حجم متوازی السطوحی که وجه‌های آن ۶ صفحه زیر باشد کدام است؟

$$\begin{cases} 2x+y+3z = 1,4 \\ 3x+2y+5z = 1,5 \\ x+2y+z = 2,4 \end{cases}$$

$$V = \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz$$

$u = 2x+y+3z \quad \begin{cases} u=1 \\ u=4 \end{cases}$

$v = 3x+2y+5z \rightarrow \begin{cases} v=1 \\ v=5 \end{cases}$

$w = x+2y+z \rightarrow \begin{cases} w=2 \\ w=4 \end{cases}$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-16+2+12} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow V = \iiint_{V'} 1 * \left|-\frac{1}{2}\right| du\, dv\, dw = \frac{1}{2}\iiint_{V'} du\, dv\, dw = \frac{1}{2} * V_{V'}$$

حجم ناحیه V'

ناحیه V' یک مکعب مستطیل با ابعاد ۳ و ۴ و ۲ می‌باشد

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} * 2 * 3 * 4 = \boxed{12}$$

حجم محصور شده به رویه فضائی $(y-2z)^2+(3x+z)^2+(x-4y)^2 = 9$ را بدست آورید

$u = y-2z$

$v = 3x+z$

$w = x-4y$

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}} \qquad V = \iiint_V 1\, dx\, dy\, dz$$

$$J = \frac{1}{0+1+24} = \frac{1}{25}$$

$$V = \iiint_{V'} 1 * \left|\frac{1}{25}\right| du\, dv\, dw = \frac{1}{25}\iiint_{V'} du\, dv\, dw = \frac{1}{25} * V$$

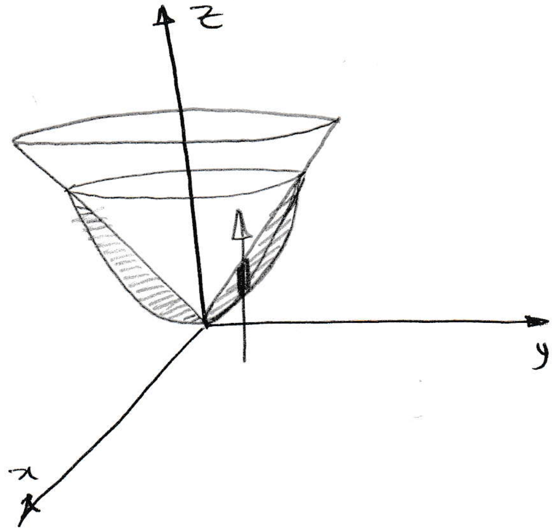
حجم ناحیه

$V': \; u^2+v^2+w^2 = 9$

کره $\rightarrow R = 3$

$$V = \frac{1}{25} * \frac{4}{3}\pi * 3^3 = \boxed{\frac{36\pi}{25}}$$

حاصل انتگرال $\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ که در آن V ناحیه فضایی محصور شده به سهمیون $z=x^2+y^2$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد را بدست آورید



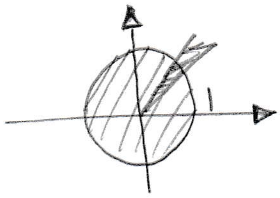
$V=\iiint r^2 * r\,dr\,d\theta\,dz$

$z=x^2+y^2 \rightarrow z=r^2$

$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z=r$

$r^2=r \rightarrow r=1$

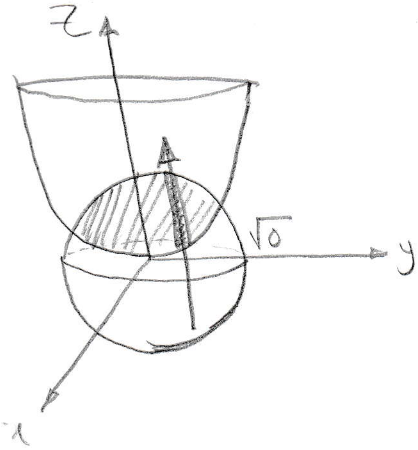
$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r^3\,dz\,dr\,d\theta$



$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\left(z\Big|_{r^2}^{r}\right)dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^4-r^5)\,dr\,d\theta=\left(\frac{r^5}{5}-\frac{r^6}{6}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{30}*2\pi=\boxed{\frac{\pi}{15}}$

حجم محصور شده به کره $x^2+y^2+z^2=5$ و سهمیون $4z=x^2+y^2$ را بدست آورید



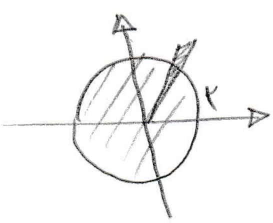
$V=\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

$4z=x^2+y^2 \rightarrow 4z=r^2 \rightarrow z=\frac{1}{4}r^2$

$x^2+y^2+z^2=5 \rightarrow r^2+z^2=5 \rightarrow z=\sqrt{5-r^2}$

$\begin{cases} z=\frac{1}{4}r^2 \\ z=\sqrt{5-r^2}\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}r^2=\sqrt{5-r^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{16}r^4=5-r^2 \rightarrow r^4+16r^2-80=0$



$(r^2+20)(r^2-4)=0$

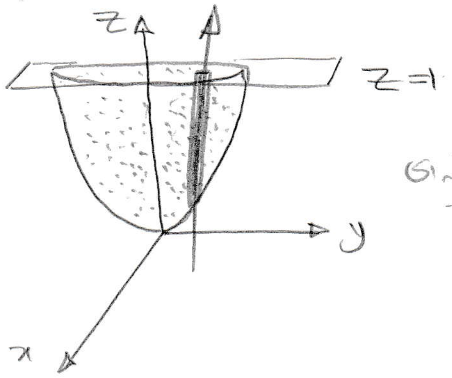
$r^2=-20 \rightarrow$ غیرممکن

$r^2-4=0 \rightarrow \boxed{r=2}$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(z\Big|_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}}\right)r.dr.d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(r\sqrt{5-r^2}-\frac{1}{4}r^3\right)dr\,d\theta$$

$$=\ldots$$

حجم داخل سهمیگون $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ که زیر صفحه $z=1$ قرار می‌گیرد را بدست آورید



$$V=\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$$

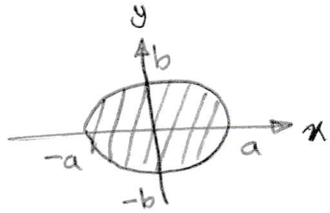
شبه استوانه‌ای

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{1} r\times a\times b.dz.dr.d\theta$$

شبه استوانه‌ای $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2 \to z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2$

$$\begin{cases} z=1 \\ z=r^2 \end{cases} \to r^2=1 \to r=1$$

نمایانگر یک بیضی است
در شبه قطبی ۱ است



$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\left(z\Big|_{r^2}^{1}\right).r.a.b\,dr.d\theta=ab\iint_0^1 (r-r^3)\,dr.d\theta$$

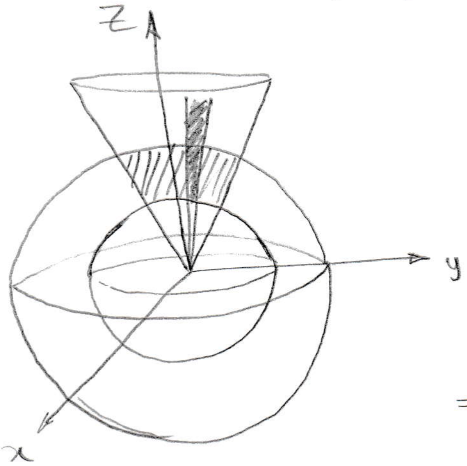
$$=ab\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)=ab*\frac{1}{4}*2\pi=\frac{1}{2}\pi.ab$$

دستگاه مختصات کروی

مثال: حاصل $I=\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$ که در آن V ناحیه‌ای می‌باشد که بین

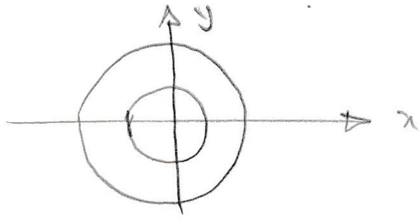
دو کره $x^2+y^2+z^2=1$ و ۴ و مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ است را بدست آورید

$$I=\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac52}}=\iiint_V \frac{r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{(r^2)^{\frac52}}$$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^3}\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\left(\frac{-1}{2r^2}\Big|_1^2\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)$$



$$=\left(-\frac18-\frac{-1}{2}\right)(2\pi-0)\left(-\frac{\sqrt3}{2}-(-1)\right)=\frac38\times 2\pi\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)$$

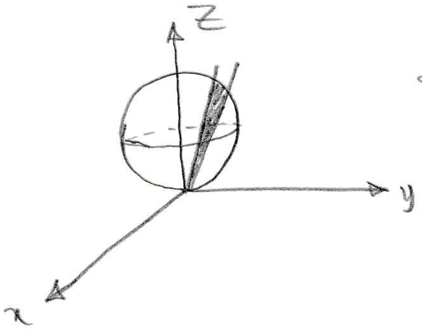
$$=\boxed{\frac{3\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt3}{2}\right)}$$

مخروط $z \xrightarrow{\text{کروی}} z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \longrightarrow r\cos\varphi=\sqrt{3\, r^2\sin^2\varphi}$

$$z:\ r\cos\varphi=\sqrt3\, r\sin\varphi \longrightarrow \cot\varphi=\sqrt3 \longrightarrow \boxed{\varphi=\frac{\pi}{6}}$$

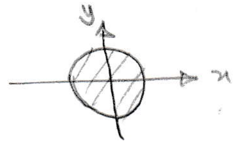
حاصل: $\iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz$ که در آن V ناحیهٔ داخل کرهٔ $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ می‌باشد، را بدست آورید

$(0,0,1)$ مختصات مرکز کره



$$\iiint_V r^2\cos^2\varphi * r^2\sin\varphi \, dr.d\theta.d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos\varphi} r^4 \sin\varphi \cos^2\varphi \, dr\,d\theta\,d\varphi$$



معادله کره : $x^2+y^2+z^2-2z+1=1 \to x^2+y^2+z^2=2z \to r^2=2r\cos\varphi$

$\to \underline{r=2\cos\varphi}$ معادله کره در مختصات کروی است

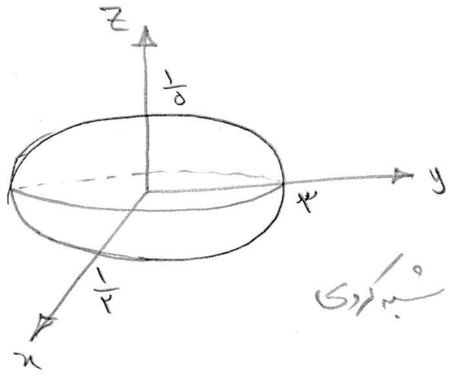
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^{2\cos\varphi}\right)\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi = \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos^7\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{32}{5}\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\frac{\cos^8\varphi}{8}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{32}{5}(2\pi-0)\left(0-\frac{-1}{8}\right) = \frac{32}{5}*2\pi*\frac{1}{8} = \boxed{\frac{8\pi}{5}}$$

