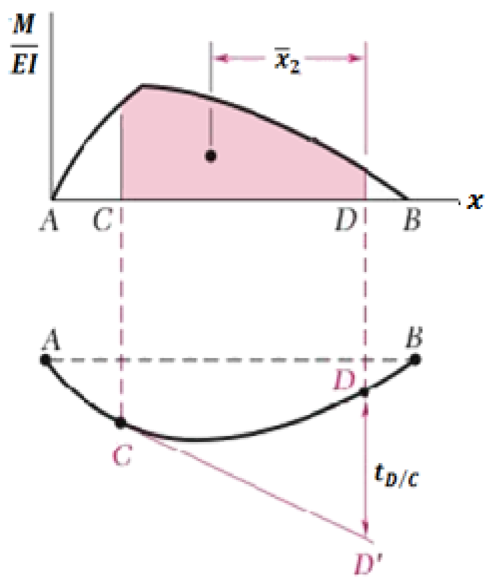
انحراف مماسی $\boldsymbol{C}$ نسبت به $\boldsymbol{D}$ مساوی است با گشتاور اول سطح زیر نمودار $\left(\boldsymbol{\frac{M}{EI}}\right)$ بین $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{D}$ نسبت به محور عمودی گذرنده از $\boldsymbol{C}$

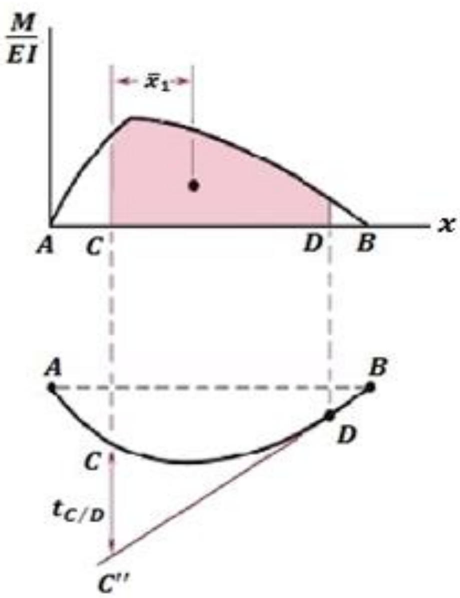
$$\boxed{\boldsymbol{t_{C/D}} = \left(\text{مساحت بین } \boldsymbol{C} \text{ و } \boldsymbol{D} \text{ در نمودار } \boldsymbol{\frac{M}{EI}}\right)\boldsymbol{\bar{x}_1}}$$

$\boldsymbol{t_{D/C}}$ $\longleftarrow$ فاصله عمودی از $\boldsymbol{D}$ تا خط مماس بر منحنی کشسان در نقطهٔ $\boldsymbol{C}$

$\boldsymbol{t_{C/D}}$ $\longleftarrow$ فاصله عمودی از $\boldsymbol{C}$ تا خط مماس بر منحنی کشسان در نقطهٔ $\boldsymbol{D}$

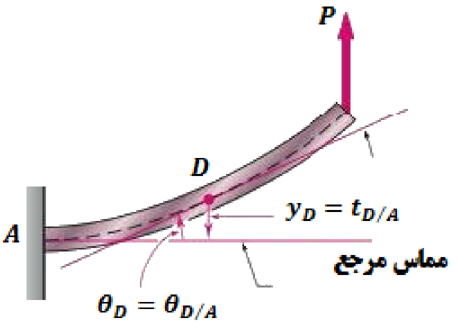
$$\boxed{\boldsymbol{t_{D/C}} = \left(\text{مساحت بین } \boldsymbol{C} \text{ و } \boldsymbol{D} \text{ در نمودار } \boldsymbol{\frac{M}{EI}}\right)\boldsymbol{\bar{x}_2}}$$





* مماس مرجع

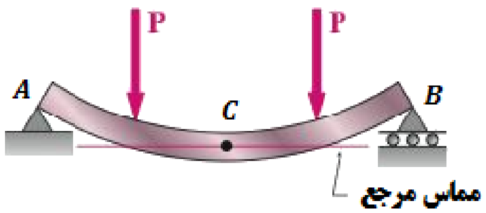
۱) مماس در انتهای گیردار (ثابت) :

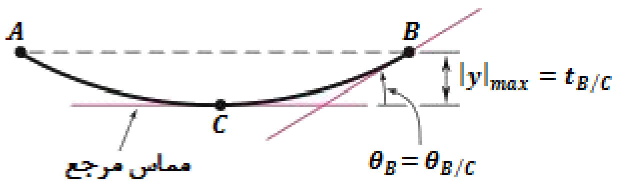


$$\theta_A = 0 \Longrightarrow \theta_D = \theta_{D/A} \Longrightarrow$$ قضیه (۱)

$$\theta_A = 0 \Longrightarrow t_D = t_{D/A} \Longrightarrow$$ قضیه (۲)

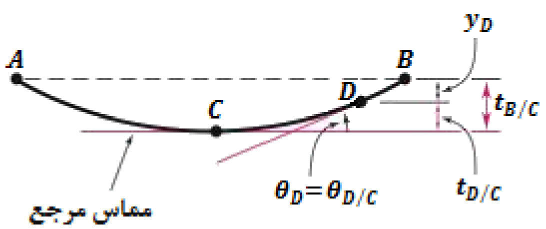
۲) تیرهایی با بارگذاری متقارن :





$$\theta_C = 0 \Longrightarrow \theta_B = \theta_{B/C} \Longrightarrow$$ قضیه (۱)

$$\theta_C = 0 \Longrightarrow |y|_{max} = t_{B/C} \Longrightarrow$$ قضیه (۲)



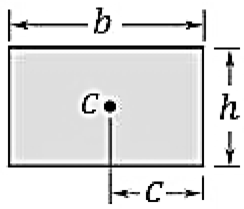
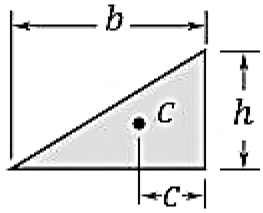
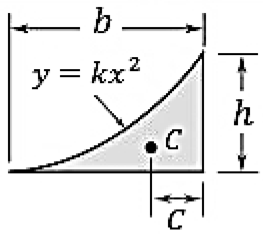
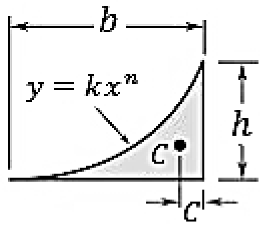
شیب در هر نقطهٔ دیگر :

$$\theta_C = 0 \Longrightarrow \theta_D = \theta_{D/C}$$

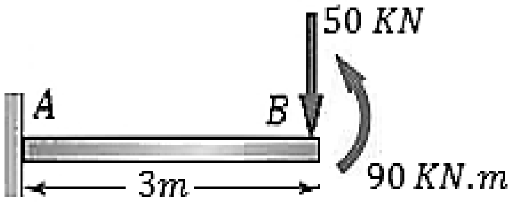
خیز هر نقطهٔ دیگر :

$$y_D = t_{D/C} - t_{B/C}$$

در حل مسائل به روش گشتاور سطح توصیه می شود برای راحتی کار از روش جزء به جزء استفاده گردد. به همین منظور به مساحت ها و مرکز جرم های چند شکل متداول در ذیل اشاره می گردد:

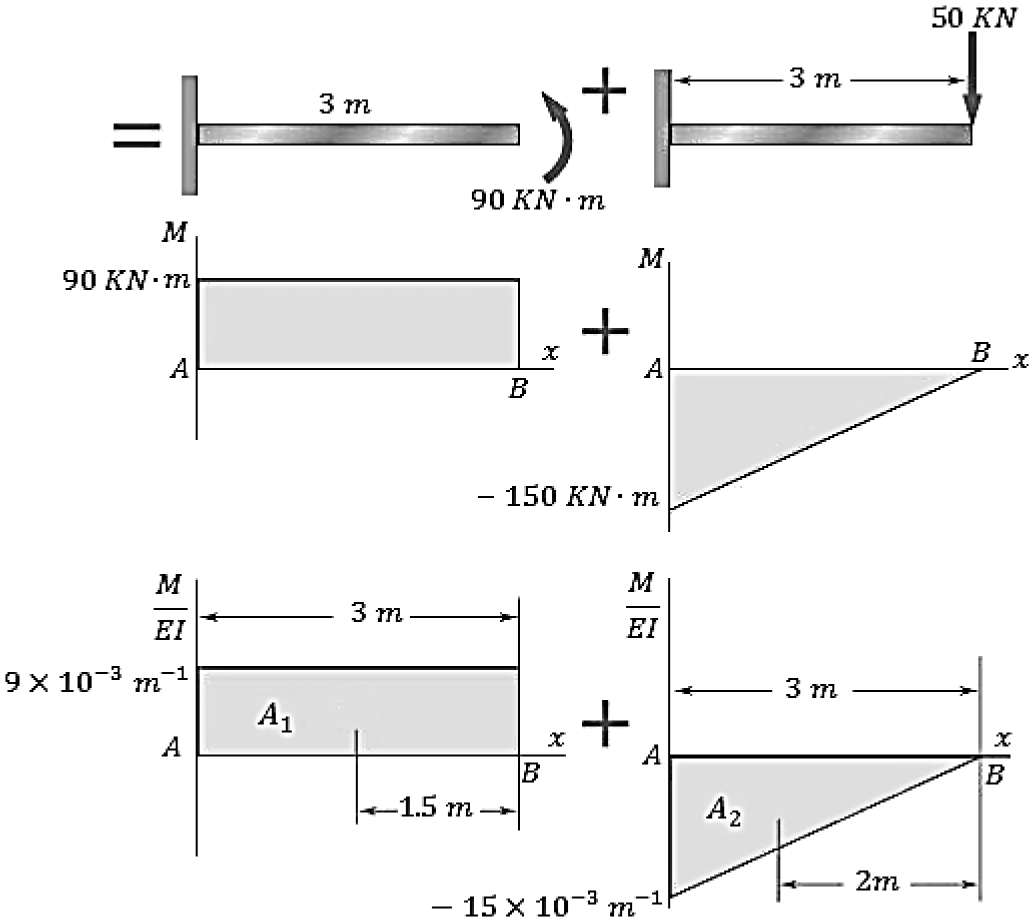
شکل		مساحت	C
مستطیل		bh	$\frac{b}{2}$
مثلث		$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$
سطح زیر سهمی درجه ۲		$\frac{bh}{3}$	$\frac{b}{4}$
سطح زیر سهمی درجه n		$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{b}{n+2}$

مثال ۱۰.۹ :



مطلوبست شیب و خیز تیر در انتهای B چنانچه صلابت خمشی، $EI = 10\ MN \cdot m^2$ باشد.

حل)



قضیه اول گشتاور سطح : $\Rightarrow\ \theta_A = 0 \ \Rightarrow\ \theta_B = \theta_{B/A} = A_1 + A_2$ ↲

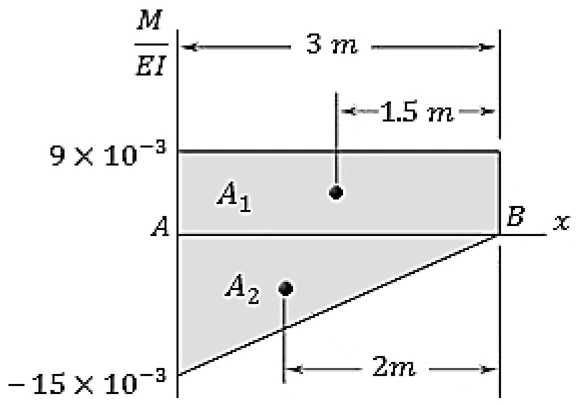
$$\Rightarrow\ = (9 \times 10^{-3} \times 3) - \frac{1}{2}(15 \times 10^{-3} \times 3) = 27 \times 10^{-3} - 22.5 \times 10^{-3} = 4.5 \times 10^{-3}\ rad$$

با 2 قضیه گشتاور دوم سطح : $\Longrightarrow \quad y_B = t_{B/A} = A_1(1.5\ m) + A_2(2\ m) = (27\times 10^{-3})1.5 - (22.5\times 10^{-3})2$

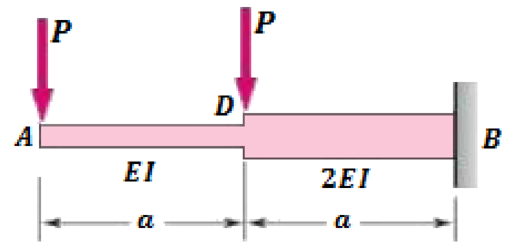
$$\Longrightarrow \quad = 40.5 - 45 = -4.5\ mm$$

نکتهٔ

در عمل راحت تر است دو نمودار روی یک نمودار رسم گردد.

