ریاضی I

ریاضی I مهندس انصاری

$\frac{1}{I}$

مثال: مساحت متناظر به شکل $Re\left(\frac{1}{z+i}\right)=1$ را بدست آورید

$$Re\left(\frac{1}{x+iy+i}\right)=1 \longrightarrow Re\left(\frac{1}{x+(y+1)i}\right)=1$$

$$Re\left(\frac{1}{x+(y+1)i}\times\frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i}\right)=1$$

اگر در مخرج i وجود داشته باشد باید آن را با ضرب در مزدوج از بین برد

$$Re\left(\frac{x-(y+1)i}{x^2+(y+1)^2}\right)=1 \longrightarrow \frac{x}{x^2+(y+1)^2}=1$$

$$x^2+(y+1)^2-x=0 \xrightarrow{\text{طرفین } +\frac{1}{4}} x^2-x+\frac{1}{4}+(y+1)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4} \longrightarrow$$

دایره { مرکز $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ ، شعاع $\frac{1}{2}$

$$\boxed{S=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

مثال: معادله‌ی زیر بیانگر چه شکلی می‌باشد

$$z^3-3z^2+2z=\bar{z}^3-3\bar{z}^2+2\bar{z}$$

خاصیت لغزندگی
$$\begin{cases}\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2\\ \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\end{cases}$$

$$\underbrace{z^3-3z^2+2z}_{A}=\underbrace{\overline{z^3-3z^2+2z}}_{\bar{A}}$$

$$A=\bar{A}\longrightarrow Im\,A=0$$

$$\boxed{\text{if } z=\bar{z}\longrightarrow Im\,z=0}$$

$$A=x^3+3x^2yi+\underbrace{3xy^2i^2}_{-3xy^2}+\underbrace{y^3i^3}_{-y^3i}-3(x^2+2xyi+y^2i^2)+2(x+yi)$$

$$3x^2y-y^3-6xy+2y=0$$

در جواب گزینه‌ها y = ۰ نبود پس در جواب‌ها دنبال هذلولی می‌گردیم

$$\longrightarrow y(3x^2-y^2-6x+2)=0\begin{cases}y=0\\ 3x^2-y^2-6x+2=0\longrightarrow \text{هذلولی}\end{cases}$$

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

اگر xy نداشته باشیم ⟵ مقطع مخروطی

۱) $A=B$ → دایره

۲) $\begin{cases}A, B \\ A\neq B\end{cases}$ هم علامت → بیضی

۳) $\begin{cases}A, B\end{cases}$ مختلف العلامه → هذلولی

۴) $A=0$ یا $B=0$ → سهمی

$Z_1 = a+bi \qquad Z_1 \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$

$Z_2 = x+yi \qquad Z_2 \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$

$$|Z_1 - Z_2| = |a+bi - x - iy| = |(a-x) + (b-y)i| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

$\longrightarrow |Z_1 - Z_2| \longrightarrow$ فاصله نقاط Z_1 تا Z_2
(طول پاره خط Z_1Z_2)

<u>سوال</u>: اگر a و b اعداد مختلط معلوم در صفحه باشند معادله زیر چه شکلی را توصیف می کند

$$z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{a} = b\bar{b}$$

$$\bar{z}(a+z) + \bar{a}(a+z) = b\bar{b}$$

$$(a+z)(\bar{a}+\bar{z}) = b\bar{b} \longrightarrow |z+a|^2 = |b|^2$$

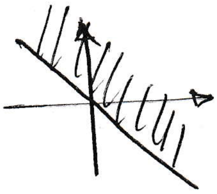
$$|z+a| = |b| \longrightarrow$$

{ دایره به مرکز a- و شعاع |b|
مکان هندسی دایره }

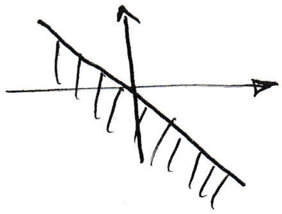
a و b هر دو ثابتند پس فاصله z از نقطه a- مقدار ثابتی است که |b| است پس مکان هندسی یک دایره است

مثال: نامعادله $|z-i| \leqslant |z+1|$ چه محدوده ای از صفحه را نشان می دهد

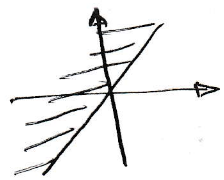
۱)



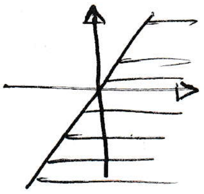
۲)



۳)



۴)



مرز ناحیه: $|z-i| = |z+1|$

$|z-i| \downarrow$ فاصله نقطه z تا نقطه A مقدار ثابت است

$A = i \rightarrow A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right.$

$|z+1| \downarrow$ فاصله نقطه z تا نقطه B مقدار ثابت است

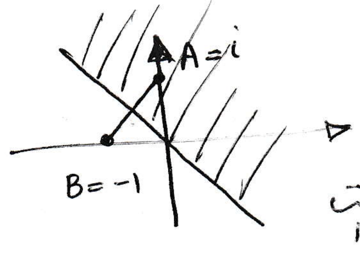
$B = -1 \rightarrow B \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

مرز ناحیه: عمود منصف پاره خط AB است (فاصله z از دو نقطه ثابت A و B مقدار ثابتی است)

$A = i \in$ نامعادله $\rightarrow |i-i| \leqslant |i+1| \rightarrow 0 \leqslant \sqrt{1+1}$

$0 \leqslant \sqrt{2} \rightarrow$ صدق می کند

۲ →



برای اینکه ببینیم کدام طرف مرز جواب است یک نقطه مثل $A=i$ را در نامعادله قرار می دهیم، اگر صدق کرد آن طرف جواب است

۳-I

اگر فاصله نقاط A و B را K بگیریم K باید از فاصله A و B بزرگتر بشه تا شکل بیضی به ما بدهد

مثال: معادله زیر به ازای مقادیر مختلف K چه شکلی را توصیف می کند؟

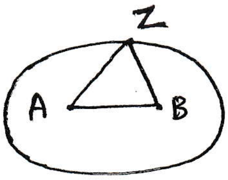
$$|Z-1+2i|+|Z+2-2i|=K$$

فاصله Z تا نقطه $A=(1-2i)$

فاصله Z تا نقطه $B=-2+2i$

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه می باشد که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت برابر با مقدار ثابت باشد.

$$|A-B|=\sqrt{(1-(-2))^2+(-2-2)^2}$$

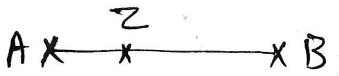


در مثلثی که روی بیضی تشکیل شده

یا در هر مثلثی مجموع اندازه دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است

$$|A-B|=5$$

$$|Z-A|+|Z-B|>|A-B|$$



$K>|A-B| \rightarrow$ بیضی

if $K=|A-B| \rightarrow$ پاره خط

then: Z روی پاره خط AB است

$k=5 \rightarrow$ پاره خط
$k>5 \rightarrow$ بیضی
$k<5 \rightarrow$ تهی

$k=|A-B| \rightarrow$ پاره خط
$k>|A-B| \rightarrow$ بیضی
$k<|A-B| \rightarrow$ تهی

اگر فاصله نقاط A و B را K بگیریم باید K از فاصله نقاط A و B کمتر باشه تا شکل هذلولی به ما بدهد

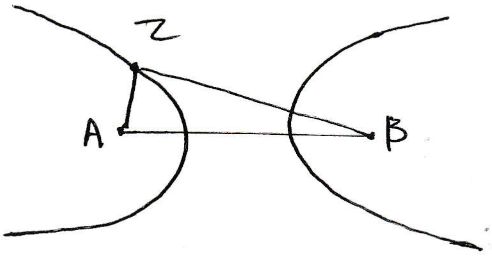
مثال: معادله زیر به ازای مقادیر مختلف K چه شکلی را توصیف می کند

$$|Z-i|-|Z-1+i|=K$$

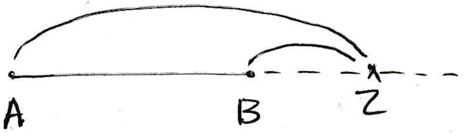
فاصله نقطه Z تا i
نقطه $A=i$

فاصله نقطه Z تا
نقطه $B=1-i$

هذلولی: مکان هندسی نقاطی از صفحه می باشد که تفاضل فاصله های آن از دو نقطه ثابت برابر مقدار ثابت باشد. مقدار ثابت را قطر کانونی هذلولی گویند



$$|A-B|=\sqrt{(0-1)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{5}$$



$$|Z-A|-|Z-B|<|A-B|$$

$$K=|A-B|$$

$K<|A-B| \rightarrow$ هذلولی

بعبارتی هر مثلث تفاضل دو ضلع از ضلع سوم کوچکتر است

$$\underbrace{|Z-A|-|Z-B|}$$

مقدار ثابت است که همان طول AB است

$k<|A-B| \rightarrow$ هذلولی
$k=|A-B| \rightarrow$ پاره خط (Z در امتداد AB)
$k>|A-B| \rightarrow$ تهی

if $k=|A-B| \rightarrow$ Z روی امتداد AB است

II – ۴ مثال: حاصل

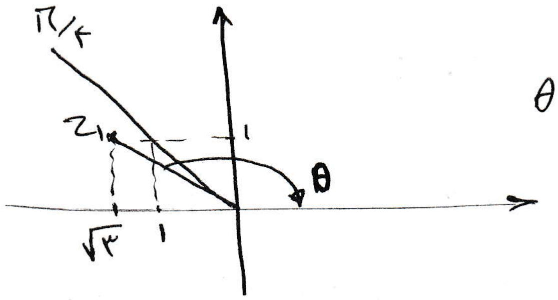
$A = \left(\frac{-\sqrt{۳} + i}{-۱ - i} \right)^{۱۲}$ کدام است

۱) ۶۴ ۲) ۶۴i ۳) −۶۴ ۴) −۶۴i

$z_1 = -\sqrt{۳} + i \rightarrow z_1 \left| \begin{matrix} -\sqrt{۳} \\ ۱ \end{matrix} \right.$

$r = \sqrt{۳+۱} = ۲$

$\theta = \text{Arc}\tan \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$



$\theta = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۶}$

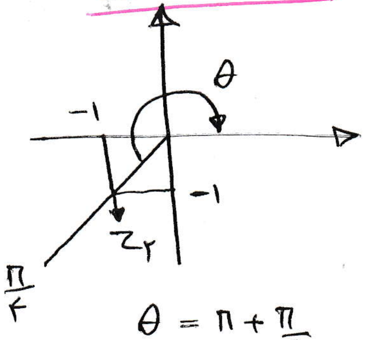
$Z = re^{i\theta}$

$\Rightarrow Z^n = r^n e^{in\theta}$

$z_۲ = -۱ - i \rightarrow z_۲ \left| \begin{matrix} -۱ \\ -۱ \end{matrix} \right.$

$r = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{۴}$



$\theta = \pi + \frac{\pi}{۴}$

$\rightarrow \theta = \frac{۵\pi}{۴}$

$A = \left(\frac{۲e^{i\frac{۵\pi}{۶}}}{\sqrt{۲}\, e^{i\frac{۵\pi}{۴}}} \right)^{۱۲} = \left(\sqrt{۲} * e^{i\left(\frac{۵\pi}{۶} - \frac{۵\pi}{۴}\right)} \right)^{۱۲}$

$A = (\sqrt{۲})^{۱۲} * e^{i \times ۱۲\left(\frac{۵\pi}{۶} - \frac{۵\pi}{۴}\right)}$