مثال: حاصل $\iiint_V \sqrt{4x^2+\frac{y^2}{9}+25z^2}\,dx\,dy\,dz$ که در آن V ناحیه داخل بیضیگون

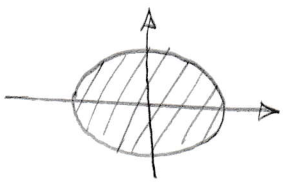
$$4x^2+\frac{y^2}{9}+25z^2=1$$

جواب را بدست آورید



شبه کروی $r^2=1 \to \underline{r=1}$

شبه کروی $4x^2+\frac{y^2}{9}+25z^2=r^2$



$$\to \iiint_V \sqrt{r^2} * \frac{1}{2} * 3 * \frac{1}{5}\, r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{10}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{3}{10}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{1}{4}\right)(2\pi)(2) = \frac{3\pi}{10}$$

حاصل $I=\oiint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS$ که در آن $\vec{F}$ میدان برداری بصورت

$$\vec{F} = xy^2\hat{i} + (x^2 - \frac{y^3}{3})\hat{j} + (x^2y^3+3z)\hat{k}$$

و $\vec{n}$ بردار یکه عمود به سمت خارج سطح بیضیگون : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+16z^2=1$ می‌باشد را بدست آورید

$$\xrightarrow{\text{دیورژانس}} \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \iiint_V (y^2+(-y^2)+3)\,dx\,dy\,dz$$

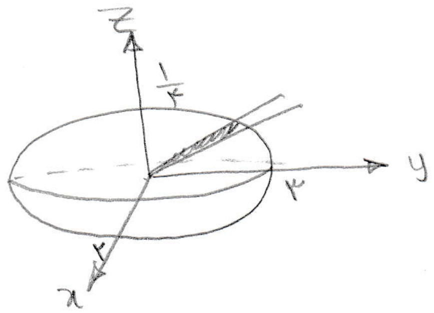
$$= \iiint_V 3\,dx\,dy\,dz = 3 * V_{\text{حجم ناحیه}} = 3*\frac{4}{3}\pi*2*3*\frac{1}{4} = \boxed{6\pi}$$

$$V_{\text{بیضیگون}} = \frac{4}{3}\pi abc$$

$$\vec{F} = xy^2\hat{i} + (x^2-y^3/3)\hat{j} + (x^2y^3+3z^3)\hat{k}$$

اگر در سوال قبل :

$$\oiint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \iiint_V (y^2+(-y^2)+9z^2)\,dx\,dy\,dz$$



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+16z^2=r^2$$

بیضیگون شبه کروی $\to r^2=1 \to \boxed{r=1}$

$$(4z)^2=(r\cos\varphi)^2$$

$$4z=r\cos\varphi$$

$$\boxed{z=\frac{1}{4}r\cos\varphi}$$

$$= 9\iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz = 9\iiint_V (\frac{1}{4}r\cos\varphi)^2 * 2*3*\frac{1}{4}r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \frac{27}{32}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\sin\varphi\cos^2\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{27}{32}(\frac{r^5}{5}\Big|_0^1)(\theta\Big|_0^{2\pi})(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi})$$

$$= \frac{27}{32}(\frac{1}{5})(2\pi)(\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{9\pi}{40}}$$

$$I = \oiint_S y^2\,dz\,dy + x^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$$ حاصل

که در آن S سطح رویه کره $x^2+y^2+z^2=2$ بوده که بالای صفحه $z=1$ قرار دارد را بدست آورید

استرا گرادسکی

$$\rightarrow \vec{F} = y^2\hat{i} + x^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

چند نکته در قضیه دیورژانس

ص ۳۸

اونی که dx ندارد i است

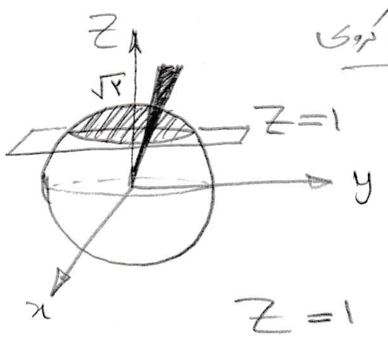
اونی که dy ندارد j است

اونی که dz ندارد k است

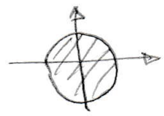
$$\rightarrow I = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_V (0+0+2z)\,dx\,dy\,dz$$

دستگاه کروی



$$= 2\iiint r\cos\varphi \times r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$



$$z=1$$

$$\boxed{r\cos\varphi = 1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos\varphi}}$$

کره: $r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

صفحه: $r = \dfrac{1}{\cos\varphi}$

$$\rightarrow \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{2} \rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\sqrt{2}} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\sqrt{2}}\right)\cos\varphi\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

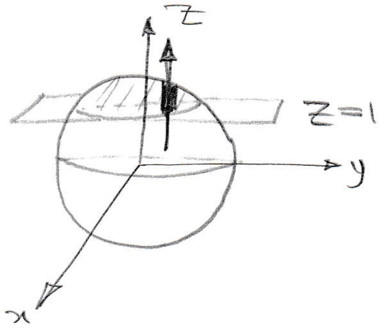
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{1}{4\cos^4\varphi}\right)\cos\varphi\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} - \frac{1}{4}\sin\varphi \times \frac{1}{\cos^3\varphi}\right)d\theta\,d\varphi$$

$$= 2\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{1}{2} * \frac{-1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{4} * \frac{\cos^{-2}\varphi}{-2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= 2(2\pi)\left(\left(0-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{-1}{8}\right)\right) = 4\pi * \frac{1}{8} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

حل با دستگاه استوانه‌ای



$$2\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{\sqrt{2-r^2}} z.r.dz\,dr.d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{z^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{2-r^2}}\right) r.dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2-r^2-1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r-r^3)\,dr\,d\theta = \left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{4} * 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$x^2+y^2+z^2=2$$
$$\to r^2+z^2=2 \longrightarrow z=\sqrt{2-r^2}$$

$$\begin{cases} r^2+z^2=2 \\ z=1 \longrightarrow r^2=2-1 \end{cases}$$
$$r^2=1 \longrightarrow \boxed{r=1}$$

مثال: اگر $\varphi(x,y,z)$ یک تابع هماساز باشد ، $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد

حاصل $\oiint_S \frac{d\varphi}{d\vec{n}}\,ds$

مشتق سوئی: $\frac{d\varphi}{d\vec{n}} = \underbrace{\vec{\nabla}\varphi}_{\vec{F}\text{: فرض}} \cdot \vec{n} = \vec{F}\cdot\vec{n}$

$$\to \oiint_S \frac{d\varphi}{d\vec{n}}\,ds = \oiint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds \xrightarrow{\text{دیورژانس}} \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\varphi)\,dx\,dy.dz = \iiint_V \underbrace{\nabla^2\varphi}_{\varphi\text{ هماساز است}}\,dx\,dy\,dz = 0$$

اگر φ همساز نبود: مثلاً:

$$\varphi(x,y,z) = x^2+yz+xz+z^2$$

$$\nabla^2\varphi = 2+0+2 \to \nabla^2\varphi = 4$$

$$\Rightarrow \iiint_V 4\,dxdydz = 4 \times \underbrace{\frac{4}{3}\pi a^3}_{\text{حجم کره}}$$

مثال: حاصل $\oiint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$ که در آن $\vec{F}$ یک میدان برداری بوده و $\vec{n}$ بردار یکه عمود به سمت خارج سطح روی کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می‌باشد را بدست آورید

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{u}$$

جواب کرل $\vec{F}$ یک بردار است مثل $\vec{u}$

$$\Rightarrow \oiint_S (\vec{u}\cdot\vec{n})\,dS = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,dxdydz$$

$$= \iiint_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})\,dxdy.dz = 0$$

* دیورژانس کرل هر تابع برداری صفر است *

نتیجه: قضیه استوکس روی یک سطح بسته صفر است

جبر خطی

$$A = \begin{pmatrix} 3m+2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

اگر یکی از مقادیر ویژه‌های ماتریس A صفر باشد، مجموع دو مقدار ویژه دیگر کدام است.

$$\lambda_1 = 0 \to \lambda_2+\lambda_3 = ?$$

$$\underbrace{\lambda_1}_{0}\lambda_2\lambda_3 = \det A \to \det A = 0 \to m = \frac{2}{3}$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \mathrm{Tr}\,A \to 0+\lambda_2+\lambda_3 = (3m+2)+5+10$$

$$\to \lambda_2+\lambda_3 = (2+2)+5+10 = 19$$

مقادیر ویژه ماتریس زیر کدام گزینه می‌تواند باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & a & ۱ \\ x & ۴ & b \\ y & z & ۷ \end{pmatrix}$$

۱) ۱, ۵, ۶ ۲) ۲, ۵, ۶ ۳) ۲, ۳, ۹ ۴) ۳, ۴, ۵

$$\lambda_۱ + \lambda_۲ + \lambda_۳ = TrA = ۳ + ۴ + ۷ = ۱۴$$

$$۲ + ۳ + ۹ = ۱۴$$

اگر ماتریس تبدیل T بصورت زیر تعریف شود.

$$\underset{۱\times۳}{[x \quad y \quad z]} \times T = \underset{۱\times۳}{[۳x+z \quad ۴x+۲y \quad ۵x+۳z]}$$

$$T_{۳\times۳}$$

بردار ویژه متناظر مقدار ویژه طبیعی ماتریس T را بدست آورید.

$$\rightarrow T = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \rightarrow T - \lambda I = \begin{bmatrix} ۳-\lambda & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۲-\lambda & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۳-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|T - \lambda I| = ۰ \xrightarrow{\text{بسط سطر دوم}} -۰\times(\ ) + (۲-\lambda)\big((۳-\lambda)(۳-\lambda) - ۵\big) - ۰ \times (\ ) = ۰$$

$$(۲-\lambda)\big((۳-\lambda)^۲ - ۵\big) = ۰ \qquad ۲-\lambda = ۰ \rightarrow \boxed{\lambda = ۲} \rightarrow \text{مقدار ویژه طبیعی}$$

$$(۳-\lambda)^۲ - ۵ = ۰ \rightarrow (۳-\lambda)^۲ = ۵$$

$$\begin{cases} ۳ - \lambda = \sqrt{۵} \rightarrow \lambda = ۳ - \sqrt{۵} \\ ۳ - \lambda = -\sqrt{۵} \rightarrow \lambda = ۳ + \sqrt{۵} \end{cases}$$

$$(T - ۲I) * \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ۰ \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{cases} a + ۴b + ۵c = ۰ \\ a + ۰ + c = ۰ \end{cases} \rightarrow \boxed{a = -c}$$

$$\rightarrow -c + ۴b + ۵c = ۰$$

$$\rightarrow ۴b + ۴c = ۰ \rightarrow b = -c$$

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -c \\ c \end{bmatrix} \overset{\text{مثلا}}{=} \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \\ ۲ \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

