ابراهیم شاه‌ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه و کنکور ارشد:

ریاضی عمومی۱

ریاضی عمومی۲

معادلات دیفرانسیل

محاسبات عددی

ریاضیات مهندسی

وبلاگ نمونه سوالات: **Math-Teacher.blog.ir**

آیدی تلگرام: **@EShahebrahimi**

تستهای تکمیلی فصل دوازدهم

۱ـ اگر $z = \sin^{-1}\frac{x}{y}$ باشد آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) z ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -۱

۲ـ اگر $u = \frac{x^۲y^۲}{x+y}$ باشد، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $۳u^۲$ ۳) $۳u$ ۴) $\frac{u}{۳}$

۳ـ اگر $u = Ln(x+y+z)$ حاصل $A = Ln\frac{\partial u}{\partial x} + Ln\frac{\partial u}{\partial y} + Ln\frac{\partial u}{\partial z}$ کدام است؟

۱) $۳u$ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) $-۳u$

۴ـ اگر $z = f(\frac{x+y}{xy})$ آنگاه کدام رابطه صحیح است؟

۱) $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$ ۲) $y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$ ۳) $x^۲\frac{\partial f}{\partial x} = y^۲\frac{\partial f}{\partial y}$ ۴) $y^۲\frac{\partial f}{\partial x} = x^۲\frac{\partial f}{\partial y}$

۵ـ دیورژانس بردار $\phi(x,y,z) = ۴x^۲y\vec{i} - ۶yz\vec{j} - ۲xyz\vec{k}$ در نقطه $M(۰,۱,۲)$ کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۶ـ گرادیان تابع $\phi(x,y,z) = x^۲ + y^۲ + z^۲$ در نقطه $M(۲,-۲,۱)$ کدام است؟

۱) $۴\vec{i} - ۴\vec{j} + ۲\vec{k}$ ۲) $۲\vec{i} - ۲\vec{j} + \vec{k}$ ۳) $-۴\vec{i} - ۲\vec{j} + ۲\vec{k}$ ۴) ۰

۷ـ اگر $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ باشد، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{y^۲}$ ۲) $-(\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{y^۲})$ ۳) $\frac{۱}{x^۲} - \frac{۱}{y^۲}$ ۴) $\frac{۱}{y^۲} - \frac{۱}{x^۲}$

۸ـ تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y^۲}{x^۲y^۲ + (y-x)^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ در نقطه $(۰,۰)$ کدام شرایط را دارد؟

۱) حد دارد ولی پیوسته نیست.
۲) حد دارد و پیوسته نیز می‌باشد.
۳) حد ندارد و نتیجتاً پیوسته نیز نمی‌باشد.
۴) مشتق‌پذیر می‌باشد.

۹ـ در مورد تابع با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ کدام عبارت صحیح است؟

۱) تابع مشتق پذیر می‌باشد.
۲) تابع مشتق پذیر نیست ولی پیوسته می‌باشد.
۳) تابع پیوسته نیست و نتیجتاً مشتق پذیر نیز نمی‌باشد.
۴) تابع پیوسته و مشتق پذیر است

۱۰ـ حد تابع $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$ در نقطه $A(۰,۴)$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) حد ندارد. ۳) ۴ ۴) ∞

۱۱ـ اگر $f(x,y) = Arc\sin\frac{y}{x} + Arctg\frac{x}{y}$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲ـ مشتق جهت‌دار تابع $f(x,y) = ۲x^۲ - ۳xy + ۵y^۲$ در نقطه (۲ و ۱) در جهت بردار واحد u که با محور xها زاویه ۴۵° بسازد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{۱۹\sqrt{۲}}{۲}$

۲۴ـ حاصل $I = \int_{0}^{4} \int_{\frac{x}{2}}^{2} x\sqrt{y^3+1}\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۳۷

۲۵ـ حاصل $I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$ که در آن D ناحیه محصور بین دایره $x^2+y^2=1$ می‌باشد. کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶ـ اگر c سهمی به معادله $y = x^2+1$ باشد، حاصل $I = \int_c (x^2-y)dx + (y^2+x)dy$ از نقطه $x=0$ تا $x=1$ واقع بر سهمی کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۷ـ حاصل $I = \int_{0}^{\infty} \int_{y}^{x} xe^{-\frac{x^2}{y}}\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) قابل محاسبه نیست.

۲۸ـ مقدار $\int_{0}^{a} \int_{0}^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi a}{2}$ ۲) $\frac{\pi a^2}{4}$ ۳) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۴) $\frac{\pi a^4}{8}$

۲۹ـ اگر $f(x) = \int_{1}^{x} e^{t^2}\,dt$ باشد، انتگرال $\int_{0}^{1} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $1+e$ ۲) $1-e$ ۳) $\frac{1}{2}(1-e)$ ۴) $\frac{1}{2}(1+e)$

۳۰ـ انتگرال خط $\int_C (x^2+y^2)dx + (x+2y)^2dy$ روی مثلث C با رأس‌های $(0,0)$، $(1,1)$ و $(0,2)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۳۱ـ حاصل $\int\int_S ydS$، که در آن S سطح نیم کره به معادله $Z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ باشد. کدام است؟

۱) صفر ۲) πa ۳) πa^2 ۴) πa^3

۳۲ـ حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=9$ که در داخل استوانه $x^2+y^2=3x$ قرار گیرد، کدام است؟

۱) $18\pi-16$ ۲) $18\pi-24$ ۳) $12\pi-16$ ۴) $16\pi-18$

۳۳ـ مساحت بخشی از استوانه $z^2=4x$ که توسط $y^2=4x$ و صفحه $x=3$ جدا شده است کدام است؟

۱) $35\frac{1}{3}$ ۲) $37\frac{1}{3}$ ۳) $35\frac{2}{3}$ ۴) $37\frac{2}{3}$

۳۴ـ حاصل $\int_{(C)} (x+y)dx + (x-y)dy$ که در آن (C) بیضی به $x=\cos t, y=2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\pi-1$ ۳) π ۴) ۲

۳۵ـ اگر $f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{dy}{(x+y)^2}$ باشد، حاصل $\int_{1}^{2} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $\ln\frac{2}{3}$ ۲) $\ln\frac{3}{2}$ ۳) $\ln 2$ ۴) $\ln 4$

«حضرت علی (ع)»

شرافت به خرد و ادب است نه به ثروت و مال.
هرگز راستی و درستی خود را با پول، قدرت یا شهرت عوض نکن.

۲۶ـ در تابع دو متغیر $z = x^2 \text{Arctg}\frac{y}{x}$ حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x = \sqrt{3}$ و $y = 1$ کدام است؟

۱) π ✓ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

۲۷ـ مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(1,1)$ برای تابع $f(x,y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -8 ۳) -6 ✓ ۴) ۸

۲۸ـ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ در صورتی که $z = \text{Ln}(x^2 + y)$ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{(x^2+y)^2}$ ✓ ۲) $-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$ ۳) $\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ ۴) صفر

۲۹ـ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در صورتی که $z = \text{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$ ۲) صفر ✓ ۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$ ۴) $\frac{y}{1+(1-xy)^2}$

۳۰ـ برد تابع حقیقی $z = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $[0,1]$ ✓ ۴) $R^+ \cup \{0\}$

۳۱ـ تمام دامنه تابع $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ کدام است؟

۱) $y \le 0, -2 < x < 2$
۲) $-2 < x < 2, y \ge 0$
۳) $x \ge 0, y \ge 0$
۴) $-2 \le x \le 2, -\infty < y < +\infty$ ✓

۳۲ـ مقدار d^2z به شرطی که $z = e^{xy}$ کدام است؟

۱) $e^{xy}[(xdx + ydy)^2 - 2dxdy]$
۲) $e^{xy}[(xdx + ydy)^2 + 2dxdy]$
۳) $e^{xy}[(ydx + xdy)^2 - 2dxdy]$ ✓
۴) $e^{xy}[(ydx - xdy)^2 - 2dxdy]$

۳۳ـ اگر $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ حاصل $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه $(1,-2)$ کدام است؟

۱) -8 ۲) -6 ✓ ۳) -4 ۴) -2

۳۴ـ از رابطه $z^2 - xz + xy^2 = 6$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(-1,2,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ✓ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۳۵ـ کمترین مقدار تابع $z = x^2 + y^2 + xy$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹ ✓

«حضرت علی (ع)»
«افلاطون»
محبت نردبان رفعت است.
محبت را فراموش نکنید و آن را ناچیز مشمارید.