$A = ۲^۶ * e^{i(۱۰\pi - ۱۵\pi)} = ۲^۶ \left(\cos(-۵\pi) + i \sin(-۵\pi) \right)$

$= ۶۴(-۱ + ۰) = -۶۴$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

مقدار θ از معادله زیر بدست آورید

$(\cos ۲\theta + i \sin ۲\theta)^۴ = (\sin\theta - i\cos\theta)^۵$

$(e^{i \times (۲\theta)})^۴ = \left(-i\left(\cos\theta - \frac{۱}{i} \sin\theta\right)\right)^۵$

$\frac{۱}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{\underset{\underset{-۱}{\downarrow}}{i^۲}} = -i$

$e^{i(8\theta)} = -i^۵ (\cos\theta + i \sin\theta)^۵$

$i^۵ = i^۴ . i = (i^۲)^۲ . i = i$

$e^{i(8\theta)} = -i(e^{i\theta})^۵$

$Z = -i \rightarrow Z \left| \begin{matrix} ۰ \\ -۱ \end{matrix} \right.$

$e^{i(8\theta)} = ۱ * e^{i\frac{۳\pi}{۲}} * e^{i(5\theta)}$

$\begin{cases} r = ۱ \\ \theta = \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$

$\Rightarrow e^{i(8\theta)} = e^{i\left(\frac{۳\pi}{۲} + ۵\theta\right)}$

۵-I

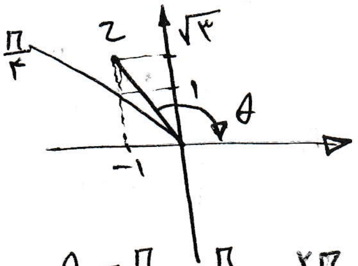
$$8\theta = \frac{۳\pi}{۲} + 5\theta + ۲k\pi$$ برای بدست آوردن جواب کلی

$$۳\theta = \frac{۳\pi}{۲} + ۲k\pi \longrightarrow \theta = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۲}$$

مثال: حاصل $A = (-1+\sqrt{۳}i)^{۲i}$

$Z = -1+\sqrt{۳}i$

$r = ۲$



$$\theta = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶} = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\ln A = ۲i\ln(-1+\sqrt{۳}i)$$

$$\rightarrow \ln A = ۲i\left(\ln ۲ + i\left(\frac{۲\pi}{۳} + ۲k\pi\right)\right)$$

$$\rightarrow \ln A = (۲\ln ۲)i - ۲\left(\frac{۲\pi}{۳} + ۲k\pi\right)$$

$$A = e^{(۲\ln ۲)i - \frac{۴\pi}{۳} - ۴k\pi}$$

تمرین: $A = i^i$

مثال: مقدار Z از معادله زیر را بدست آورید:

$$1 - Z + Z^۲ - Z^۳ + Z^۴ = 0$$

چون توانهای متوالی Z داریم باید یک تصاعد هندسی تشکیل شود.

تصاعد هندسی $\begin{cases} t_1 = 1 \\ r = -z \end{cases}$

مجموع جملات تصاعد هندسی $S_n = \frac{t_1(1-r^n)}{1-r}$

$$\frac{1(1-(-z)^۵)}{1-(-z)} = 0 \qquad \frac{1+z^۵}{1+z} = 0 \rightarrow 1+Z^۵ = 0 \rightarrow Z^۵ = -1$$

با شرط

$1+Z \neq 0 \rightarrow Z \neq -1$

$$\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\theta+۲k\pi}{n}}}$$

$$Z = \sqrt[۵]{-1} = -1$$

$$Z = \sqrt[۵]{1}\left(\cos\frac{\pi+۲k\pi}{۵} + i\sin\frac{\pi+۲k\pi}{۵}\right)$$

$k = 0 \rightarrow Z = \cos\frac{\pi}{۵} + i\sin\frac{\pi}{۵}$

$k = 1 \rightarrow Z = \cos\frac{۳\pi}{۵} + i\sin\frac{۳\pi}{۵}$

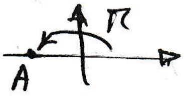
$k = ۲ \rightarrow \underline{Z = -1} \longrightarrow$ غ ق ق $\rightarrow$ چون با شرط بالا جور نیست $\rightarrow$ $A = -1 \rightarrow A\Big|_{0}^{-1}$

$k = ۳$ -

$k = ۴$ -

$r = \sqrt{1+0} = 1$

$\theta = \pi$



مثال. اگر V_1 و V_2 دو ضلع یک متوازی الاضلاع با مساحت S باشند. دترمینان ماتریس حاصل از

$$\begin{bmatrix}\vec{V_1}\\ \vec{V_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\vec{V_1} & \vec{V_2}\end{bmatrix}$$

کدام است.

1) S
2) S^2
3) $-S$
4) $-S^2$

$$A=\begin{bmatrix}\vec{V_1}\cdot\vec{V_1} & \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}\\ \vec{V_2}\cdot\vec{V_1} & \vec{V_2}\cdot\vec{V_2}\end{bmatrix}$$

ضرب خارجی دو بردار سطح متوازی الاضلاعی که روی دو بردار ساخته شده را می دهد

$$A=\begin{bmatrix}|V_1|^2 & |V_1||V_2|\cos\theta\\ |V_2||V_1|\cos\theta & |V_2|^2\end{bmatrix}$$

$$\det A=|V_1|^2|V_2|^2-|V_1|^2|V_2|^2\cos^2\theta=|V_1|^2|V_2|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=\underbrace{|V_1|^2|V_2|^2\sin^2\theta}=\underline{S^2}$$

ضرب خارجی آنها به توان ۲ که ضرب خارجی سطح متوازی الاضلاع را می دهد

مثال: معادله دو صفحه P و Q و خط Δ بصورت زیر می باشد. مطلوبست ۱) زاویه بین خط Δ و صفحه P

۲) محل تقاطع خط Δ و صفحه Q

۳) امتداد فصل مشترک دو صفحه P و Q

۴) معادله صفحه گذرنده از فصل مشترک دو صفحه P و Q که بر صفحه $x+2y+3z-5=0$ عمود باشد

$$P:\ 2x-y+2z-3=0$$

$$Q:\ 3x+2y-4z+1=0$$

$$\Delta:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3}$$

۱)

نرمال P $\quad \vec{N}_P=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

هادی Δ $\quad \vec{U}_\Delta=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{U}\cdot\vec{N}}{|U||N|}=\frac{4-2+6}{\sqrt{4+1+4}\times\sqrt{4+4+9}}$$

$$\longrightarrow \cos\theta=\frac{8}{3\sqrt{17}}\longrightarrow$$

زاویه بین خط و صفحه: $\boxed{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arccos}\frac{8}{3\sqrt{13}}}$

---

۲)

Δ: پارامتری $\begin{cases}2t+1\\ 2t-1\\ 3t+2\end{cases}$ $\xrightarrow[\text{قرار می دهیم}]{\text{در صفحه } Q}$ $3(2t+1)+2(2t-1)-4(3t+2)+1=0$

$$6t+3+4t-2-12t-8+1=0$$

$$-2t+6=0\longrightarrow \boxed{t=-3}$$

۷ - I

در فرم پارامتری $t=-۳ \longrightarrow \begin{cases} x=-۵ \\ y=-۷ \\ z=-۴ \end{cases} \longrightarrow A(-۵,-۷,-۴)$ تقاطع خط و صفحه Q

اگر از معادلات t حذف می‌شد خط و صفحه موازی‌اند

اگر به یک معادله همیشه درست مثلاً ۰ = ۰ رسیدیم خط و صفحه بر هم منطبقند

---

۳)

نرمال Q $\quad \vec{N}_Q = ۳\hat{i} + ۲\hat{j} - ۴\hat{k}$

هادی فصل مشترک دو صفحه P و Q $\quad \vec{V} = \vec{N}_P \times \vec{N}_Q \Rightarrow \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & -۴ \end{vmatrix} = i(۴-۴) - j(-۸-۶) + \hat{k}(۴-(-۳))$

$$\underline{\vec{V} = ۱۴\hat{j} + ۷\hat{k}}$$

---

۴)

معادله دسته صفحه گذرنده از فصل مشترک P و Q $\quad P + \lambda Q = ۰$

$$۲x - y + ۲z - ۳ + \lambda(۳x + ۲y - ۴z + ۱) = ۰$$

این دو بر هم عمود باشند $\longleftarrow \begin{cases} (۲+۳\lambda)x + (۲\lambda-۱)y + (۲-۴\lambda)z + \lambda - ۳ = ۰ \\ x + ۲y + ۳z - ۵ = ۰ \end{cases}$

$$۱(۲+۳\lambda) + ۲(۲\lambda-۱) + ۳(۲-۴\lambda) = ۰$$

$-۵\lambda + ۶ = ۰ \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{۶}{۵}} \longrightarrow$ جایگذاری می‌کنیم

مثال: اگر دو وجه مقابل یک مکعب بر صفحات زیر منطبق باشد. مساحت کل مکعب را بدست آورید

$$۲x - ۳y + z - ۱ = ۰$$

$$-۴x + ۶y - ۲z - ۳ = ۰ \xrightarrow{\div -۲} ۲x - ۳y + z + \frac{۳}{۲} = ۰$$

فاصله دو صفحه موازی = ضلع مکعب $= \dfrac{|-۱ - \frac{۳}{۲}|}{\sqrt{۴+۹+۱}} = \dfrac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۱۴}} = \dfrac{۵}{۲\sqrt{۱۴}}$

مساحت کل مکعب $S = ۶a^۲ = ۶ \times \dfrac{۲۵}{۴ \times ۱۴} = \boxed{\dfrac{75}{28}}$

$\begin{cases} ax + by + cz + d = ۰ \\ ax + by + cz + d' = ۰ \end{cases}$

* فاصله دو صفحه موازی *

$$\frac{|d - d'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}$$

$\frac{8}{I}$

اگر f(x) تابعی زوج بوده و ضابطه آن برای $x>0$ بصورت

$$x>0:\ f(x)=\frac{[x]-4}{x-4}$$

باشد. حاصل حد f(x) وقتی $x\to-4$ کدام است

$$\lim_{x\to-4} f(x)=?$$

$$\lim_{x\to-4^-} f(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{[x]-4}{x-4}=\lim\frac{[4^+]-4}{4^+-4}=\frac{\overset{\text{واقعی}}{0}}{\underset{\text{حدی}}{0}}=0$$

$$\lim_{x\to-4^+} f(x)=\lim_{x\to4^-}\frac{[x]-4}{x-4}=\lim\frac{[4^-]-4}{4^--4}=\frac{-1}{\underset{\text{حدی (نسبی)}}{0^-}}=-\infty$$

حد ندارد (چپ و راست یکی نیستا)

حاصل حد زیر در $x=\cos 20^\circ$ کدام است

$$\lim_{n\to+\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{(1-x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-(\cos20)^{2^{n+1}}}{1-\cos20}$$

مخرج را صفر نمی‌کند چون $\boxed{x=\cos20}$

$$=\frac{1-(0)}{1-\cos20}=\frac{1}{1-\cos20}=\frac{1}{1-(1-2\sin^2 10)}=\frac{1}{2\sin^2 10}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 10$$