مثال: مجموع عناصر سطر اول در معکوس ماتریس زیر را بدست آورید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1}_{11} + A^{-1}_{12} + A^{-1}_{13} = ?$$

$$A^{-1}_{11} = \frac{N_{11}}{|A|} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11}}{|A|} = \frac{+(36-42)}{|A|} = \frac{-6}{4}$$

$$A^{-1}_{12} = \frac{N_{21}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \Delta_{21}}{|A|} = \frac{-(27-35)}{|A|} = \frac{8}{4}$$

$$A^{-1}_{13} = \frac{N_{31}}{|A|} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot \Delta_{31}}{|A|} = \frac{+(18-20)}{|A|} = \frac{-2}{4}$$

$$\longrightarrow -\frac{6}{4} + \frac{8}{4} - \frac{2}{4} = 0$$

$$\det A = +1(36-42) - 3(18-18) + 5(14-12) = 4$$

مثال: اگر معادله مشخصه یک ماتریس 2×2 بصورت $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ باشد، ماتریس معکوس این ماتریس بر چه فرمی خواهد بود؟

قضیه کیلی هامیلتون

کیلی هامیلتون

$$\longrightarrow A^2 - 4A + 5I = 0$$

$$\times A^{-1}: \quad A^2 \times A^{-1} - 4A \times A^{-1} + 5 I \cdot A^{-1} = 0$$

$$\longrightarrow A \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} - 4 A \cdot A^{-1} + 5 A^{-1} = 0 \longrightarrow A - 4I + 5A^{-1} = 0$$

$$\longrightarrow 5A^{-1} = 4I - A \longrightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{4}{5} I - \frac{1}{5} A}$$

مثال: رتبه ماتریس زیر را بنویسید

وابستگی خطی را پیدا می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 17 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

سطر سوم مستقل نیست $\leftarrow$ سطر اول − سطر دوم = سطر سوم

سطر چهارم مستقل نیست $\leftarrow$ سطر دوم + ۲ * سطر اول = سطر چهارم

رتبه ماتریس ۲ یا کمتر است $\leftarrow$ ۲ تا سطر مستقل داریم $\leftarrow$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to |A_1| \neq 0 \to \boxed{\text{Rank } A = 2}$$

۱) ۳ و ۷   ۲) ۷   ۳) −۳   ۴) −۷

مثال: تعداد m را چنان بدست آورید تا دستگاه زیر فاقد جواب باشد.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + my + 2z = 7 \\ 4x + 5y + mz = 12 \end{cases} \xrightarrow{\Delta = 0} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & m & 2 \\ 4 & 5 & m \end{vmatrix} = 0$$

دستور کرامر:

۱) $\Delta \neq 0$ $\leftarrow$ دستگاه یک دسته جواب منحصر به فرد دارد

۲) الف) $\Delta = 0$ ، $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \neq 0$ $\leftarrow$ غیر ممکن و فاقد جواب

ب) $\Delta = 0$ ، $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots = 0$ $\leftarrow$ حالت مبهم، بی نهایت جواب

$$\to 1(m^2 - 10) - 2(3m - 8) + 1(15 - 4m) = 0$$

$$\to m^2 - 10 - 6m + 16 + 15 - 4m = 0 \to m^2 - 10m + 21 = 0$$

$$(m-3)(m-7) = 0 \to \begin{cases} m = 3 \\ m = 7 \end{cases}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & m & 2 \\ 12 & 5 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{if } m=3} \Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 12 & 5 & 3 \end{vmatrix} \to \underline{\Delta x = 0}$$

$$\Delta x = 5(9-10) - 2(21-24) + 1(35-36)$$
$$= 5(-1) - 2(-3) + (-1) = -5 + 6 - 1 = 0$$

پس $\boxed{m = 7}$ چون می‌خواهیم فاقد جواب باشد.

توابع برداری ص ۷ ریاضی I

مثال: متحرکی بر روی مسیر $\vec{R} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ در حال حرکت است. در نقطه نظیر $t = 1$

مطلوبست: الف: زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب

ب: معادله صفحه قائم بر منحنی

ج: معادله صفحه بوسان منحنی

د: معادله صفحه اصلاحی منحنی

هـ: انحنای منحنی

و: تاب منحنی

$\frac{۶۳}{II}$ $\vec{V}=\vec{R'}=\hat{i}+۲t\hat{j}+۳t^{۲}\hat{k}$

$\xrightarrow{t=۱}$ $V=\vec{R'}=i+۲j+۳k$

$\vec{a}=\vec{R''}=۲j+۶tk$ $\qquad$ $\vec{R'''}=۶k$

$\xrightarrow{t=۱}$ $\vec{a}=\vec{R''}=۲j+۶k$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^{۲} \\ z=t^{۳} \end{cases} \xrightarrow{t=۱} \begin{cases} x=۱ \\ y=۱ \\ z=۱ \end{cases}$$

الف) $\cos\theta=\frac{\vec{V}\cdot\vec{a}}{|V||a|}=\frac{۰+۴+۱۸}{\sqrt{۱۴}*\sqrt{۴۰}} \rightarrow \theta=\operatorname{Arc\,cos}\frac{۲۲}{\sqrt{۱۴*۴۰}}$

ب) $\vec{T}=\frac{\vec{V}}{|V|}=\frac{i+۲j+۳k}{\sqrt{۱۴}}$

معادله صفحه قائم: $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(x-۱)+\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}(y-۱)+\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}(z-۱)=۰$

$x+۲y+۳z-۶=۰$

ج) $\vec{B}=\frac{\vec{V}\times\vec{a}}{|\vec{V}\times\vec{a}|}=\frac{۶i-۶j+۲k}{\sqrt{۷۶}}$ $\qquad$ $\vec{V}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \end{vmatrix}$

$\vec{V}\times\vec{a}=۶i-۶j+۲k$

معادله صفحه بوسان $\rightarrow \frac{۶}{\sqrt{۷۶}}(x-۱)-\frac{۶}{\sqrt{۷۶}}(y-۱)+\frac{۲}{\sqrt{۷۶}}(z-۱)=۰$

د) $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$ $\qquad$ $\vec{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{۶}{\sqrt{۷۶}} & \frac{-۶}{\sqrt{۷۶}} & \frac{۲}{\sqrt{۷۶}} \\ \frac{۱}{\sqrt{۱۴}} & \frac{۲}{\sqrt{۱۴}} & \frac{۳}{\sqrt{۱۴}} \end{vmatrix}$

$\rightarrow \vec{N}=\frac{-۲۲}{\sqrt{۱۴*۷۶}}i-\frac{۱۲}{\sqrt{۱۴*۷۶}}j+\frac{۱۸}{\sqrt{۱۴*۷۶}}k$

معادله صفحه اصلاحی: $\frac{-۲۲}{\sqrt{۱۴*۷۶}}(x-۱)-\frac{۱۲}{\sqrt{۱۴*۷۶}}(y-۱)+\frac{۱۸}{\sqrt{۱۴*۷۶}}(z-۱)=۰$

$\rightarrow -۲۲x-۱۲y+۱۸z-۲۰=۰$

ه) $K(t) = \dfrac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^{۳}} = \dfrac{(\sqrt{۷۶})}{(\sqrt{۱۴})^{۳}}$

د) $\tau(t) = \dfrac{R' \cdot (R'' \times R''')}{|R' \times R''|^{۲}} = \dfrac{۱۲}{(\sqrt{۷۶})^{۲}} = \dfrac{۱۲}{۷۶}$

$$R' \cdot (R'' \times R''') = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۲$$

مثال: ماکزیمم انحنای تابع $y = \ln x$ در چه طولی می‌باشد؟

$y = \ln x$

$K(x) = \dfrac{|y''|}{(1+y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x} \quad y'' = \dfrac{-1}{x^{۲}}$

$$K(x) = \frac{\frac{1}{x^{۲}}}{\left(1+\frac{1}{x^{۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{\frac{1}{x^{۲}}}{\frac{(1+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{x^{۳}}} = \frac{x}{(1+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$K'(x) = ۰ \rightarrow \frac{1 \times (1+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۳}{۲}(۲x)(1+x^{۲})^{\frac{1}{۲}} \times x}{\left((1+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}\right)^{۲}} = ۰$$

$$\rightarrow (1+x^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - ۳x^{۲}(1+x^{۲})^{\frac{1}{۲}} = ۰$$

$$(1+x^{۲})^{\frac{1}{۲}}\left((1+x^{۲})^{1} - ۳x^{۲}\right) = ۰ \rightarrow (1+x^{۲})^{\frac{1}{۲}}(1-۲x^{۲}) = ۰$$

$$\begin{cases} 1+x^{۲} = ۰ \rightarrow x^{۲} = -1 \rightarrow \text{غیرممکن} \\ 1-۲x^{۲} = ۰ \rightarrow x^{۲} = \frac{1}{۲} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{۲}} \notin D \\ x = \frac{1}{\sqrt{۲}} \rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}} \end{cases} \end{cases}$$

مبحث ۵ ـ پنجم ، انتگرال ناسره

۱) حاصل $\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \cos^2 t \, dt$ کدام است؟

۱) $\int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \cos^2 t \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} dt \xrightarrow[\text{تبدیل لاپلاس}]{\text{مطابق تعریف}}$

$$I = \left(L\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)\right)\Big|_{s=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)\Big|_{s=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+4}\right) = \cdots$$

---

۲) اگر $A = \int_0^1 \frac{e^t}{t+1} dt$ مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{e^{-t}}{t-3} dt$ برحسب A کدام است؟ (معادل)

۲) تغییر متغیر $t = 2-u \longrightarrow dt = -du$

$t = 0 \longrightarrow u = 2$

$t = 1 \longrightarrow u = 1$

داریم :

$$A = \int_2^1 \frac{e^{2-u}}{2-u+1}(-du) = \int_2^1 \frac{e^2 \cdot e^{-u}}{3-u}(-du)$$

$$= -\int_1^2 \frac{e^2 \cdot e^{-u}}{u-3}(-du) = -e^2 \underbrace{\int_1^2 \frac{e^{-u}}{u-3} du}_{\text{خواسته مسأله}}$$

داریم : $\int_1^2 \frac{e^{-u}}{u-3} du = -e^{-2} \cdot A$

۳) به ازای چه مقدار ثابت c ، انتگرال $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{c}{x+1}\right) dx$ همگراست؟ (معادل)

---

۳) انتگرال ناسره است به خاطر حد بالای ∞ انتگرال.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x+1 - c\sqrt{1+2x^2}}{(x+1)\sqrt{1+2x^2}} dx$$

بررسی مسأله در حد بالای $x = \infty$ است

و می‌دانیم وقتی $x \longrightarrow \infty$ داریم

$$\frac{x+1 - c\sqrt{1+2x^2}}{(x+1)\sqrt{1+2x^2}} \sim \frac{x+1 - c\sqrt{2}x}{(x+1)\sqrt{2}x}$$

$$= \frac{(1-c\sqrt{2})x + 1}{(x^2+x)\sqrt{2}}$$

$1 - c\sqrt{2} = 0 \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

*Imp برای آنکه انتگرال تابع نوع صد بازه $[0, +\infty)$ همگرا باشد باید تابع مخرج بیشتر از عوامل از تابع صورت بیشتر باشد دانیم می‌طلبد که