تستهای تکمیلی فصل سیزدهم

۱ـ برای اینکه برای تابع برداری $F(t)=\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+\vec{k}$ رابطه $F'(t).F(t)=0$ برقرار باشد، a چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ✓ ۲) ۱ ۳) $\sin t$ ۴) $\cos t$

۲ـ طول منحنی $F(t)=(t,t^2,\frac{2}{3}t^3)$ از $t=0$ تا $t=2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{22}{3}$ ✓

۳ـ طول قوس منحنی $R(t)=t\vec{i}+Ln(\frac{1}{\cos t})\vec{j}+Ln(\frac{1}{\cos t}+tgt)\vec{k}$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $Ln(1+\sqrt{2})$ ۲) $\sqrt{2}Ln\sqrt{2}$ ۳) $Ln(1+2\sqrt{2})$ ۴) $\sqrt{2}Ln(1+\sqrt{2})$ ✓

۴ـ اگر $\alpha(t)=(6\sin 2t,6\cos 2t,5t)$ آنگاه خمیدگی α در نقطه $(0,6,0)$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{169}$ ۲) $\frac{24}{169}$ ✓ ۳) $\frac{12}{13}$ ۴) $\frac{24}{13}$

۵ـ شعاع انحنای منحنی تابع $y=Lnx$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ کدام است؟

۱) ۳/۷ ✓ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۶ ۴) ۱/۸

۶ـ انحنای منحنی $R(t)=at\vec{i}-\frac{at+2}{b}\vec{j}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) $\frac{1}{b}$ ۴) صفر ✓

۷ـ شعاع انحنای تابع $y=e^{\sqrt{2}x}$ در نقطه $x=0$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ✓ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۵

۸ـ انحنای منحنی $y=x^2$ در کدامیک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟

۱) $p(0,0)$ ✓ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(2,0)$

۹ـ انحنای نمودار تابع $y=Ln(\cos x)$ در نقطه $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ✓ ۴) ۲

۱۰ـ تاب منحنی $x=e^t\cos t$ ، $y=e^t\sin t$ و $z=e^t$ کدام است؟

۱) e^{-t} ۲) $\frac{e^{-t}}{2}$ ۳) $\frac{2e^{-t}}{3}$ ۴) $\frac{e^{-t}}{3}$ ✓

۱۱ـ انحنای منحنی $x=2(\varphi-\sin\varphi)$ ، $y=2(1-\cos\varphi)$ در $\varphi=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ✓ ۴) ۲

۱۲ـ انحناء (یا خمیدگی) خم $r(t)=(t+\cos t)i+(t-\cos t)j+\sqrt{2}\sin tk$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ✓ ۴) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

۱۳ـ بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ برای مارپیچ $\overrightarrow{R(t)}=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$ کدام است؟

۱) $(-\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}$ ۲) $(-\cos t)\vec{i}+(-\sin t)\vec{j}$ ✓ ۳) $(\cos t)\vec{i}+(-\sin t)\vec{j}$ ۴) $(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}$

سیرت مانند درخت و شهرت مانند سایه است ، ما همیشه به سایه می‌اندیشیم در حالی که حقیقت درخت است.«آبراهام لینکن»

به خط و خال گدایان مده خزینه دل به دست شاه وشی ده که محترم دارد

تستهای تکمیلی فصل پانزدهم

۱ـ حجم ناحیه واقع در یک هشتم اول صفحات مختصات و محدود به $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ که در آن a، b و c اعدادی مثبت هستند، کدام است؟

۱) $\frac{abc}{2}$ ۲) $\frac{abc}{3}$ ۳) $\frac{abc}{6}$ ۴) $\frac{abc}{12}$

۲ـ حجم ناحیه محصور بین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمیگون $z=x^2+y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۳ـ مقدار $I=\iiint_R \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن R ناحیه محصور بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$ است، کدام است؟

۱) $4\pi Ln\frac{a}{b}$ ۲) $2\pi Ln\frac{a}{b}$ ۳) $2\pi Ln\frac{b}{a}$ ۴) $4\pi Ln\frac{b}{a}$

۴ـ مقدار $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ در صورتی که D ناحیه محدود بین دایره‌های $x^2+y^2=16$ و $x^2+y^2=25$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{122\pi}{3}$ ۲) $\frac{120\pi}{3}$ ۳) $\frac{121\pi}{3}$ ۴) $-\frac{121\pi}{3}$

۵ـ حاصل $I=\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{4}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^3}{4}$ ۴) $\frac{\pi^3}{8}$

۶ـ حجم یک جسم که در استوانه $x^2+y^2=4$ محصور و از بالا به سهمی گون $z=x^2+y^2$ و از پایین به صفحه xoy محدود است، کدام است؟

۱) 8π ۲) 4π ۳) 2π ۴) 6π

۷ـ حجم قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2ax$ که بین سهموی $x^2+y^2=2az$ و صفحه xoy قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi a^3}{2}$ ۲) $\frac{3\pi a^2}{4}$ ۳) $\frac{3\pi a^3}{4}$ ۴) $\frac{3\pi a^2}{2}$

۸ـ مقدار $\int_0^1\int_x^1 \sqrt{1-y^2}dydx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

۹ـ حاصل $\int_0^1(\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dydx)$ کدام است؟

۱) $\frac{26}{21}$ ۲) $\frac{26}{50}$ ۳) $\frac{26}{75}$ ۴) $\frac{26}{105}$

۱۰ـ مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)dydx$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sin 8}{6}$ ۲) $\frac{\sin 8}{3}$ ۳) $\frac{\sin 8}{2}$ ۴) ۱/۳۳۳۳

۱۱ـ حجم محصور به سهمی‌گون $az=x^2+y^2$، صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=2ax$ و $(a>0)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^3$

۱۲ـ جواب انتگرال $\int_{1}^{e^x}\int_{0}^{2} xdydx$ چیست؟

۱) e^2-1 ✓ ۲) e^2-3 ۳) e^2+1 ۴) e^2

۱۳ـ مقدار انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}dydx$ برابر است با:

۱) ۱- ۲) ۱ ✓ ۳) ۲- ۴) ۲

۱۴ـ مقدار انتگرال دو گانه $\iint_R (x\sin y - ye^x)dxdy$ ، که در آن $R=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1\,,\ 0<y\le\frac{\pi}{2}\}$ برابر است با:

۱) $(\frac{1}{e}-e^2)\frac{\pi}{8}$ ۲) $(\frac{1}{e}-e^{-2})\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $(\frac{1}{e}+e^2)\frac{\pi^2}{8}$ ۴) $(\frac{1}{e}-e)\frac{\pi^2}{8}$ ✓

۱۵ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{y}dydx$ کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۱۶ـ حاصل $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)dydx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\pi\sin 1$ ✓ ۳) π ۴) $\pi\cos 2$

۱۷ـ حجم محدود به رویه $z=9-x^2-y^2$ و صفحه $z=0$ و استوانه $x^2+y^2=4$ کدام است؟

۱) 14π ۲) 16π ۳) 18π ۴) 28π ✓

۱۸ـ کار انجام شده توسط نیروی $F=yi+(x+z)j+yk$ در تمام محیط بیضی فصل مشترک استوانه $x^2+y^2=4$ با صفحه $z+2x=3$ کدام است؟

۱) صفر ✓ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۱۹ـ بردار $F=(x+y)i+(y+z)j+(z+x)k$ و S سطح ناحیه D محدود به $|x|\le 1$ و $|y|\le 1$، $|z|\le 1$ است. حاصل $\iint_S F.nd\sigma$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴ ✓

۲۰ـ مقدار انتگرال $\oint_C (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$ که در آن C مرز ناحیه محصور به وسیله منحنی‌های $y=x^2$ و $y^2=x$ است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ✓ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{15}$

۲۱ـ انتگرال خطی $I=\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3dx+(1+3x^2y^2)dy$ برابر است با:

۱) $I=45$ ۲) $I=-58$ ✓ ۳) $I=28$ ۴) $I=-32$

۲۲ـ مقدار انتگرال منحنی‌الخط $\int \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ روی منحنی $C: x^2+y^2-x-y=0$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ در جهت مثلثاتی کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) ۰ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ✓ ۴) 2π

۲۳ـ حاصل $I=\int_{1}^{2}\int_{0}^{x} \frac{dy\,dx}{x^2+y^2}$ کدام است ؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}\text{Ln}2$ ✓ ۳) $\frac{\pi}{2}\text{Ln}2$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۱۳ـ بیشترین مقدار مشتق جهتی سطح به معادلهٔ $f(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-4xyz$ در نقطه $(-1,1,2)$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{35}$ ۲) $3\sqrt{35}$ ۳) $2\sqrt{53}$ ۴) $3\sqrt{53}$

۱۴ـ اگر $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ در نقطه $(1,1)$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۱۵ـ نقطهٔ $(-2,1)$ برای سطح به معادلهٔ $z=x^2-y^2-2x+4y-3$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) ماکسیمم نسبی ۲) زینی ۳) مینیمم نسبی ۴) عادی

۱۶ـ دیفرانسیل تابع $z=2x^2-3xy-y^2$ کدام است؟

۱) $4x-3y$ ۲) $-3x-2y$
۳) $(4x-3y)-(3x+2y)\frac{dy}{dx}$ ۴) $(4x-3y)dx-(3x+2y)dy$

۱۷ـ بردار یکه عمود بر سطح f به معادلهٔ $f(x,y,z)=x^3+3xyz+2y^2-z^2-5$ در نقطه $(1,1,1)$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $\frac{2i+3j}{\sqrt{13}}$ ۲) $\frac{2i+3j+k}{\sqrt{14}}$ ۳) $\frac{6i+9j}{\sqrt{117}}$ ۴) $\frac{6i+9j+2k}{\sqrt{261}}$