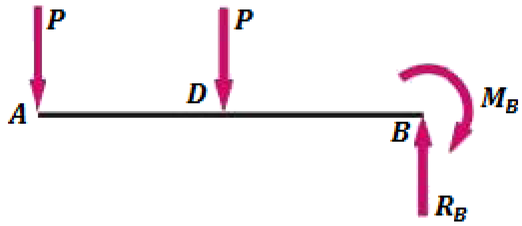


مسئله نمونه ۱۰.۹ :



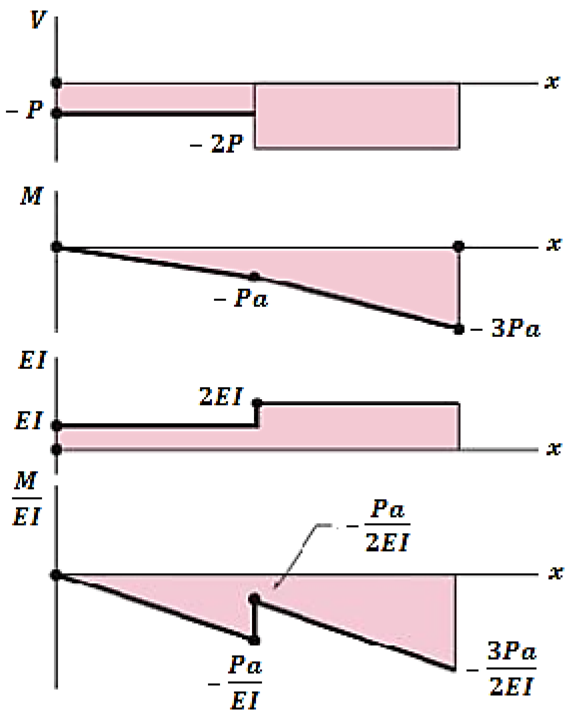
میله های منشوری AD و DB به یکدیگر جوش داده شده اند و از آنها تیر یک سر گیردار ADB ساخته شده است. می دانیم که صلابت خمشی در قسمت AD تیر برابر است با EI و در قسمت DB برابر است با $2EI$. برای بار گذاری نشان داده شده، شیب و تغییر مکان را در انتهای A تعیین کنید.

حل)

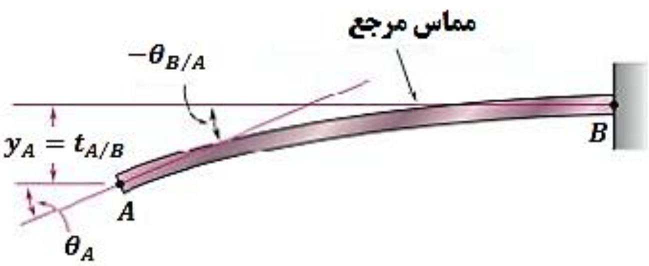


نمودار (M/EI). نخست نمودار گشتاور خمشی تیر را رسم می کنیم و سپس نمودار (M/EI) را با تقسیم مقدار M در هر نقطهٔ تیر بر مقدار متناظر صلابت خمشی به دست می آوریم.

مماس مرجع. مماس افقی در انتهای گیر دار B را مماس مرجع انتخاب می کنیم. چون $\theta_B = 0$ و $y_B = 0$، می بینیم که:



$$\theta_A = -\theta_{B/A} \qquad y_A = t_{A/B}$$



شیب در نقطهٔ A : با تقسیم نمودار (M/EI) به سه جزء مثلثی مطابق شکل، می نویسیم

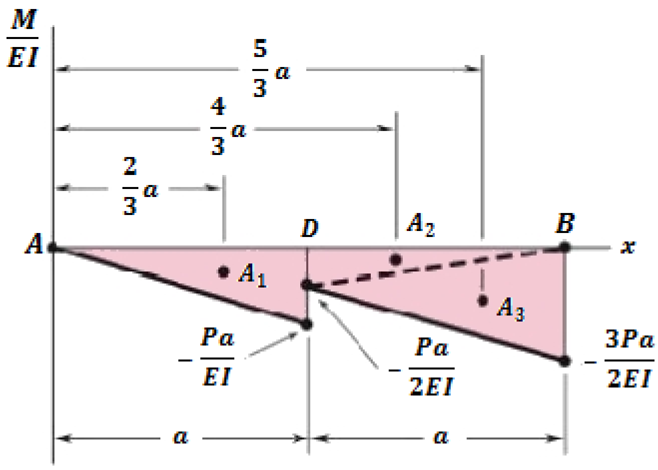
$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{EI}a = -\frac{Pa^2}{2EI} \qquad\qquad A_2 = -\frac{1}{2}\frac{Pa}{2EI}a = -\frac{Pa^2}{4EI}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\frac{3Pa}{2EI}a = -\frac{3Pa^2}{4EI}$$

با استفاده از قضیهٔ اول گشتاور سطح، داریم

$$\theta_{B/A} = A_1 + A_2 + A_3 = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{Pa^2}{4EI} - \frac{3Pa^2}{4EI} = -\frac{3Pa^2}{2EI}$$

$$\theta_A = -\theta_{B/A} = +\frac{3Pa^2}{2EI} \qquad\qquad \theta_A = \frac{3Pa^2}{2EI} \measuredangle$$



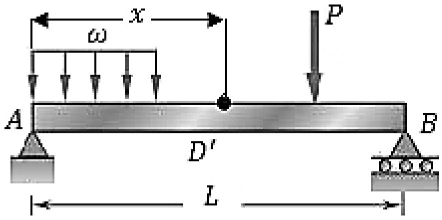
تغییر مکان در A : با استفاده از قضیهٔ دوم گشتاور سطح، داریم

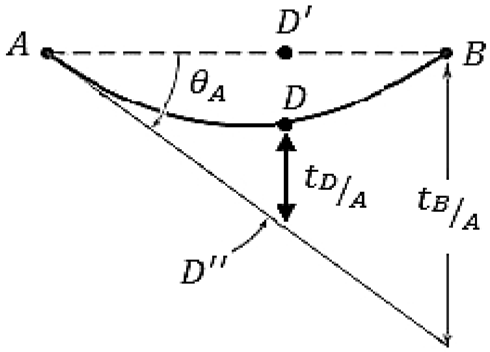
$$y_A = t_{A/B} = A_1\left(\frac{2}{3}a\right) + A_2\left(\frac{4}{3}a\right) + A_3\left(\frac{5}{3}a\right) = \left(-\frac{Pa^2}{2EI}\right)\frac{2a}{3} + \left(-\frac{Pa^2}{4EI}\right)\frac{4a}{3} + \left(-\frac{3Pa^2}{4EI}\right)\frac{5a}{3}$$

$$y_A = -\frac{23Pa^3}{12EI} \qquad\qquad y_A = \frac{23Pa^3}{12EI} \downarrow$$

* کاربرد قضایای گشتاور سطح برای تیرهایی با بارگذاری نا متقارن

در حل اینگونه تیرها به راحتی نمی توان نقطه ای از تیر را که مماس در آن نقطه افقی باشد معین به همین دلیل پیشنهاد می گردد مماس مرجع را در یکی از تکیه گاههای تیر انتخاب نمود بر این اساس برای تیر زیر مماس در تکیه گاه **A** را در نظر می گیریم:





*** شیب در نقطهٔ A با محاسبهٔ**

انحراف $t_{B/A}$ قابل محاسبه است

$$\Longrightarrow L \cdot \theta_A = t_{B/A} \;\Longrightarrow\; \theta_A = \mp \frac{t_{B/A}}{L}$$

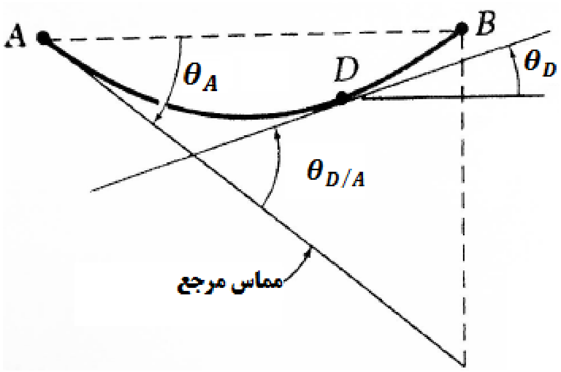
علامت $(-)$ ، در جهت عقربه های ساعت و علامت $(+)$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت فرض می شود.

– حال با دانستن شیب مماس مرجع، شیب هر نقطه از تیر مثل D را می توان مشخص نمود.

توجه $\quad \Longrightarrow \quad \tan\theta_A = \dfrac{D'D''}{x} \;\Longrightarrow\; D'D'' = x \cdot \tan\theta_A$

$$\theta_{D/A} = \theta_D - \theta_A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\theta_D = \theta_A + \theta_{A/D}}$$

$\theta_{A/D}$ و θ_A هر دو معلوم و θ_D مجهول است.



همچنین با استفاده از شکل صفحهٔ قبل داریم.(قضیهٔ تالس):

$$\frac{D'D''}{t_{B/A}} = \frac{AD'}{\mathrm{AB}} = \frac{x}{\mathrm{L}} \quad \Longrightarrow \quad D'D'' = \left(\frac{x}{\mathrm{L}}\right) t_{B/A}$$

$$y_D = DD' = t_{D/A} - D'D'' = t_{D/A} - \left(\frac{x}{L}\right) t_{B/A}$$

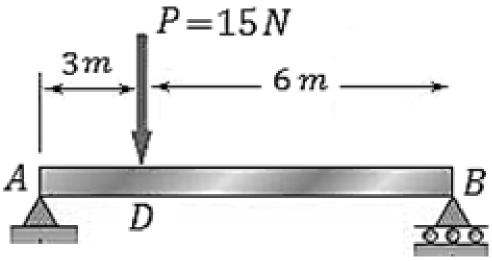
$$\Longrightarrow \quad \boxed{y_D = t_{D/A} - \left(\frac{x}{L}\right) t_{B/A}}$$

نکتهٔ

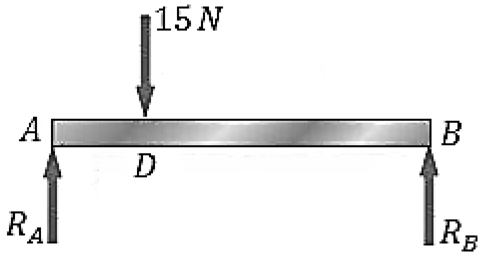
برای تعیین خیز ماکزیمم در تیرهایی با بارگذاری نامتقارن می بایست نقطه ای که در آنجا مماس افقی است را پیدا کرده و تغییر مکان آن نقطه را تعیین نماییم. ⟸ در مثال توضیح بیشتری داده می شود.

مشابه مثال ۱۲.۹ :

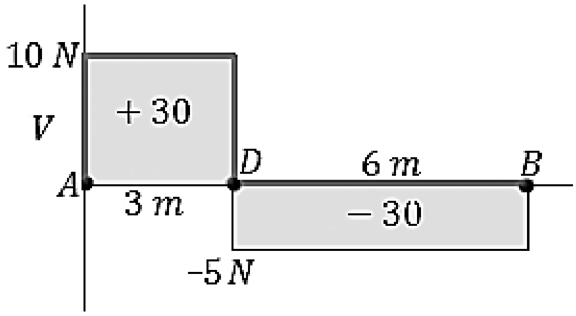
برای تیر مقابل مطلوبست خیز و شیب در نقطهٔ D ؟ EI ثابت .



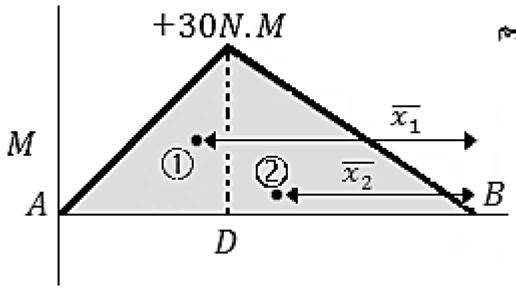
حل)

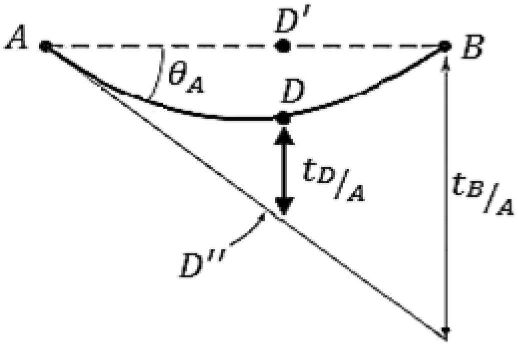


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 9 - 15 \times 3 = 0 \Rightarrow R_B = 5\ N \quad \text{و} \quad R_A = 10\ N$$



چون EI ثابت است از دیاگرام M برای به دست آوردن θ و t ما استفاده می کنیم





شیب D :

$$t_{B/A} = \left(\frac{30}{EI}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\times 3+6\right)+\left(\frac{30}{EI}\times\frac{6}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times 6\right)=\frac{675}{EI}$$

$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L}=\frac{-\frac{675}{EI}}{9}=-\frac{75}{EI}$$

$$\theta_{D/A}=A_1=\left(\frac{30}{EI}\times\frac{3}{2}\right)=\frac{45}{EI}$$

می دانیم $\Rightarrow \quad \theta_D=\theta_A+\theta_{D/A}=-\frac{75}{EI}+\frac{45}{EI}=-\frac{30}{EI} \quad \Rightarrow \quad \theta_D=-\frac{30}{EI}$

خیز D :

$$\frac{D'D''}{t_{B/A}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad D'D''=\frac{1}{3}t_{B/A}=\frac{1}{3}\times\frac{675}{EI}=\frac{225}{EI}$$

$$t_{D/A}=\left(\frac{30}{EI}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\times 3\right)=\frac{45}{EI}$$

$$y_D=DD'=t_{D/A}-D'D''=\frac{45}{EI}-\frac{225}{EI}=-\frac{180}{EI} \quad\Rightarrow\quad y_D=-\frac{180}{EI}$$

*** خیز ماکزیمم :**

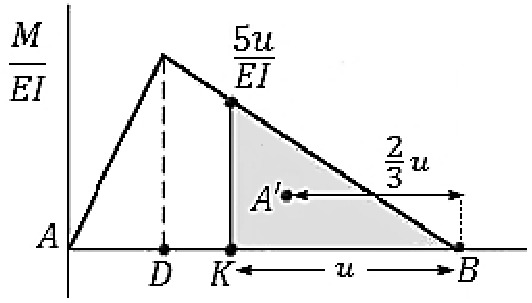
تعیین نقطهٔ K که در آن شیب صفر است :

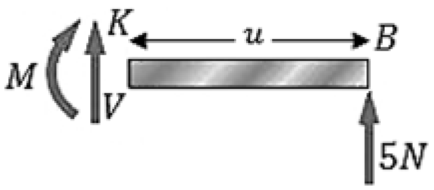
$\theta_A < 0$ و $\theta_D < 0$ $\Leftarrow$ نقطهٔ K بین نقاط B و D می باشد.