→ چیزی که در گزینه‌ها وجود داشت

مثال: حاصل حد مقابل را بیابید

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)+f(1-x)-2f(1)}{x^2}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{HoP}}\lim_{x\to0}\frac{1\times f'(1+x)+(-1)f'(1-x)}{2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HoP}}\lim_{x\to0}\frac{1\times1\times f''(1+x)+(-1)(-1)\times f''(1-x)}{2}$$

$$=\frac{2f''(1)}{2}=f''(1)$$

$\frac{۹}{I}$ مثال: حاصل را بیابید

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^x - x}{x - \operatorname{Ln}x - ۱} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{HoP}} \lim_{x\to ۱} \frac{(۱\times \operatorname{Ln}x + \frac{۱}{x} * \cancel{x}) * x^x - ۱}{۱ - \frac{۱}{x}} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{HoP}}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\frac{۱}{x} * x^x + (۱\times \operatorname{Ln}x + ۱) x^x * (\operatorname{Ln}x + ۱)}{-\frac{-۱}{x^۲}} = \frac{۱ + (۰+۱) * ۱ * (۰+۱)}{۱} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\int_{۲-x}^{x^۲} \sqrt{۱+t^۲}\, dt}{\int_{۲}^{۲x} \sqrt{۱+t^۳}\, dt} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim \frac{۲x\sqrt{۱+(x^۲)^۲} - (-۱) * \sqrt{۱+(۲-x)^۲}}{۲ * \sqrt{۱+(۲x)^۳} - ۰ * (\quad)}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲} + \sqrt{۲}}{۲\sqrt{۹}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\operatorname{Ln}(۱+x) - x}{e^{۳x} + e^{۴x} - ۷x - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{HoP}} \lim \frac{\frac{۱}{x+۱} - ۱}{۳e^{۳x} + ۴e^{۴x} - ۷} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x\to ۰} \frac{\frac{-۱}{(۱+x)^۲}}{۹x^{۳x} + ۱۶e^{۴x}} = \frac{-۱}{۲۵}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \infty * \left[\frac{۱}{+\infty}\right] = \infty * [۰^+] = \infty * \underset{\text{واقعی}}{\overset{۰}{\nearrow}} = ۰$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\left[\frac{۱}{x}\right] = -\infty * \left[\frac{۱}{-\infty}\right] = -\infty * [۰^-] = -\infty * (-۱) = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x\to ۰} x * \frac{۱}{x} = ۱$$

$$\boxed{\begin{array}{l}[A] \simeq A \\ A \to \infty\end{array}}$$

توابع هم ارزی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{\frac{n^{\frac{۳}{۲}}}{3/۲}}{n^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\boxed{(۱^{۱/۲}+۲^{\frac{۱}{۲}}+\cdots+n^{\frac{۱}{۲}})}$$

$$n\to\infty: ۱^{P}+۲^{P}+\cdots+n^{P}\sim\frac{n^{P+۱}}{P+۱}+\frac{n^{P}}{۲}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sqrt[n]{\frac{(۲n+۱)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}*\frac{\sqrt[n]{(۲n+۱)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\frac{۱}{n}*\frac{\sqrt[n]{(۲n+۱)(۲n)!}}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}*\frac{\sqrt[n]{۲n+۱}*\sqrt[n]{۲n!}}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}*\frac{۱*\left(\frac{۲n}{e}\right)^{۲}}{\frac{n}{e}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۴}{e^{۲}}\cdot n^{۲}}{\frac{n^{۲}}{e}}=\frac{۴}{e}$$

$$n\to\infty: \sqrt[n]{(kn)!}\sim\left(\frac{kn}{e}\right)^{k}$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱}{\sin^{۲}x}-\frac{۱}{x^{۲}}=\infty-\infty\to\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}-\sin^{۲}x}{x^{۲}\sin^{۲}x}$$

هم ارزی تعمیم یافته

$$=\lim_{x\to۰}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^{۲}\sin^{۲}x}=\lim_{x\to۰}\frac{\left(x-\left(x-\frac{x^{۳}}{۳!}\right)\right)(x+x)}{x^{۲}(x)^{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۰ مقادیر A و B را چنان بدست آورید تا حاصل حد زیر ۴ شود (بسیار مهم)
$\underline{b, a}$

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b$$

(وقتی نمی‌دانی تا کدام جمله هم‌ارزی استفاده کنی
کمی از تعمیم یافته بنویس مثل اینجا)

حالا: $$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x+ax+bx^3}{x^3} \longrightarrow$$

پس هم‌ارزی هائی را می‌نویسیم که از درجه ۳ باشه
تا صورت و مخرج هم‌درجه شود و از بین نرود
و به سمت صفر یا ∞ نرود

$$\lim_{x\to0} \frac{x+\frac{x^3}{3}+ax+bx^3}{x^3}$$

$x\to0:$
$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+a)x+(\frac{1}{3}+b)x^3}{x^3}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1+a}{x^2}+\frac{1}{3}+b=\frac{\overset{\text{مطلق}}{0}}{\underset{\text{نسبی}}{0}}+\frac{1}{3}+b=\frac{1}{3}+b=4$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{11}{3}}$$

$\underline{1+a=0}$
$\Rightarrow a=-1$

مثال: مقدار a را چنان بدست آورید تا حاصل حد زیر متناهی بوده، سپس حاصل حد را مشخص نمائید

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}+e^{x}+ax-2}{x^2}=\lim_{x\to0} \frac{1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+1+x+\frac{x^2}{2!}+ax-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0} \frac{(3+a)x+\frac{5}{2}x^2}{x^2}=\lim_{x\to0} \frac{3+a}{x}+\frac{5}{2}=\frac{\overset{\text{مطلق}}{0}}{\underset{\text{نسبی}}{0}}+\frac{5}{2}=0+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

$3+a=0 \Rightarrow a=-3$

$$x\to0:\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$\frac{12}{I}$ مقادیر a و b را چنان بدست آورید تا حاصل حد زیر -4 بشه

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax+\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,.dt$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}}\,.dt}{ax+\sin x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{1\times\frac{x^2}{\sqrt{b+x}}-0*(\ \ )}{a+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(a+\cos x)(\sqrt{b+x})}=\frac{0}{\underset{\downarrow}{(a+1)\sqrt{b}}}=\frac{\overset{\text{نسبی}}{0}}{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{نسبی}}}{0}}$$ مبهم

یک عدد ثابت

$a+1=0$

$\boxed{a=-1}$

$x\to 0$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(-1+\cos x)\sqrt{b+x}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim\frac{x^2}{(-1+(1-\frac{x^2}{2!}))\sqrt{b+x}}=\lim\frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2\sqrt{b+x}}=\frac{-2}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{b}}=-4\to\boxed{b=\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\end{cases}$$ تعریف عدد نپر

هرگاه $(1+x)$ بصورت نمائی دیدی

کاری می کنی که بصورت $\ln(1+x)$ در بیاید

بعد هم ازری آنرا می نویسی

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}-e}{x}$$

$$a^{\log_a^u}=u$$

$$e^{\ln u}=u$$

$$=\lim\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=$$

۱۳/I

$$\lim_{x\to۰}\frac{e^{\frac{۱}{x}}(x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots)-e}{x}=$$

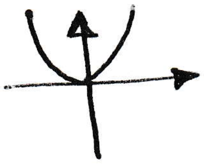
$$=\lim_{x\to۰}\frac{e^{(۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۱}{۴}x^۳+\cdots)}-e}{x}=\frac{۰}{۰}$$

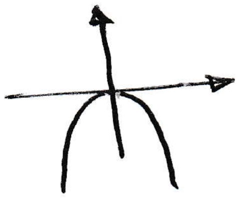
$$\xrightarrow{H}\lim_{x\to۰}\frac{(-\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}x-\frac{۳}{۴}x^۲+\cdots)\cdot e^{(۱-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۳}x^۲+\cdots)}}{۱}=(\frac{-۱}{۲})*e^۱$$

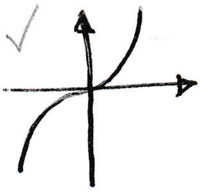
$$=\boxed{\frac{-e}{۲}}$$

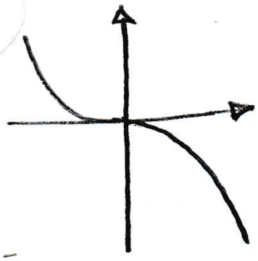
$x\to۰ : \ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۴}{۴}+\cdots$

نمودار تابع: $y=\sin x+\operatorname{tg}x-۲x$ در مبدا مختصات چگونه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


رفتار نمودار در مبدا مختصات (اطراف $x=۰$) شبیه به رفتار نمودار هم ارز این تابع می باشد

$x\to۰$

$$y=(x-\frac{x^۳}{۳!})+(x+\frac{x^۳}{۳})-۲x$$

$$y=\frac{-۱}{6}x^۳+\frac{۱}{۳}x^۳\to \boxed{y=\frac{۱}{6}x^3}\to \underline{۳}$$

براین دلیل تعمیم یافته هم از جهت آنها را نوشتیم چون مجموع هم ارزی‌های sin و tan با هم جمله صورت را صفر می کنند

$$x\to۰:\begin{cases}\tan x=x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲x^۵}{۱۵}+\cdots\\ \sin x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}+-\cdots\end{cases}$$

$$(\underset{\sin}{\underset{\downarrow}{x}}+\underset{\tan}{\underset{\downarrow}{x}}-۲x)$$

مقدار x از معادله زیر را بدست آورید

$$\cos x=\frac{۱۲۴۹}{۱۲۵۰}$$

۱) $\frac{۱}{۲۵}$

۲) $\frac{۱}{۲۰}$

۳) $\frac{۱}{۱۵}$ $\frac{۱}{۳۵}$

۴) $\frac{۱}{۱۰}$

$\cos x=۱\to x=۰$

$$\begin{cases}x\to۰\\ \cos x=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-+\cdots\end{cases}$$

$$x\to۰\Rightarrow ۱-\frac{x^۲}{۲!}=\frac{۱۲۴۹}{۱۲۵۰}$$

$$۱-\frac{۱۲۴۹}{۱۲۵۰}=\frac{۱}{۲}x^۲\to\frac{۱}{۱۲۵۰}=\frac{۱}{۲}x^۲$$

$$\to x^۲=\frac{۱}{۶۲۵}\to \boxed{x=\frac{۱}{۲۵}}$$

$$I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}=1^{\infty}$$

$$\Rightarrow \ln I=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg^2x\,.\,\ln\sin x=\infty * 0$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cot g^2 x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\boxed{\frac{\cos x}{\sin x}}\to\cot g\,x}{-2(1+\cot g^2x)\cot g\,x}=\frac{-1}{2}$$

$$\ln I=\frac{-1}{2}\Rightarrow I=e^{-\frac{1}{2}}\to \boxed{I=\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{kx+b}\right)^{cx+d}=e^{\frac{ac}{k}}$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cosh x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$$

(حد اول) هم ارزی

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)^{\frac{1}{x^2}}\longrightarrow \lim_{t\to 0}\left(1+\frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{t}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

$$\begin{cases}x^2=t\\ x\to 0\Rightarrow t\to 0\end{cases}$$

اگر جمله اول را می نوشتیم جواب نمی داد و باز هم 1^{∞} می شد

$$x\to 0:\quad \cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$x\to 0:\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

مثال: مقدار m را چنان بدست آورید تا حاصل حد زیر برابر با ۱۶ باشد

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2m}{3x-m}\right)^{4x+5}=1^{\infty}$$

وقتی چندجمله ای به چندجمله ای 1^{∞} بشود

به حالت توجه ۱ تبدیل می شود

$$\Rightarrow e^{4m}=16\to \boxed{m=\frac{1}{4}\ln 16}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-m+3m}{3x-m}\right)^{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3m}{3x-m}\right)^{4x+5}=e^{\frac{3m\times 4}{3}}=e^{4m}$$