۱۸ـ کدام حد وجود دارد؟

۱) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ ۲) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^4}$ ۳) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ ۴) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$

۱۹ـ معادلهٔ صفحه مماس در نقطهٔ $\left(\frac{3}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ بر رویهٔ $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$ کدام است؟

۱) $x+y+z=\sqrt{3}$ ۲) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=\sqrt{3}$ ۳) $\frac{x}{9}+\frac{y}{16}+\frac{z}{25}=\sqrt{3}$ ۴) $\frac{x}{9}+\frac{y}{16}+\frac{z}{25}=3$

۲۰ـ کدام تابع در معادله $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f$ صدق می‌کند؟

۱) $f(x,y)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ۲) $f(x,y)=1+\sin\frac{x}{y}$ ۳) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ ۴) $f(x,y)=x^2\operatorname{Ln}\frac{x}{y}-xy$

۲۱ـ کدام تابع در معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق می‌کند؟

۱) x^2y^2 ۲) $\sqrt{x^2+y^2}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{y^2}{x^2}$ ۴) $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

۲۲ـ مشتق سوئی $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ در نقطه $(1,1,2)$ و در امتداد بردار $\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$ برابر است با:

۱) 2 ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) 3 ۴) 6

۲۳ـ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویهٔ به معادلهٔ $z=e^{3+2x+y^2}$ در نقطه $(-6,3,1)$ کدام است؟

۱) $2x-6y-z=-31$ ۲) $2x+6y-z=5$ ۳) $2x-6y+z=-29$ ۴) $2x+6y+z=7$

۲۴ـ اگر $z=x\cos y$، $y=s-t$ و $x=s+t$، مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ وقتی $t=0$ و $s=\pi$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) π

۲۵ـ اگر $z=(x^2+y^2)e^{\left(\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)}$ آنگاه مقدار $\frac{x\partial z}{\partial x}+\frac{y\partial z}{\partial y}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) z ۳) $2z$ ۴) $3z$

ابراهیم شاه‌ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی ریاضیات دانشگاه و کنکور ارشد:

ریاضی عمومی۱

ریاضی عمومی۲

معادلات دیفرانسیل

محاسبات عددی

ریاضیات مهندسی

وبلاگ نمونه سوالات: **Math-Teacher.blog.ir**

آیدی تلگرام: **@EShahebrahimi**

Year: Month: Date:

عکس نشان ۸

۱) اگر $z = \sin^{-1}\frac{x}{y}$ باشد آنگاه حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با؟

۱) z ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) -1

$$z = \sin^{-1}\frac{x}{y} \rightarrow \frac{x}{y} = \sin(z) \rightarrow x - y\sin(z) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} 1 - y\cos z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y\cos z}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} -\sin z - y\cos z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\sin z}{y\cos z}$$

جایگذاری $\rightarrow \frac{x}{y\cos z} - \frac{y\sin z}{y\cos z} = \frac{x - y\sin z}{y\cos z} = \frac{0}{y\cos z} = 0$]

۲) اگر $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ باشد، مقدار $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ برابر است با؟

۱) ۰ ۲) $3u^2$ ۳) $3u$ ۴) $\frac{u}{3}$

Subject:

Year: Month: Date:

$$u=\frac{x^2y^2}{x+y}\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2xy^2(x+y)-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2y^2+2xy^3}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x^2y(x+y)-x^2y^2}{(x+y)^2}=\frac{2x^3y+x^2y^2}{(x+y)^2}\end{cases}$$

(جایگذاری) $\rightarrow \frac{x^3y^2+2x^2y^3+2x^3y^2+x^2y^3}{(x+y)^2}=\frac{3x^3y+3xy^3}{(x+y)^2}=\frac{3xy^2(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{3xy^2}{x+y}=3u$

۳) اگر $u=\ln(x+y+z)$ حاصل $A=\ln\frac{\partial u}{\partial x}+\ln\frac{\partial u}{\partial y}+\ln\frac{\partial u}{\partial z}$ کدام است؟

۱) $3u$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $-3u$

$$u=\ln(x+y+z)\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}\\ \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}\end{cases}$$

$$A=3\ln\left(\frac{1}{x+y+z}\right)=3\left(\ln 1-\ln(x+y+z)\right)=-3u$$

۴) اگر $z=f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ آنگاه کدام رابطه صحیح است؟

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱) $x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$ ۲) $y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$ ۳) $x^2\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\frac{\partial f}{\partial y}$ ۴) $y^2\frac{\partial f}{\partial x} = x^2\frac{\partial f}{\partial y}$

$$z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right) \begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y} f_u - \frac{y}{x^2} f_v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_u + \frac{1}{x} f_v$$

۵) دیورژانس بردار $\vec{k}2xyz\vec{j} - 4yz\vec{i} + 4x^2y\vec{k}$ در نقطه $M(0,1,2)$ کدام است؟

۱) -12 ۲) 0 ۳) 12 ۴) 24

$$divF = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 8xy - 4z - 2xy \xrightarrow{(0,1,2)} = -12$$

۶) گرادیان تابع $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ در نقطه $M(2,-2,1)$ کدام است؟

۱) $4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ ۲) $2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ۳) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ۴) 0

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$\text{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (2xy, 2y, z^2) \xrightarrow{(2,-2,1)} (-4, -4, 2)$$

۶ اگر $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ باشد، $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ برابر است با؟

۱) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ ✓ ۲) $-\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$ ۳) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ ۴) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$

$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = -\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)$

۷ تابع با ضابطه

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y-x)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

در نقطه $(0,0)$ برابر است با؟

۱) حد دارد ولی پیوسته نیست. ۲) حد دارد و پیوسته نیز می باشد.

۳) حد ندارد و نتیجتاً پیوسته نیز نمی باشد. ۴) مشتق پذیری باشد.

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$ مسیر $x=0 \to \lim \frac{0}{y}=0$

مسیر $y=x \to \lim \frac{x^4}{x^4}=1$ $\Big\}\neq 1 \to$ پس حد ندارد و پیوسته نیست.

5

9 در مورد تابع با ضابطه $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ کدام عبارت صحیح است؟

10 ۱) تابع مشتق پذیر می باشد ۲) تابع مشتق پذیر نیست ولی پیوسته می باشد.

۳) تابع پیوسته نیست و نتیجتاً مشتق پذیر نمی باشد ۴) تابع پیوسته و مشتق پذیر است.

15 مسیر $x=0 \to \lim \frac{0}{y}=0$

مسیر $y=x \to \lim \frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$ $\Big\}\Rightarrow 0\neq\frac{1}{2} \to$ حد ندارد / ناپیوسته است / مشتق ندارد

10 حد تابع $f(x,y)=\frac{\sin xy}{x}$ در نقطه $A(0,4)$ کدام است؟

20 ۱) ۴- ۲) حد ندارد ۳) ۴ ۴) ∞

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x} \simeq \lim \frac{xy}{x} \cdot \lim y = 4$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱۱ اگر $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x} + \arctan\frac{y}{x}$ آنگاه حاصل $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ برابر است با؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) صفر ✓

$f = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-\frac{y}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} + \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x f_x + y f_y = 0}$$

---

۱۲ مشتق جهت دار تابع $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار واحد u که با محور xها زاویه 45° میسازد چقدر است؟

۱) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ✓ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱۵ ۴) $\frac{19\sqrt{2}}{2}$

$D_u f(x,y) = \vec{\lambda_u} \cdot \vec{\nabla f}$

$\vec{\nabla f} = (4x-3y\ ,\ 3x+10y) \xrightarrow{(1,2)} (4-6\ ,\ -3+20) = (-2, 17)$

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow D_u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-2, 17)$

$= \frac{-2+17}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} 15$

جلسه شانزدهم

۱۴ بیشترین مقدار مشتق جهتی تابع به معادله $f(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz$ در نقطه $(2, 1, -1)$ برابر است؟

۱) $2\sqrt{35}$ ۲) $3\sqrt{35}$ ۳) $2\sqrt{53}$ ۴) $3\sqrt{53}$ ✓

$\text{Max } D = |\nabla f| \Rightarrow \sqrt{25 + 196 + 256} = \sqrt{477} = 3\sqrt{53}$

$\vec{\nabla f} = (3x^2 - 2yz, 6y^2 - 2xz, 3z^2 - 2xy)$

$\xrightarrow{(2,1,-1)} (12 - 2, 6 + 2, 3 - 4) = (10, 8, -1)$

۱۴ اگر $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(1,1)$ برابر است؟

۱) -4 ✓ ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2}{y^2} + \frac{2y}{x}\right) = \frac{-2x}{y^2} - \frac{2y}{x^2} \xrightarrow{(1,1)} -2 - 2 = -4$

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

۱۵) نقطه $(۲,۰,۱)$ برای سطح به معادله $z = x^۲ - y^۲ - ۲x + ۴y - ۳$ چه نوع نقطه‌ای است؟