بهتر است شیب در K را به جای شیب در A به شیب در B ارتباط دهیم تا محاسبات آسانتر گردد.

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A \quad \Rightarrow \quad \theta_B = \theta_A + \theta_{B/A} = -\frac{75}{EI} + A_1 + A_2$$

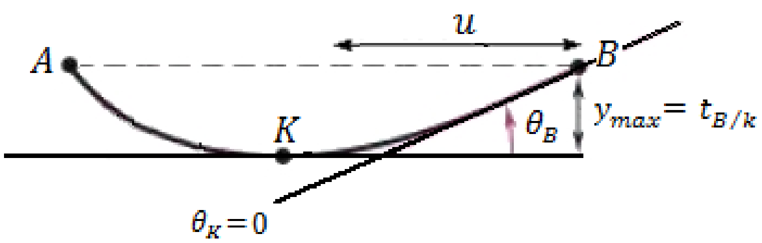
$$\theta_B = -\frac{75}{EI} + \left(\frac{30}{EI} \times \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{30}{EI} \times \frac{6}{2}\right) = \frac{60}{EI} \qquad ❶$$





مقدار گشتاور خمشی در فاصله u از نقطه B $\Longrightarrow$ $M = 5u$

از روی نمودار بالا داریم : $A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5u}{EI} \cdot u = \frac{5u^2}{2EI}$ ❷



$$\theta_{B/K} = \theta_B - \theta_K \quad \longrightarrow \quad \theta_K = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{B/K} = \theta_B = A' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = A'} \qquad ❸$$

$$❶,❷,❸ \quad \Longrightarrow \quad \frac{60}{EI} = \frac{5u^2}{2EI} \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{120}{5}} = \sqrt{24} = 4.9\ m \quad \Longrightarrow \quad u = 4.9\ m$$

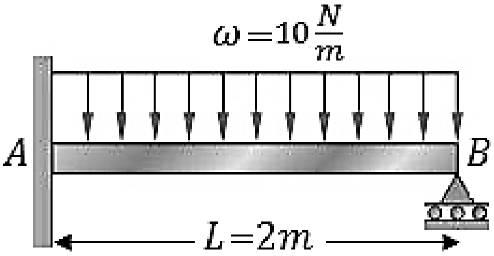
قضیه دوم گشتاور سطح $\Longrightarrow \quad |y|_{max} = t_{B/K} = A'\left(\frac{2}{3}\cdot u\right) = \frac{5u^2}{2EI}\left(\frac{2}{3}\cdot u\right) = \frac{5u^3}{3EI}$

$$|y|_{max} = \frac{5 \times 4.9^3}{3EI} = \frac{196}{EI} \qquad \Longrightarrow \qquad |y|_{max} = \frac{196}{EI}$$

* قضایای گشتاور اول سطح برای تیرهای نامعین استاتیکی

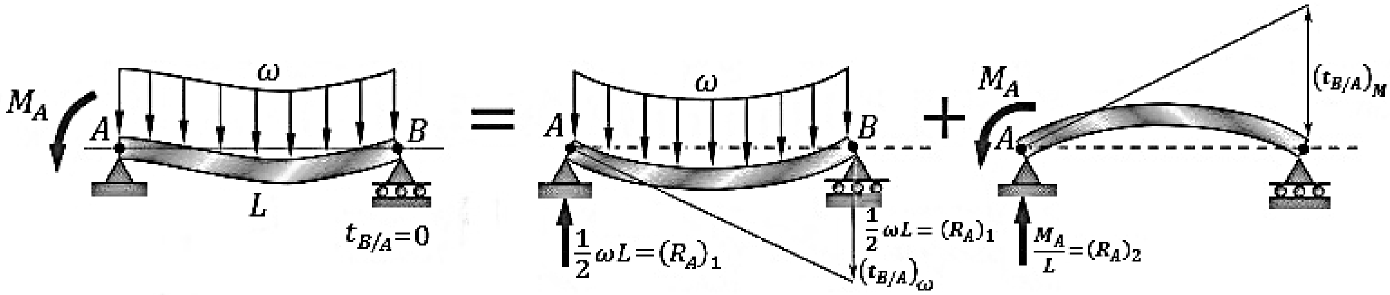
روش حل تیرهای نامعین استاتیکی همانند روش انتگرال گیری می باشد یعنی بدین ترتیب که به تعداد درجه نامعینی، عکس العملها را بار مجهول در نظر گرفته که همراه با دیگر بارهای خارجی می بایست تغییر شکلهایی ایجاد کند که با تکیه گاههای اصلی سازگار باشد.

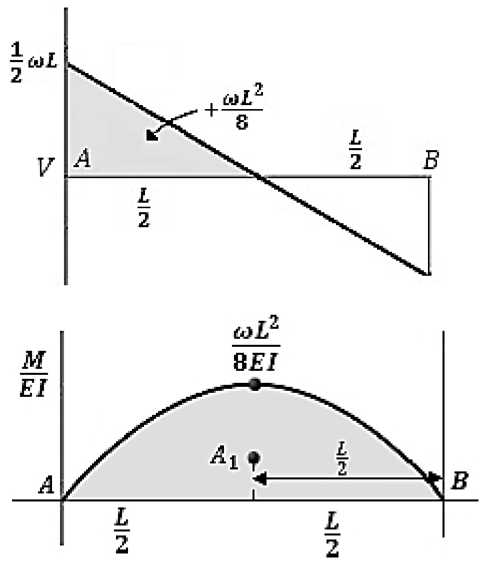
مثال ۱۴.۹ :

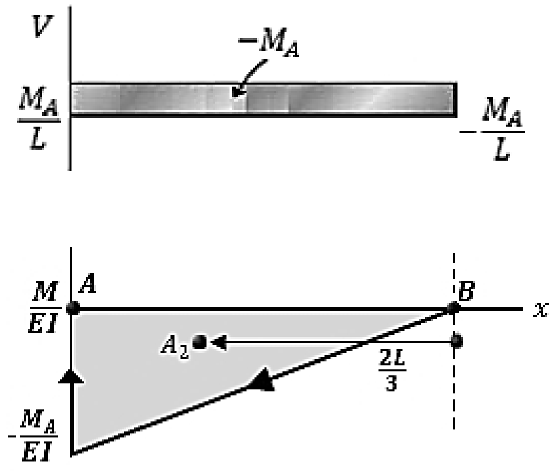


حل)

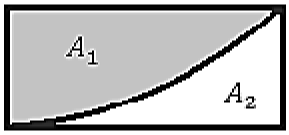
تیر یک درجه نامعینی دارد لذا یکی از عکس العملهای تکیه گاهی را به صورت بار خارجی در نظر می گیریم:







$$\left(t_{B/A}\right)_{\omega} = A_1\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot L\cdot\frac{\omega L^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\omega L^4}{24EI}$$



مساحت سهمی درجه ۲

$A_2 = \frac{bh}{3}$

$A_1 = bh - \frac{bh}{3} = \frac{2}{3}bh$

$A_1 = \frac{2}{3}bh$

$$\left(t_{B/A}\right)_{M} = A_2\left(\frac{2}{3}L\right) = \left(-\frac{1}{2}\cdot L\cdot\frac{M_A}{EI}\right)\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{M_A L^2}{3EI}$$

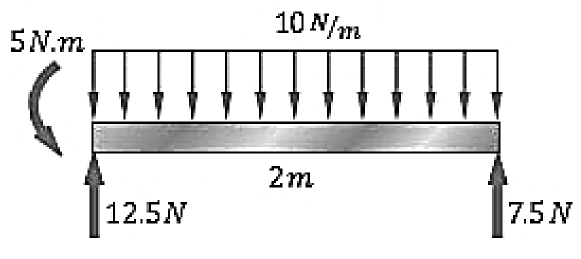
$$\Longrightarrow \quad t_{B/A} = \left(t_{B/A}\right)_{\omega} + \left(t_{B/A}\right)_{M} = 0$$

$$\frac{\omega L^4}{24EI} - \frac{M_A L^2}{3EI} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad M_A = +\frac{1}{8}\,\omega L^2$$

$$\Longrightarrow \quad R_A = (R_A)_1 + (R_A)_2 = \frac{1}{2}\omega L + \frac{1}{8}\omega L = \frac{5}{8}\omega L \quad \Longrightarrow \quad R_A = \frac{5}{8}\omega L$$

$$\Longrightarrow \quad R_B = (R_B)_1 + (R_B)_2 = \frac{1}{2}\omega L - \frac{1}{8}\omega L = \frac{3}{8}\omega L \quad \Longrightarrow \quad R_B = \frac{3}{8}\omega L$$

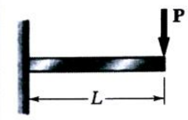
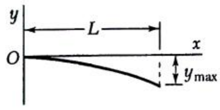
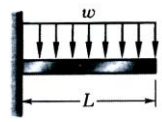
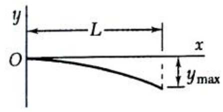
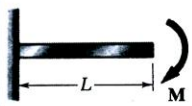
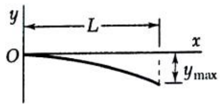
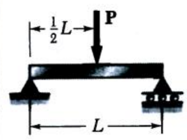
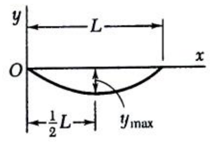
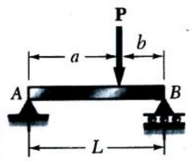
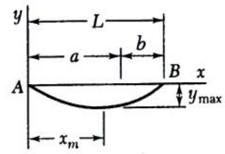
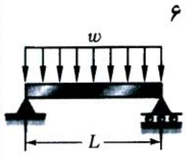
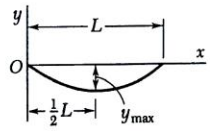
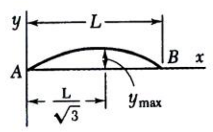
$$\begin{cases} M_A = \frac{1}{8}(10\times 2^2) = 5\ N\cdot m \\ R_A = \frac{5}{8}\omega L = \frac{5}{8}(10\times 2) = 12.5\ N \\ R_B = \frac{3}{8}\omega L = \frac{3}{8}(10\times 2) = 7.5\ N \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum f_y = 0 \ \checkmark \\ \sum M_A = 0 \ \checkmark \\ \sum M_B = 0 \ \checkmark \end{cases}$$

پس مسئله درست حل شده است

تغییر مکان تیر و شیب آن

تیر و بارگذاری	منحنی کشسان	تغییر مکان ماکزیمم	شیب در انتها	معادلهٔ منحنی کشسان
۱ 		$-\dfrac{PL^۳}{۳EI}$	$-\dfrac{PL^۲}{۲EI}$	$y=\dfrac{P}{۶EI}(x^۳-۳Lx^۲)$
۲ 		$-\dfrac{wL^۴}{۸EI}$	$-\dfrac{wL^۳}{۶EI}$	$y=-\dfrac{w}{۲۴EI}(x^۴-۴Lx^۳+۶L^۲x^۲)$
۳ 		$-\dfrac{ML^۲}{۲EI}$	$-\dfrac{ML}{EI}$	$y=-\dfrac{M}{۲EI}x^۲$
۴ 		$-\dfrac{PL^۳}{۴۸EI}$	$\pm\dfrac{PL^۲}{۱۶EI}$	برای $x\le\frac{۱}{۲}L$: $y=\dfrac{P}{۴۸EI}(۴x^۳-۳L^۲x)$
۵ 		برای $a>b$: $-\dfrac{Pb(L^۲-b^۲)^{۳/۲}}{۹\sqrt{۳}\,EIL}$ در $x_m=\sqrt{\dfrac{L^۲-b^۲}{۳}}$	$\theta_A=-\dfrac{Pb(L^۲-b^۲)}{۶EIL}$ $\theta_B=+\dfrac{Pa(L^۲-a^۲)}{۶EIL}$	برای $x<a$: $y=\dfrac{Pb}{۶EIL}[x^۳-(L^۲-b^۲)x]$ برای $x=a$: $y=-\dfrac{Pa^۲b^۲}{۳EIL}$
۶ 		$-\dfrac{۵wL^۴}{۳۸۴EI}$	$\pm\dfrac{wL^۳}{۲۴EI}$	$y=-\dfrac{w}{۲۴EI}(x^۴-۲Lx^۳+L^۳x)$
۷ 		$\dfrac{ML^۲}{۹\sqrt{۳}EI}$	$\theta_A=+\dfrac{ML}{۶EI}$ $\theta_B=-\dfrac{ML}{۳EI}$	$y=-\dfrac{M}{۶EIL}(x^۳-L^۲x)$

فصل ۱۰

« ستونها »

مقدمه: در فصلهای قبل به دو مقوله اساسی توجه شد: ① استحکام سازه: توانایی سازه در نگهداری بار مشخص، بدون ایجاد تنش اضافی

② توانایی سازه در تحمل بار مشخص بدون تغییر شکل غیرقابل قبول

در این فصل موضوع اصلی پایداری سازه است. یعنی توانایی نگهداری بار مفروض بدون ایجاد تغییر ناگهانی در شکل‌بندی سازه منظوری عمودی تحت بارهای محوری (فشاری)

پایداری سازه:

در اجسام الاستیک سه نوع پایداری وجود دارد: ⓐ تعادل پایدار ⓑ تعادل ناپایدار ⓒ تعادل خنثی

الف) تعادل پایدار « جسم همیشه در این حالت باقی می‌ماند »

ب) تعادل ناپایدار « جسم همیشه در این حالت باقی نمی‌ماند »

شکل ب ۱

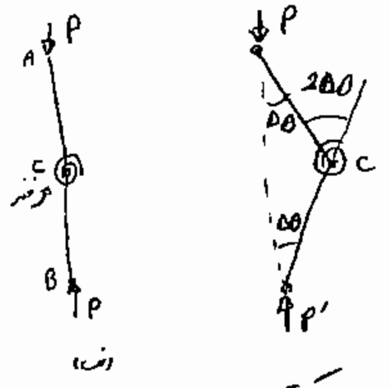
$\sigma = \frac{P}{A} \longrightarrow \sigma < \sigma_{all}$ ✓

$\delta = \frac{P.L}{A.E} \longrightarrow$ اگر در محدوده مشخصات مفروض قرار بگیرد ✓

خیر $\longrightarrow$ آیا ستون به درستی طراحی شده است

— ممکن است ستون مستقیم باقی نماند و دچار کمانش شود. یعنی به طور ناگهانی دچار انحنای شدید شود.