۴) حاصل $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x^3} dx$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر)

۴) تغییر متغیر $x^3=t \to 3x^2 dx = dt \to dx = \frac{dt}{3x^2} = \frac{dt}{3t^{2/3}}$

$$\begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=\infty \to t=\infty \end{cases}$$

داریم $I=\int_0^\infty (t^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{3t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-t} \cdot dt}_{} = \frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx}$$

مطابق تعریف تابع گاما به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha-1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

---

۵) حاصل $\int_0^\pi \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$ کدام است؟ (MBA)

۵) $\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\, dx$

داریم: $I=\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

تغییر متغیر $\cos x = t \to -\sin x\, dx = dt$

$$\begin{cases} x=0 \to t=1 \\ x=\pi \to t=-1 \end{cases}$$

داریم $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = 2 \times \frac{\pi}{2}\int_0^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \pi(\text{Arctg}\, t)\Big|_{-1}^{0}$

زوج

$= \pi(0-(-\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi^2}{4}$

۶) اگر $A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$ ، مقدار $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+2}dx$ کدام است؟ (ریاضی)

۶) جزء به جزء

$$\begin{cases}\cos x = u \longrightarrow -\sin x\, dx = du\\[4pt] \dfrac{dx}{(x+2)^2} = dv \longrightarrow \dfrac{-1}{x+2} = v\end{cases}$$

$$A = -\frac{\cos x}{x+2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin x\, dx}{x+2} = -\left(\frac{-1}{\pi+2}-\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\pi}\frac{\sin x\, dx}{x+2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+2}dx}_{\text{خواسته مسئله}} = \frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A$$

---

۷) اگر $a\geq 0$ ، $\int_{-a}^{1-a} y(y+a)^{1000}dy=0$ ، a کدام است؟ (آمار)

۷) تغییر متغیر

$$y+a=t \longrightarrow dy=dt$$

$$y=-a \longrightarrow t=0$$

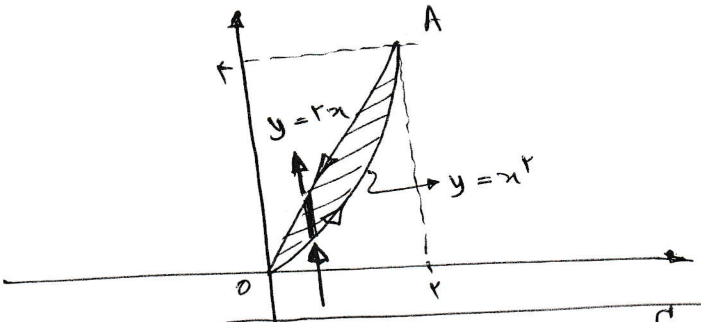
$$y=1-a \longrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 (t-a)\cdot t^{1000}dt=\int_0^1 \left(t^{1001}-a t^{1000}\right)dt$$

$$=\left(\frac{t^{1002}}{1002}-a\frac{t^{1001}}{1001}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{1002}-\frac{a}{1001}$$

برای اینکه $I=0$ باشد $\longrightarrow \frac{1}{1002}-\frac{a}{1001}=0 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1001}{1002}}$

۱) اگر C قسمتی از سهمی $y=x^2$ از مبدا تا A(۲,۴) و پاره‌خط واصل A به مبدا باشد، حاصل $\oint_C 2y\,dx+4x\,dy$ برابر است با: (محاسبه کنید)



۱) طبق گرین داریم

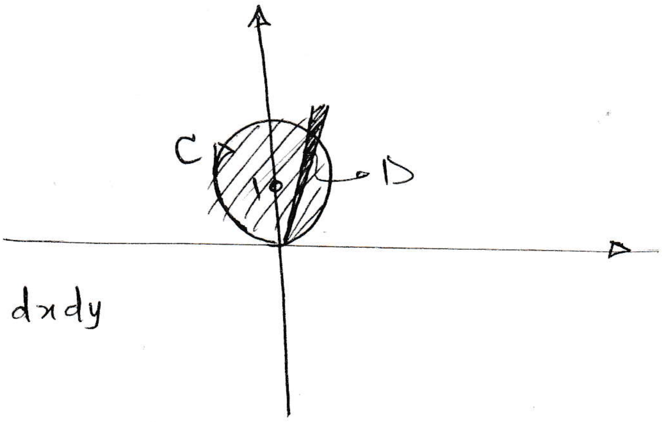
$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint\left(\frac{\partial}{\partial x}(4x)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D 2\,dx\,dy=2\int_{x=0}^{2}\int_{y=x^2}^{2x}dy\,dx=\cdots$$

---

۲) مقدار انتگرال $\int_C (e^x-yx^2)\,dx+(xy^2-e^y)\,dy$ که در آن C دایره $x^2+y^2-2y=0$ می‌باشد که باید در جهت مثلثاتی پیموده شده است برابر با چیست؟



۲) طبق گرین

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2-e^y)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x-yx^2)\right)dx\,dy$$

$$=\iint_D (y^2+x^2)\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2-2y=0 \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2-2r\sin\theta=0$$

$$\boxed{r=2\sin\theta}$$

داریم: $$I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\sin\theta} r^2\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta=\int_0^{\pi}4\sin^4\theta\,d\theta=\cdots$$

$\frac{69}{\text{II}}$

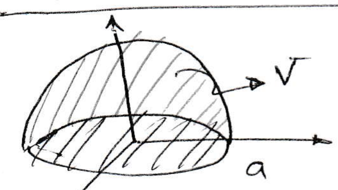
$\frac{3)}{12}$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(by) + \frac{\partial}{\partial z}(cz) = a+b+c$

طبق قضیه دیورژانس : $I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\cdot d\sigma = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_V \underbrace{(a+b+c)}_{\text{ثابت}}\cdot dV$

$= (a+b+c) * V_{\text{حجم ناحیه}} = (a+b+c)\cdot\frac{4}{3}\pi abc$

۱۳) فرض کنید $\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$ و S رویه بیضیگون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ و $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر بیضیگون S و رو به خارج باشد، مقدار انتگرال رویه ای متناظر کدام است؟ $(a>0, b>0, c>0)$ $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\, dS$ (امکانیک)

$\frac{4}{12})$



طبق قضیه دیورژانس و فرمول استوکس در کتاب ... داریم $I = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\cdot dV$

۱۴) حاصل $\iint_S xz^2\,dy\,dz + (x^2y - z)\,dx\,dz + (xy + y^2z)\,dx\,dy$ که در آن S سطح نیمکره بسته $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ و صفحه $z=0$ می باشد، چند برابر a^5 است؟ (MBA)

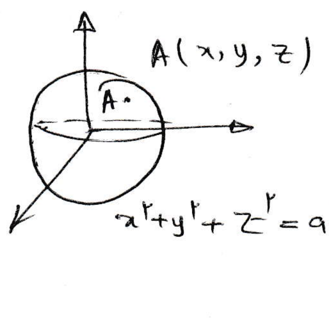
$= \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + y^2z) \right\} dV$

$= \iiint_V (z^2 + x^2 + y^2)\, dV \xrightarrow{\text{مختصات کروی}}$

$I = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \cdot dr\, d\theta\, d\varphi = \cdots$

۱۵) حاصل $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$ که در آن S کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ می باشد کدام است؟ (راهنمایی: از قضیه دیورژانس استفاده نمائید) (عمران)

$\frac{5}{12}$ (حجم) برای کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ در هر نقطه x, y, z می دانیم که نرمال برابر است با: $\vec{n} = \frac{xi+yj+zk}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{a}}$



$I = \iint_S (x^2+y^2)\, ds$

می خواهیم $\vec{F}$ ای را پیدا کنیم که $\vec{F}\cdot\vec{n} = x^2+y^2$ باشد ..

سعی و خطا: $\vec{F} = (xi + yj + 0k)\cdot a$

، لذا داریم

$$I=\iint_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{\vec{F}\cdot\vec{n}}\, ds \xrightarrow{\text{دیورژانس}}$$

$$I=\iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dV=\iiint_V (1+1+0)\, a\, dV = 2a\ (\text{حجم ناحیه } V)$$

$$2a\ (\text{حجم ناحیه } V)$$

$$=2a\cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

راه دیگر: روی سطح نیمکره بالائی و نیمکره پائینی از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ داریم

المان سطح $\quad ds=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$

$$I=\oiint_S (x^2+y^2)\, ds \xrightarrow{\text{بنابه تقارن داریم}} I=2\iint_D (x^2+y^2)\, ds$$

$$=2\iint_{D:\,x^2+y^2\leqslant a^2} (x^2+y^2)\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

تصویر سطح نیمکره بالائی روی صفحه xy

قطبی: $\quad 2\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r^2\cdot\frac{a\cdot r\,dr\cdot d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}=\ldots$

---

6) $$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2\end{vmatrix}=i(3x^2z^2-3x^2z^2)+j(6xyz^2-6xyz^2)$$
$$+k(2xz^3-2xz^3)=\vec{0}$$

بدیهی است منحنی c (ساده بسته) تعریف شده بسته است چون انتگرال مستقل از مسیر شده لذا داریم

$$I=\oint_c=0$$

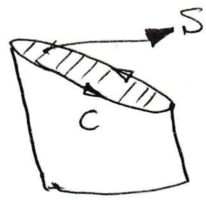
7) حاصل $\displaystyle\oint_c 2xyz^3dx+x^2z^3dy+3x^2yz^2dz$ که در آن c منحنی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه به معادله $x+2z=0$ باشد، برابر کدام است؟ (MBA)

۷۱ / II ‏ ۷ / ۱۳ ص

$$\vec\nabla\times\vec F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ & & \\ -y^3 & x^3 & -z^3\end{vmatrix}=0i+0j+(3x^2+3y^2)k\neq 0$$

$$\boxed{z=-2x-2y+3}\rightarrow\begin{cases} z_x=-2\\ z_y=-2\end{cases}$$

$$W=\oint_C \vec F\cdot d\vec r \xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} W=\iint_S(\vec\nabla\times\vec F)\cdot\vec n\cdot ds$$



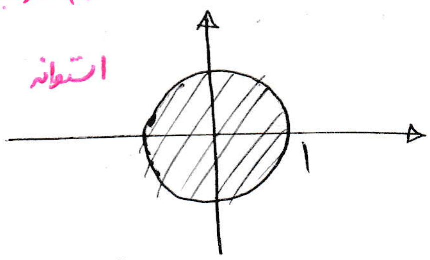
سطح S : $2x+2y+z=3 \longrightarrow \vec n^{\circ}=\frac{2i+2j+1k}{3}$

المان سطح $ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\;dx\,dy=\sqrt{1+(-2)^2+(-2)^2}\;dx\,dy=3\,dx\,dy$

۷) کار انجام شده توسط نیروی $F=-y^3i+x^3j-z^3k$ روی منحنی C فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=1$ و صفحه $2x+2y+z=3$ کدام است؟