۱) مانیم نسبی ۲) زینی ۳) مینیم نسبی ۴) عادی ✓

$z = x^۲ - y^۲ - ۲x + ۴y - ۳$

$\begin{cases} f_x = ۲x - ۲ = ۰ \longrightarrow x = ۱ \\ f_y = -۲y + ۴ = ۰ \longrightarrow y = ۲ \end{cases} \longrightarrow (۱,۲)$ عادی

۱۶) دیفرانسیل تابع $z = ۲x^۲ - ۳xy^۲ - ۲$ کدام است؟

۱) $۴x - ۳y$ ۲) $-۳x - ۲y$

۳) $\frac{dz}{dx}(۳x+۲y) - (۳y - ۴x)$ ۴) $(۴x - ۳y)\,dx - (۳x + ۲y)\,dy$ ✓

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (۴x - ۳y)\,dx + (-۳x - ۲y)\,dy$

۱۷) بردار یکه عمود بر سطح f به معادله $f(x,y,z) = x^۳ + ۳xyz + ۲y^۳ - z^۳ - ۵$ در نقطه $(۱,۱,۱)$ چه بردار یکه‌ای است؟

۱) $\frac{۲i + ۳j}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۲i + ۳j + k}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۹i + ۹j}{\sqrt{۱۱۷}}$ ✓ ۴) $\frac{۹i + ۹j + ۲k}{\sqrt{۲۹۱}}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$\nabla f = (3x^2 + 3yz,\ 3xz + 4y^2,\ 3xy - 3z^2) = (4, 9, 0)$ ①

$|\nabla f| = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$ ②

بردار عمود: $\frac{4i + 9j + 0k}{\sqrt{117}} = \boxed{\frac{4i + 9j}{\sqrt{117}}}$

۱۸ کدام حد وجود دارد؟

۱) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ ۲) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4}$ ۳) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ ۴) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+mx^2} = \frac{m}{1+m}$ ← وابسته

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4+m^4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 m}{x^4(1+m^4)}$ ✓

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^4m^2}{x^2(1+m^2)}$ ← وابسته

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4(1+m^2)} = \frac{1}{1+m^2}$ ← وابسته

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

19 معادله صفحه مماس در نقطه $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ بر رویه $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$ کدام است؟

1) $x+y+z=\sqrt{3}$ 2) $3\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=\sqrt{3}$ 3) $4\frac{x}{9}+\frac{y}{14}+\frac{z}{25}=3$ 4) $5\frac{x}{9}+\frac{y}{14}+\frac{z}{25}=\sqrt{3}$

$g: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{14}+\frac{z^2}{25}-1=0$

$\nabla g=\left(\frac{2}{9}x, \frac{1}{8}y, \frac{2}{25}z\right) \xrightarrow{\text{در نقطه}} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

$\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(y-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{5\sqrt{3}}\left(z-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=0$

$\frac{2x}{3\sqrt{3}}-\frac{2}{3}+\frac{y}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{3}+\frac{2z}{5\sqrt{3}}-\frac{2}{3}=0$

$\xrightarrow{\times\sqrt{3}} \frac{2x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{2z}{5}=2\sqrt{3} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \boxed{\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=\sqrt{3}}$

20 کدام تابع در معادله $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2f$ صدق می‌کند؟

1) $f(x,y)=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 2) $f(x,y)=1+\sin\frac{x}{y}$ 3) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$ 4) $f(x,y)=x^2\ln\frac{x}{y}-xy$

$x\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{2\sqrt{x}}$, $y\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{2\sqrt{y}} \xrightarrow{+} \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{2\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$x\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$ ، $y\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{-x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$ $\xrightarrow{+}$ ۰

$x\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{2x(xy)-(x^2+y^2)y}{x^2y^2}$ ، $y\frac{\partial f}{\partial y} = y\frac{2y(xy)-(x^2+y^2)x}{x^2y^2}$

$\xrightarrow{+}\frac{2x^3y-x^3y-xy^3+2xy^3-x^3y-xy^3}{x^2y^2} = 0$

۲۱ـ تابع روبه‌رو معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ صدق می‌کند؟

۱) x^2y^2 ۲) $\sqrt{x^2+y^2}$ ۳) $\tan^{-1}\frac{y^2}{x^2}$ ۴) $\tan^{-1}\frac{y}{x}$

① $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2) = 2y^2$

$\xrightarrow{+} \neq 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) = 2x^2$

② $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$

Subject:
Year: Month: Date:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\,\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\xrightarrow{+} \frac{\frac{x^2+y^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \neq 0$$

(۴): $\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{+y(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$\xrightarrow{+} 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

۲۲ مشتق سوئی $Z = x^2+y^2$ در نقطه $(2,1,?)$ و در امتداد بردار $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$ برابر است با: ۱) ۲ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۶

$D_u f = \nabla f \cdot \lambda u = \frac{1}{3}(4+4+1) = 3$

$\nabla f = (2x, 2y, -1) \longrightarrow (2,2,-1)$

$\lambda u = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{3}(2,2,-1)$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۲۳ معادله صفحه مماس بر رویه به معادله $Z = e^{x^2+2xy+3}$ در نقطه $(-1,3,1)$ کدام است؟

۱) $2x-4y-z=-3$ ۲) $3x+4y-z=5$ ۳) $2x-4y+z=-9$ ۴) $2x+4y+z=7$

$g: e^{x^2+2xy+3} - z = 0$

$\nabla g = (2e^{x^2+2xy+3}, 4e^{x^2+2xy+3}, -1) = (2, 4, -1)$

$2(x+1) + 4(y-3) - 1(z-1) = 0$

$2x + 4y - z = 5$

۲۴ اگر $Z = x\cos y$ ، $y = s-t$ ، $x = s+t$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial s}$ وقتی $s=\pi$ ، $t=0$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) π

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos y \cdot (1) + (-x\sin y)\cdot(1)$$

$$\xrightarrow{s,x,y=\pi} \frac{\partial z}{\partial s} = -1 + 0 = -1$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۲۵ اگر $Z=(x^2+y^2)e^{\left(\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}\right)}$ آنگاه مقدار $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) Z ۳) $2Z$ ۴) $3Z$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,e^{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}+(x^2+y^2)\left(\frac{2xy^2(x^4+y^4)-x^2y^2(4x^3)}{(x^4+y^4)^2}\right)e^{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}+(x^2+y^2)\left(\frac{2x^2y(x^4+y^4)-x^2y^2(4y^3)}{(x^4+y^4)^2}\right)e^{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}(x^2+y^2)=2Z$$

عکس گمان !

۲۶ تابع دو متغیر $Z=x^2\,\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$ حاصل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ به ازای $x=\sqrt{3}$ ، $y=1$ برابر است با:

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\tan^{-1}\frac{y}{x}+x^2\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{-1}{\frac{4}{3}}$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x^2}{x^2}}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4\sqrt{2}} = \pi - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \pi$$

۲۷ مقدار $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطه $(1,1)$ برای تابع $f(x,y) = x^3 - 3x^2y^2 + 3xy^2 - 8x + 7$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) -8 ۳) -6 ✓ ۴) ۸

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 4xy - 8 \xrightarrow{(1,1)} \frac{\partial f}{\partial y} = -4 + 4 - 8 = -6$$

۲۸ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ در صورتی که $z = \ln(x^2+y)$ باشد، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{(x^2+y)^2}$ ✓ ۲) $-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$ ۳) $\frac{2(y-x)^2}{(x^2+y^2)^2}$ ۴) صفر

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y}\right) = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$$

۲۹ حاصل $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ در صورتی که $z = \text{Arc tg}\frac{x+y}{1-xy}$ باشد، کدام است؟

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱) $\frac{1}{(1-xy)^2}$ ۲) صفر ✓ ۳) $\frac{2(x+y)}{1-xy}$ ۴) $\frac{2}{1+(1-xy)^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{(1-xy)-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\right) = \frac{2x(1+x^2y^2+x^2+y^2)-(1+x^2)}{(1+x^2y^2+x^2+y^2)^2}$$

$$(1-xy)^2+(x+y)^2 = 1+x^2y^2-2xy+x^2+y^2+2xy$$

$$= \frac{2x(1+x^2y^2+x^2+y^2)-(1+x^2)(2xy^2+2x)}{(1+x^2y^2+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x+2x^3y^2+2x^3+2xy^2-2xy^2-2x^3y^2-2x-2x^3}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)^2} = 0$$

۳) برد تابع حقیقی $z = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) R ۲) R^+ ۳) $[0,1]$ ۴) $R^+ \cup \{0\}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$Z = \frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 - \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$ ← عبارت همواره مثبت

۳۱) تمام دامنه تابع $Z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ کدام است؟

۱) $-2 < x < 2$ ، $y \leq 0$ ۲) $y \geq 0$ ، $-2 < x < 2$

۳) $y \geq 0$ ، $x \geq 0$ ۴) $-\infty < y < +\infty$ ، $-2 \leq x \leq 2$

$$\begin{cases} -1 \leq \sin^{-1} x \leq 1 \\ -2 \leq \sin^{-1}\frac{x}{2} \leq 2 \\ xy \geq 0 \longrightarrow x \geq 0 \text{ ، } y \geq 0 \end{cases}$$ ← بین گزینه‌هاست