$\frac{۱۵}{I}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{۲^n+3^{۲n}+5^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{۹^n}=\underline{۹\rfloor}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{۲^{۳n-۱}-۵^{n+۷}}{۵^{n-۱}-8^{n+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{۳n-۱}}{-۸^{n+۱}}=\lim-\frac{۲^{۳n}\times۲^{-۱}}{۲^{۳n}\times۲^{۳}}=-\frac{۱}{۱۶}$$

$$\lim\frac{۲^{\frac{۱}{x}}+۳x}{۳^{\frac{۱}{x}}-۵x}$$

$$x\to0^+:\ \lim\frac{2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}}=0$$

$$x\to0^-:\ \lim\frac{3x}{-5x}=\frac{-3}{5}$$

چون همه عامل ها صفر می شوند عامل ضعیفتر که توانی
است باقی می ماند

$$x\to+\infty:\ \lim\frac{۳x}{-۵x}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\lim\frac{۲^{\frac{۱}{x}}+\frac{۳}{x}}{۳^{\frac{۱}{x}}-\frac{۵}{x}}$$

$$x\to0^+:\ \lim\frac{۲^{\frac{۱}{x}}}{۳^{\frac{۱}{x}}}=0$$

$$x\to+\infty:\ \frac{1+0}{1-0}=\frac{1}{1}=1$$

$$x\to0^-:\ \lim\frac{\frac{۳}{x}}{-\frac{۵}{x}}=\frac{-۳}{۵}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}\longrightarrow \underline{f'(0)=?}$$

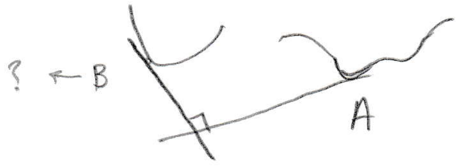
مشتق تابع در یک نقطه:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-\frac{x^۲}{۲!})}{x^۲}$$

$$=\frac{1}{۲}$$

مثال: خط مماس بر منحنی $y = x^۲+1$ بر خط مماس بر منحنی $y = x^۳ + \text{Arc}\,tg\, x$ در نقطه‌ای به طول 1 واقع بر آن عمود است. مختصات نقطه تماس بر منحنی اول را بدست آورید

$$y' = ۳x^۲ + \frac{1}{x^۲+1} \xrightarrow{x=1} m_۲ = ۳ + \frac{1}{۲} = \frac{۷}{۲}$$



$$y' = ۲x \xrightarrow{x=\alpha} m_1 = ۲\alpha$$

$$m_1 m_۲ = -1 \rightarrow 7\alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-1}{7}}$$

$$\Rightarrow B \begin{cases} \frac{-1}{7} \\ \frac{50}{49} \end{cases}$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x}$$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[6]{۶۳}$ را بدست آورید

$$f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$$

$$f(x) = \sqrt[6]{x}$$

$$f(x_0+\Delta x) \simeq \sqrt[6]{۶۴} + \frac{1}{۶\sqrt[6]{۶۴^۵}} * (-1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{۶\sqrt[6]{x^۵}}$$

$$\simeq ۲ - \frac{1}{۶ * ۳۲} \simeq ۲ - \frac{1}{۱۹۲} \simeq \frac{۳۸۳}{۱۹۲}$$

$$x_0 = ۶۴$$

$$\simeq ۱,۹۹۴$$

$$\Delta x = ۶۳ - ۶۴ = -1$$

مثال: در یک مثلث دو ضلع به ابعاد ۴ و ۶ و زاویه بین $\frac{\pi}{۳}$ مفروضند اگر ضلع بزرگتر ثابت بوده و ضلع کوچکتر با سرعت $۲\frac{m}{s}$ افزایش یافته و زاویه بین آنها با سرعت $۰/۵\frac{Rad}{s}$ کاهش یابد سرعت تغییر مساحت مثلث را بدست آورید

$a = ۴$

ثابت $b = ۶$

$\alpha = \frac{\pi}{۳}$

$$\frac{da}{dt} = ۲\,\frac{m}{s}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -0.5\,\frac{Rad}{s}$$

$$\longrightarrow \frac{ds}{dt} = ?$$

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \arrow[d] & & \alpha \arrow[d] \\ t & & t \end{tikzcd}$$

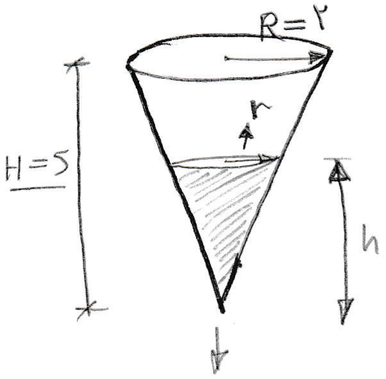
$$S = \frac{1}{۲} ab \sin\alpha = \frac{1}{۲} a * ۶ * \sin\alpha \Rightarrow S = ۳a\sin\alpha$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial s}{\partial \alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = (3\sin\alpha)(۲) + (۳a\cos\alpha)(-0.5)$$

$$\frac{ds}{dt} = \left(3\sin\frac{\pi}{۳}\right)(2) + \left(12\cos\frac{\pi}{3}\right)(-0.5) = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3}-1)\ \frac{m^2}{s}$$

مثال: مخروط وارونی به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۵ پر از آب است. اگر آب از راس مخروط با سرعت ۲ $\frac{m^3}{s}$ خارج شود سرعت کاهش ارتفاع آب در لحظه‌ای که ارتفاع ۳ واحد است را بدست آورید



$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^۲ h \qquad \boxed{\frac{r}{R} = \frac{h}{H}}$$

کمک‌گیری از خاصیت تشابه به مخروط کوچک و اصلی

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h}{5} \rightarrow r = \frac{۲}{۵}h$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi}{75}h^3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} * \frac{dh}{dt} \\ -2 = \frac{4\pi}{25}h^2 * \frac{dh}{dt} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow -2 = \frac{4\pi}{25} * 3^2 * \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-25}{18\pi}\ \frac{m}{s}$$

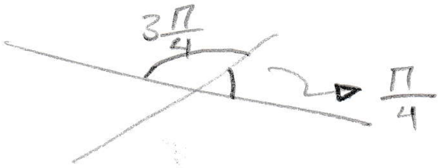
β: زاویه بین خط مماس و شعاع حامل نقطه تماس در A

مثال: در یک منحنی قطبی به معادله $r = \frac{1}{\theta + \cos\theta}$ زاویه بین خط مماس و شعاع حامل نقطه‌ای که $\theta = 0$ می‌باشد را بدست آورید

$$tg\,\beta = \frac{r}{r'}\bigg|_{\theta=0} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{\frac{1}{\theta+\cos\theta}}{\frac{-(1-\sin\theta)}{(\theta+\cos\theta)^۲}}\Bigg|_{\theta=0}$$

$$\Rightarrow tg\,\beta = \frac{\theta+\cos\theta}{\sin\theta - 1}\bigg|_{\theta=0} = \frac{0+1}{0-1} = -1 \Rightarrow \beta = Arc\,tg\,-1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

اگر زاویه بین دو تا خط را خواست و جواب گزینه‌ها نبود آنگاه می‌توانیم مکملش را بجای جواب انتخاب کنیم



$$\underline{*4} \Rightarrow 12x^2+36y^2=4$$

مثال: در تابع $4x^2+9y^2=1$ مقدار m در معادله زیر را چنان بدست آورید تا تابع در آن صدق کند

$$y''+\frac{m}{y^3}=0$$

$$8x+18yy'=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} 4x+9yy'=0 \rightarrow y'=\frac{-4x}{9y}$$

$$4+9y''y+y'(9y')=0 \rightarrow 4+9y''y+9\left(\frac{-4x}{9y}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow 4+9y''y+\frac{16x^2}{9y^2}=0 \rightarrow 9y''y+\frac{36y^2+16x^2}{9y^2}=0$$

$$\xrightarrow{\div 9y} \boxed{y''+\frac{16x^2+36y^2}{81y^3}=0} \quad 16x^2+36y^2 \rightarrow 4$$

$$\Rightarrow y''+\frac{4}{81y^3}=0 \quad \rightarrow \boxed{m=\frac{4}{81}}$$

$$y=\cfrac{\sin x}{\sin x+\cfrac{\sin x}{\sin x+\cfrac{\sin x}{\sin x+\cdots}}} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} y'=?$$

$$y=\frac{\sin x}{\sin x+y} \Rightarrow y\sin x+y^2=\sin x$$

$$y\sin x+y^2-\sin x=0 \qquad y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\left.\frac{y\cos x-\cos x}{\sin x+2y}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

الکی $\Big\downarrow x=\frac{\pi}{2}$

$$y^2+y+1=0 \begin{cases} \boxed{y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \\ y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases} \qquad \boxed{y'=-\frac{0}{1+2y}=0}$$

مثال: اگر $f(x)$ تابعی زوج بوده و $f'(۵)=-۳$ باشد حاصل $f'(۳)$ از معادله زیر را بدست آورید

داده حال $\rightarrow f(۳x) = ۵x^۲ + ۲f(x^۲-۶x) + ۳f(x^۲-۴)$

$$۳f'(x) = 10x + ۲(۲x-۶)\, f'(x^۲-۶x) + ۳(۲x-۴)\,.\,f'(x^۲-۴)$$

$x=1$

$$۳f'(۳) = 10 - 8f'(-5) - 6f'(-۳)$$

$$۳f'(۳) = 10 - ۸(-f'(۵)) - ۶(-f'(۳))$$

$$۳f'(۳) = 10 + 8(f'(۵)) + ۶f'(۳)$$

$$-۳f'(۳) = -۱۴ \rightarrow \boxed{f'(۳) = \frac{۱۴}{۳}}$$

اگر تابعی زوج باشد مشتق آن فرد بوده

و اگر فرد باشد مشتق آن زوج خواهد بود

معادله سرعت یک متحرک در SI بصورت $V = x^۲ + ۲\sqrt{x}$ باشد شتاب متحرک در مکان $x=1$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} V = \dfrac{dx}{dt} \\ a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(۲x + ۲ \times \frac{1}{۲\sqrt{x}}\right)\cdot V$$

$$a = \left(۲x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^۲ + ۲\sqrt{x}\right)$$

$x=1$

$$\boxed{a = ۹\,\frac{m}{s^۲}}$$

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{۲}} \frac{d^۲y}{dx^۲} = ? \quad \underline{y'' = ?}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t} \quad / \quad \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{(\cos t + \cos t - t\sin t)}{\quad}$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{(\cos t + \cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) - (-\sin t - \sin t - t\cos t)(\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^3}$$

$t = \frac{\pi}{۲}$

$$= \frac{(۰+۰+\frac{\pi}{۴})(۰-\frac{\pi}{۲}) - (-۱-۱-۰)(۱+۰)}{(۰-\frac{\pi}{۲})^۳} = \frac{\frac{\pi^۲}{۴}+۲}{-\frac{\pi^۳}{8}} = -\frac{۲\pi^۲+۱۶}{\pi^۳}$$

$$y=(\operatorname{tg} x)^{\cos x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} y'=?$$

$$y'=\left(-\sin x \operatorname{Ln}(\operatorname{tg} x)+\frac{1+\operatorname{tg}^{۲} x}{\operatorname{tg} x}\cdot\cos x\right)(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\operatorname{Ln}1+\frac{۲}{1}*\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)(1)^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = (0+\sqrt{۲})(1)=\sqrt{۲}$$

$$y=\int_x^{x^{۲}}\frac{\sin xt}{t}\,dt \longrightarrow y'=?$$

$$y'=۲x*\frac{\sin x^{۳}}{x^{۲}}-1*\frac{\sin^{۲} x}{x}+\int_x^{x^{۲}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin xt}{t}\right)dt$$

$$y'=\frac{2\sin x^{۳}}{x}-\frac{\sin x^{۲}}{x}+\int_x^{x^{۲}}\cos xt\,dt$$

$$=\frac{۲\sin x^{۳}}{x}-\frac{\sin x^{۲}}{x}+\left(\frac{1}{x}\sin xt\Big|_x^{x^{۲}}\right)$$

$$=\frac{۲\sin x^{۳}}{x}-\frac{\sin x^{۲}}{x}+\frac{\sin x^{۳}}{x}-\frac{\sin x^{۲}}{x}=\boxed{\frac{۳\sin x^{۳}}{x}-\frac{۲\sin x^{۲}}{x}}$$