مثال:



(الف)

اگر C را کمی به سمت راست حرکت دهیم

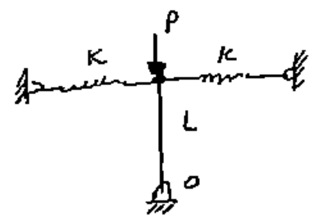
الف) اگر دستگاه دوباره به حالت اولیه برگشت ⟵ پایدار

ب) « « در این وضعیت دورتر شود ⟵ ناپایدار

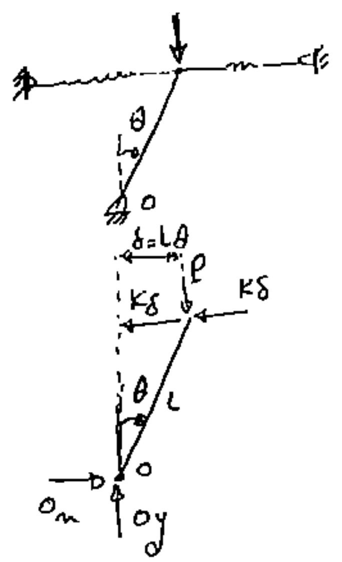
* بار بحرانی :

- اگر تعادل جسمی ناپایدار باشد به منظور تعیین بار بحرانی کافیست تعادل استاتیکی آن را برهم بزنیم و با استفاده از تعادل استاتیکی (معادلات) مقدار بار بحرانی را بدست آوریم :

مثال ۱ : بار بحرانی را در ستون مقابل بیابید ؟



برای بدست آوردن بار بحرانی ابتدا سیستم را از حالت تعادل خارج می کنیم :



دیاگرام آزاد :

$$\Sigma M_o = 0 \rightarrow 2K\cancel{\delta}(L) = P.\cancel{\delta}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = 2KL$$

نکته :

می دانیم : $T = \underbrace{W}_{\text{کار انجام شده}} - \underbrace{U}_{\text{انرژی کرنشی}}$ انرژی پتانسیل

طبق تعریف : تعادلی پایدار است که مشتق دوم انرژی پتانسیل نسبت به آن پارامتر بزرگتر از صفر باشد که آن پارامتر در مورد ما θ باشد.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} > 0 \longrightarrow \text{تعادل پایدار}$$

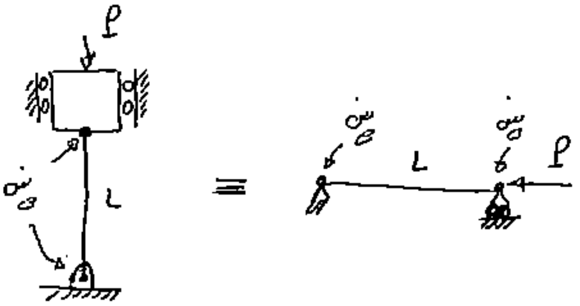
$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} < 0 \longrightarrow \text{〃 ناپایدار}$$

هنگامی که تعادل پایدار است انرژی مینیمم می باشد.

فرمول اویلر برای ستونهای انتها پین دار :

(دو سر پین)

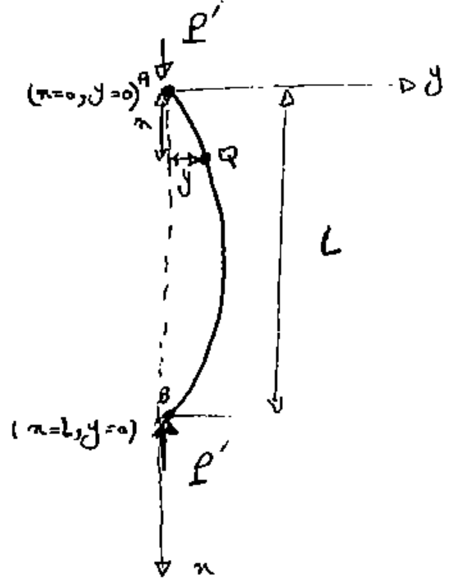
- مسئله ای را در نظر می گیریم که تحت شرایط مرزی ذیل تحت تأثیر نیروی محوری P قرار گرفته است



- این ستون را می توان تیری در نظر گرفت که (به شکل)

تحت اثر بار محوری است

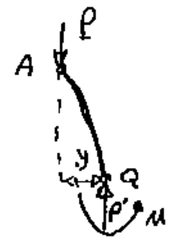
- دیاگرام شکل مقابل مثل نمودار جسم آزاد ستون در شرایطی است که تغییر شکل پیدا کرده است



حال در مقطع Q داریم :

فاصله نقطه Q روی منحنی ارتجاعی ستون تا انتهای A را با x و تغییر مکان آن نقطه را با y نشان داده ایم

با در نظر گرفتن تعادل جسم آزاد AQ در می یابیم :



$$\sum M_Q = 0 \rightarrow M + Py = 0$$

$$\Rightarrow M = -Py$$

می دانیم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Py}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}\,y = 0 \qquad (10-1)$$

(1-10)

رابطه (1-10) یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم با ضرایب ثابت است لذا با قرار دادن

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (2\text{-}10) \xrightarrow{\text{در}} \frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0 \quad (3\text{-}10)$$

معادله (2-10) همان معادله دیفرانسیل برای حرکت هماهنگ ساده است.

جواب عمومی عبارت است از $\longrightarrow$ $y = A\sin px + B\cos px$ (4-10)

از شرایط مرزی داریم

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \xrightarrow{(3\text{-}10)} B=0$$

$$\begin{matrix} x=L \\ y=0 \end{matrix} \xrightarrow{(4\text{-}10)} A\sin pL = 0 \quad (5\text{-}10) \longrightarrow \begin{matrix} \text{یا } A=0 \\ \text{یا } \sin pL=0 \end{matrix}$$

اگر $A=0 \xrightarrow{(4\text{-}10)} y=0 \longrightarrow$ ستون مستقیم است

برای آنکه $\sin pL = 0 \longrightarrow pL = n\pi \xrightarrow{(2\text{-}10)} P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$ (6.10)

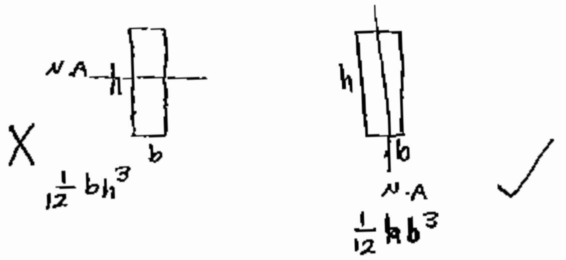
کوچکترین مقدار P که با معادله (6-10) معین می‌شود مشابه است با $n=1$ پس:

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

رابطه اویلر (ریاضی‌دان سوئیسی 1707 - 1783)
برای ستونهای دو انتهای پین.

$(L_e = L)$

I : ممان اینرسی حول محور جسم (کمترین مقدار I لحاظ شود)

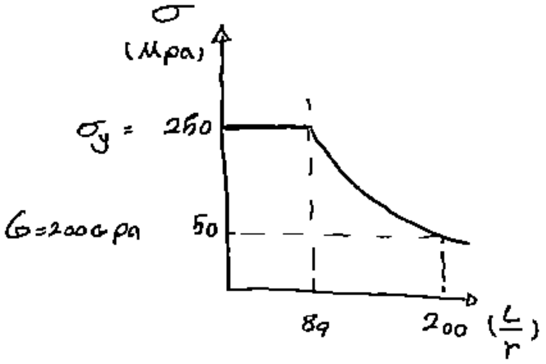


نکته :- مقدار تنش بار بحرانی را تنش بحرانی نامیده می شود

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{A L^2} \xrightarrow[]{I = A r^2 \ (\text{شعاع ژیراسیون})} \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \cancel{A} r^2}{\cancel{A} L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}}$$

$\left(\frac{L}{r}\right)$: نسبت باریکی (لاغری) ستون



مقدار $\frac{L}{r}$ هرچه بزرگتر شود σ_{cr} کوچکتر می شود.

تعمیم فرمول اویلر برای ستون‌های با شرایط انتهایی متفاوت :

حالت (۱) : میله دو انتها پین شده ، حالتی است که در صفحات گذشته مورد بحث قرار گرفت

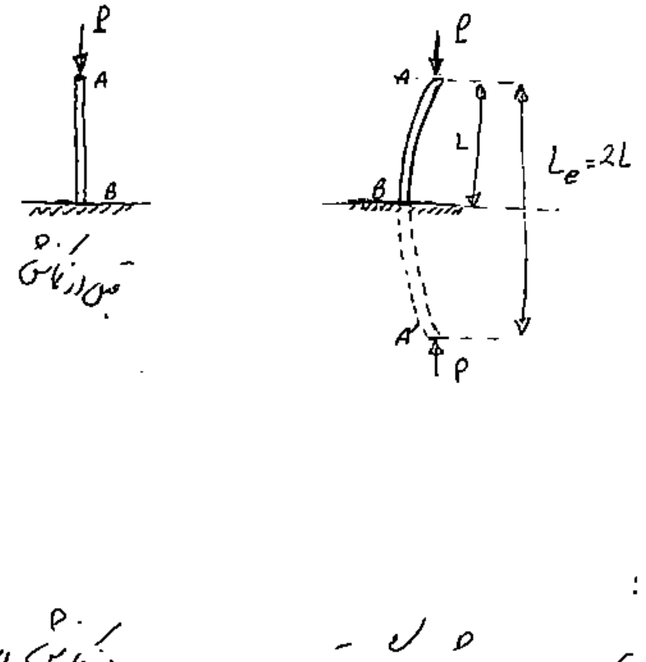
فرمول اویلر →

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2} \xrightarrow[L_e = L]{\text{برای حالت}} \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L_e}{r})^2} \xrightarrow[\text{"}]{\text{"}} \boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L}{r})^2}}$$

حالت 2 : میله یک سر گیردار و یک سر آزاد :

میله‌ای را در نظر می‌گیریم که یک سر آن آزاد و سر دیگر آن گیردار است و تحت اثر نیروی محوری P قرار گرفته است . در این صورت می‌توان برای تعیین بار بحرانی با شبیه‌سازی زیر معادله P_{cr} را بدین صورت نوشت :



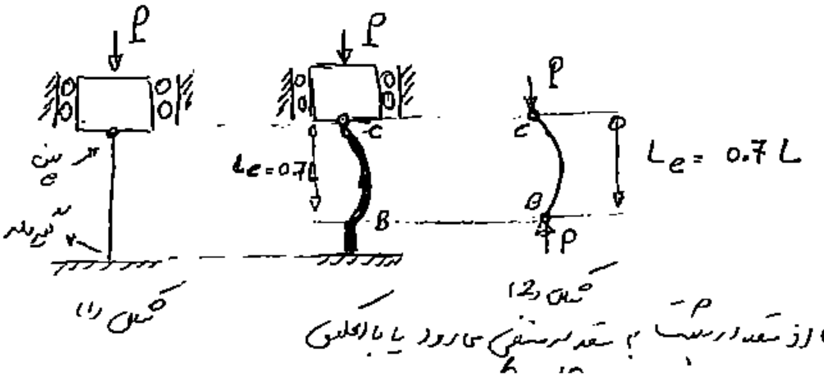
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L_e)^2} \xrightarrow{L_e = 2L} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}}$$

حالت (۳) میله (ستون) یک سر گیردار یک سر پین دار :

میله‌ای را در نظر می‌گیریم که یک سر آن گیردار و سر دیگر آن پین دار باشد . اگر تصویر میله را پس از کمانش رسم

داریم :



در شکل (2) را به طور مجزا از قسمت BC برانیم . (نقطه B نقطه عطف است و لنگر خمشی در آن نقطه برابر صفر است)