انتگرال $I=\iint_S \frac{3x^2+3y^2}{3}\,3\cdot dx\,dy$

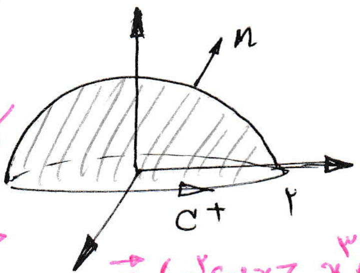
$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\cdot dr\cdot d\theta=\dots$$



تصویر C روی صفحه xy

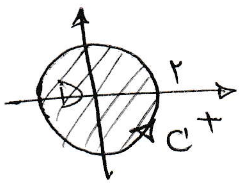
---

۸) حاصل $I=\iint_S \mathrm{Curl}\vec F\cdot\vec n\,ds$ که در آن S قسمتی از کره $x^2+y^2+(z-2)^2=8$ است که در بالای صفحه xy قرار دارد و $\vec n$ بردار قائم یکه خارجی S است و $\vec F=(y^2\cos xz,\ x^3e^{yz},\ e^{-xyz})$ می‌باشد کدام است؟ (عمران)



$$C:\begin{cases} z=0\longrightarrow dz=0\\ x^2+y^2=4\end{cases}$$

$$I=\iint_S(\vec\nabla\times\vec F)\cdot\vec n\,ds\xrightarrow{\text{قضیه استوکس}} I=\oint_{C^+}\vec F\cdot d\vec r=\oint_C$$



$$=\oint_C (y^2\cos(xz))dx+(x^3e^{yz})dy+(e^{-xyz})dz=\oint_C y^2dx+x^3dy+0$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه گرین}} I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right)dx\,dy=\iint_D(3x^2-2y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_D 3x^2\,dx\,dy-\cancelto{0}{\iint_D 2y\,dx\,dy}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}3r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\cdot d\theta=\dots$$

مبحث دوازدهم

1) $y = e^{-kx} \sin x$

۱) منحنی $y = e^{-kx} \sin x ,\ x>0$ در بالای محور x و زیر آن متوالیاً (از مبدأ به سمت راست) زنجیره‌ای از ناحیه‌های دنبال هم را تولید می‌کند که با رفتن به سمت راست، مساحت آنها کاهش می‌یابد. هرگاه $k>0$، نسبت مساحت دانه $n+1$ به دانه n ام چقدر است؟ (مکانیک)

حل: انتظار داریم وقتی $k=0$ است یا به تعبیری $k \to 0$، منحنی مورد نظر به صورت $y = \sin x$ تبدیل شود که البته در این شرایط همه دانه‌های تولید شده مساحت یکسان دارند و نسبت مساحت دانه $n+1$ ام به دانه n ام برابر یک شود

ولی این مسئله در گزینه ۴ رعایت شده است.

---

۲) به ازای $x=0$ که البته شرط $|x|<1$ را ارضا می‌کند، حاصل سری داده شده صفر می‌شود. البته این موضوع فقط در گزینه سوم لحاظ شود (اگر حل کردیم باید با سری هندسی حل می‌کردیم)

---

۳)

$$I_1=\int (\cos x)^1 dx = \sin x$$

عبارت $nI_n-(n-1)I_{n-2}$

به ازای $n=1$ چنین می‌شود

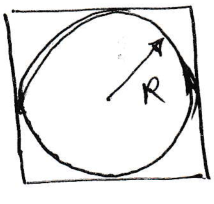
$$1I_1-(1-1)I_{1-2}=I_1$$

باید گزینه صحیح به ازای $n=1$ حاصل $\sin x$ شود که فقط گزینه اول می‌تواند صحیح باشد.

۴) به سادگی می‌توان دید گزینه چهارم است که مختصات نقاط داده شده را در هر دو معادله داده شده صدق می‌کند

---

۵) مسئله را به ازای $n=4$ (مربع) حل می‌کنیم



طول ضلع ۴ ضلعی، $2R$

مساحت ۴ ضلعی $=(2R)^2$

محیط ۴ ضلعی $=4(2R)=8R$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{8R}{2\pi R} = \dfrac{4}{\pi} \\ y_n = \dfrac{4R^2}{\pi R^2} = \dfrac{4}{\pi} \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود در این حالت خاص $x_n=y_n$

که گزینه یک حائز این شرایط است

۶) اگر $Z = y\, f(x^2-y^2)$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $y^2\frac{\partial Z}{\partial x}+xy\frac{\partial Z}{\partial y}$ برابر است با: (عمران)

۶) حذف تابع اختیاری با توجه به گزینه‌ها

مسئله را برای $f(x^2-y^2)=yx^2-y^3$ حل می‌کنیم

$$Z=y(x^2-y^2)=yx^2-y^3$$

$$y^2\frac{\partial Z}{\partial x}+xy\frac{\partial Z}{\partial y}=y^2(2yx)+xy(x^2-3y^2)$$

$$=2xy^3+x^3y-3xy^3=x^3y-xy^3=xy(x^2-y^2)=x\,\underbrace{y(x^2-y^2)}$$

Z همان

که مطابق با گزینه سوم منطبق است

۷) از رابطه $\int_0^\pi x f(\sin x)\,dx = A\times\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ مقدار A کدام است؟

۷) مسئله را برای f خاص شکل $f=1$ حل می‌کنیم

$$\int_0^\pi x\,dx = A\int_0^\pi 1\,dx \to \frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = A\,x\Big|_0^\pi \to$$

$$\frac{\pi^2}{2}=A\pi \to \boxed{A=\frac{\pi}{2}}$$

---

۸) $$I=\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta = \underbrace{k^0\sin(0+1)\theta}_{\sin\theta}+\sum_{n=1}^{\infty} k^n\sin(n+1)\theta$$

حالا به ازای $k=0$ که شرط $-1<K<1$ را ارضا می‌کند، حاصل فوق برابر $\sin\theta$ می‌شود که

فقط با گزینه ۲ مطابق است

۸) با فرض اینکه $\frac{1}{e^{i\theta}-k}$، مساوی گرفتن قسمت موهومی طرفین حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta$ کدام است؟ ($-1<K<1$) (مکانیک)

۱) اگر λ مقدار ویژه متناظر بردار ویژه $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ باشد

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ a & b-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1-\lambda+1+1=0 \longrightarrow \lambda=3\\ a+b-\lambda+1=0 \longleftarrow a+b-2=0\\ 1+1+1-\lambda=0\end{cases}$$

۱) به ازای چه مقادیر a و b بردارهای $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ بردارهای ویژه ماتریس $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ می‌باشد (عمران)

اگر μ مقدار ویژه بردار ویژه $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ باشد باید:

$$\begin{pmatrix}1-\mu & 1 & 1\\ a & b-\mu & 1\\ 1 & 1 & 1-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1-\mu-1=0 \longrightarrow \mu=0\\ a-1=0 \longrightarrow \boxed{a=1}\\ 1-1+\mu=0\end{cases}$$

و لذا $\boxed{b=1}$

۲) تعداد و علامت ریشه حقیقی معادله

$$2x^3-3x^2+6x+6=0$$

چگونه است؟ (ژئوفیزیک)

۲) بخاطر داریم هر معادله جبری که در آن ضرایب همگی اعداد حقیقی هستند ریشه مختلط، تنها زمانی دارند که بصورت مزدوج هم ظاهر شوند و به تعبیری وقتی معادله از درجه فرد با ضرایب حقیقی است، قطعاً لااقل یک ریشه حقیقی وجود دارد در حقیقت داریم:

$f(x)=2x^3-3x^2+6x+6 \longrightarrow$ همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است

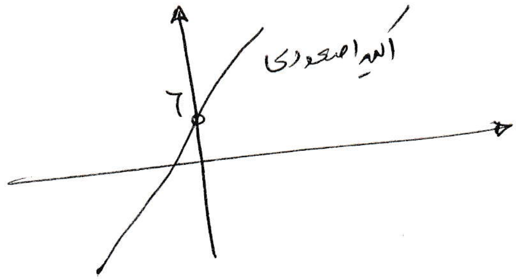
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\longrightarrow \exists\, c\in(-\infty,+\infty)\mid f(c)=0$$

$$f'(x)=6x^2-6x+6=6\underbrace{(x^2-x+1)}_{\text{ریشه حقیقی ندارد}}>0$$

پس $f'=0$ ریشه حقیقی ندارد لذا $f=0$ حداکثر ممکن است یک ریشه حقیقی داشته باشد

از اینجا در نهایت نتیجه می‌گیریم $f=0$ فقط و فقط یک ریشه حقیقی دارد

$f(0)=6>0$



$f=0$ تنها ریشه حقیقی معادله $f=0$ عددی منفی است

۳) از معادله $(1+ix)^5=(1-ix)^5$ مقدار x کدام است؟ (علوم کامپیوتر)

$\frac{3}{1}$ ص

فرض: $1+ix=re^{i\theta} \to \begin{cases} r=\sqrt{1+x^2} \\ \tan\theta = \frac{x}{1} \end{cases}$

$1-ix=re^{-i\theta}$

داریم: $(1+ix)^5=(1-ix)^5 \to (re^{i\theta})^5=(re^{-i\theta})^5 \to e^{5i\theta}=e^{-5i\theta}$

$\to 5\theta = 2k\pi - 5\theta \to \theta=\frac{k\pi}{5} \Rightarrow \tan\theta=\tan\frac{k\pi}{5} \to \boxed{x=\tan\frac{k\pi}{5}}$

۴) معادله کلیه صفحات گذرنده از فصل مشترک داده شده چنین است $(x+2y-3z+4)+k(2x-3y+z)=0$

شرط گذشتن از $A(2,-1,3)$ می طلبد:

$(2-2-9+4)+k(4+3+3)=0$

$-5+10k=0 \to k=\frac{1}{2}$

پس معادله صفحه مورد نظر چنین است $x+2y-3z+4+\frac{1}{2}(2x-3y+z)=0$

جائی که صفحه محور yها را قطع کند داریم $x=z=0$

$(2y+4)+\frac{1}{2}(-3y)=0 \to \underline{y=7}$

۴) صفحه گذرا از نقطه $A(2,-1,3)$ و فصل مشترک دو صفحه به معادلات $2x-3y+z=0$ و $x+2y-3z+4=0$ محور yها را با کدام عرض قطع می کند؟

۵) اندازه انحنای مارپیچ در نقطه
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \\ z = \frac{t^3}{3} \end{cases}$$
$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ کدام است؟ (ریاضی)

۵) $\vec{R}(t) = t\,i + \frac{t^2}{2} j + \frac{t^3}{3} k$

$\vec{R}'(t) = 1\,i + t\,j + t^2 k$

$\vec{R}''(t) = 0\,i + 1\,j + 2t\,k$

در نقطه $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ نقطه $t=1$ داریم

$\frac{1}{2} = \frac{t^2}{2}$

$t^2 = 1$

$\frac{1}{3} = \frac{t^3}{3} \to t^3 = 1$

$R'(1) = i + j + k$

$R''(1) = j + 2k$

$$(R' \times R'')_{t=1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i - 2j + k$$

$$K(1) = \frac{|R'(1) \times R''(1)|}{|R'(1)|^3} = \frac{\sqrt{1+4+1}}{(\sqrt{1+1+1})^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