معادله خط مماس بر منحنی معکوس تابع $y=x^{۳}+۵x-۲$ در نقطه‌ای بطول ۴ واقع بر تابع معکوس را بدست آورید

$A\left|\begin{matrix}۴\\1\end{matrix}\right.$ $\in$ معکوس

$B\left|\begin{matrix}1\\۴\end{matrix}\right.$ $\in$ تابع

$\Rightarrow ۴=x^{۳}+۵x-۲$

$\Rightarrow x^{۳}+۵x-۶=0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ مجموع ضرایب صفر است

$$(y^{-1})'(۴)=\frac{1}{y'(1)}=\frac{1}{۳+۵}=\frac{1}{8}$$

شیب مماس بر معکوس

معادله خط مماس بر معکوس $= \boxed{y-1=\frac{1}{8}(x-4)}$

درجات زوج ممکن است ریشه نداشته باشد

ولی درجات فرد حتماً یک ریشه دارند

علاوه براین توابع معکوس پذیر یک به یک اند

مشتق تابع $y = Ln\,Cos\,x$ نسبت به تابع $y = tg\,x$ را بدست آورید

$$\frac{df}{dg}=\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}\;\textcircled{g}}{1+tg^{۲}x}=\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^{۲}x}}\overset{\textcircled{f}}{=}-\sin x\cos x=\boxed{-\frac{1}{۲}\sin ۲x}$$

مقدار $f(x)=e^{-\int_{۲}^{x}tf(t)\,dt}$ ، $f(۳)$ کدام است

** مهم : توابع

معادله انتگرالی : تابع برحسب انتگرالی از خودش تعریف می‌شود

نکته: برای حل معادلات انتگرالی ابتدا از طرفین مشتق گرفته و سپس معادله دیفرانسیل حاصل را حل می‌کنیم

به امید خدا معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدائی پذیر می‌شود

$$f'(x)=-(1* x f(x) - *(\ \ ))\,e^{-\int_{۲}^{x}tf(t)\,dt}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-x\cdot f(x)\cdot f(x)\rightarrow\frac{dy}{dx}=-x\cdot y^{۲}$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{y^{۲}}\cdot dy=\int -x\cdot dx\rightarrow -\frac{1}{y}=-\frac{x^{۲}}{۲}+c\rightarrow\boxed{\frac{1}{y}=\frac{x^{۲}}{۲}+c}$$

c را با نقطه‌ای که در تابع صدق کند پیدا می‌کنیم

$$x=۲\rightarrow y=f(x)=1$$

$$\Rightarrow\boxed{(۲,1)\in \text{تابع}}$$

در تابع قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{1}{۲}*۲^{۲}+c\rightarrow\boxed{c=-1}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{۲}x^{۲}-1$$

$$\xrightarrow{x=۳}\frac{1}{y}=\frac{۹}{۲}-1\rightarrow\frac{1}{y}=\frac{7}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{2}{7}}$$

$$f(x) = ۵x^۴ + \frac{۱}{x}\int_۱^x f(t)\,dt \longrightarrow \underline{f(۲)=?}$$

باید انتگرال تنها داشته باشیم والا هر چقدر مشتق بگیریم باز هم انتگرال داریم

$$\Rightarrow x f(x) = ۵x^۵ + \int_۱^x f(t)\,dt$$

$$f(x) + x f'(x) = ۲۵x^۴ + (۱ * f(x) - ۰ * (\ \ ))$$

$$f(x) + x f'(x) = ۲۵x^۴ + f(x)$$

$$x f'(x) = ۲۵x^۴ \to f'(x) = ۲۵x^۳ \to \boxed{f(x) = \frac{۲۵}{۴}x^۴ + c}$$

$x=۱ \to y = f(x) = ۵ \Rightarrow (۱,۵) \in$ تابع

$$\Rightarrow ۵ = \frac{۲۵}{۴} * ۱ + c \Rightarrow c = \frac{-۵}{۴}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۲۵}{۴}x^۴ - \frac{۵}{۴} \xRightarrow{x=۲} f(۲) = ۱۰۰ - \frac{۵}{۴} = \boxed{\frac{۳۹۵}{۴}}$$

$$x = \int_۱^y \sqrt{\frac{t}{t-۱}}\,dt \longrightarrow \frac{d^۲y}{dx^۲} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\frac{dx}{dy}} =$$

$$\frac{dx}{dy} = ۱ * \sqrt{\frac{y}{y-۱}} - ۰ * (\ \ )$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y-۱}{y}} \to \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{۱-\frac{۱}{y}}\right)$$

$$\frac{d^۲y}{dx} = \frac{۰ - \frac{-y'_x * ۱}{y^۲}}{۲\sqrt{۱-\frac{۱}{y}}} \to \frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{\frac{y'}{y^۲}}{\underbrace{۲\sqrt{۱-\frac{۱}{y}}}_{y'}} = \frac{\frac{y'}{y^۲}}{۲y'} = \frac{y'}{۲y^۲y'}$$

$$f(x) = u \cdot v$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} \cdot u^{(n-i)} \cdot v^{(i)}$$

$$= \boxed{\frac{۱}{۲y^۲}}$$

مشتق مرتبه nام

$$y=\sin(ax+b) \rightarrow y^{(n)} = a^{n}\sin(ax+b+\frac{n\pi}{۲})$$

$$y=\cos(ax+b) \rightarrow y^{(n)} = a^{n}\cos(ax+b+\frac{n\pi}{۲})$$

هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y^{(n)} = \frac{n!}{(cx+d)^{n+1}} * (-c)^{n-1} * (ad-bc)$

$$y=e^{ax+b} \rightarrow y^{(n)} = a^{n}\cdot e^{ax+b}$$

$$y=k^{ax+b} \rightarrow y^{(n)} = a^{n}\cdot k^{ax+b}\cdot(\ln k)^{n}$$

برای بدست آوردن مشتق $\sin^{(n)}$, $\cos^{(n)}$ کافیست شماره مشتق را به عدد ۴ تقسیم کرده باقیمانده تقسیم قیافه اصلی مشتق nام را معرفی می‌کند. لطفاً a^{n} فراموش نشود

مثال:

$$y=(x^{۲}+x)\sin ۲x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۲}} y^{(۶۶)} = ?$$

$$y^{(۶۶)} = \sum_{i=۰}^{۶۶}\binom{۶۶}{i}(x^{۲}+x)^{(i)}\cdot(\sin ۲x)^{(۶۶-i)}$$

مشتق ۱ ام صفر است تا چندجمله‌ای قرار بگیرید

$$y^{(۶۶)} = \binom{۶۶}{۰}(x^{۲}+x)\cdot(۲^{۶۶} * (-\sin ۲x))$$

$$+\binom{۶۶}{۱}(۲x+۱)(۲^{۶۵} * \cos ۲x) + \binom{۶۶}{۲}(۲)(۲^{۶۴}\sin ۲x) + ۰ + ۰ \dots$$

$۶۶ \underline{|\,۴}$

۱۶

② → مشتق دوم

Sin۲x

$$y^{(۶۶)}(\frac{\pi}{۲}) = ۰ + ۶۶(\pi+۱)(۲^{۶۵}\cos\pi) + ۰ = \boxed{-۶۶ * ۲^{۶۵}(\pi+۱)}$$

$$\binom{۶۶}{۱} = \frac{۶۶!}{۱!(۶۶-۱)!} = \frac{۶۶!}{۶۵!} = \frac{۶۶\times۶۵!}{۶۵!} = ۶۶$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

$\frac{۲۴}{I}$

$$y = \frac{۳x^۲ - ۵x + ۱}{۲x-۱} \xrightarrow{x = \frac{-۱}{۲}} y^{(۲۰)} = ?$$

$$\begin{array}{r|l} ۳x^۲ - ۵x + ۱ & ۲x-۱ \\ \hline -(۳x^۲ - \frac{۳}{۲}x) & \frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۴} \\ \hline -\frac{۷}{۲}x + ۱ & \\ -(-\frac{۷}{۲}x + \frac{۷}{۴}) & \\ \hline -\frac{۳}{۴} & \end{array}$$

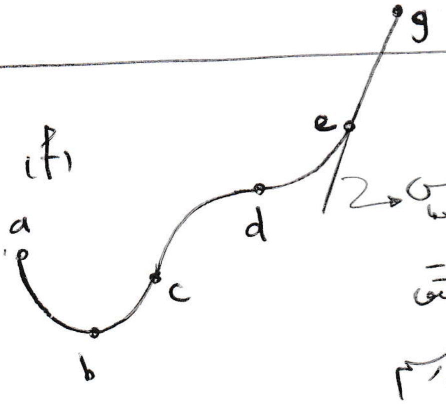
$$\Rightarrow y = \frac{(۲x-۱)(\frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۴}) - \frac{۳}{۴}}{(۲x-۱)} \quad \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x - \frac{۷}{۴} + \frac{-\frac{۳}{۴}}{۲x-۱}$$

$$\Rightarrow y^{(۲۰)} = \frac{۲۰!}{(۲x-۱)^{۲۱}} * (-۲)^{۱۹} * (۰ - \frac{-۳}{۲})$$

$$\Rightarrow y^{(۲۰)}(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲۰!}{(-۲)^{۲۱}} * (-۲)^{۱۹} * \frac{۳}{۲} = \frac{۲۰!}{۴} * \frac{۳}{۲} = \boxed{\frac{۳ * ۲۰!}{۸}}$$

---

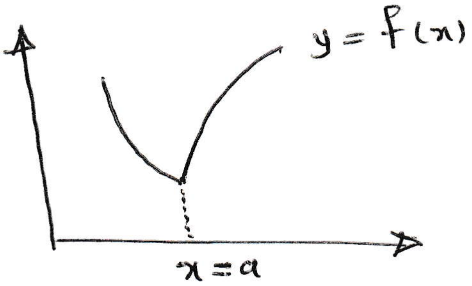
۲۴ ص

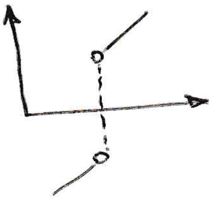


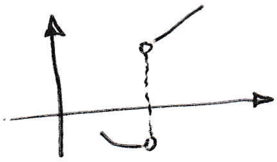
$\Rightarrow$ پس از e تا g تابع صعودی است ولی چون نمودار f شکستگی وجود دارد و e توپر است پس در e مشتق وجود ندارد پس برای اینکه نمودار تابع را از e تا g رسم کنیم باید طوری رسم شود که تابع مشتق‌پذیر باشد

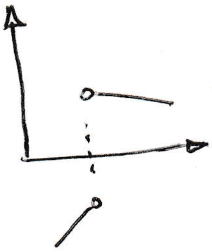
پس از e یک مماس بر تابع رسم می‌کنیم و امتداد تابع را از نقطه‌ی e در امتداد مماس بر نقطه e رسم می‌کنیم

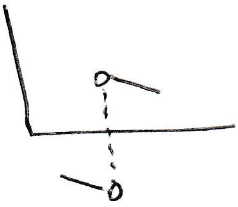
مثال: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اطراف $x=a$ به شکل زیر باشد؛ نمودار مشتق اول در اطراف این نقطه چگونه خواهد بود.