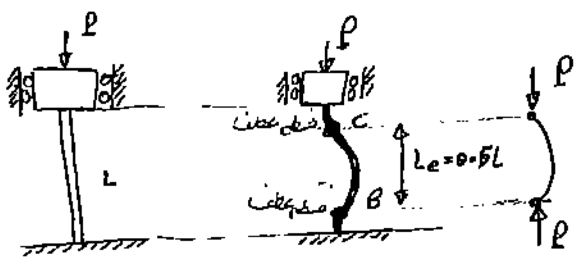
نقطه عطف : نقطه‌ای است که مقدار لنگر خمشی از مقدار مثبت به مقدار منفی می‌رود یا بالعکس

در این صورت قسمت BC مانند حالت (۱) (دوسر پین دار) است لذا بار بحرانی در حالت (۳) برابر است با

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \xrightarrow{L_e = 0.7L} \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}}$$

حالت (۴): ستون (ستون) دوسر گیردار :

میله‌ای را در نظر بگیرید که هر دو سر آن گیردار بوده و تحت تأثیر بار محوری P قرار گرفته است. نمودار جسم آزاد BC مانند حالت (۱) است



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \xrightarrow{L_e = 0.5L} \boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}}$$

* خلاصه ۴ حالت فوق :

رابطه اویلر $\longrightarrow$ $$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_e^2}$$

where :

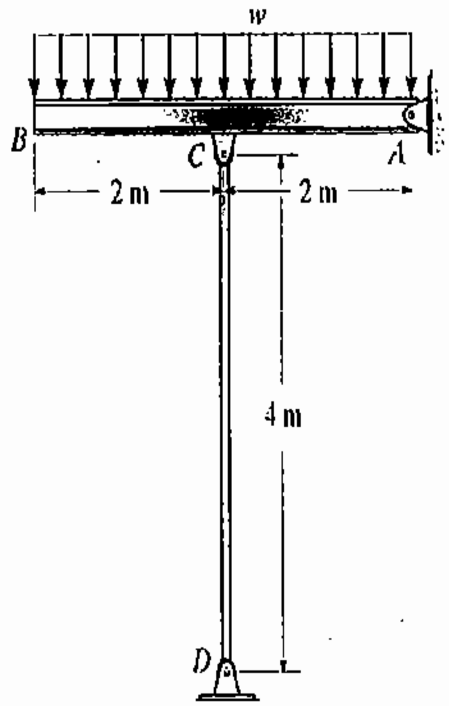
حالت (۱) (ستون دوسر پین) $L_e = L$

(2) " (" یکسر آزاد یکسر گیردار) $L_e = 2L$

(3) " (" یکسر پین " گیردار) $L_e = 0.7L$

(4) " (" هر دو سر گیردار) $L_e = 0.5L$

13-41. Determine the maximum distributed loading that can be applied to the wide-flange beam so that the brace CD does not buckle. The brace is an A-36 steel rod having a diameter of 50 mm.



Support Reactions:

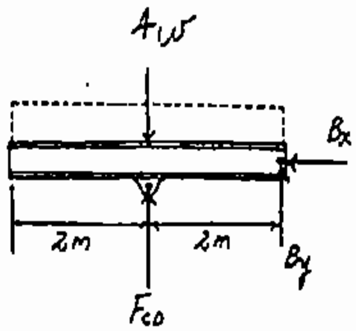
$$\curvearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad 4w(2) - F_{CD}(2) = 0 \quad F_{CD} = 4.00w$$

Section Properties:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(0.05^2\right) = 0.625\left(10^{-3}\right)\pi \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left(0.025^4\right) = 97.65625\left(10^{-9}\right)\pi \text{ m}^4$$

Critical Buckling Load: $K = 1$ for a column with both ends pinned. Applying *Euler's* formula.



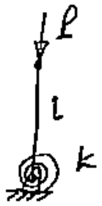
$$P_{cr} = F_{CD} = \frac{\pi^2 EI}{(KL_{CD})^2}$$

$$4.00w = \frac{\pi^2(200)(10^9)\left[97.65625(10^{-9})\pi\right]}{[1(4)]^2}$$

$$= 9462.36 \text{ N/m} = 9.46 \text{ kN/m} \qquad \textbf{Ans}$$

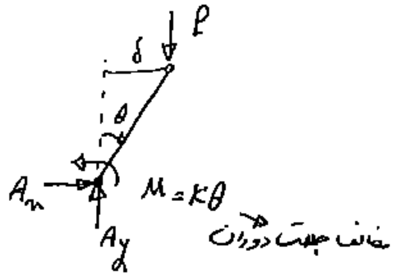
Critical Stress: *Euler's* formula is only valid if $\sigma_{cr} < \sigma_Y$.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{4.00(9462.36)}{0.625(10^{-3})\pi} = 19.28 \text{ MPa} < \sigma_Y = 250 \text{ MPa } (O.K!)$$



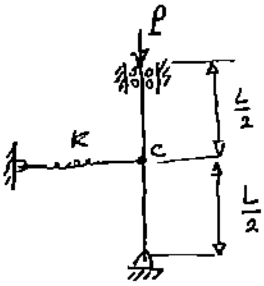
مثال ۱: درمیله زیر ضریب ثابت فنر پیچشی برابر k است، اندازه بار بحرانی درمیله چقدر است؟

حل ۱: ابتدا میله را از حالت تعادل خارج می‌کنیم:

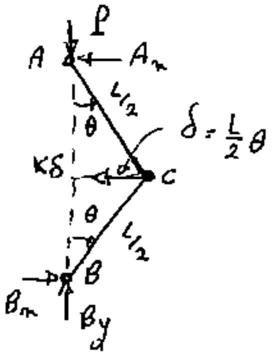


$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow M = P\delta \longrightarrow K\theta = PL\theta \longrightarrow P_{cr} = \frac{K}{L}$$

مثال ۱: در شکل مقابل دو میله در قسمت C به طور مفصلی به هم متصل شده‌اند، چنانچه ضریب ثابت فنر برابر K فرض گردد، اندازه بار بحرانی در این سیستم چقدر است؟



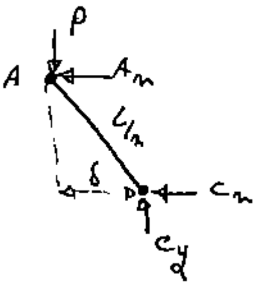
حل ۱: سیستم را از حالت تعادل خارج می‌کنیم:



$$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow K\delta\left(\frac{L}{2}\right) + A_x \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow A_x = -K \cdot \frac{\delta}{2}$$

حال نمودار جسم آزاد قسمت AC را رسم می‌کنیم:

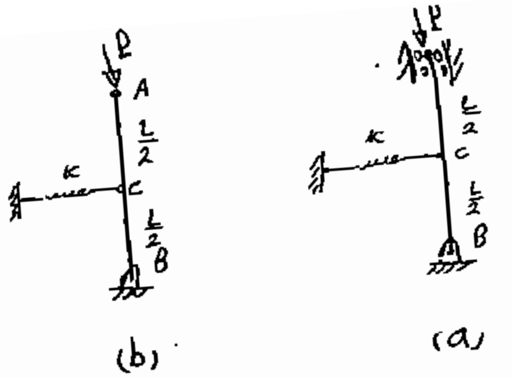


$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_x\left(\frac{L}{2}\right) + P \cdot \delta = 0$$

$$\Rightarrow -K \cdot \frac{\delta}{2}\left(\frac{L}{2}\right) + P \cdot \delta = 0$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{KL}{4}$$

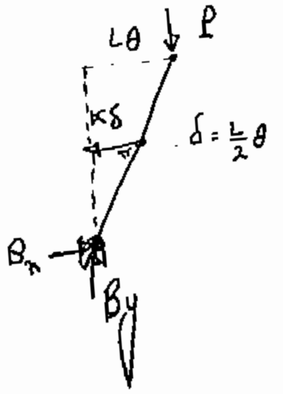
وقتی که مقدار نیروی P به این مقدار برسد شکل جسم تغییر کرده و مطابق نمودار جسم آزاد رسم شده می‌گردد.



سوال ۱: بار بحرانی کدام سیستم بیشتر است؟

حل ۱: سیستم ⓐ مانند شکل تست است پس ← $P_{cr}=\frac{KL}{4}$

سیستم ⓑ :

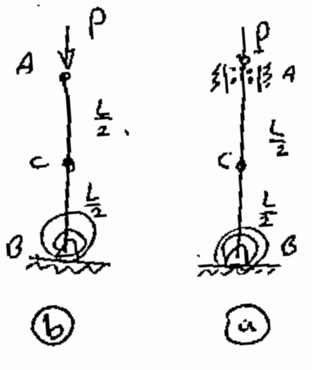


$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -P\cdot(\cancel{L}\theta) + K\delta\cdot\frac{\cancel{L}}{2} = 0$$

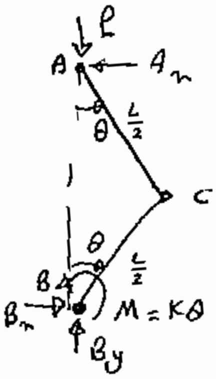
$$P_{cr} = \frac{K\delta}{2\theta} = \frac{K(\frac{L}{2}\cdot\cancel{\theta})}{2\cancel{\theta}} = \frac{K\theta}{4}$$

پس بار بحرانی هر دو سیستم مساوی است. $(P_{cr})_a = (P_{cr})_b$

سوال ۲: بار بحرانی کدام سیستم بیشتر است؟

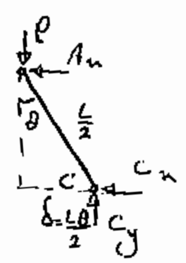


حل ۲: سیستم ⓐ را از حالت تعادل کمی منحرف می‌کنیم:



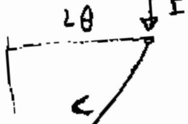
$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow A_x\cdot L + M = 0 \rightarrow A_x = -\frac{M}{L} = \frac{-K\theta}{L}$$

قسمت AC را جدا می‌کنیم:

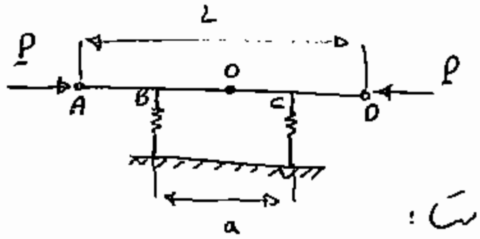


$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow P\cdot\delta + A_x\cdot\frac{L}{2} = 0 \rightarrow P = \frac{-A_x\cdot L}{2\delta}$$

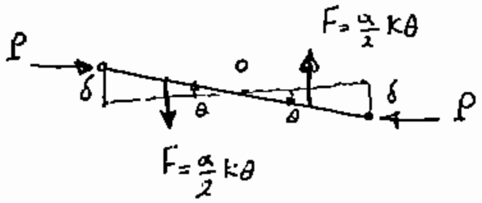
$$\Rightarrow (P_{cr})_a = \frac{(+\frac{K\theta}{L})\cdot L}{2(\frac{L\theta}{2})} = \frac{K}{L}$$



مثال: میله صلبی تحت تأثیر نیروی محوری P قرار گرفته است. بار بحرانی در این میله چقدر است؟



حل: میله را از حالت تعادل خارج کرده، با توجه به تقارن میله چرخش حول مرکز جرم است:



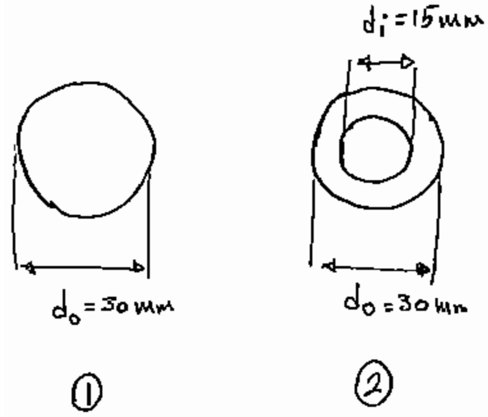
$$\sum M_O = 0 \rightarrow \underbrace{-P(2\delta)}_{\text{ممان نیرو}} + \underbrace{F(a)}_{\text{ممان نیرو}} = 0$$

$$\Rightarrow -P\cdot\left(2\cdot\frac{L}{2}\cdot\cancel{\theta}\right) + \frac{a}{2}k\cancel{\theta}\cdot a = 0$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{ka^2}{2L}$$

مثال: میله‌ای دایره‌ای شکل به طول مؤثر 1.5 m تحت بارگذاری محوری قرار گرفته است. به منظور کاهش وزن این میله به میزان 25٪ سطح مقطع مطابق شکل (2) عوض شده است. کاهش بار بحرانی در این حالت چقدر است، اندازه بار بحرانی برای ستون توخالی چقدر است؟

$E = 106\ GPa$



حل:

$$I_1 = \frac{\pi}{64}d_o^4 = \frac{\pi}{4}R_o^4 \qquad R_i = \frac{1}{2}R_o$$

$$I_2 = \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_{in}^4) = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4}\left(R_o^4 - \left(\frac{1}{2}R_o\right)^4\right) = \frac{15}{16} * \frac{\pi}{4}R_o^4$$

$$(P_{cr})_1 = \frac{\pi^2 E}{L^2}\left(\frac{\pi}{4}R_o^4\right)$$

$$(P_{cr})_2 = \frac{\pi^2 E}{L^2}\left(\frac{15}{16} * \frac{\pi}{4}R_o^4\right) \Rightarrow (P_{cr})_1 - (P_{cr})_2 = \frac{1}{16}$$

زیرا در حالت ② بار بحرانی $\frac{1}{16}$ کمتر از بار بحرانی در حالت ① است.