---

۶) معادله صفحه عمود بر منحنی در نقطه
$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin t \\ z = \cos 2t \end{cases}$$
$P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ کدام است؟ (سیستم)

۶) $$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin t \\ z = \cos 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos t \\ y' = \cos t \\ z' = -2\sin 2t \end{cases}$$

در نقطه $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ نقطه $t = \frac{\pi}{4}$ است داریم

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z' = -2 \end{cases}$$

بردارهای خط مماس بر منحنی

بردار نرمال صفحه عمود بر منحنی

پس معادله صفحه قائم مورد نظر چنین است

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2(z - 0) = 0$$

مبحث دوم : حد توابع یکنوا و تعمیم‌ها،

۱) حد دنباله‌ی $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)\ln(n)$ کدام است؟

(مکانیک)

1) $$I=\lim(\sqrt[n]{n}-1)\ln(n)$$

میدانیم : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

اگر $y=f^g \longrightarrow y'=\left(g'\ln f+g\frac{f'}{f}\right)\cdot f^g$

مبهم : $I=0\times\infty$: داریم

$$I=\lim\frac{n^{\frac1n}-1}{\frac{1}{\ln n}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H} I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{n^2}\ln n+\frac1n\cdot\frac1n\right)n^{\frac1n}}{\frac{-\frac1n}{(\ln n)^2}}$$

صفر قطر

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}(1-\ln n)\cdot n^{\frac1n}\cdot(\ln n)^2}{-\frac1n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\left(\cancel{(\ln n)^2}-(\ln n)^3\right)}{n}\cdot n^{\frac1n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^3}{n}\cdot\underbrace{n^{\frac1n}}_{\text{یک}}=\frac{(\text{بینهایت لگاریتمی})^3}{\text{بینهایت توانی}}=0$$

---

۲) مقدار $\lim\frac{\sqrt1+\sqrt2+\cdots+\sqrt n}{n^{\frac32}}$ کدام است؟

(سیستم)

2) $$I=\lim_{n\to\infty}\frac1n\left(\frac{\sqrt1}{n^{\frac12}}+\frac{\sqrt2}{n^{\frac12}}+\cdots+\frac{\sqrt n}{n^{\frac12}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac1n\left(\sqrt{\frac1n}+\sqrt{\frac2n}+\cdots+\sqrt{\frac nn}\right)=\int_0^1\sqrt x\,dx=\frac23x^{\frac32}\Big|_0^1=\frac23$$

۳) حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{Arctan} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر)

۳/۲) $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{Arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$ مبهم

میدانیم: $\operatorname{Arctg} x \overset{x\to 0}{\sim} x-\dfrac{x^3}{3}$

$$I=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x-\frac{x^3}{3}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\frac{x^3}{3}}{x}\right)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\xrightarrow{x^2=\frac{1}{t}} I=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3t}\right)^{-t}=e^{(-\frac{1}{3})(-1)}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

---

۴) به ازای چه مقادیری از a

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}$$

برابر $\dfrac{2}{\pi^2}$ است؟ (آمار)

۴/۲) $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^2}{1+\cos\frac{\pi x}{a}}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{H} I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2(x-a)}{-\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}}=\dfrac{0}{0}\xrightarrow{H}$

$$I=\lim_{x\to a}\frac{2}{-\frac{\pi^2}{a^2}\cos\frac{\pi x}{a}}=\frac{2}{\frac{\pi^2}{a^2}}=\frac{2a^2}{\pi^2}$$

طبق فرض: $\dfrac{2a^2}{\pi^2}=\dfrac{2}{\pi^2}\longrightarrow a^2=1\longrightarrow a=\pm 1$

---

۵) حد دنباله $\dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ کدام است؟ (MBA)

۵/۲) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^n}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{2}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n=(\text{بزرگتر از واحد})^{+\infty}=+\infty$$

$\frac{۷۹}{II}$ $\frac{۶}{حل}$

گزینه ۲: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{0((\Delta x)^2+(0)^2)}{(0)^2+((\Delta x)^2+(0)^2)^2} - 0}{\Delta x} = 0 \neq 2$

۶) تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در کدام گزینه صادق است

گزینه ۲ رد شد

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{قطبی}}{=} \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \frac{r\sin\theta \cdot r^2}{r^2\sin^2\theta + (r^2)^2} = \lim_{r\to 0,\ \forall\theta} \frac{r\sin\theta}{\sin^2\theta + r^2}$

وقتی $r \to 0$ امکان نیز که در $\theta \to \frac{\pi}{2}$ ، $\sin^2\theta \to 0$ وجود دارد و البته باز هم $\frac{0}{0}$ می‌خوریم

(مختصات قطبی کمک مستقیم نمی‌کند)

گزینه ۴

برای مسیر $r = \sin\theta$ دایره‌ایست که مرکزش روی محور y هاست ولی مبدأ را ندارد

$I = \lim \frac{\sin\theta \cdot \sin\theta}{\sin^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{2} \neq 0$ داریم

θ دلخواه

گزینه ۴ غلط است

گزینه ۳

روی مسیرهای $y = mx$ داریم:

$I = \lim_{x\to 0,\ m \text{ پارامتر}} \frac{mx(x^2+m^2x^2)}{m^2x^2+(m^2x^2+x^2)^2}$

$= \lim_{x\to 0,\ m \text{ پارامتر}} \frac{mx(1+m^2)}{m^2+x^2(m^2+1)^2} = 0 \neq \frac{1}{2}$

* یعنی تنها حل صدا تنظر هموار نمی‌باشد

گزینه (۱)

۱ـ به ازای چه مقادیر a و b بردارهای $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ بردارهای ویژه ماتریس $\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ می‌باشد؟ (عمران)

۱) $a=1,b=1$
۲) $a=1,b=-1$
۳) $a=-1,b=1$
۴) $a=-1,b=-1$

۲ـ تعداد و علامت ریشه حقیقی معادله $2x^3-3x^2+6x+6=0$ چگونه است؟ (ژئوفیزیک)

۱) یک ریشه منفی
۲) یک ریشه مثبت
۳) یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت
۴) یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی

۳ـ از معادله $(1+ix)^5=(1-ix)^5$ مقدار x کدام است؟ (علوم کامپیوتر)

۱) $\sin\frac{k\pi}{5}$
۲) $\cos\frac{k\pi}{5}$
۳) $\tan\frac{k\pi}{5}$
۴) $\cot\frac{k\pi}{5}$

۴ـ صفحه گذرا از نقطه $A(2,-1,3)$ و فصل مشترک دو صفحه به معادلات $2x-3y+z=0$ و $x+2y-3z+4=0$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟(فیزیک دریا)

۱) -8
۲) -4
۳) 4
۴) 8

۵ـ اندازه انحناء مارپیچ $z=\frac{t^3}{3}$, $y=\frac{t^2}{2}$, $x=t$ در نقطه $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ کدام است؟ (ریاضی)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{9}$
۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\sqrt{2}$

۶ـ معادلهٔ صفحه عمود بر منحنی $x=\sin t\ ,\ y=\sin t\ ,\ z=\cos 2t$ در نقطه $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ کدام است؟ (سیستم)

۱) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$
۲) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$
۳) $-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+4z=2$
۴) $-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-4z=2$

۱ـ حد دنباله $a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\ln(n)$ کدام است؟ (مکانیک)

۱) 0 ۲) 1 ۳) $\frac{1}{e}$ ۴) ∞

۲ـ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}$ کدام است؟(سیستم)

۱) یک ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۳ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{Arc}\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر)

۱) $\sqrt{e}$ ۲) $\sqrt[3]{e}$ ۳) $\sqrt[3]{e^2}$ ۴) 1

۴ـ به ازای چه مقادیری از a، $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)^2}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)}$ برابر $\frac{2}{\pi^2}$ است؟(آمار)

۱) $\pm\frac{1}{2}$ ۲) ± 1 ۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) ± 3

۵ـ حد دنباله $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ کدام است؟ (MBA)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) ∞

۶ـ تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\left(x^2+y^2\right)}{y^2+\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در کدام گزاره صدق می‌کند؟ (سیستم)

۱)در نقطهٔ $(0,0)$ حد ندارد.

۲) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$

۳) حد f در مسیرهای مستقیم منتهی به $(0,0)$، $\frac{1}{2}$ است.

۴) حد f در مسیری دایره‌ای شکل که به $(0,0)$ منتهی می‌شود 0 است.

۱ـ اگر برای تابع f با دامنهٔ R ، داشته باشیم $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ و $f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ به ازای هر x_1 و x_2 در دامنهٔ تابع، آنگاه مشتق تابع $f(x)$ کدام است؟ (مکانیک)

۱) $1+(f(x))^2$ ۲) $f(x)$ ۳) $(f(x))^2$ ۴) $1-(f(x))^2$

۲ـ زاویه بین مماس‌ها بر دو منحنی به معادلات $4x^3-x^2y-x+2y=0$ و $x^3-5y^3+2x+y=0$ در مبدأ مختصات است؟ (MBA)

۱) صفر ۲) 5 ۳) 90 ۴) 135

۳ـ اگر $u=x^3+2x$ و $t=u\sqrt{4-u}$ باشد مقدار $\frac{dx}{dt}$ به ازای $u=3$، کدام است؟ (MBA)

۱) -0.6 ۲) -0.4 ۳) 0.6 ۴) 0.4

۴ـ در تابع دو متغیری $z=\frac{x-2y}{xy}$ دیفرانسیل مرتبهٔدوم z در نقطه $(1,2)$ به صورت $[dx\ \ dy].A.\begin{bmatrix}dx\\dy\end{bmatrix}$ نشان داده شده است، دترمینان ماتریس A کدام است؟ (MBA)

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

۵ـ دو کشتی A و B بر روی دو خط که با هم زاویه 60 درجه می‌سازند در حال دور شدن از نقطه O می‌باشند، سرعت دو کشتی A و B به ترتیب 20 و 30 کیلومتر در ساعت است. در لحظه‌ای که فاصله دو کشتی A و B از نقطه O به ترتیب 6 و 8 کیلومتر باشند. فاصله بین دو کشتی با چه سرعتی تغییر می‌کند؟ (ژئوفیزیک)

۱) $\frac{95}{\sqrt{13}}$ ۲) $\frac{97}{\sqrt{13}}$ ۳) $\frac{95}{\sqrt{11}}$ ۴) $\frac{97}{\sqrt{11}}$

۶ـ مقدار مشتق انتگرال $\frac{d}{dt}\int_0^t e^{(t-\tau)^2}\,d\tau$ را حساب کنید.(مکانیک)

۱) 1 ۲) e^{t^2} ۳) $e^{t^2}-1$ ۴) $e^{(t-\tau)^2}$

۷ـ اگر $f(x)=x\sqrt{3+x^2}$، آنگاه مقدار $(f^{-1})'(-2)$ کدام است؟(معدن)

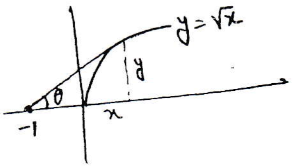
۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{\sqrt{7}}{11}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{11}{\sqrt{7}}$