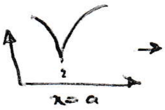
۱)


۲)


۳)


۴)


$x<a \rightarrow f(x)$ نزولی $\rightarrow f'(x)$ منفی است
$x>a \rightarrow f(x)$ صعودی $\rightarrow f'(x)$ مثبت است

$f'(x)$:


→ گزینه ۴

$x<a \rightarrow$ تقعر f رو به بالا است $\rightarrow f''(x)>0 \rightarrow$ نمودار f' صعودی است
$x>a \rightarrow$ تقعر f رو به پایین است $\rightarrow f''(x)<0 \rightarrow$ نمودار f' نزولی است
→ گزینه (۳)

اگر تابع $y=(x-۲)^۲(x+۴)$ در فاصله $[a,b]$ معکوس پذیر باشد و این فاصله بزرگترین فاصله شامل نقطه $x=a$ باشد حاصل $(b-a)$ کدام است

معکوس پذیر → تابع یک به یک → یکنوا باشد → { یا اکیداً صعودی / یا اکیداً نزولی

$$y'=۲(x-۲)(x+۴)+۱(x-۲)^۲=۰$$

$$(x-۲)(۲x+۸+x-۲)=۰ \rightarrow (x-۲)(۳x+۶)=۰ \quad \begin{cases} x=۲ \\ x=-۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y		↗		↘		↗	

$$(a,b)=(-۲,۲) \rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=۲ \end{cases}$$

$$\Leftarrow b-a=۴$$

۲۶
I

مثال: بزرگترین فاصله‌ای که تقعر تابع $y = Ln(8x-x^2)$ در آن رو به پایین است کدام است؟

۱) $(0,8)$ ۲) $(0,4)$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

$$y' = \frac{8-2x}{8x-x^2} \qquad y'' = \frac{-2(8x-x^2)-(8-2x)(8-2x)}{(8x-x^2)^2} = \frac{-2x^2+16x-64}{(8x-x^2)^2}$$

مخرج چون توان ۲ دارد همیشه مثبت است

$$-2x^2+16x-64=0 \Rightarrow \Delta<0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
y''	$-$	
y		

$\Rightarrow$ موافق علامت x^2

تقعر همیشه رو به پایین

اگر دامنه تابع را چک نکنیم همین را جواب می‌دیدیم
و گزینه ۴ را می‌زدیم

$$D = 8x-x^2>0$$

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D=(0,8)$

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
y''	▨	$-$	▨	
y	▨	تقعر رو به پایین	▨	

$\Rightarrow$ گزینه 1

مثال: اگر نقطه اکسترمم نسبی تابع $y=\log_4(4x-x^2)$ منطبق بر نقطه عطف تابع $y=x^3+ax^2+bx$ شود. مقادیر a و b را بدست آورید

$$D = 4x-x^2>0$$

$$\Rightarrow D=(0,4)$$

$$y' = \frac{4-2x}{(4x-x^2)Ln4} = 0$$

که مخرج با توجه به شرط دامنه
همیشه مثبت است

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
y'	▨		$+$	0	$-$	▨	
	▨		↗		↘	▨	

نسبی Max $\Big|_{1}^{2}$

$$y=\log_a u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}\cdot\frac{1}{Lna}$$

$y = x^3 + ax^2 + bx$

عطف $(2,1)$

$1 = 8 + 4a + 2b \rightarrow \boxed{b = \frac{17}{2}}$

$y' = 3x^2 + 2ax + b$

در نقطه عطف تابع به ازای طول نقطه عطف y'' صفر خواهد شد.

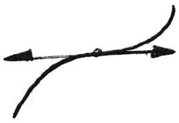
$y'' = 6x + 2a$

$x=2$, $y''=0$ $\rightarrow 0 = 12 + 2a \rightarrow \boxed{a = -6}$

مثال: نمودار تابع $x^2 + xy + y^2 - 3x = 0$ در اطراف $x=1$ چگونه است نقطه $(1,1)$

۱)


۲)


۳)


۴)


$2x + y + xy' + 2yy' - 3 = 0 \xrightarrow{(1,1)} 2 + 1 + y' + 2y' - 3 = 0$

$\rightarrow 3y' = 0 \rightarrow \boxed{y' = 0} \rightarrow$ هر چهار گزینه

مشتق اولش صفر است

$2 + y' + y' + xy'' + 2y''y + y'(2y') = 0$

$(1,1)$, $y'=0$ $\downarrow$ $2 + 0 + 0 + y'' + 2y'' + 0 = 0 \rightarrow 3y'' = -2 \rightarrow \boxed{y'' = \frac{-2}{3} < 0}$

$y'=0$ و $y''<0$ $\rightarrow$ نقطه ماکزیمم نسبی است $\rightarrow$ گزینه $\underline{1}$

اکسترممهای مطلق و استفاده از آن

مثال: برد تابع $z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ را بدست آورید

if $x^2+y^2=t \rightarrow \boxed{f(t) = te^{-t}} \Rightarrow \underline{t \in [0, +\infty]}$ چون x^2+y^2

$f'(t) = 1 * e^{-t} + (-e^{-t})t = 0 \qquad e^{-t}(1-t) = 0 \begin{cases} e^{-t} = 0 & \text{غیرممکن} \\ 1-t = 0 \rightarrow \boxed{t=1} \end{cases}$

چک کردن شرایط بحرانی و شرایط مرزی

$$\begin{cases} t=0 \rightarrow f(t) = 0 * e^0 = 0 \xrightarrow{\text{مطلق}} \text{Min} \\ t \rightarrow +\infty : \lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot e^{-t} = \lim \frac{t}{e^t} \overset{H}{=} \lim \frac{1}{e^t} = \frac{1}{\infty} = 0 \xrightarrow{\text{نیست}} \text{مطلق Min این} \\ t=1 \rightarrow f(t) = 1 * e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{مطلق } Min = 0 \\ \text{مطلق } Max = \frac{1}{e} \end{cases} \longrightarrow R = [0, \frac{1}{e}]$$

مثلاً اگر به این عدد می‌خوردیم

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow f(t) = \frac{1}{10} \\ t \rightarrow +\infty : \lim f(t) = 0 \\ t = 1 \rightarrow f(t) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

مطلق Min : ندارد

مطلق $Max = \frac{1}{e}$ $\longrightarrow R = (0, \frac{1}{e}]$

معادلهٔ $x^3 + tg\, x = 1$ در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{4}]$ دارای چند ریشه می‌باشد

۱) فقط ۱ ریشه
۲) حداکثر ۱ ریشه
۳) حداقل ۱ ریشه
۴) حداکثر ۲ ریشه

$f(x): x^3 + tg\, x - 1 = 0$

$$\begin{cases} f(0) = 0 + 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(\pi/4) = \frac{\pi^3}{64} + 1 - 1 > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{بولتزانو}} \text{حداقل یک ریشه}$$

$\downarrow$

فقط گزینهٔ ۲ غلط است

$f'(x) = 3x^2 + 1 + tg^2 x$ ریشه ندارد

$\longrightarrow f(x) = 0 \longrightarrow$ حداکثر یک ریشه دارد $\longrightarrow$ فقط یک ریشه

نتیجه اول قضیه رول

تابع مقابل دارای چند ریشه است؟

$f(x): x^2 - x\sin x - \cos x = 0$

۱) حداقل ۲ ریشه
۲) دقیقاً ۲ ریشه دارد
۳) حداکثر ۲ ریشه دارد
۴) دقیقاً یک ریشه دارد

$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - x\cos x \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow x(2 - \cos x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2 - \cos x = 0 \rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ دارای یک ریشه است $\longrightarrow$ $f(x) = 0$ حداکثر ۲ ریشه دارد (۱)

برای بولتزانو خودمان فاصله پیدا می‌کنیم، عدد صفر در توابعی که هم جبری اند هم مثلثاتی انتخاب خوبی است

$x=۰ \rightarrow f(۰) = ۰-۰-۱=-۱$

$(-\infty,۰)\ \xrightarrow[f(۰)<۰]{f(-\infty)>۰}$ حداقل یک ریشه (بولتزانو)

$(۰,+\infty)\ \xrightarrow[f(+\infty)>۰]{f(۰)<۰}$ حداقل یک ریشه دارد

$\rightarrow$ (۲) حداقل ۲ ریشه دارد

$(۱),(۲) \longrightarrow$ فقط دو ۲ ریشه دارد

البته این دو فاصله $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ هیچ اشتراکی باهم ندارند

مقدار $Ln\frac{۵}{۳}$ در چه فاصله‌ای قرار دارد (باید با استفاده از نتیجه دوم قضیه لاگرانژ بدست آوریم)

$Ln\frac{۵}{۳} = Ln۵ - Ln۳$

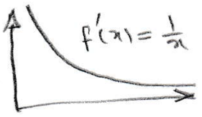
$f(x) = Ln\, x$

$[۳,۵]$

f' مطلق Min $< \frac{Ln۵-Ln۳}{۵-۳} <$ f' مطلق Max

$f'(x)=\frac{۱}{x} \rightarrow$ همیشه نزولی

$[۳,۵]$



مطلق Min $\xrightarrow{x=۵} f'_{min} = \frac{۱}{۵}$

مطلق Max $\xrightarrow{x=۳} f'_{max} = \frac{۱}{۳}$

$$\rightarrow \frac{۱}{۵} < \frac{Ln\frac{۵}{۳}}{۲} < \frac{۱}{۳}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{۲}{۵} < Ln\frac{۵}{۳} < \frac{۲}{۳}}$$

مثال: تابع $y = \frac{Arctg\, x}{x}$ در فاصله $[۰,۱]$ در چه فاصله‌ای قرار دارد (برد تابع را خواسته است)

(استفاده از نتیجه ۲ لاگرانژ)

$f(t) = Arctg\, x$

$[۰,x]$ $f'(t)$ مطلق min $< \frac{Arctg\, x - Arctg\, ۰}{x-۰} <$ مطلق max $f'(t)$

$$< \frac{Arctg\, x}{x} <$$

$$f'(t)=\frac{۱}{۱+t^{۲}} \xrightarrow{t=x} f'_{min}=\frac{۱}{x^{۲}+۱}$$

$$\xrightarrow{t=۰} f'_{max}=\frac{۱}{۱+۰}=۱$$

نزولی

$$f'_{min}=\frac{۱}{۱+x^{۲}} \quad x\in[۰,۱] \xrightarrow[\text{مینیمم min}]{x=۱} f'_{min}=\frac{۱}{۲}$$

مثال

$$y=\frac{\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{۲}}{x-۱}$$

$b-a=x-۱$

$f(t)=\text{Arc sin}\,t$

$[۱,x]$

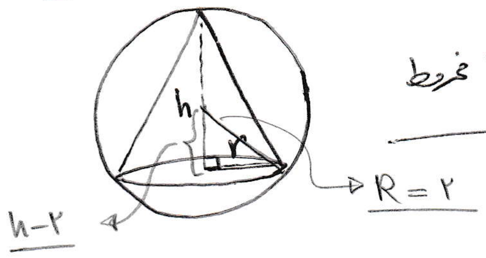
$$\Rightarrow \frac{\text{Arcsin}\,x-\text{Arcsin}\,۱}{x-۱}$$