یعنی به میزان 6.25% $= \frac{1}{16}*100$ کمتر است

$$\begin{cases} I_2 = 37.28 * 10^{-9}\ m^4 \\ L_e = 1.5m \end{cases} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = 17.17\ kN$$

مثال (1-10

ستونی انتها پین‌دار به طول 2m و با سطح مقطع مربع شکل از چوب ساخته شده است. با فرض $\sigma_{all} = 12\,MPa$, $E = 13\,GPa$ و با استفاده از ضریب اطمینان 2.5 در محاسبه بار بحرانی اویلر برای کمانش، اندازه سطح مقطع را محاسبه کنید، اگر بخواهیم ستون به ایمنی الف) بار 100 kN ب) بار 200 kN را تحمل کند.

حل الف)

$$\begin{cases} P_{cr} = 2.5\,(100\,kN) = 250\,kN \\ L = 2m \\ E = 13\,GPa \end{cases}$$

$$I = \frac{P_{cr} \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{(250 * 10^3)\,2^2}{\pi^2 .\ 13 * 10^9} = 7.794 * 10^{-6}\ m^4$$

- برای مربعی به ضلع a :

$$I = \frac{1}{12} a \cdot a^3 = \frac{1}{12} a^4$$

$$\Rightarrow \quad 7.794 * 10^{-6} = \frac{1}{12} a^4 \quad \Rightarrow \quad a = 98.3\ mm \approx 100\ mm$$

- میزان تنش عمودی:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\,kN}{(0.100\ m)^2} = 10\ MPa$$

* چون تنش بدست آمده از تنش مجاز کمتر است، سطح مقطع بدست آمده قابل قبول است.

ب)

$$\begin{cases} P_{cr} = 2.5\,(200\,kN) = 500\,kN \\ L = 2\ m \\ E = 13\ GPa \end{cases} \longrightarrow I = \frac{P_{cr} \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E} \Rightarrow I = 15.588 * 10^{-6}\ m^4$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{12} a^4 \rightarrow 15.588 * 10^{-6} = \frac{1}{12} a^4 \Rightarrow a = 116.95\ mm$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200\,kN}{(0.11695\ m)^2} = 14.62\ MPa$$

چون این مقدار از مقدار تنش مجاز بیش‌تر است، اندازه بدست آمده قابل قبول نیست و می‌بایست سطح مقطع را براساس مقاومت آن نسبت به فشار انتخاب کنیم، بنابراین:

$$A = \frac{P}{\sigma_{all}} = \frac{200kN}{12Mpa} = 16.67 * 10^{-3}\ m^2$$

$$A = a^2 = 16.67 * 10^{-3}\ m^2 \longrightarrow a = 129.1\ mm$$

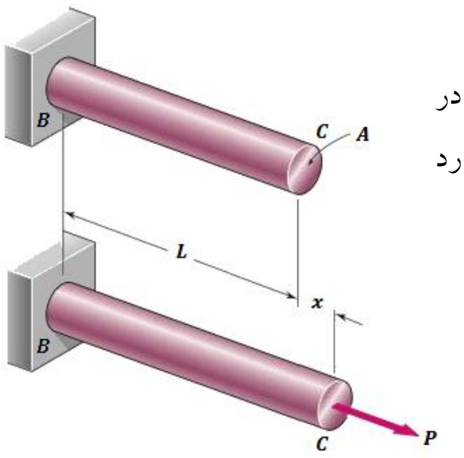
مقطعی به ابعاد 130 * 130 قابل قبول است.

فصل ۱۱ : "روش های انرژی "

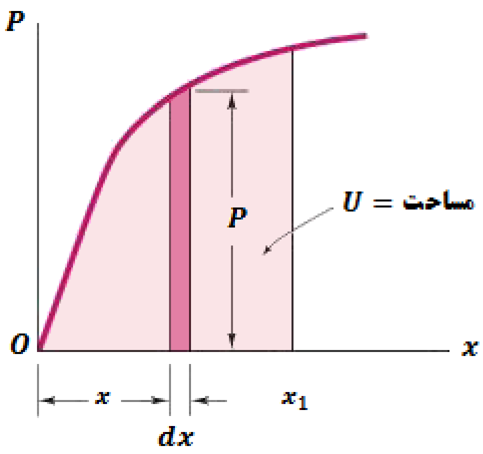
مقدمه: در فصل های گذشته، با روابط موجود بین نیروها و تغییر شکلهای حاصل از شرایط بارگذاری مختلف سر و کار داشتیم. تحلیل ما بر پایه دو مفهوم بنیادی، یعنی 1 مفهوم تنش 2 مفهوم کرنش قرار داشت. حال سومین مفهوم مهم یعنی مفهوم انرژی کرنش را بیان می کنیم.

انرژی کرنش :

میله BC به طول L و مساحت سطح مقطع یکنواخت A را درنظر بگیرید، که در نقطه B به تکیه گاه ثابتی متصل است و در C در معرض بار محوری P قرار دارد که به آهستگی افزایش می یابد.



– کار انجام شده توسط بار P را وقتی طول میله به مقدار کوچک dx افزایش می یابد در نظر می گیریم :



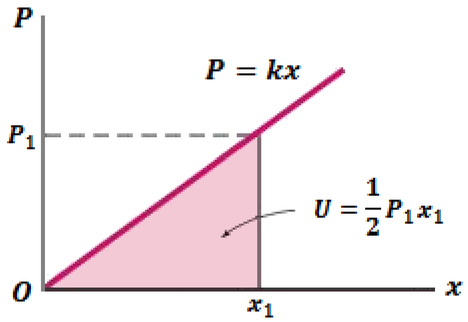
$$\int dU = \int P \cdot dx \overset{\text{کل کار}}{\Longrightarrow} \boxed{U = \int_0^{x_1} P \cdot dx} \qquad \underline{1.11}$$

کـار انجـام شـده توسـط بـار P وقتـی بـه صـورت آهسـته بـه میلـه وارد مـی شـود بایـد بـا افـزایش انـرژی مربوط به تغییر شکل میله منجر شود. این انرژی را انرژی کرنش میله می نامیم.

$$N \cdot m \leftarrow SI$$

$$in \cdot lb \text{ یا } ft \cdot lb \leftarrow U \cdot S$$

نکته : اگر تغییرات در ناحیه الاستیک باشد چون رابطه P و x خطی است پس :



$$U = \int_0^{x_1} kx \cdot dx = \frac{1}{2} k{x_1}^2$$

مساحت مثلث $\longrightarrow$ $\boxed{U = \frac{1}{2} P_1 {x_1}^2}$

– مفهوم انرژی کرنش به ویژه در تعیین اثر بارگذاری ضربه ای روی سازه ها یا اجزاء ماشین مفید است.

چگالی انرژی کرنش :

نمودار $P - x$ به طول و ابعاد سطح مقطع میله وابسته است و انرژی کرنش (رابطه 1.11) نیز به ابعاد میله بستگی دارد. به منظور حذف اثر ابعاد میله و توجه محض به خواص ماده، انرژی کرنش در واحد حجم را در نظر می گیریم :

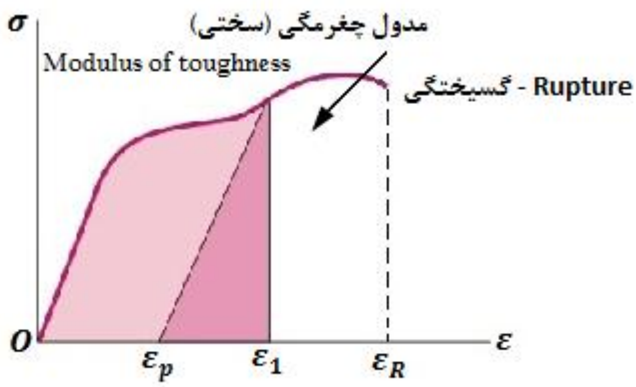
$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{Pdx}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A} \cdot \frac{dx}{L} = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x$$

حجم میله $\Longrightarrow V = A \cdot L$

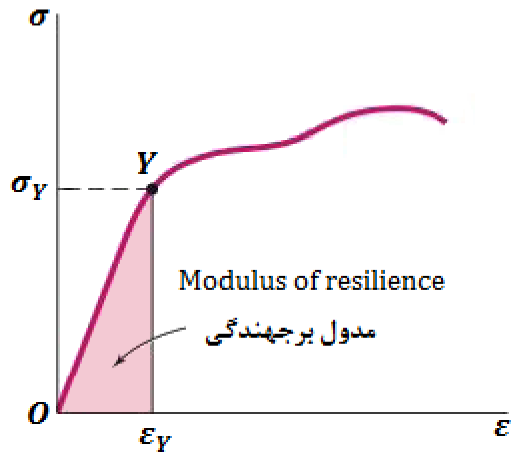
$\boldsymbol{\varepsilon_1}$: مقدار کرنش متناظر با افزایش طول به اندازه $\boldsymbol{x_1}$

$\boldsymbol{\frac{U}{V}}$: چگالی انرژی کرنش می نامیم و با حرف کوچک $\boldsymbol{u}$ نشان می دهیم :

$$\boxed{u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x d\varepsilon_x} \qquad \underline{2.11}$$



سطح زیر نمودار تنش – کرنش = u چگالی انرژی کرنش



u_Y : انرژی در واحد حجم که ماده بدون تسلیم شدن جذب می کند

مدول چغرمگی برابر است با سطح کل زیر نمودار تنش – کرنش و نشان دهندهٔ مقدار انرژی در واحد حجم است که برای ایجاد گسیختگی ماده لازم است. چغرمگی هر ماده به شکل پذیری آن و نیز به استحکام نهایی آن بستگی دارد.

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon_x \cdot d\varepsilon_x = \frac{E{\varepsilon_1}^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{{\sigma_1}^2}{2E}$$

ظرفیت هر سازه در تحمل بار ضربه ای بدون تغییر شکل ماندگار به این ضریب بستگی دارد.

$$u_Y = \frac{{\sigma_Y}^2}{2E}$$

* **۱) انرژی کرنش کشسان برای حالت تنش های عمودی :**

a) انرژی کرنش ناشی از بار گذاری محوری

b) انرژی کرنش ناشی از گشتاور خمشی

* **۲) انرژی کرنش کشسان برای حالت تنش های برشی :**

c) انرژی کرنش ناشی از گشتاور پیچشی

d) انرژی کرنش ناشی از بار برشی

۱- انرژی کرنش کشسان برای حالت تنش های عمودی

اگر میله مورد نظر در بخش قبل در معرض تنش های گسترده یکنواخت σ_x قرار بگیرد :

می دانیم : $u = \dfrac{dU}{dV}$ ❶

$$u = \int_0^{\varepsilon_x} E \cdot \varepsilon_x \cdot d\varepsilon_x \xLeftarrow{\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x}$$ در ناحیه الاستیک داریم $$u = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x \Leftarrow$$ و نیز

$$\rightarrow \quad u = \frac{1}{2}E\varepsilon_x^{\,2} = \frac{1}{2}\cdot\sigma_x\cdot\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^{\,2}}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^{\,2}}{E}} \qquad \underline{3.11}$$

با استفاده از I

$$\rightarrow \quad \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^{\,2}}{2E} \Rightarrow \int dU = \int \frac{\sigma_x^{\,2}}{2E}\cdot dV$$

انرژی کرنش کشسان (برای تغییر شکلهای کشسان)

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \int \frac{\sigma_x^{\,2}}{2E}\cdot dV} \qquad \underline{4.11}$$

نکته : اگر علاوه بر σ_x ، تنش های σ_y و σ_z نیز موجود باشند در این صورت چگالی انرژی کرنش برابر است با :

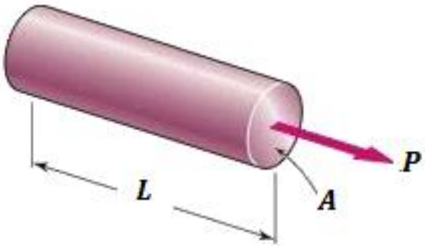
$$\boxed{u = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z\right)} \qquad \underline{5.11}$$

براساس قانون هوک می توان مقادیر کرنش ها را بر حسب تنش ها نوشت لذا داریم :

$$\boxed{u=\frac{1}{2E}\left({\sigma^2}_x+{\sigma^2}_y+{\sigma^2}_z-2v\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z\right)\right)} \qquad \underline{6.11}$$

a) انرژی کرنش ناشی از بار گذاری محوری :

وقتی میله ای تحت بار محوری مرکزی قرار می گیرد می توان فرض کرد که تنش های عمودی σ_x در هر مقطع عرضی دارای توزیع یکنواخت هستند.



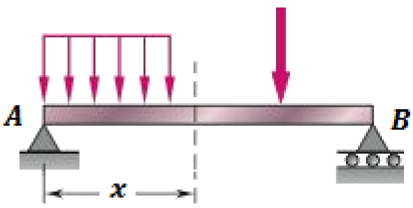
$$\sigma_x=\frac{P}{A} \overset{4.11}{\Longrightarrow} U=\int\frac{P^2}{2EA^2}\cdot dV$$

$$dV=A\cdot dx \quad\Rightarrow\quad \boxed{U=\int_0^L\frac{P^2\cdot dx}{2AE}} \qquad \underline{7.11}$$

نکته : در مورد میله ای با سطح مقطع یکنواخت که در دو انتهای خود در معرض نیروهای مساوی و مخالف به مقدار P قرار دارد می توان نوشت :

$$\boxed{U=\frac{P^2\cdot L}{2A\cdot E}} \qquad \underline{8.11}$$

b) انرژی کرنش ناشی از گشتاور خمشی :



تیر AB را تحت بارگذاری مفروض در نظر می گیریم و فرض می کنیم M گشتاور خمشی در فاصله x از انتهای A باشد.