۸ـ اگر $f(x,y)=(xe^y+\cos 2\pi y, x^2, x-e^y)$ مقدار تقریبی $f(1.02\ ,\ 0.01)$ کدام است؟ (MBA)

۱) $(2.03,1.02,0.02)$ ۲) $(2.03,1.04,0.01)$

۳) $(2.04,1.03,0.01)$ ۴) $(2.04,1.03,0.02)$

۱ ــ بیشترین مقدار زاویه θ در شکل مقابل کدام است؟(سیستم)



۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ ۴) $\tan^{-1}\frac{1}{2}$

۲ ــ در منحنی به معادله $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=9xy$، بیشترین مقدار x، کدام است؟ (MBA)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۳ ــ صفحه‌ای از نقطه $A(2\,,3\,,4)$ گذشته و حجم محصور بین آن و صفحات مختصات می‌نیمم شده است، این حجم کدام است؟ (ریاضی)

۱) 104 ۲) 108 ۳) 110 ۴) 112

۴ ــ حوضی به شکل مکعب مستطیل با حجم 256 واحد مکعب مورد نیاز است، ارتفاع حوض چند واحد طول انتخاب شود تا هزینه عایق‌بندی آن مینیمم شود؟(MBA)

۱) 2 ۲) 4 ۳) 6 ۴) 8

۵ ــ اگر a و b اعداد ثابت مثبت باشند، ماکزیمم تابع $f(x\,,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ با شرط (قید) $x^2+y^2=1$ برابر با چیست؟(عمران)

۱) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ۲) $\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ ۳) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ ۴) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$

۶ ــ برای تابع $f(x,y)=x^4+y^4+\left(1-x^2-y^2\right)^2$ نقطه $(0,0)$ از چه نوعی است؟ (عمران نقشه‌برداری)

۱) مینیمم نسبی ۲) نقطه زینی ۳) ماکسیمم نسبی ۴) نقطه بحرانی نیست

۱ ـ حاصل $\int_0^{\infty} e^{-t}\cos^2 t dt$ ، کدام است؟ (MBA)

۱) 0.4 ۲) 0.6 ۳) 0.7 ۴) 0.8

۲ ـ اگر $A=\int_0^1 \frac{e^t}{t+1}dt$ مقدار انتگرال $\int_1^2 \frac{e^{-t}}{t-3}dt$ بر حسب A برابر است با : (عمران)

۱) e^2A ۲) e^3A ۳) $-e^{-2}A$ ۴) $-e^{-3}A$

۳ ـ به ازای چه مقدار ثابت C ، انتگرال $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}-\frac{C}{x+1}\right)dx$ همگرا است؟ (عمران)

۱) $C=\frac{1}{2}$ ۲) $C=\sqrt{2}$ ۳) $C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴ ـ حاصل $\int_0^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-x^3}dx$ کدام است؟(علوم کامپیوتر)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۴) $\sqrt{\pi}$

۵ ـ حاصل $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ کدام است؟ (MBA)

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶ ـ اگر $A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$ ، مقدار $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x+2}dx$ کدام است؟(ریاضی)

۱) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi+2}-A$ ۲) $\frac{1}{\pi+2}-\frac{1}{2}+A$

۳) $\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}-A$ ۴) $\frac{1}{\pi+2}+\frac{1}{2}+A$

۷ ـ اگر $a\geq 0$ و $\int_{-a}^{1-a} y(y+a)^{1000}dy=0$ ، a کدام است؟(آمار)

۱) 0 ۲) $\frac{1000}{999}$ ۳) $\frac{1000}{1001}$ ۴) $\frac{1001}{1002}$

۱ـ مطلوبست تقریب درجه دوم تابع $f(x)=\ln(\sec x+\tan x)$ در نزدیکی نقطه $x=0$. (مکانیک)

۱) x ۲) $-x+\frac{1}{2}x^2$ ۳) $x-\frac{1}{2}x^2$ ۴) $x+\frac{1}{2}x^2$

۲ـ با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ کدام است؟ (سیستم)

۱) $\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\frac{\pi^2}{12}$ ۳) $\frac{\pi^2}{18}$ ۴) $\frac{\pi^2}{24}$

۳ـ با توجه به $\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ سری $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots$ به کدام عدد همگراست؟ (سیستم

۱) $\frac{1}{2}\ln 2$ ۲) $\frac{3}{2}\ln 2$ ۳) $\frac{2}{3}\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

۴ـ تابع $-2<x<4$ ؛ $f(x)=\frac{1}{x+2}$ به صورت سری توان‌های صعودی $(x-1)$ نوشته شده است، ضریب جمله شامل $(x-1)^n$ در این سری کدام است؟ (MBA)

۱) $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ ۲) $\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ ۳) $\frac{(-1)^n}{2^n}$ ۴) $\frac{(-1)^n}{3^n}$

۵ـ مجموع سری $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\dots$ کدام است؟ (MBA)

۱) 2 ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $2\ln 2$

۶ـ مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست؟ (عمران)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۷ـ چندجمله‌ای مک‌لوران از درجه 5 تابع $\sin\left(x-x^2\right)$ کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر است؟ (عمران)

۱) $x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\frac{59}{60}x^5$ ۲) $x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}-\frac{59}{120}x^5$

۳) $x-x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}-\frac{59}{60}x^5$ ۴) $x-x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}-\frac{59}{60}x^5$

۸ـ ضریب x در بسط مک‌لوران تابع $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟ (عمران)

۱) e ۲) $-e$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $-\frac{e}{2}$

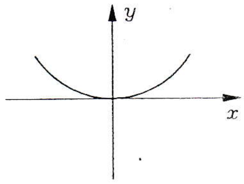
۹ـ از تساوی $\frac{2399}{2400}=\frac{\sin x}{x}$، مقدار x کدام نسبت از رادیان است؟ (ژئوفیزیک)

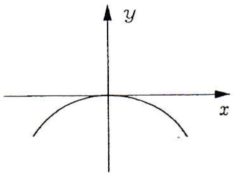
۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $\frac{1}{40}$

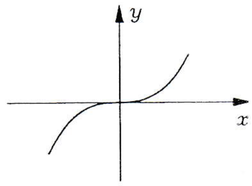
۱۰ـ مجموع سری $1-3x^2+5x^4-7x^6+\cdots\ ,\ |x|<1$ کدام است؟ (سیستم)

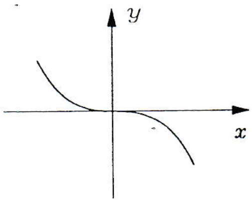
۱) $\frac{2x}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$ ۳) $\frac{1+x}{1+x^2}$ ۴) $\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

۱۱ـ $f(x)=1-x\ln(1-x)-\cos x$، در همسایگی مبداء مختصات به کدام صورت است؟ (ریاضی)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۲ـ اگر $a>1$ عددی ثابت باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a+(-1)^n\right)^n x^n$ کدام است؟ (سیستم)

۱) $\frac{1}{a}$ ۲) $\frac{1}{a-1}$ ۳) $\frac{1}{a+1}$ ۴) $\frac{a+1}{a-1}$

۱۳ـ فرض کنید S و S_n به ترتیب مجموع و مجموع جزئی n ام سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}$ هستند و $\varepsilon=\frac{1}{2^{10}}$ به ازای چه مقدار از n رابطه $|S_n-S|<\frac{1}{2^{10}}$ برقرار است؟ (سیستم)

۱) $n>10$ ۲) $n>5$ ۳) $n>3$ ۴) $n>4$

۱ـ اگر تابع $\phi(t)$ دارای مشتق مرتبه دوم بوده و $u = \phi\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$، آنگاه $\phi'(t)$ را طوری تعیین کنید که $\operatorname{div}(\nabla u) = 0$.

(مکانیک)

۱) $\phi'(t) = c\,e^{-\frac{3}{2t}}$، $c \in R$ ثابت دلخواه

۲) $\phi'(t) = c\,t^{\frac{3}{2}}$، $c \in R$ ثابت دلخواه

۳) $\phi'(t) = c\,e^{\frac{3t}{2}}$، $c \in R$ ثابت دلخواه

۴) $\phi'(t) = c\,t^{-\frac{3}{2}}$، $c \in R$ ثابت دلخواه

۲ـ صفحه قائم بر منحنی (C) فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 5$ و رویه $z = xy$ در نقطه $(2,-1,-2)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (MBA)

۱) 5 ۲) 3 ۳) -4 ۴) -6

۳ـ تابع f با ضابطه $f(x, y) = x^3 + x^2 y + y^2 - 1$ در نقطه $(-1, 1)$ در امتداد کدام بردار نزولی است؟(مکانیک)

۱) $-\vec{i} + \vec{j}$ ۲) $\vec{i} - \vec{j}$ ۳) $-2\vec{i} + \vec{j}$ ۴) $4\vec{i} - \vec{j}$

۴ـ زاویه بین استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و کره $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ در نقطه $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ کدام است؟(معدن)

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱ـ مقدار انتگرال $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$ برابر است با: (عمران)

۱) $\frac{1}{2}(e^4-1)$ ۲) $\frac{1}{4}(1-e^8)$ ۳) $\frac{1}{2}(1-e^8)$ ۴) $\frac{1}{4}(e^8-1)$

۲ـ مقدار انتگرال $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dy\, dx$ برابر با چیست؟ (راهنمایی: می‌توانید از تغییر متغیرهای $u=x+y$ و $v=y-2x$ استفاده کنید.)(عمران نقشه‌برداری)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳ـ مقدار انتگرال $\int_{\widehat{AB}} \left(3x^2y+2xy^2+y^3\right)dx + \left(x^3+2x^2y+3xy^2\right)dy$ از نقطه A به طول صفر تا نقطه B به طول 1 بر روی منحنی $y=xe^{x-1}$ کدام است؟(علوم کامپیوتر)

۱) 3 ۲) e ۳) 2 ۴) $e-1$

۴ـ هر گاه C پاره‌خطی از نقطه $(0,1,-1)$ تا $(1,2,1)$ باشد حاصل $\int_C (ydx+zdy-xdz)$ کدام است؟ (عمران)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) 3

۵ـ طول منحنی $r(\theta)=(\theta-\sin\theta)i+(1-\cos\theta)j\,,\ 0\le\theta\le\pi$ کدام است؟(سیستم)

۱) 2 ۲) 4 ۳) 8 ۴) 16

۶ـ طول منحنی $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}$ از $x=1$ تا $x=2$ برابر است با: (عمران)

۱) 15 ۲) 21 ۳) $\frac{25}{3}$ ۴) $\frac{33}{16}$

۷ـ حاصل $\int_C (x+y+z)ds$ که در آن C محل برخورد صفحه $y=x$ و کره $x^2+y^2+z^2=4$ در یک هشتم اول با جهت از نقطه $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ به $(0,0,2)$ می‌باشد کدام است؟(ریاضی)

۱) $4+4\sqrt{2}$ ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) $4+2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}+2$

۱ـ سطح محصور به $y=\sin x$ ، $0\le x\le \pi$ و محور x، حول محور y دوران می‌کند حجم حاصل کدام است؟ (مکانیک)