حالا $\frac{۱}{۲}<\frac{\text{Arctg}\,x}{x}<۱$

مسائل بهینه سازی:

درداخل یک کره به شعاع ۲ واحد مخروطی محاط می‌کنیم ارتفاع مخروط چقدر باشد تا حجم مخروط ماکزیمم شود

$R=۲$



مخروط $V: \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

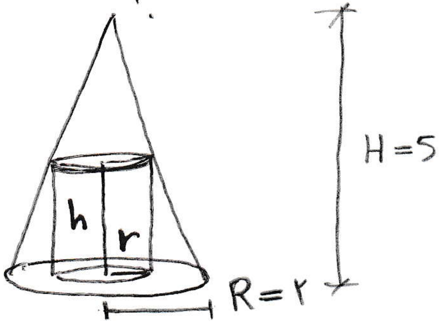
$$4=r^{۲}+(h-۲)^{۲} \Rightarrow 4=r^{2}+h^{2}-4h+4$$

$$4h-h^{۲}=r^{۲} \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}(4h-h^{۲})h$$

$$\Rightarrow V=\frac{4\pi}{3}h^{2}-\frac{\pi}{3}h^{3} \longrightarrow V'=\frac{8\pi}{3}h-\pi h^{2}=۰$$

$$\pi h\left(\frac{8}{3}-h\right)=۰ \longrightarrow \begin{cases} h=۰ & \text{غ ق ق} \\ \boxed{h=\frac{8}{3}} \end{cases}$$

تمرین: در داخل یک مخروط به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع 5 استوانه ای محاط می‌کنیم. ماکزیمم حجم استوانه را بدست آورید



مثال ؛ با یک سیم بطول ۶۰m یک دایره و یک مربع تشکیل می‌دهیم ماکزیمم مقدار مجموع مساحتهای دو شکل را بدست آورید

$\frac{۳۱}{I}$ $(\pi \simeq ۳)$

$\rightarrow S = S_1 + S_۲ = ۳r^۲ + a^۲$

$L = ۶۰^m$

دایره $S_1 = \pi r^۲ \rightarrow S_1 = ۳r^۲$

مربع $S_۲ = a^۲$

$$\boxed{2\pi r + ۴a = ۶۰}$$

$\rightarrow ۶r + ۴a = ۶۰ \rightarrow ۶r = ۶۰ - ۴a$

$r = ۱۰ - \frac{۲}{۳}a$

$\rightarrow S = ۳(۱۰ - \frac{۲}{۳}a)^۲ + a^۲$

$S' = ۶(\frac{-۲}{۳})(۱۰ - \frac{۲}{۳}a) + ۲a = ۰$

$-۴۰ + \frac{۸}{۳}a + ۲a = ۰ \rightarrow \frac{14}{3}a = 40 \rightarrow a = \frac{120}{14}$

$\rightarrow a = \frac{۷۰}{7}$

$\rightarrow S = ۳(\frac{۹۰۰}{49}) + \frac{۳۶۰۰}{۴۹} = \frac{۶۳۰۰}{۴۹} \rightarrow S = \frac{۹۰۰}{7} \simeq ۱۲۸/...$

$\rightarrow$ Min

$\left.\begin{array}{l} S'' = \frac{8}{3} + ۲ > ۰ \\ S' = ۰ \end{array}\right\} \rightarrow$ Min

---

نقاط مرزی

I مرز $\left\{\begin{array}{l} S_1 = ۳r^۲ \\ S_۲ = ۰ \end{array}\right. \rightarrow S = ۳r^۲ + ۰$

$۲\pi r = ۶۰ \rightarrow ۶r = ۶۰ \rightarrow r = ۱۰$ $\rightarrow S = ۳۰۰$

II مرز : $\left\{\begin{array}{l} S_1 = ۰ \\ S_۲ = a^۲ \end{array}\right. \rightarrow S = ۰ + a^۲$

$4a = 60 \rightarrow a = 15 \rightarrow \boxed{S = ۲۲۵}$

$\rightarrow \boxed{S_{max} = ۳۰۰}$

* در محیط ثابت هر چقدر شکل متقارن‌تر باشد ؛ مساحت بزرگتری می‌شود *

$\frac{۳۳}{I}$

انتگرال معین

$$1) I = \int_{۱}^{۵} \left[\frac{x}{۲}\right] dx$$

$$۱ < x < ۵ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۱}{۲} < \frac{x}{۲} < \frac{۵}{۲}$$

$$۱ < x < ۲ \xleftarrow{\times ۲} \frac{۱}{۲} < \frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$$

$$۲ < x < ۴ \longleftarrow ۱ < \frac{x}{۲} < ۲ \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۱$$

$$۴ < x < ۵ \longleftarrow ۲ < \frac{x}{۲} < \frac{۵}{۲} \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۲$$

$$I = \int_{۱}^{۲} ۰\, dx + \int_{۲}^{۴} ۱\, dx + \int_{۴}^{۵} ۲\, dx = x\Big|_{۲}^{۴} + ۲x\Big|_{۴}^{۵} = (۴-۲) + (۱۰-۸)$$

$$= ۲ + ۲ = ۴$$

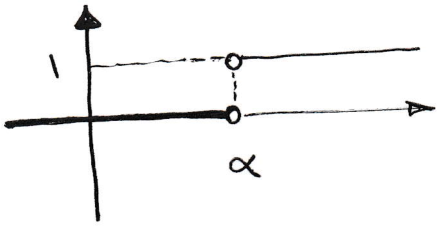
تابع پله واحد

$$۲) I = \int_{۱}^{x} u_{۳}(t)\, dt \qquad u_{\alpha}(t) = \begin{cases} ۰ & : t < \alpha \\ ۱ & : t > \alpha \end{cases}$$

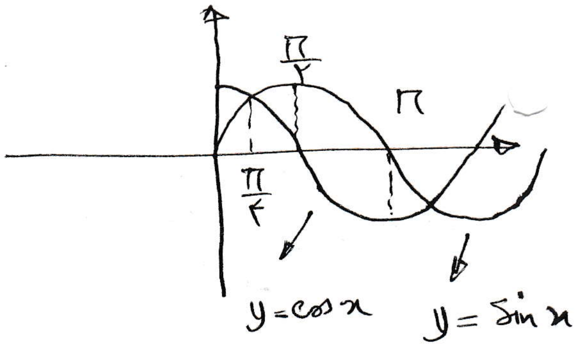
$$= \int_{۱}^{۳} \cancel{۰}\, dt + \int_{۳}^{x} ۱ . dt$$

$$۰$$

$$= t\Big|_{۳}^{x} = x - ۳$$



$$۳) I = \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} \mathrm{Max}\{\sin x, \cos x\}\, dx$$



$$= \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} + \left(-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(-\left(۰ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right) = \sqrt{۲} - \frac{۱}{۲}$$

---

۴۱ $\int_{۰}^{۱۰} \left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right) dx$

$\begin{cases} y = ax - [ax] \\ \to T = \frac{۱}{|a|} \end{cases}$

$\frac{۳۴}{I}$

$۱۰ = ۵ * ۲$

$\to \int_{۰}^{۱۰} \left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right) dx = ۵ \int_{۰}^{۲} \left(\frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]\right) dx$

عدد ۱۰ را تقسیم بر ۲ که دوره تناوب است کردیم و عدد غیر دوره تناوب را از انتگرال خارج نمودیم

$\to I = ۵ \int_{۰}^{۲} \frac{x}{۲} dx = \frac{۵}{۴} x^{۲} \Big|_{۰}^{۲} = ۵$

$y = \frac{x}{۲} - \left[\frac{x}{۲}\right]$

$\to T = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$

$۰ < x < ۲$

$\to ۰ < \frac{x}{۲} < ۱ \to \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰$

---

۵)

$I = \int_{-۲}^{۲} \underbrace{\underbrace{\cos x}_{\text{زوج}} \; \underbrace{\ln \frac{۳-x}{۳+x}}_{\text{فرد}}}_{\text{فرد}} dx = ۰$

$y = \log_{b} \frac{a-x}{a+x}$ تابع *

$y = \log_{b}\left(ax + \sqrt{a^{۲}x^{۲}+۱}\right)$ و

فرزند

حاصلضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد تابعی است فرد.

$f(x) = \ln \frac{۳-x}{۳+x}$

$x \to -x : f(-x) = \ln \frac{۳-(-x)}{۳+(-x)}$

$= \ln \frac{۳+x}{۳-x} = \ln\left(\frac{۳-x}{۳+x}\right)^{-۱}$

$= -\ln \frac{۳-x}{۳+x}$

۷) $I = \int_{-۱}^{۱} \frac{۴x^{۳} + x^{۲} - \text{Arctg}\, x + ۱}{x^{۲}+۱} dx$

$= \underbrace{\int_{-۱}^{۱} \frac{\overbrace{۴x^{۳} - \text{Arctg}\, x}^{\text{فرد}}}{\underbrace{x^{۲}+۱}_{\text{زوج}}} dx}_{\text{فرد} \to \text{صفر}} + \int_{-۱}^{۱} \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱} dx = \int_{-۱}^{۱} dx = x \Big|_{-۱}^{۱} = ۲$

نه زوجند و نه فرد $\begin{cases} \text{Arccos}\, x \\ \text{Arccotg}\, x \end{cases}$

فرد $\begin{cases} \text{ArcSin}\, x \\ \text{Arctg}\, x \end{cases}$

توابعی فردند $\begin{cases} \text{ArcSin}\, x \\ \text{Arctan}\, x \end{cases}$

مجموع و تفاضل دو تابع فرد تابعی است فرد

$\frac{۳۵}{I}$

حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید (تغییر متغیر)

$$\text{I)}\quad I = \int_{۴}^{۹} \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = t \longrightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\,dx = dt$$

$$dx = ۲t\,dt$$

$$\begin{cases} x=۴ \rightarrow t=۲ \\ x=۹ \rightarrow t=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{۲}^{۳} \frac{۲t\,dt}{t^۲-t} = ۲\int_{۲}^{۳} \frac{t}{t(t-۱)}\,dt$$

$$= ۲\,\mathrm{Ln}|t-۱|\,\Big|_{۲}^{۳} = ۲(\mathrm{Ln}۲ - \mathrm{Ln}۱)\ \boxed{= ۲\,\mathrm{Ln}۲}$$

$$۲)\quad I = \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$$

$$۱+\sqrt{x} = t \rightarrow \sqrt{x} = t-۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\,dx = dt$$

$$dx = ۲(t-۱)\,dt$$

$$\begin{cases} x=۰ \rightarrow t=۱ \\ x=۱ \rightarrow t=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{۱}^{۲} \frac{۲(t-۱)}{t}\,dt = ۲\int_{۱}^{۲} (۱-\frac{۱}{t})\,dt$$

$$= ۲(t - \mathrm{Ln}|t|)\,\Big|_{۱}^{۲} =$$

$$۲((۲-\mathrm{Ln}۲)-(۱-\underset{۰}{\mathrm{Ln}۱})) = ۲(۱-\mathrm{Ln}۲)$$

$$۳)\quad I = \int_{۰}^{\mathrm{Ln}۲} \sqrt{e^x-۱}\,dx$$

$$\sqrt{e^x-۱} = t \rightarrow e^x-۱ = t^۲ \rightarrow \underline{e^x = t^۲+۱}$$

$$\rightarrow \frac{e^x}{۲\sqrt{e^x-۱}}\,dx = dt$$

$$\frac{t^۲+۱}{۲t}\cdot dx = dt$$

$$dx = \frac{۲t\cdot dt}{t^۲+۱}$$

$$\begin{cases} x=۰ \longrightarrow t=۰ \\ x=\mathrm{Ln}۲ \rightarrow t=۱ \end{cases}$$