با صرف نظر کردن اثر نیروهای برشی داریم :

$$\sigma_x=\frac{M\cdot y}{I}$$

4.11 با قرار دادن عبارت بالا در رابطه $\Rightarrow \quad U = \int \frac{{\sigma_x}^2}{2E} \cdot dV = \int \frac{M^2 \cdot y^2}{2EI^2} \cdot dV$

$$dV = dA \cdot dx \quad \Rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int y^2 \cdot dA \right) \cdot dx$$

$I: (y^2 \cdot dA) \Leftarrow$ ممان اینرسی سطح مقطع حول تار خنثی

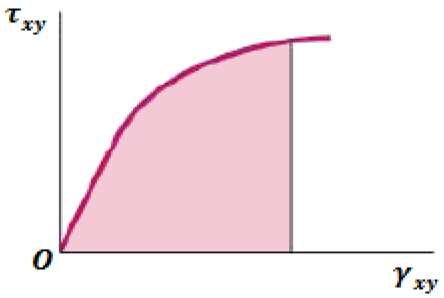
$$\boxed{U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \cdot dx} \qquad \textbf{9.11}$$

۲– انرژی کرنش کشسان برای حالت تنش های برشی

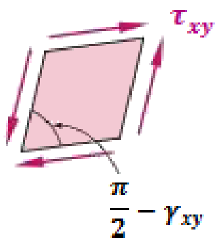
وقتی جسمی الاستیک تحت اثر تنشهای برشی صفحه ای τ_{xy} قرار دارد، چگالی انرژی کرنش در نقطه ای دلخواه از ماده را می توان چنین بیان کرد.

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \cdot d\gamma_{xy} \qquad ❶$$

- γ_{xy} کرنش برشی متناظر با τ_{xy} است.
- **u مساحت زیر منحنی $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ می باشد.**



در ناحیه الاستیک $\longrightarrow \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \qquad ❷$



با جایگذاری ❷ در رابطه ❶ و انتگرال گیری $\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2{}_{xy}$

مجددا با استفاده از رابطه ❷ $\Longrightarrow \quad u = \frac{1}{2} \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}$

با نوشتن γ_{xy} بر حسب τ_{xy} $\Longrightarrow \quad \boxed{u = \frac{\tau^2{}_{xy}}{2G}}$ $\quad$ **10.11**

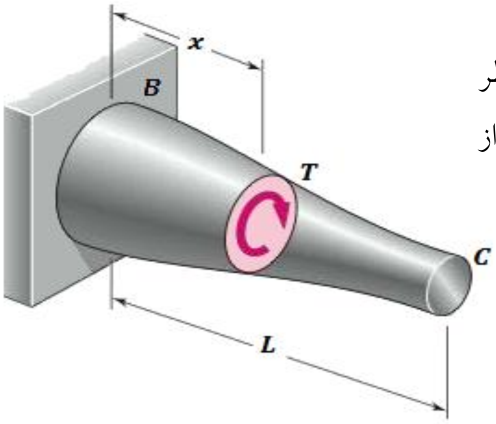
می دانیم $\quad u = \frac{dU}{dV} \quad \xRightarrow{10.11} \quad \frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2{}_{xy}}{2G} \quad \Longrightarrow \quad \int dU = \int \frac{\tau^2{}_{xy}}{2G} \cdot dV$

$\Longrightarrow \quad \boxed{U = \int \frac{\tau^2{}_{xy}}{2G} \cdot dV}$ $\quad$ **11.11** $\quad$ dV : حجم جسم است

*** در صورت وجود تنش های برشی دیگر :**

$\boxed{u = \frac{1}{2G} \left(\tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{xz} + \tau^2{}_{yz} \right)}$ $\quad$ **12.11**

c) انرژی کرنش ناشی از کوپل پیچشی :



میل گردان BC به طول L که تحت تاثیر گشتاور پیچشی قرار دارد را در نظر بگیرید. می دانیم تنش برشی ناشی از این گشتاور در هر مقطع از میل گردان از رابطهٔ ذیل به دست می آید.

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot \rho}{J}$$

$\mathbf{11.11}$ با جایگذاری در رابطه $\quad \Longrightarrow \quad U = \int \frac{{\tau^2}_{xy}}{2G} \cdot dV = \int \frac{T^2 \cdot \rho^2}{2GJ^2} \cdot dV$

$$dV = dA \cdot dx \quad \Longrightarrow \quad U = \int_0^L \frac{T^2}{2G \cdot J^2} \left(\overbrace{\int \rho^2 \cdot dA}^{J} \right) \cdot dx$$

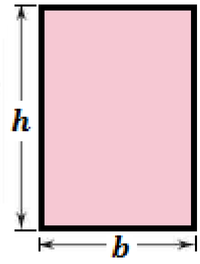
$$\Longrightarrow \quad \boxed{U = \int_0^L \frac{T^2}{2G \cdot J} dx} \qquad \underline{\mathbf{13.11}}$$

نکته : در مورد میل گردانی با سطح مقطع یکنواخت که دو انتهایش در معرض دو کوپل مساوی و مخالف به مقدار T قرار دارد، می توان نوشت :

$$\boxed{U = \frac{T^2 \cdot L}{2G \cdot J}} \qquad \underline{\mathbf{14.11}}$$

d) انرژی کرنش ناشی از بار برشی :

الف) برش خالص : مثلا برای مقطع مستطیل شکل روبه رو داریم



$$\tau_{xy} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t}$$

با جایگذاری در رابطه 11.11 $\Longrightarrow$ $\boxed{U = \frac{3P^2 \cdot L}{5G \cdot A}}$ $\underline{15.11}$

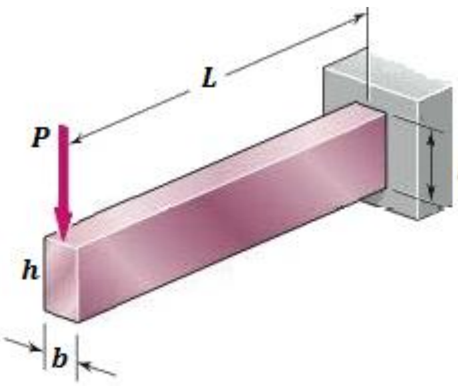
– رابطهٔ فوق در صفحهٔ ٤١٠ کتاب اثبات شده است.

ب) برش عرضی(متوسط) :

می دانیم $\Longrightarrow$ $\tau_{xy} = \frac{V}{A}$

با استفاده از رابطه 11.11 $\Longrightarrow$ $\boxed{U = \int_0^L \frac{{V_y}^2}{2G \cdot A} dx}$ $\underline{16.11}$ V_y : نیروی برشی در جهت y

نکته :



در تیر های باریک $\Longrightarrow$ $\frac{h}{L} < \frac{1}{10}$

اثر برش در محاسبه کرنش صرف نظر می شود چون مقدار آن نسبت به اثر خمش خیلی کوچک است.

انرژی کرنش برای حالت کلی تنش :

حالت کلی تنش به وسیلهٔ شش مولفه تنش $(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz})$ مشخص می شود.

با استفاده از مطالب گفته شده داریم :

$$u=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

با استفاده از تعمیم قانون هوک و جایگزینی کرنش در معادله بالا در کلی ترین حالت تنش در نقطه ای مفروض از یک جسم همسانگرد کشسان داریم :

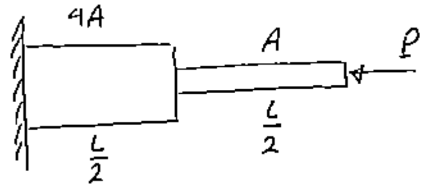
$$\boxed{u=\frac{1}{2E}\left({\sigma^2}_x+{\sigma^2}_y+{\sigma^2}_z-2\upsilon\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_x\sigma_z\right)\right)+\frac{1}{2G}\left({\tau^2}_{xy}+{\tau^2}_{xz}+{\tau^2}_{yz}\right)}\quad \underline{\mathbf{17.11}}$$

اگر محورهای اصلی را در نقطه ای مفروض، محورهای مختصات بگیریم، تنش های برشی صفر می شوند لذا معادله بالا به صورت ذیل خلاصه می شود.

$$\boxed{u=\frac{1}{2E}\left({\sigma^2}_a+{\sigma^2}_b+{\sigma^2}_c-2\upsilon(\sigma_a\sigma_b+\sigma_a\sigma_c+\sigma_b\sigma_c)\right)}\qquad \underline{\mathbf{18.11}}$$

که σ_a و σ_b و σ_c تنش های اصلی در نقطه مفروض هستند.

مثال ۱: برای شکل مقابل انرژی تغییر شکل را بدست آورید؟



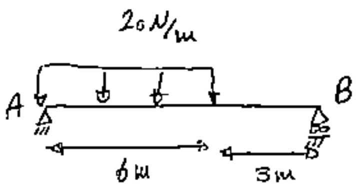
حل:

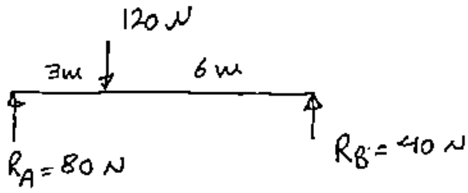
$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot dV$$

σ ثابت

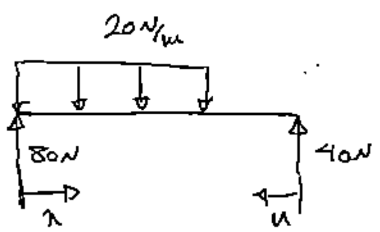
σ ثابت $\rightarrow$ $$U = \frac{\sigma_x^2}{2E} \cdot V = \frac{\left(\frac{P}{A}\right)^2}{2E}\left(A \cdot \frac{L}{2}\right) + \frac{\left(\frac{P}{4A}\right)^2}{2E} \cdot \left(4A \cdot \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{16} \cdot \frac{P^2 L}{AE}$$

مثال ۱: انرژی کرنشی تیر AB را تعیین نمایید. تنها از تنشهای عمودی ناشی از خمش را محاسبه آورید؟





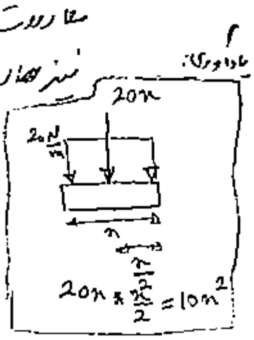
حل: نمودار آزاد برای بدست آوردن عکس العمل تکیه گاهها:

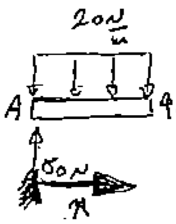


حال برای بدست آوردن انرژی کرنشی داریم:

- در یک بار از سمت راست و یک بار از سمت چپ برش میزنیم
معادلات ساده تری بدست می آید و حل انتگرال نیز ساده تر می شود.

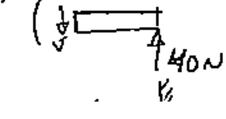
یادآوری:





$$\sum M_o = 0 \rightarrow M - 80x + 10x^2 = 0$$

$$\Rightarrow M = 80x - 10x^2 \qquad 0 \leq x \leq 6$$



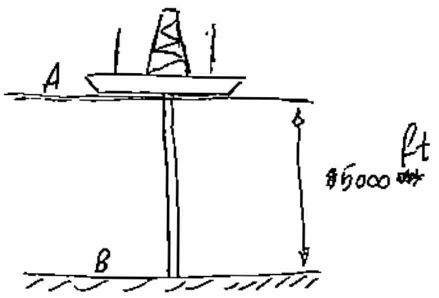
$$\sum M_o = 0 \rightarrow -M + 40u = 0$$

$$M = 40u \qquad 0 \leq u \leq 3$$

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}\, dx$$

$$\Rightarrow \quad U = \int_0^6 \frac{(80x-10x^2)^2}{2EI}\, dx + \int_0^3 \frac{(40x)^2}{2EI}\, dx = \frac{56160}{EI}$$

مسائل دوره‌ای (11.124)



- کشتی در نقطه A برای حفر چاه نفت در کف اقیانوس در عمق 5000 ft در این نقطه شروع کرده است. لوله مته فولادی به قطر خارجی 8 in و ضخامت یکنواخت دیواره 0.5 in است. می‌دانیم بالای لوله مته دو دور کامل پیش از آنکه مته در نقطه B برخورد کند پیچیده است. با فرض اینکه $G = 11.2 \times 10^6$ psi

مطلوب است انرژی کرنش ماکزیمم به دست آمده توسط لوله مته.