۱) $2\pi^2$ ۲) 3π ۳) 6π ۴) π^2

۲ـ سطح محدود به منحنی $y=\frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\sin^2 x}$، محور xها و دو خط به معادلات $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ را حول محور xها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟ (MBA)

۱) $\frac{7\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{3}$ ۳) $\frac{4\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳ـ ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خطوط $y=1$ و $x=2$ را حول خط $y=-3$ دوران می‌دهیم، حجم حاصل کدام است؟ (MBA)

۱) $\frac{61}{5}\pi$ ۲) $\frac{63}{5}\pi$ ۳) $\frac{64}{5}\pi$ ۴) $\frac{66}{5}\pi$

۴ـ حجم حاصل از دوران مثلث با سه رأس به مختصات $(0,1),(0,-1),(1,0)$ حول خط $x=2$ برابر کدام است؟ (MBA)

۱) $\frac{14\pi}{3}$ ۲) $\frac{10\pi}{3}$ ۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{7\pi}{3}$

۵ـ حجم محصور به دو رویه زیر کدام است؟ (مکانیک)

$$z=x^2+y^2 \quad , \quad 2z=x^2+y^2+1$$

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 1 ۳) $\frac{2\pi}{7}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۶ـ حجم محدود به رویهٔ $z=\frac{1}{x^2+y^2+1}$ که در داخل استوانه $x^2+y^2=1$ قرار می‌گیرد، کدام است؟ (MBA) برای $z\geq 0$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۳) $\pi\ln 2$ ۴) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$

۷ـ حجم جسم محدود به سطوح $z=0$ و $y=0$ و $x=2y^2$ و $x+2y+z=4$ را محاسبه کنید (ژئوفیزیک) حجم واقع در $\frac{1}{8}$ اول مد نظر است

۱) 22 ۲) $\frac{11}{5}$ ۳) 24 ۴) $\frac{17}{5}$

۸ـ حجم ناحیه محدود به کره $\rho=a$ و مخروط‌های $\varphi=\frac{\pi}{3}$ و $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ کدام است؟ (سیستم)

۱) πa ۲) $2\pi a$ ۳) $\frac{2\pi a^3}{3}$ ۴) $\frac{3\pi a^3}{4}$

۹ـ حجم جسمی که قاعده آن مربع $|x|+|y|=3$ بوده و مقطع هر صفحه عمود بر محور xها با سطح جسم یک نیم دایره می‌باشد کدام است؟ (معدن)

۱) 6π ۲) 8π ۳) 9π ۴) 12π

۱ـ سطح حاصل از دوران نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ حول محور x ها و از نقطه $x=0$ تا $x=2$ کدام است؟ (ژئوفیزیک)

۱) $\frac{13}{3}\pi$ ۲) $\frac{25}{3}\pi$ ۳) $\frac{23}{3}\pi$ ۴) $\frac{26}{3}\pi$

۲ـ مساحت رویه‌ای را تعیین کنید که از دوران قسمتی از دلوار $r=1+\cos\theta$ واقع در ربع اول صفحه مختصات، حول محور x تشکیل می‌شود. (مکانیک)

۱) 3π ۲) $\frac{8\pi}{3}$ ۳) $\frac{16\pi}{5}\left(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$ ۴) $\frac{32\pi}{5}\left(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

۳ـ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $0\le t\le 2\pi$ ، $y=\sqrt{3}\,(1-\cos t)$ و $x=\sqrt{3}\,(t-\sin t)$ حول محور x کدام است؟ (مکاترونیک)

۱) 3π ۲) 4π ۳) 32π ۴) 64π

۴ـ مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ قرار دارد، برابر کدام یک از مقادیر است؟ (مکانیک)

۱) $\sqrt{2}\pi$ ۲) $3\sqrt{2}\pi$ ۳) $2\sqrt{2}\pi$ ۴) $4\sqrt{2}\pi$

۵ـ مساحت ناحیه نامتناهی‌زا که در ربع اول و بین خم $y=\tanh x$ و خط $y=1$ واقع است برابر است با:(معدن)

۱) ∞ ۲) $\ln 2$ ۳) $\cosh 2$ ۴) $2\ln 2-\cosh 2$

ریاضی I

۶ـ مساحت محدود به منحنی $x=t+t^2$ و $y=t-t^2$ و $0\le t\le 1$ کدام است؟ (سیستم)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 1 ۴) $\frac{4}{3}$

۷ـ مساحت ناحیه در صفحه محصور به سهمی‌های $y=x^2, y=2x^2$ ، $x=y^2$ و $x=3y^2$ برابر با کدام مورد می‌باشد؟ (عمران)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

ریاضی II

۸ـ مساحت تولید شده به وسیلهٔ دور اول مارپیچ ارشمیدسی $r=\frac{1}{2\pi}\theta\,,\ \theta\ge 0$ کدام است؟ (سیستم)

۱) 1 ۲) 2π ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{4\pi^2}{3}$

۹ـ سطح حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع a حور محوری با فاصله b تا مرکز دایره (b>a) چقدر است؟ (مکانیک)

۱) $2\pi^2 ab$ ۲) $4\pi ab$ ۳) $4\pi^2 ab$ ۴) $8\pi^2 ab$

۱۰ـ مساحت منحنی قطبی $r^2-8r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+15=0$ کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) 2π ۴) 3π

سطح دیواره‌ی شکل

۱۱ـ مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ که زیر صفحه $z=\frac{x}{3}+2$ و بالای صفحه $z=0$ قرار دارد کدام است؟ (MBA)

۱) 4π ۲) $\frac{13\pi}{3}$ ۳) 2π ۴) $\frac{9\pi}{2}$

۱ـ اگر C قسمتی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا $A(2,4)$ و پاره‌خط واصل A به مبدأ باشد، حاصل $\oint_C 2y\,dx + 4x\,dy$ برابر است با: (مکانیک)

۱) $-\frac{8}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۲ـ مقدار انتگرال $\int_C (e^x - yx^2)dx + (xy^2 - e^y)dy$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 - 2y = 0$ می‌باشد که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده برابر با چیست؟(عمران)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

۳ـ فرض کنید $\vec{F} = ax\,\vec{i} + by\,\vec{j} + cz\vec{k}$ و S رویه بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ، و $\vec{n}$ برداریکه قائم بر بیضی‌گون S و رو به خارج باشد، مقدار انتگرال رویه‌ای مقابل کدام است؟ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ ، $\iint_S (\vec{F}.\vec{n})d\sigma$ (مکانیک)

۱) $\pi a^2 b^2 c^2$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^2 b^2 c^2$ ۳) $\pi abc(a+b+c)$ ۴) $\frac{4}{3}\pi abc(a+b+c)$

۴ـ حاصل $\iint_S xz^2 dy\,dz + (x^2y - z)dx\,dz + (xy + y^2z)dx\,dy$ که در آن S سطح نیمکره به معادله $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و صفحه $z = 0$ می‌باشد، چند برابر a^5 است؟ (MBA)

۱) $\frac{2\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۵ـ حاصل $\iint_S (x^2 + y^2)ds$ که در آن S کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ می‌باشد کدام است؟ (راهنمایی: از قضیه دیورژانس استفاده کنید.)(عمران)

۱) $\frac{8}{3}\pi a^4$ ۲) $\frac{4}{3}\pi a^4$ ۳) $\frac{8}{3}\pi a^3$ ۴) $\frac{4}{3}\pi a^3$

۶ـ حاصل $\oint_c 2xyz^3dx + x^2z^3dy + 3x^2yz^2dz$ که در آن منحنی C فصل مشترک استوانه $y^2 + x^2 = 4$ با صفحه به معادله $x + 2z = 0$ باشد، برابر کدام است؟ (MBA)

۱) صفر ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 4 ۴) 8

۷ـ کار انجام شده توسط نیروی $F = -y^3 i + x^3 j - z^3 k$ روی منحنی C فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $2x + 2y + z = 3$ کدام است؟ (مکانیک)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{4\pi}{3}$

۸ـ حاصل $I = \iint_S \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ که در آن S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$ است که در بالای صفحه xy قرار دارد و $\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی S است و $\vec{F} = \left(y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, e^{-xyz}\right)$ می‌باشد کدام است؟(عمران)

۱) 0 ۲) 2π ۳) 6π ۴) 12π

۱ ـ منحنی $y = e^{-kx}\sin x\ ,\ x > 0$ در بالای محور x و زیر آن متوالیاً (از مبدأ به سمت راست) زنجیره‌ای از ناحیه‌های دنبال هم را تولید می‌کند که با رفتن به سمت راست، مساحت آنها کاهش می‌یابد. هرگاه $k > 0$ ، نسبت مساحت دانه $n+1$ ام به دانه n ام چقدر است؟(مکانیک)

۱) e^{-1} ۲) $e^{-\pi}$ ۳) $e^{-n\pi}$ ۴) $e^{-k\pi}$

۲ ـ اگر $|x|<1$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟(عمران)

۱) $\frac{x^2+1}{(1+x)^2}$ ۲) $\frac{x+1}{(1-x)^3}$ ۳) $\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$ ۴) $\frac{1}{(1-x)^2}$

۳ ـ فرض کنید n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد و $I_n = \int (\cos x)^n dx$ ،در این‌صورت مقدار $nI_n - (n-1)I_{n-2}$ برابر است با:

(مکانیک)

۱) $(\cos x)^{n-1}\sin x$ ۲) $(\cos x)^{n-2}(\sin x)^2$ ۳) $\cos x(\sin x)^{n-1}$ ۴) $(\cos x)^2(\sin x)^{n-2}$

۴ ـ نزدیک‌ترین نقطه منحنی $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1\ ,\ x^2 + y^2 = 1$ به مبدأ کدام است؟ (سیستم)

۱) $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$ ۲) $\left(\frac{-1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$

۳) $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}, 0\right)$ ۴) $(0\ ,\ \pm1\ ,\ 0),(\pm1\ ,\ 0\ ,\ 0)$

۵ ـ اگر $x_n = \frac{P_n}{P}$ و $y_n = \frac{A_n}{A}$ به ترتیب نسبت محیط و مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R به محیط و مساحت این دایره باشند، به ازای $n \geq 3$ رابطه بین $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کدام است؟ (سیستم)

۱) $x_n = y_n$ ۲) $y_n = Rx_n$ ۳) $x_n > y_n$ ۴) $x_n < y_n$

۶ ـ اگر $z = yf\left(x^2 - y^2\right)$ و f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با: (عمران)

۱) yz ۲) xy ۳) xz ۴) xyz

۷ ـ از رابطه $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = A \times \int_0^\pi f(\sin x)dx$ مقدار A کدام است؟(ژئوفیزیک)

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۸ ـ با بسط مناسب $\frac{1}{e^{i\theta}-k}$ و مساوی گرفتن قسمت موهومی طرفین حاصل $\sum_{n=0}^{\infty} k^n \sin(n+1)\theta$ کدام است؟ $(-1<k<1)$

(مکانیک)

۱) $\frac{-k\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$ ۲) $\frac{\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$ ۳) $\frac{k\sin\theta}{1-2k\cos\theta+k^2}$ ۴) $\frac{k\sin\theta}{1+2k\cos\theta+k^2}$