$$I = \int_{۰}^{۱} t * \frac{۲t\,dt}{t^۲+۱} = ۲\int_{۰}^{۱} \frac{t^۲}{t^۲+۱}\,dt$$

$$= ۲\int_{۰}^{۱} \frac{t^۲+۱-۱}{t^۲+۱}\,dt = ۲\int_{۰}^{۱} (۱-\frac{۱}{t^۲+۱})\,dt$$

$$= ۲(t - \mathrm{Arctg}\,t)\,\Big|_{۰}^{۱} =$$

$$۲((۱-\mathrm{Arctg}\,۱)-(۰-\mathrm{Arctg}\,۰))$$

$$\boxed{= ۲(۱-\frac{\pi}{۴})}$$

$$\underline{e^{\mathrm{Ln}A} = A}$$

۴) $I=\int_{۰}^{\ln ۵}\sqrt{e^{۳x}-e^{۲x}}\;dx$

$$I=\int_{۰}^{\ln ۵}\sqrt{e^{۲x}(e^{x}-۱)}\;dx=\int_{۰}^{\ln ۵}e^{x}\sqrt{e^{x}-۱}\;dx=\frac{(e^{x}-۱)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{\ln ۵}$$

$$=\frac{۲}{۳}(۸-۰)=\boxed{\frac{۱۶}{۳}}$$

۵) $I=\int_{۰}^{۳}(x-۱)\sqrt{x+۱}\;dx$

$\sqrt{x+۱}=t$

$I=\int_{۱}^{۲}(t^{۲}-۲)*t*۲t\,dt$

$\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}dx=dt$

$=۲\int_{۱}^{۲}(t^{۴}-۲t^{۲})\,dt$

$\Rightarrow dx=۲t.dt$

$=۲\left(\frac{t^{۵}}{۵}-۲*\frac{t^{۳}}{۳}\Big|_{۱}^{۲}\right)$

$x+۱=t^{۲}$

$x=t^{۲}-۱$

$=۲\left(\left(\frac{۳۲}{۵}-\frac{۱۶}{۳}\right)-\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۳}\right)\right)$

$\begin{cases}x=۰\longrightarrow t=۱\\ x=۳\longrightarrow t=۲\end{cases}$

مقدار میانگین در انتگرال: مقدار c مربوط به قضیه انتگرال برای تابع $y=\frac{۱}{۲+\cos x}$ در فاصله $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ را بنویسید

$\exists c\in[a,b]\,,\ \int_{a}^{b}f(x)\,dx=(b-a)..f(c)$

$$\Rightarrow\ \frac{\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲+\cos x}dx}{\frac{\pi}{۲}-۰}=\frac{۱}{۲+\cos c}$$

$$\to\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲+\cos x}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۲+\frac{۱-tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{\frac{۳+tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}}dx=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+tg^{۲}\frac{x}{۲}}{۳+tg^{۲}\frac{x}{۲}}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_{۰}^{۱}\frac{۱+t^{۲}}{۳+t^{۲}}*\frac{۲dt}{۱+t^{۲}}=۲\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۳+t^{۲}}dt$$

$tg\frac{x}{۲}=t$

$\begin{cases}x=۰\longrightarrow t=۰\\ x=\frac{\pi}{۲}\longrightarrow t=۱\end{cases}$

$$=۲*\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,Arctg\frac{t}{\sqrt{۳}}\Big|_{۰}^{۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\left(\frac{\pi}{۶}-۰\right)=\boxed{\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}}$$

$\Rightarrow\frac{۱}{۲}(۱+tg^{۲}\frac{x}{۲})dx=dt\to dx=\frac{۲dt}{۱+t^{۲}}$

۳۷/I

[illegible] : $\dfrac{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2+\cos c} \rightarrow \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2+\cos c}$

$\rightarrow 2+\cos c = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{c = \operatorname{Arc}\cos\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right)}$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{x}{a} + c$$

نتیجه قضیه مقدار میانگین :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

min مطلق

مطلق Max

حاصل انتگرال زیر در چه فاصله‌ای قرار دارد؟

(قضیه میانگین انتگرال)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$$

$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$[\frac{1}{2}, 2]$

$f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = 0$

$e^x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^x = 0 & \text{غیرممکن} \\ x-1=0 \rightarrow \end{cases}$

$\boxed{x=1}$

در فاصله مورد نظر هم قرار دارد

$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

$x = 2 \rightarrow f(x) = \dfrac{e^2}{2} = \frac{1}{2}e^2$

$x = 1 \rightarrow f(x) = \dfrac{e^1}{1} = e$

Min مطلق $= e$

Max مطلق $= \frac{1}{2}e^2$

$\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{e^x}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{2}e^2(2-\frac{1}{2})$

$e(2-\frac{1}{2})$

$\rightarrow \dfrac{3e}{2} \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{e^x}{x}\,dx \leqslant \dfrac{3e^2}{4}$

در عبارتهای $\sqrt{a^2-u^2}$ یا a^2-u^2 تغییر متغیر $u = a\sin\theta$ یا $u = a\cos\theta$ مفید می‌باشد

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x = 1.\sin\theta$

$dx = \cos\theta\,d\theta$

$\begin{cases} x=0 \rightarrow \theta = 0 \\ x=1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,|\cos\theta|\cos\theta.\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tfrac{1}{2}\sin 2\theta)^2\,d\theta$$

۳ $0, \frac{\pi}{2}$ که ناحیه اول

$$= \frac{1}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲ ۲\theta \, d\theta = \frac{1}{۴}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{1-\cos ۴\theta}{۲} d\theta = \frac{1}{۸}\left(\theta - \frac{1}{۴}\sin ۴\theta \Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}\right)$$

$$= \frac{1}{۸}\left((\pi/۲ - ۰) - (۰ - ۰)\right) = \frac{\pi}{۱۶}$$

$$I = \int_۰^۱ \text{Arctg}\, x \, dx$$

انتگرال جزء به جز

$$u = \text{Arctg}\, x \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}} du = \frac{1}{1+x^۲} dx$$

$$dv = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} v = x$$

$$\Rightarrow I = x\, \text{Arctg}\, x \Big|_۰^۱ - \int_۰^۱ x \cdot \frac{1}{x^۲+1} dx$$

$$= x\, \text{Arctg}\, x - \frac{1}{۲}\text{Ln}(1+x^۲) \Big|_۰^۱ = \left(\frac{\pi}{۴} - \frac{1}{۲}\text{Ln}\, ۲\right) - \left(۰ - \frac{1}{۲}\underset{۰}{\cancel{\text{Ln}\, 1}}\right)$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{۴} - \frac{1}{۲}\text{Ln}\, ۲}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{مشتق} & \text{انتگرال} \\
\text{Arc tg}\, x \arrow[dr, "+"] & dx \\
\frac{1}{1+x^۲} \arrow[r, "-\int"] & x
\end{tikzcd}$$

علامت انتگرال

$$1 + \tan^۲ x = \frac{1}{\cos^۲ x} = \sec^۲ x$$

$$I = x\, \text{Arctg}\, x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^۲} dx$$

$$I = \int (۳x+۵) \sec^۲ x \, dx$$

$$\begin{tikzcd}
\text{مشتق} & \text{انتگرال} \\
۳x+۵ \arrow[dr, "+"] & \sec^۲ x \\
۳ \arrow[dr, "-"] & \text{tg}\, x \\
۰ & -\text{Ln}|\text{Cos}\, x|
\end{tikzcd}$$

$$I = (۳x+۵)\,\text{tg}\, x + ۳\, \text{Ln}|\text{Cos}\, x| + C$$

$$\int \text{tg}\, ax \, dx = \frac{-1}{a}\text{Ln}|\text{Cos}\, ax| + C$$

$$\int \text{Cotg}\, ax \, dx = \frac{1}{a}\text{Ln}|\text{Sin}\, ax| + C$$

$\frac{۳۹}{I}$ $I=\int (x^۴+x^۳)\, f^{(۴)}(x)\, dx$

مشتق		انتگرال
$x^۴+x^۳$	$+$	$f^{(۴)}(x)$
$۴x^۳+۳x^۲$	$-$	$f^{(۳)}(x)$
$۱۲x^۲+۶x$	$+$	$f^{(۲)}(x)$
$۲۴x+۶$	$-$	$f^{(۱)}(x)$
۲۴	$+\int$	$f(x)$

$$I=(x^۴+x^۳)f'''(x)-(۴x^۳+۳x^۲)f''(x)$$
$$+(۱۲x^۲+۶x)f'(x)-(۲۴x+۶)f(x)+۲۴\int f(x)dx$$

$J=\int \sin(۲Ln\, x)\, dx \quad \to Ln\, x=t$

$\to \frac{1}{x}dx=dt \to dx=e^t.dt$

$x=e^t$

$\Rightarrow I=\int \sin(۲t)*e^t.dt$

$=\int e^t.\sin ۲t.dt \to$ جزء به جزء

مشتق		انتگرال
$\sin ۲t$	$+$	e^t
$۲\cos ۲t$	$-$	e^t
$-۴\sin ۲t$	$+\int$	e^t

$\Rightarrow$

$$I=e^t.\sin ۲t-۲e^t\cos ۲t\ \underbrace{-۴\int e^t \sin ۲t.dt}_{-۴I}$$

$$\Rightarrow ۵I=e^t(\sin ۲t-۲\cos ۲t)\to I=\frac{1}{۵}e^t(\sin ۲t-۲\cos ۲t)$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{۵}x\left(\sin(۲Ln\, x)-۲\cos(۲Ln\, x)\right)+C$$

۲۵
I

با تعریف $I_n=\int_۰^a (a^۲-x^۲)^n dx$ کدام گزینه صحیح می‌باشد!

۱) $I_n=\frac{۲a^۲n}{۱+۲n}I_{n-۱}$

۲) $I_n=\frac{۲an^۲}{۱+۲n}I_{n-۱}$

۳) $I_n=\frac{۲a^۲n}{۱+n}I_{n-۱}$

۴) $I_n=\frac{۲an^۲}{۱+n}I_{n-۱}$

** انتگرالهای بازگشتی باید به روش جزء به جزء حل شوند **

مشتق　　　انتگرال

$$\begin{tikzcd}
(a^۲-x^۲)^n \arrow[dr, "+"] & dx \\
n(-۲x)(a^۲-x^۲)^{n-۱} \arrow[r, "-\int"] & x
\end{tikzcd}$$

$$I_n=\underbrace{x(a^۲-x^۲)^n\Big|_۰^a}_{۰}-\int_۰^a -۲nx^۲(a^۲-x^۲)^{n-۱}dx$$

$$\Rightarrow I_n=-۲n\int_۰^a -x^۲(a^۲-x^۲)^{n-۱}dx$$

$$I_n=-۲n\int_۰^a (a^۲-x^۲-a^۲)(a^۲-x^۲)^{n-۱}dx$$

$$I_n=-۲n\int_۰^a \left((a^۲-x^۲)^n-a^۲(a^۲-x^۲)^{n-۱}\right)dx$$

$$I_n=-۲n\left(I_n-a^۲\int_۰^a(a^۲-x^۲)^{n-۱}dx\right)$$

$$I_n=-۲nI_n+۲a^۲nI_{n-۱}\longrightarrow(۱+۲n)I_n=۲a^۲nI_{n-۱}$$

$$\Rightarrow\boxed{I_n=\frac{۲a^۲n}{۱+۲n}I_{n-۱}}$$