حل)

$$\varphi = \overset{\text{دور}}{2} \cdot 2\pi = 4\pi \ \text{rad}$$

$$L = 5000 \text{ ft} = 60 \times 10^3 \text{ in}$$

یادآوری: $12 \text{ in} = 1 \text{ ft}$

$$C_o = \frac{d_o}{2} = 4 \text{ in}$$

$$C_i = C_o - t = 3.5 \text{ in}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(C_o^4 - C_i^4) = 166.906 \ \text{in}^4$$

می‌دانیم $\rightarrow \quad \varphi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \rightarrow \quad T = \frac{G J \cdot \varphi}{L}$

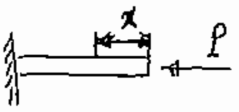
همچنین داریم $\rightarrow \quad U = \frac{T^2 L}{2G J} = \left(\frac{G \cdot J \cdot \varphi}{L}\right)^2 \cdot \frac{L}{2G J} = \frac{G \cdot J \cdot \varphi^2}{2L}$

$$U = \frac{(11.2 \times 10^6)(166.906)(4\pi)^2}{2(60 \times 10^3)} = 2.45 \times 10^6 \quad \text{in.lb}$$

- کار و انرژی :

۱- کار و انرژی تحت بار متمرکز

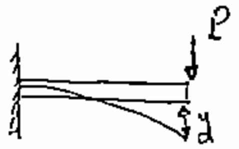
a- اگر بار محوری باشد



$$U = \int_0^x P.dx = \frac{1}{2} P x$$

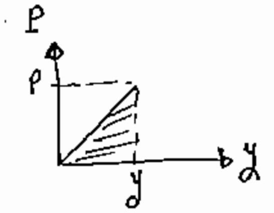
x تغییر طول = $\delta = \frac{P.L}{A.E}$

b- اگر بار عرضی باشد



$$U = \int_0^y P.dy = \frac{1}{2} P y$$

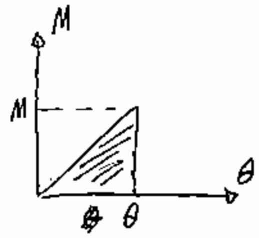
خیز تیر



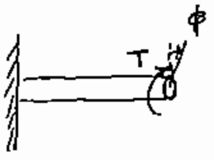
c- اگر بار خمشی باشد

$$U = \int_0^\theta M.d\theta = \frac{1}{2} M\theta$$

شیب تیر

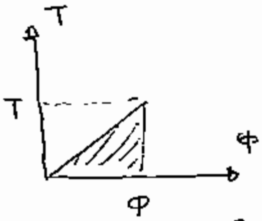


d- اگر بار پیچشی باشد



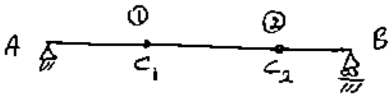
$$U = \int_0^\phi T.d\phi = \frac{1}{2} T.\phi$$

زاویه پیچش $= \frac{T.L}{GJ}$

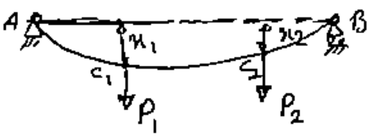


← برای تعیین تغییر مکان ناشی از بار متمرکز از روش انرژی ابتدا برای کل جسم انرژی کرنشی را محاسبه کرده و آن را مساوی تغییر مکانها قرار می‌دهیم . که بر روی سازه فقط یک بار وارد شود

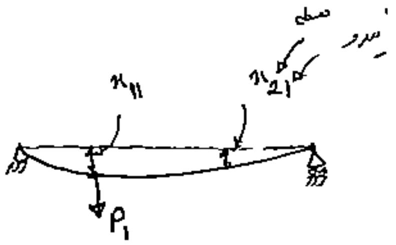
۲- کار و انرژی برای حالت اعمال چند بار ؛



- تغییر مکان در نقاط مختلف تیر :



کار P_1 و P_2 هنگامیکه به آهستگی به ترتیب به c_1 و c_2 وارد می شوند $\Rightarrow$ انرژی کرنشی تیر



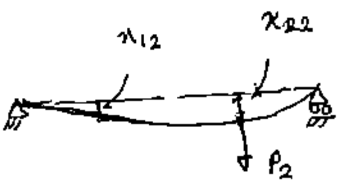
فرض : فقط بار P_1 به تیر وارد شود

→ نقطه‌های c_1 و c_2 تغییر مکان دارند

$$x_{11} = \alpha_{11} P_1$$
$$x_{21} = \alpha_{21} P_1$$

α_{11} و α_{21} : ضریب تأثیر

تغییر نقاط c_1 و c_2 وقتی باری واحدی به نقطه c_1 وارد شود



فرض : فقط بار P_2 به تیر وارد شود

→ نقاط c_1 و c_2 تغییر مکان دارند

$$x_{12} = \alpha_{12} P_2$$
$$x_{22} = \alpha_{22} P_2$$

با استفاده از اصل برهم نهی تغییر مکانها ←

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \qquad 19.11$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \qquad 20.11$$

محاسبه کار انجام شده توسط P_1 و P_2 :

- فرض: نخست P_1 به آهستگی به C_1 وارد می‌شود.

بار صوری صفر در C_2 $\rightarrow$ $\frac{1}{2} P_1 x_{11} = \frac{1}{2} P_1(\alpha_{11} P_1) = \frac{1}{2}\alpha_{11} P_1^2$ (I)

توجه: P_2 در سوی حرکت C_2 به اندازه x_{21} هیچ کاری انجام نمی‌دهد زیرا تاکنون P_2 به تدریج وارد نشده است.

- حال به آهستگی P_2 را به C_2 وارد می‌کنیم

بار صوری صفر در C_1 $\rightarrow$ $\frac{1}{2} P_2 \cdot x_{22} = \frac{1}{2} P_2(\alpha_{22} \cdot P_2) = \frac{1}{2}\alpha_{22} P_2^2$ (II)

توجه: در زمانی که P_2 به نقطه C_2 وارد می‌شود ← نقطه اثر P_1 به اندازه x_{12} جابجا می‌شود و بار P_1 کار انجام می‌دهد.
دقت شود که P_1 در طول این جابجایی به طور کامل وارد می‌شود.

$$P_1 x_{12} = P_1(\alpha_{12} P_2) = \alpha_{12} P_1 P_2 \qquad \text{(III)}$$

جایگذاری I و II و III $\Rightarrow$ $\boxed{U = \frac{1}{2}\left(\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right)}$

به طریق مشابه

* اگر ابتدا بار P_2 وارد شده بود سپس بار P_1 خواهیم داشت:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\left(\alpha_{22} P_2^2 + 2\alpha_{21} P_2 P_1 + \alpha_{11} P_1^2\right)}$$

قضیه اول ماکسول

از روابط بالا خواهیم داشت $\rightarrow$ $\alpha_{12} = \alpha_{21}$

* : تغییر مکان ایجاد شده در C_1 توسط بار واحد در C_2 با تغییر مکان ایجاد شده در C_2 توسط بار واحد در C_1 برابر است

(10)

قضیه کاستیلیانو (castighiano's theorem)

انرژی کرنشی در سازه‌ای که تحت بار P_1 و P_2 قرار دارد ،

$$U = \frac{1}{2}\left(\alpha_{11} P_1^2 + 2\alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2\right)$$

19.11

خیز نقطه ①

مشتق گیری نسبت به P_1 ←

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 = x_1$$

② " "

P_2 " " →

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12} P_1 + \alpha_{22} P_2 = x_2$$

- پس به طور کلی می‌توان گفت اگر سازه‌ای که در معرض n بار قرار گیرد ← $P_1, P_2, \ldots, P_n$
تغییر مکان نقطه i (x_i) که محل اثر بار P_i است ، در امتداد خط اثر P_i به صورت ذیل به دست می‌آید :

$$\boxed{\cancel{x_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}}}$$

$$\boxed{\delta_i = x_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}}$$

به افتخار مهندس ایتالیایی نام گذاری شده است .

- همچنین چنانچه گشتاوری مانند M بر جسم الاستیک اعمال شود در آن صورت میزان چرخش (جابجایی زاویه‌ای) نقطه اثر گشتاور در امتداد بردار M برابر است با :

$$\boxed{\theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}}$$

- چنانچه کوپل پیچشی مانند T بر جسم الاستیک اعمال شود در آن صورت میزان زاویه پیچش نقطه اثر اعمال کوپل برابر است با :

$$\boxed{\phi_i = \frac{\partial U}{\partial T_i}}$$

تعیین تغییر مکان با استفاده از قضیه های کاستیلیانو

برای مثال در مورد تیر تحت خمش داریم $\rightarrow \quad U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \cdot dx$

- محاسبه تغییر مکان ها به وسیله قضیه کاستیلیانو ساده می شود $\rightarrow$ اگر مشتق گیری نسبت به بار P_i قبل از انتگرال گیری یا عمل جمع زنی انجام شود. $\delta_i = x_i$

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \int \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{M^2}{2EI}\right) dx = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_i = \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_i} \cdot dx}$$

- تغییر مکان در اتصالات یک خرپا متشکل از n عضو می توان نوشت:

8.11 می دانیم $\rightarrow \quad \boxed{U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E}}$

F_i: نیروی داخلی

L_i: طول هر عضو

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L}{A_i L_i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial P_i}}$$

نکته ①: برای استفاده از قضیه کاستیلیانو باید بار یا کوپل یا گشتاور در نقطه ای که تغییر مکان مورد بررسی قرار می گیرد وجود داشته باشد و جهت تغییرات با جهت بار و کوپل یا گشتاور یکی باشد. در غیر این صورت باید بار مجازی در نقطه ای که تغییرات آن را می خواهیم، وارد نماییم، و پس از استفاده از قضیه کاستیلیانو نهایتاً بار را مساوی صفر قرار دهیم

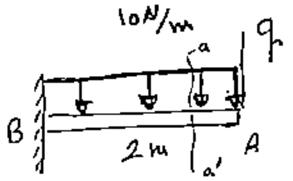
14

نکته ②: در مسائل نامعین استاتیکی می بایست به تعداد درجه نامعینی از نیروهای عکس العملها کاسته و به جای آن باری مجهول را جایگزین نماییم که همراه با دیگر بارها، باید تغییر شکلها را بپذیرد به طوری که با تکیه گاههای اصلی سازگار باشد.

(۱۳ . ۱۱ شماره

مثال ۱

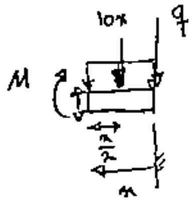
مطلوبست تغییر مکان و شیب نقطه A برای تیر شکل مقابل



حل ۱

نیروی مجازی q را در محل A وارد می‌کنیم :

برای مقطع $a - a'$ داریم :



$$\Sigma M_{o.s.} = 0 \Rightarrow -M - qx - 10x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow M = -qx - 5x^2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} M = -qx - 5x^2 \\ \dfrac{dM}{dq} = -x \end{cases}$$

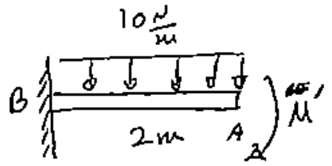
قضیه کاستیلیانو ⟵

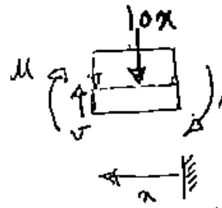
$$\delta_A = \int_0^2 \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dq} \cdot dx$$

$$\delta_A = \int_0^2 \frac{-\cancel{qx} - 5x^2}{EI} \cdot (-x)\, dx = \int_0^2 \frac{+5x^3}{EI} \cdot dx$$

$$= \frac{5x^4}{4EI}\Big|_0^2 = \frac{20}{EI} \longrightarrow \delta_A = y_A = \frac{20}{EI}$$

شیب A:





$$\longrightarrow \Sigma M_{o.s.} = 0 \Rightarrow -M - M' - 5x^2 = 0$$

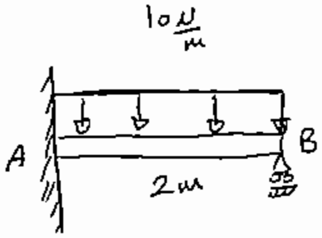
$$\Rightarrow \begin{cases} M = -M' - 5x^2 \\ \dfrac{dM}{dM'} = -1 \end{cases}$$

$$\theta_B = \int_0^2 \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dM'} \cdot dx = \int_0^2 \frac{-\cancel{M'} - 5x^2}{EI} \cdot (-1) \cdot dx = \frac{40}{3EI}$$

(جلسه ۱۱ . 15)

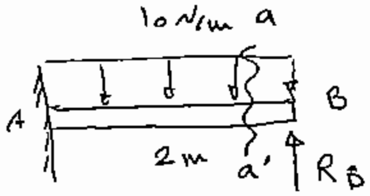
مثال ۱

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل زیر بدست آورید ؟

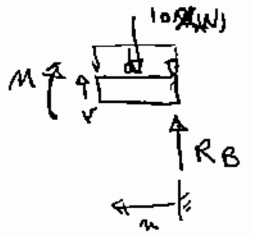


حل ۱

تیر یک درجه نامعینی دارد ⟶ پس یکی از تکیه‌گاه‌ها را به صورت بار خارجی در نظر می‌گیریم



برش a'-a :



$$\longrightarrow \quad \sum M_{برش} = 0 \longrightarrow -M - 10x\left(\frac{x}{2}\right) + R_B x = 0$$

$$\begin{cases} M = -5x^2 + R_B x \\ \dfrac{dM}{dR_B} = x \end{cases}$$

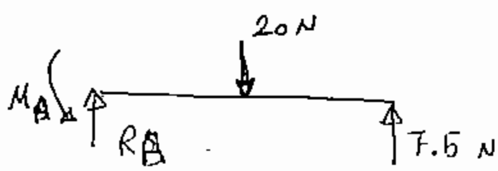
با استفاده از قضیه کاستیلیانو $\longrightarrow \quad \delta_B = \int_0^2 \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dR_B} \cdot dx = 0$ ← در نقطه B خیز صفر است

$$\Rightarrow \int_0^2 \frac{-5x^2 + R_B x}{EI} \cdot (x) \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI}\left(-20 + \frac{8}{3} R_B\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{R_B = \frac{20 * 3}{8} = 7.5 \ N} \checkmark$$

دیاگرام آزاد تیر :



$$\underline{R_A = 20 - 7.5 = 12.5 N} \checkmark$$

$$\underline{M_A = 5 N} \checkmark$$

16