اما احتمالا گزینه ۴ همان است جواب باشد

۳۲) مقدار d^2Z به شرطی که $Z = e^{xy}$ کدام است؟

۱) $e^{xy}\left[(ydx+xdy)^2 - 2dxdy\right]$ ۲) $e^{xy}\left[(ydx+xdy)^2 + 2dxdy\right]$

۳) $e^{xy}\left[(ydx+xdy)^2 - 2dxdy\right]$ ۴) $e^{xy}\left[(ydx-xdy)^2 - 2dxdy\right]$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{2\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f$$

$$= y^2 e^{xy}dx^2 + 2\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})}_{2(e^{xy}+xye^{xy})}dxdy + x^2 e^{xy}dy^2$$

۳۳ اگر $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ حاصل $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$ در نقطه $(2,-1)$ برابر است با؟

۱) ۸- ۲) ۶- ۳) ۴- ۴) ۲-

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1(x+y) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y) - (x-y)(1)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = -4-2 = -6$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۳۴ از رابطه $z^2 - xz + xy^2 = 6$ مقدار $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه $(1,2,-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

$$2zz' - z - xz' + y^2 = 0$$

$$-2z' + 1 - z' + 4 = 0 \quad -3z' = -5 \Rightarrow z' = \frac{5}{3}$$

---

۳۵ کمترین مقدار تابع $z = x^2 + y^2 + xy$ با شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

$$L = x^2 + y^2 + xy + \lambda(x + 2y - 6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + y + \lambda = 0 \longrightarrow 2x + y = -\lambda \quad (I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + x + 2\lambda = 0 \longrightarrow x + 2y = -2\lambda \longrightarrow 2y + x = -4\lambda \quad (II)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 6 = 0 \longrightarrow -2\lambda - 6 = 0 \longrightarrow -2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$(I), (II) \longrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \times 2$$

$$\longrightarrow -3y = -9 \longrightarrow y = 3 \longrightarrow x = 0$$

$$z = x^2 + y^2 + xy \xrightarrow{(0,3)} z = 9$$

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

عکس شماره ۳

استاد این عکس را در مجموعه تمرینات قبلی هم گذاشته بودید.

درواقع این عکس، یعنی عکس شماره ۳ جلسه ۲۰ ام، همان عکس شماره ۱۲ جلسه ۶ ام می‌باشد؛ و مادر تلارام ازتون پرسیدیم گفتین که تکراریه وقتا نگفتین نیازی نیست مجدد بنویسید.

عکس شماره ۴

* سوال ۳ درانتهای سوالات نوشته شده است *

۱) برای اینکه برای تابع برداری $F(t) = \sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + \vec{k}$ رابطه $F(t).F'(t)=0$ برقرار باشد، a چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sin t$ ۴) $\cos t$

$F'(t) = (\cos t, -a\sin t, 0)$

$F(t).F'(t) = (\cos t, -a\sin t, 0).(\sin t, a\cos t, 1) = 0$

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

$\sin t \cos t - a^2 \sin t \cos t + 0 = 0 \longrightarrow a^2 = 1 \longrightarrow a = \pm 1$ تابع این انتخاب است

۲ طول منحنی $F(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$ از $t=0$ تا $t=2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{22}{3}$ ✓

$F'(t) = (1, 2t, 2t^2)$

$|F(t)| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = \sqrt{(1+2t^2)^2} = 1+2t^2$

$\int_0^2 (1+2t^2)\,dt = t + \frac{2t^3}{3}\Big|_0^2 = 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}$

۳ اگر $\alpha(t) = (9\sin 2t, 4\cos 2t, 5t)$ انحنای خمیدگی α در نقطه $(0, 4, 0)$ کدام است؟

۱) $\frac{12}{169}$ ۲) $\frac{24}{169}$ ✓ ۳) $\frac{12}{13}$ ۴) $\frac{24}{13}$

$K = \frac{|V \times a|}{|V|^3}$ $V = (12\cos 2t, -12\sin 2t, 5) \xrightarrow{t=0} V = (12, 0, 5)$

$a = (-24\sin 2t, -24\cos 2t, 0) \xrightarrow{t=0} a = (0, -24, 0)$

$(120, 0, -288)$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$|V\times a| = \sqrt{(12\cdot)^2+(-1)^2+(-288)^2} = 312$$

$$|V| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = 13$$

$$k = \frac{312}{(13)^3} = \boxed{\frac{24}{169}}$$

۵) شعاع انحنای منحنی تابع $y=\ln x$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ کدام است؟

۱) ۲/۷ ۲) ۲/۴ ۳) ۳/۱۶ ۴) ۱/۱۸

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y=\ln x \quad , \quad y'=\frac{1}{x} \quad , \quad y''=\frac{-1}{x^2}$$

$$y'=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad y''=-\frac{5}{4}$$

$$k = \frac{\frac{5}{4}}{(1+\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}} = \frac{10}{27}$$

$$R = \frac{1}{k} = \boxed{2/7}$$

۶) انحنای منحنی $R(t)=at\vec{i}-\frac{at+2}{b}\vec{j}$ کدام است؟

۱) a ۲) $\frac{1}{a}$ ۳) $\frac{1}{b}$ ۴) صفر

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$V(t) = (a, \frac{-9}{b}, 0)$

$a(t) = (0, 0, 0)$

$k = \frac{|V \times a|}{|V|^3} = 0$

۷ شعاع انحنای تابع $y = e^{\sqrt{3}x}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۵

$y' = \sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} = \sqrt{3}$ $\quad y'' = 3e^{\sqrt{3}x} = 3$

$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{(1+3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8}$ $\quad R = \frac{1}{k} = \frac{8}{3}$

۸ انحنای منحنی $y = x^2$ در کدام یک از نقاط زیر بیشترین مقدار است؟

۱) $P(0,0)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(2,0)$

$y' = 2x$

$y'' = 2$

$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}}$ → از بررسی گزینه‌ها جواب $(0,0)$ می‌باشد.

۹ انحنای نمودار تابع $y = \ln(\cos x)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

$y' = -\tan t$

$y'' = -\sec^2 t$

$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sec^2 t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sec^2 t}{\sec^3 t}$

$= \cos t \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} k_1 = \frac{1}{2}$

---

۱۰) تاب منحنی $x = e^t \cos t$ ، $y = e^t \sin t$ ، $z = e^t$ برابر است با؟

۱) e^{-t} ۲) $\frac{e^{-t}}{2}$ ۳) $\frac{2e^{-t}}{3}$ ۴) $\frac{e^{-t}}{3}$

$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$

$v(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t) \xrightarrow[\text{در نوشتن}]{t=0} V = (1,1,1)$

$a(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t, e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t, e^t) \rightarrow a(t) = (-2e^t \sin t, 2e^t \cos t, e^t) \xrightarrow{t=0} a = (0,2,1)$

$a'(t) = (-2e^t \sin t - 2e^t \cos t, 2e^t \cos t - 2e^t \sin t, e^t) \xrightarrow{t=0} a' = (-2,2,1)$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$\ell = \frac{(v \times a) \cdot a'}{|v \times a|^2}$ $\quad v \times a = (1, 1, 1)$

$(0, 2, 1)$

$(-1, -1, 2) \rightarrow |v \times a| = \sqrt{9}$

$\rightarrow \ell = \frac{2 - 2 + 2}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \rightarrow (\frac{1}{3})e^{-t}$

11 انحنای منحنی $x = 2(\varphi - \sin\varphi)$، $y = 2(1 - \cos\varphi)$، در $\varphi = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

1) 1 $\quad$ 2) $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $\frac{1}{4}$ ✓ $\quad$ 4) 2

$v = (2 - 2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0) \rightarrow (1, \sqrt{3}, 0)$

$k = \frac{|v \times a|}{|v|^3}$ $\quad a = (2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0) \rightarrow (\sqrt{3}, 1, 0)$

$v \times a = (0, 0, -2)$

$|v \times a| = 2$ ، $|v| = 2$

$k = \frac{2}{2^3} = \boxed{\frac{1}{4}}$

12 انحنای (یا خمیدگی) خم $r(t) = (t + \cos t)i + (t - \cos t)j + \sqrt{2}\sin t\, k$ کدام است؟

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}$ $\quad$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad$ 4) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$V(t) = (1-\sin t,\ 1+\sin t,\ \sqrt{2}\cos t) \xrightarrow[\text{دلخواه}]{t=0} V = (1, 1, \sqrt{2})$

$a(t) = (-\cos t,\ \cos t,\ -\sqrt{2}\sin t) \xrightarrow{t=0} a = (-1, 1, 0)$

$V \times a = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$

$|V| = 2$

$K = \frac{|V \times a|}{|V|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$

$|V \times a| = \sqrt{2+2+4} = 2\sqrt{2}$

۱۳ بردار یکه قائم اصلی یعنی $\vec{N(t)}$ برای ماریچ $\vec{R(t)} = (\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t\vec{k}$ کدام است؟

۱) $(-\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$ ✓ ۲) $(-\cos t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j}$ ۳) $(\cos t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j}$ ۴) $(\cos t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j}$

$N(t) = B(t) \times T(t)$

$V(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \rightarrow |V| = \sqrt{2}$

$T(t) = \frac{V}{|V|}$

$a(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$

$V \times a = (\sin t, -\cos t, 1)$

$B(t) = \frac{V \times a}{|V \times a|}$

$|V \times a| = \sqrt{2}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1)$

$T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$

$\frac{1}{2}(-2\cos t, -2\sin t, 0) = (-\cos t, -\sin t) = (-\cos t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j}$

۳۴ طول قوس منحنی $R(t) = t\vec{i} + \ln\left(\frac{1}{\cos t}\right)\vec{j} + \ln\left(\frac{1}{\cos t} + \tan t\right)\vec{k}$ از $t=0$ تا $t=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $\ln(1+\sqrt{2})$ ۲) $\sqrt{2}\ln\sqrt{2}$ ۳) $\ln(1+2\sqrt{2})$ ۴) $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$ ✓

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |v| dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 t + \sec^2 t}\, dt$$

$v = (1, \tan t, \sec t)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\sec^2 t}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\, dt = \sqrt{2}\left(\ln|\sec t + \tan t|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\ln|\sqrt{2}+1| - \ln 1\right) = \sqrt{2}\left(\ln(\sqrt{2}+1)\right)$$

VAHDAT

Subject :
Year : Month : Date :

جلسه شماره ۵

* سوالات ۱، ۵، ۳۰، ۳۲، و ۳۳ در انتهای سوالات نوشته نشده است *

۲ حجم ناحیه محصور بین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و سهمیگون $z=x^2+y^2$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

$$V=\iiint dV \xrightarrow{\text{استوانه}} V=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{r^2}^{r} dz\cdot r\,dr\,d\theta$$

$r-r^2$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{12}(2\pi)=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

۳ مقدار $I=\iiint_R \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن R ناحیه محصور بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ است، $(a>b>0)$ کدام است؟

۱) $4\pi\ln\frac{a}{b}$ ۲) $2\pi\ln\frac{a}{b}$ ۳) $2\pi\ln\frac{b}{a}$ ۴) $4\pi\ln\frac{b}{a}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

روی $\rightarrow \iiint \frac{r^2 dr\, d\theta \sin\varphi\, d\varphi}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=b}^{a} \frac{dr}{r} d\theta \sin\varphi\, d\varphi$

$= (\cos\varphi|_0^{\pi})(\theta|_0^{2\pi})(\ln r|_b^a) = 2 \times 2\pi \times \ln\frac{a}{b} = \underline{4\pi \ln\frac{a}{b}}$

۴ مقدار $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ در صورتی که D ناحیه محدود بین دایره های $x^2+y^2 = 16$ و $x^2+y^2 = 25$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{132\pi}{3}$ ✓ ۲) $\frac{120\pi}{3}$ ۳) $\frac{121\pi}{3}$ ۴) $-\frac{121\pi}{3}$

استوانه $\rightarrow \iint r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=4}^{5} r^2\, dr\, d\theta$

$= \left(\frac{r^3}{3}\Big|_4^5\right)\left(\theta|_0^{2\pi}\right) = \left(\frac{125-64}{3}\right)(2\pi) = \underline{\frac{122\pi}{3}}$

۶ حجم یک جسم که در استوانه $x^2+y^2 = 4$ محصور و از بالا به سهمی گون $z = x^2+y^2$ و از پایین به صفحه xoy محدود است، کدام است؟

۱) 8π ✓ ۲) 4π ۳) 2π ۴) 6π

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$V=\iiint dv \xrightarrow{\text{استوانه}} V=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{r^2} dz\cdot r\,dr\,d\theta$$

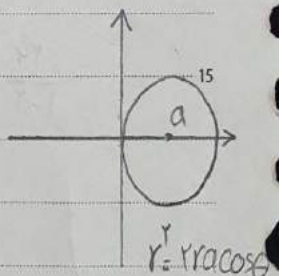
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^2\right)d\theta=4\times 2\pi=8\pi$$

۷- حجم قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2ax$ که بین سهمی $x^2+y^2=2az$ و صفحه xoy قرار دارد، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi a^3}{2}$ ۲) $\frac{3\pi a^2}{4}$ ۳) $\frac{3\pi a^3}{4}$ ✓ ۴) $\frac{3\pi a^2}{2}$

$$V=\iiint dv \xrightarrow{\text{استوانه}} V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2a\cos\theta}\int_{z=0}^{\frac{r^2}{2a}} dz\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^4}{8a}\Big|_0^{2a\cos\theta}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16a^4}{8a}\cos^4\theta\,d\theta$$



$$=2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^4\theta\,d\theta=4a^3\left(\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{3\pi}{4}a^3$$

$$\int\cos^4\theta\,d\theta=\int\frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}=\frac{1}{4}\left(\int\theta+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)$$

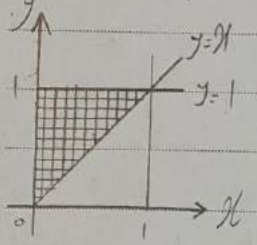
$$\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)$$

Subject:

Year: Month: Date:

۸ مقدار $\int_0^1 \int_x^1 \sqrt{1-y^2}\, dy\, dx$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$



تعویض ترتیب انتگرال‌گیری

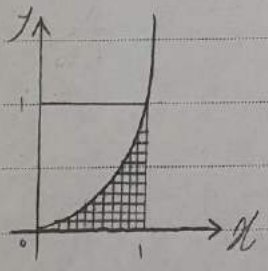
$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} \sqrt{1-y^2}\, dx\, dy$$

$\sqrt{1-y^2}$

$$= \int_{y=0}^{1} y\sqrt{1-y^2}\, dy = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}\Big|_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}(1)(1) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

۹ حاصل $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\, dy\, dx$ برابر است با؟

۱) $\frac{24}{21}$ ۲) $\frac{24}{50}$ ۳) $\frac{24}{78}$ ۴) $\frac{24}{105}$ ✓



$$\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{x^2} dx = \int_{x=0}^{1} \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx$$

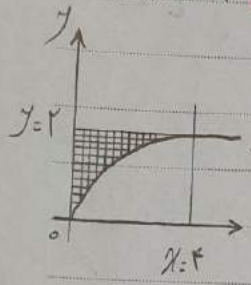
$$= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \boxed{\frac{26}{105}}$$

۱۰ مقدار انتگرال دوگانه $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\, dy\, dx$ چقدر است؟

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

۱) $\frac{\sin 1}{6}$ ۲) $\frac{\sin 1}{3}$ ✓ ۳) $\frac{8\sin 1}{2}$ ۴) ۱۱۳۳۳



تعویض ترتیب انتگرال گیری

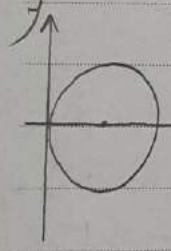
$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{y^2}\cos y^3\,dx\,dy$$

$y^2\cos y^3$

$$=\int_{y=0}^{2} y^2\cos y^3\,dy = \frac{1}{3}\sin y^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(\sin 1)$$

۱۱ حجم محصور به رویه‌های $az=x^2+y^2$ ، صفحه $z=0$ ، استوانه $x^2+y^2=2ax$ و $(a>0)$ برابر است؟ ✓

۱) $\frac{1}{2}\pi a^3$ ۲) $2\pi a^3$ ۳) $\frac{3}{2}\pi a^3$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}\pi a^3$



عشاره سوال ۷

$$V=\iiint dv$$

استوانه

$$\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{2a\cos\theta}\int_{z=0}^{\frac{r^2}{a}} dz\,dr\,d\theta$$

عشاره دوازدهم سوال ۷

$$\cdots = \frac{3}{2}\pi a^3$$

عکس گزاره ۶ ✓

۱۲ جواب انتگرال $\int_0^2\int_1^{e^x} x\,dy\,dx$ چیست؟

Subject:
Year: Month: Date:

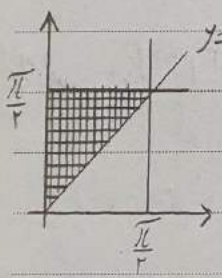
۱) e^2-1 ✓ ۲) e^2-3 ۳) e^2+1 ۴) e^2

$$\int_0^2\int_1^{e^x} x\,dy\,dx = \int_0^2 (xe^x - x)\,dx = (xe^x - e^x - x)\Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 - 2 - (-1) = e^2 - 1$$

$xy\Big|_1^{e^x}$

۱۳ مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$ برابر است با: ✓

۱) -1 ۲) ۱ ✓ ۳) -2 ۴) ۴



تغییر ترتیب انتگرال گیری

$$\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=0}^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$$

$x\frac{\sin y}{y}\Big|_0^y = \sin y$

$$= \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy - \cos y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) = 1$$

۱۴ مقدار انتگرال دوگانه $\iint_R (x\sin y - ye^x)\,dx\,dy$ ✓ ✓ ✓ روی $R=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$ ✓ برابر است با:

۱) $\left(\frac{1}{e}-e^2\right)\frac{\pi^2}{8}$ ۲) $\left(\frac{1}{e}-e^{-2}\right)\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\left(\frac{1}{e}+e^2\right)\frac{\pi^2}{8}$ ✓ ۴) $\left(\frac{1}{e}-e\right)\frac{\pi^2}{8}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$\iint_{\underbrace{\quad}} (x\sin y - ye^{x})\,dx\,dy$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\sin y - ye^{x}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = -y(e-e^{-1})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{y^2}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)dy = \left(\frac{1}{e}-e\right)\times\frac{\pi^2}{8}$$

۱۵ مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{y}\,dy\,dx$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

مشابه ۱۳ ⟵

$$\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\int_{x=0}^{y}\frac{\cos y}{y}\,dx}\,dy$$

$$\frac{\cos y}{y}\,x\Big|_{x=0}^{y} = \cos y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy = \sin y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

۱۶ حاصل $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy\,dx$ برابر است با:

VAHDAT

Subject :

Year : Month : Date :

۱) ۱ ۲) $\pi \sin 1$ ✓ ۳) π ۴) $\pi \cos 2$

قطبی $\rightarrow \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \cos(r^2)\, r\, dr\, d\theta$

$\frac{1}{2}\sin(r^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sin(1)$

$= \frac{1}{2}\sin(1) \times 2\pi = \pi \sin(1)$

۱۷) حجم محدود به رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ و صفحه $z = 0$ و استوانه $x^2 + y^2 = 4$ کدام است؟

۱) 14π ۲) 14π ۳) 18π ۴) 28π ✓

$V = \iiint dv \xrightarrow{\text{استوانه}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=0}^{9-r^2} dz\, r\, dr\, d\theta$

$9 - r^2$

$\int_0^{2\pi} \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 d\theta = (18 - 4) \times 2\pi = 28\pi$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱۸ کار انجام شده توسط نیروی $F = yi + (x+z)j + yk$ در تماس معیط بیضی فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 4$ با صفحه $z + 2x = 3$ برابر است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

استوکس $\rightarrow \int F \cdot dr = \iint curl F \, n \, ds$

$$\vec{n}\,ds = \frac{\vec{\nabla} g \, dA}{|\vec{\nabla} g \cdot k|} = \frac{(2, 0, 1)\, dA}{1}$$

$$curl F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x+z & z+y \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\rightarrow \iint curl F \cdot n \, ds = \iint (2, 0, 1)(0, 0, 0)\, dA = 0$$

۱۹ بردار $F = (x+y)i + (y+z)j + (z+x)k$ و S سطح ناحیه D محدود به $|x| \leq 1$، $|y| \leq 1$، $|z| \leq 1$ است. حاصل $\iint_S F \cdot n \, ds$ برابر است؟

Subject:

Year: Month: Date:

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴ ✓

دیورژانس ← $div F = 1+1+1 = 3$

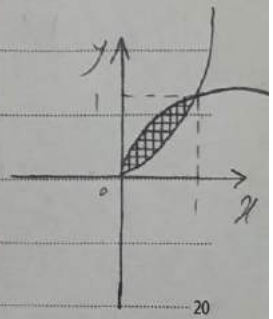
$$\iint F \cdot n\,ds = \iiint div F\,dv = 3\iiint dv = 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} dy\,dx\,dz$$

$$= 3\times 2^3 \left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_0^1 dy\right)\left(\int_0^1 dz\right) = 3\times 8 = 24$$

۲) مقدار انتگرال $\oint_C (2xy-x^2)dx + (x+y^2)dy$ که در آن C مرز ناحیه محصور بین سهمی‌های $y=x^2$ و $x=y^2$ است و یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟

۱) $\frac{1}{30}$ ✓ ۲) $\frac{1}{25}$ ۳) $\frac{1}{20}$ ۴) $\frac{1}{15}$

گرین ← $\int F\cdot dr = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ $\begin{cases} P = 2xy - x^2 \\ Q = x + y^2 \end{cases}$



$$= \iint (1-2x)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,dy\,dx$$

$$\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (y-2xy)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - x^2 + 2x^3\right) dx = \frac{1}{30}$$

VAHDAT

Subject:
Year: Month: Date:

۲۱ انتگرال خطی $\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1+3x^2y^2) dy$ برابر است با: $I =$

۱) $I = 45$ ۲) $I = -58$ ✓ ۳) $I = 28$ ۴) $I = -32$

مسیر باز $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy$ $\longrightarrow \overrightarrow{curl F} = \vec{0}$

بنابراین $\int F \cdot dr = \int 2xy^3 dx + \int 1 dy = (x^2y^3 + y) \Big|_{(1,4)}^{(3,1)}$

$= (9+1) - (64+4) = 10 - 68 = \boxed{-58}$

---

۲۲ مقدار انتگرال منحنی الخط $\int \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$ روی منحنی $C: x^2+y^2-x-y=0$ از $(1,0)$ تا $(0,1)$ در جهت مثبت مثلثاتی کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) 0 ۳) $\frac{\pi}{2}$ ✓ ۴) 2π

مسیر باز $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \longrightarrow \overrightarrow{curl F} = \vec{0}$

بنابراین $\int F \cdot dr = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx + 0 = -\tan^{-1}\frac{x}{y} \Big|_{(1,0)}^{(0,1)} = -(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}\infty)$

$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۲۳ حاصل $I=\int_{1}^{2}\int_{0}^{x}\frac{dy\,dx}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}\ln 2$ ✓ ۳) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

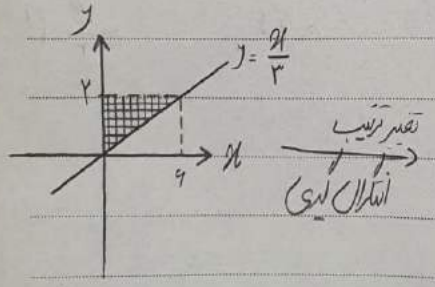
$$\int_{1}^{2}\int_{0}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}\ln x\Big|_{1}^{2} = \frac{\pi}{4}\ln 2$$

$$\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\Big|_{y=0}^{x} = \frac{1}{x}\tan^{-1}(1) - 0$$

علیس تشاره ۷

۲۴ حاصل $I=\int_{0}^{4}\int_{\frac{x}{3}}^{2} x\sqrt{y^3+1}\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ✓ ۴) ۳۷



تغییر ترتیب انتگرال گیری

$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{3y} x\sqrt{y^3+1}\,dx\,dy$$

$$\frac{x^2}{2}\sqrt{y^3+1}\Big|_{x=0}^{3y} = \frac{9y^2}{2}\sqrt{y^3+1}$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$= \frac{9}{2}\int_{y=0}^{2} y^2\sqrt{y^3+1}\,dy = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(y^3+1)\sqrt{y^3+1}\Big|_{y=0}^{2} = 9\sqrt{9} - 9\times 3 = 27$$

۲۵) حاصل $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$ که در آن D ناحیه محصور بین دایره $x^2+y^2=1$ و

مماس بالای $y=x$ است، کدام است؟

۱) 2π ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{2\pi}{3}$

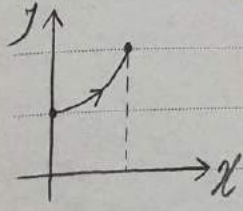
قطبی $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

۲۶) اگر C مسیری به معادله $x^2+1=x$ باشد، حاصل $\int_C (x^2-y)\,dx+(y^2+x)\,dy$ از نقطه

$x=0$ تا $x=1$ واقع بر مسیر کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) 3



مسیر باز $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$ $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$ $\rightarrow \overrightarrow{curl F}\neq 0$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

پارامتری $\longrightarrow r = (t, t^2+1)$ $\begin{cases} dr = (1, 2t)\,dt \\ F = (-1, (t^2+1)^2 + t) \end{cases}$

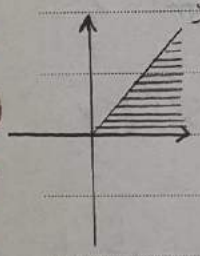
$$\longrightarrow \int F\,dr = \int_0^1 -1 + 2t\,(t^4 + 2t^2 + 1 + t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-1 + 2t^5 + 4t^3 + 2t + 2t^2)\,dt$$

$$= \left(-t + \frac{t^6}{3} + t^4 + t^2 + 2\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = -1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{2}{3} = \boxed{2}$$

۲۷ حاصل $I = \int_0^\infty \int_0^x x e^{-\frac{x^2}{y}}\,dy\,dx$ برابر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) قابل محاسبه نیست



تعویض ترتیب انتگرال گیری $\longrightarrow \int_{y=0}^\infty \int_{x=y}^\infty x e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx\,dy$

$$\int_{x=y}^\infty x e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{y}}\Big|_{x=y}^\infty = 0 + \frac{1}{2} e^{-y}$$

$$= \int_{y=0}^\infty \frac{1}{2} e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2} e^{-y}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2}(0-1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۲۸ مقدار $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ برابر است با؟

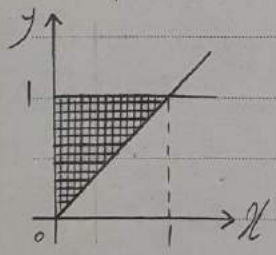
۱) $\frac{\pi a^4}{2}$ ۲) $\frac{\pi a^3}{6}$ ۳) $\frac{\pi a^4}{4}$ ✓ ۴) $\frac{\pi a^4}{8}$

حل: $\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{a} r \cdot r^2 \, dr\, d\theta \sin\varphi\, d\varphi$

$= (-\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}})(\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}})\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^a\right) = 1 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8} a^4$

۲۹ اگر $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$ باشد، انتگرال $\int_0^1 f(x)\, dx$ برابر است با؟

۱) $1+e$ ۲) $1-e$ ۳) $\frac{1}{2}(1-e)$ ✓ ۴) $\frac{1}{2}(1+e)$



$\int_0^1 \int_1^x e^{t^2} dt\, dx$ $\xrightarrow[\text{انتگرال بری}]{\text{تغییر ترتیب}}$

$\int_{t=0}^{1} \int_{x=0}^{t} e^{t^2} dx\, dt$

$\underbrace{x e^{t^2}\Big|_{x=0}^{t}}_{} = t e^{t^2}$

VAHDAT

$$= \int_{t=0}^{1} te^{t^2} dt = \frac{1}{2} e^{t^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

۳) حاصل $\iint_S y\,dS$ ، که S سطح نیم‌کره به معادله $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) πa ۳) πa^2 ۴) πa^3

$$ds = \frac{|\nabla g|\,dt}{|\nabla g \cdot k|} = \frac{|2x, 2y, 2z|}{|2z|}\,dt = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z}\,dt$$

نیم‌کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $= \frac{2a}{2z} = \frac{a}{z}$

$$\Rightarrow \iint y\,dS = \iint \frac{ay}{z} = a \iint \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,dA$$

قطبی $\Rightarrow a \iint \frac{r\sin\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,r\,dr\,d\theta$ $\xrightarrow{z=0,\ x^2+y^2=a^2}$

$$= a\left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right) = 0$$

$$\cos\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۳۴ حاصل $\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ در امتداد (C) بیضی به معادلات $x=\cos t$ ، $y=2\sin t$ و $0 \le t \le 2\pi$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) ۲

قضیه گرین $\rightarrow$ $\begin{cases} P = x+y & \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ Q = x-y & \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \boxed{0}$$ ← چون P و Q یکسان اند

۳۵ اگر $f(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x+y)^2}$ باشد، حاصل $\int_1^4 f(x)\,dx$ برابر است با:

۱) $\ln\frac{2}{3}$ ۲) $\ln\frac{3}{2}$ ۳) $\ln 2$ ۴) $\ln 4$

$$\int_1^4 \int_0^x \frac{dy}{(x+y)^2}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \boxed{\ln 2}$$

$$\frac{-1}{x+y}\Big|_{y=0}^{x} = \frac{-1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

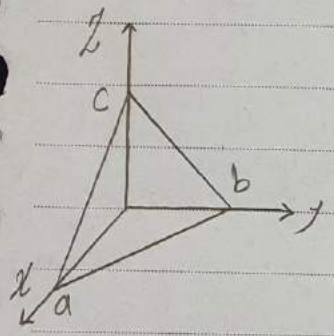
VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

۱- حجم ناحیه واقع در هشتم اول هندسه محدود به $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ و a,b,c اعداد مثبت هستند کدام است؟

۱) $\frac{abc}{2}$ ۲) $\frac{abc}{3}$ ۳) $\frac{abc}{6}$ ✓ ۴) $\frac{abc}{12}$



$$V=\int_0^a\int_0^b\left(1-\frac{x}{a}\right)\int_0^c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dz\,dy\,dx$$

$$V=c\int_0^a\int_0^{b(1-\frac{x}{a})}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\,dx$$

$$V=\frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{abc}{2}\int_0^1 u^2du=\boxed{\frac{abc}{6}}$$

۵- حاصل $I=\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\int_0^\infty\frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^3}{4}$ ۲) $\frac{\pi^3}{8}$ ✓ ۳) $\frac{\pi^3}{4}$ ۴) $\frac{\pi^3}{8}$

از متغیرهای کروی استفاده می‌کنیم و $\frac{1}{8}$ اول انتگرال‌ها را می‌گیریم

$$I=\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\sin\theta}{(R^2+1)^2}\,d\varphi\,d\theta\,dR$$

VAHDAT

Subject:

Year: Month: Date:

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{R^2}{(R^2+1)^2} dR \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta}_{1}$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{R^2 dR}{(R^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\alpha}{\sec^4\alpha} \sec^2\alpha \, d\alpha = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha \, d\alpha$$

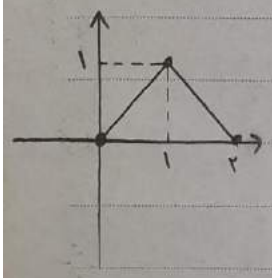
$$R = \tan\alpha \longrightarrow dR = \sec^2\alpha \, d\alpha \longrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} d\alpha = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

۳۰. انتگرال خط رو به $\int_C (x^2+y^2)dx + (x+2y)^2 dy$ روی مثلث C با راس های $(0,0)$، $(1,1)$ و $(0,2)$ در جهت مثلثی برابر است با؟

۱) $-\frac{3}{8}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{1}{3}$ ✓

قرین ✓

$$\begin{cases} P = x^2+y^2 \\ Q = (x+2y)^2 \end{cases} \longrightarrow \int F \, dr = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$



$$= \iint (2(x+2y) - 2x) \, dA = 4 \iint y \, dA$$

$$= 4 \times 2 \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{1} y \, dx \, dy = \boxed{\frac{1}{3}}$$

VAHDAT

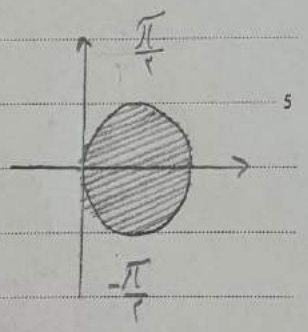
Subject :

Year : Month : Date :

۳۲) حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=9$ که در داخل استوانه $x^2+y^2=3x$ قرار دارد، کدام است؟

۱) $11\pi-14$ ۲) $11\pi-24$ ۳) $12\pi-14$ ۴) $14\pi-18$

$x^2+y^2=3x \longrightarrow r^2=3r\cos\theta \longrightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=3\cos\theta \end{cases}$



$x^2+y^2+z^2=9 \longrightarrow r^2+z^2=9 \longrightarrow z=\pm\sqrt{9-r^2}$

$$V=\iiint dv \xrightarrow{\text{استوانه}} V=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{3\cos\theta}\underbrace{\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}}}_{2\sqrt{9-r^2}} dz\, r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3\cos\theta} 2r\sqrt{9-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$-\frac{2}{3}(9-r^2)(\sqrt{9-r^2})\Big|_0^{3\cos\theta} = -\frac{2}{3}\left[(9\sin^2\theta)(3|\sin\theta|)-9\sqrt{9}\right]$$

$\xrightarrow{\text{تمام}}$ $-\frac{4}{3}\times 27\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\cos^2\theta}\cdot\sin\theta-1)\,d\theta\right]$

$\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta=u$

$-\sin\theta\,d\theta=du$

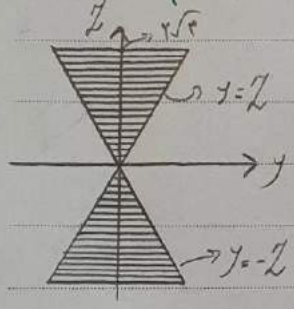
Subject:
Year: Month: Date:

$$= -24\left[-\int_1^0 (1-u^2)\,du - \frac{\pi}{2} \right] = -24\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{12\pi - 24}$$

$$\frac{u^3}{3} - u \Big|_1^0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

۳۳ مساحت بخشی از استوانه $x^2 + z^2 = 4$ که توسط $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $x = 3$ جدا شده است کدام است؟

۱) $35\frac{1}{3}$ ۲) $37\frac{1}{3}$ ✓ ۳) $35\frac{2}{3}$ ۴) $37\frac{2}{3}$



$$S: \vec{r} = \vec{r}(y,z) = \frac{z^2}{4}\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_y\,dy + \vec{r}_z\,dz \Rightarrow ds = |\vec{r}_y \times \vec{r}_z|\,dy\,dz$$

$$\vec{r}_y \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{z}{2} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{z}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}\,dy\,dz$$

$$S = 4\int_0^{2\sqrt{4}} \int_0^z \sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}\,dy\,dz$$

$$S = 4\int_0^{2\sqrt{3}} z\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}\,dz = 4 \times \frac{4}{3} \times 7 = \frac{112}{3} \Rightarrow S = \boxed{37\frac{1}{3}}$$

VAHDAT