بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی (۱)

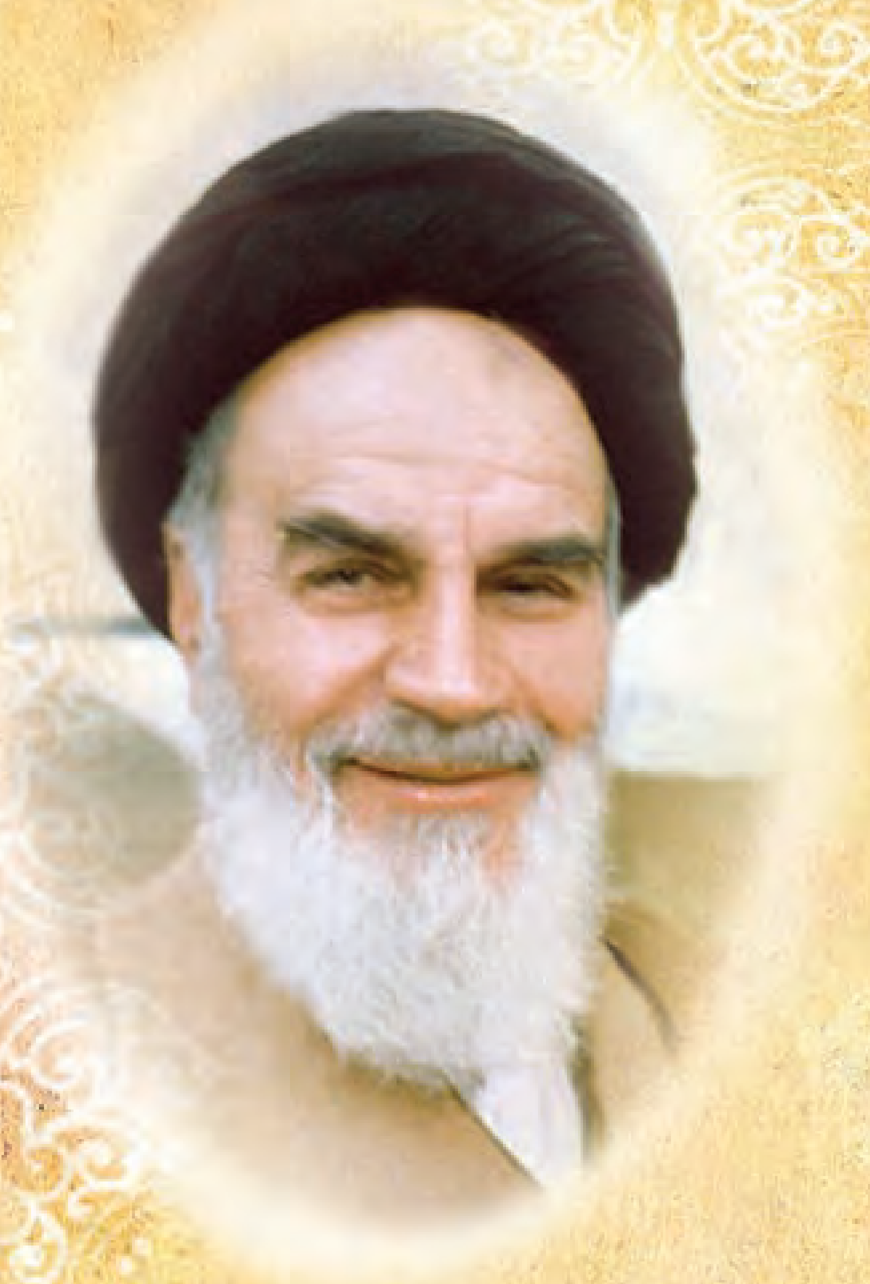
کلیهٔ رشته‌ها
شاخهٔ فنی و حرفه‌ای و کاردانش
پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه

۱۳۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۱) ـ ۲۱۰۱۴۱
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای وکاردانش
شناسه افزوده برنامه‌ریزی وتألیف: شهرناز بخشعلی‌زاده، ناصر بروجردیان، سوسن پناهنده، زین‌العابدین دهقانی ابیانه و زیبا فانی (اعضای گروه تألیف) ـ افسانه حجّتی طباطبایی (ویراستار ادبی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: فریبرز سیامک‌نژاد (طراح گرافیک) ـ عبدالحمید سیامک‌نژاد (طراح جلد) ـ امیرحسین محبّیان (صفحه‌آرا) ـ بهنام خیامی (تصویرگر)- امیرحسین سیامک نژاد، منوچهر احمدی (رسامی و فرمول چینی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، **دورنگار:** ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، **کد پستی:** ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب سایت: www.chap.sch.ir و www.irtexbook.ir
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش) **تلفن :** ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، **دورنگار:** ۴۴۹۸۵۱۶۰/
صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ ونشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۵

شابک ۶– ۲۵۱۶ – ۰۵ – ۹۶۴ – ۹۷۸ **ISBN 978 - 964 - 05 - 2516-6**



ملت شریف ما اگر در این انقلاب بخواهد پیروز شود باید دست از آستین برآرد و به کار بپردازد. از متن دانشگاه‌ها تا بازارها و کارخانه‌ها و مزارع و باغستان‌ها تا آنجا که خودکفا شود و روی پای خود بایستد.

امام خمینی (قُدّسَ سِرّه‌الشّریف)

فهرست

فصل ششم ـ نسبت‌های مثلثاتی

فصل هفتم ـ تابع

سخنی با هنرجویان گرامی

به گفتهٔ بسیاری از دانشمندان، ریاضی علمی شیرین و کاربردی است و تاریخ ریاضی نشان داده که حل مسائل عملی محیط پیرامونی موجب توسعهٔ ریاضیات شده است. هدف اصلی ریاضی، حل مسائلی است که انسان در زندگی روزمره و عملی با آنها روبه‌رو است.

شما با دیدن شنای شناگران، نمی‌توانید شنا یاد بگیرید بلکه برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید.

یادگیری ریاضی صرفاً خواندن و شنیدن مفاهیم ریاضی نیست؛ بلکه ریاضیات علمی معنادار است و تا زمانی که خود شما درگیر حل مسائل نشوید نمی‌توانید ریاضی را یاد گرفته و از آن استفاده کنید.

طراحی این کتاب به گونه‌ای است که در یک متن داستان‌گونه، مسئله‌ای مطرح می‌شود و شما با انجام فعالیت‌هایی که در ادامهٔ مسئله آمده است به مفهوم ریاضی مورد نظر می‌رسید.

سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی یاد گرفته و نهایتاً مسئله‌های کتاب را حل کنید.

مفاهیم ریاضی در این کتاب در ارتباط با هم بوده و به هم وابسته‌اند. سعی شده است مثال‌ها و تمرین‌هایی که در کتاب آمده است کاربردی بوده و با محیط پیرامونی زندگی ما مرتبط باشند.

آنچه که مسلم است ریاضیات زبان علم است و در تمام متن زندگی ما حضور دارد. یادگیری ریاضی شما را قادر می‌سازد تا توانایی تجزیه و تحلیل مسئله‌هایی را که با آنها برخورد می‌کنید، داشته باشید و خواهید دید که چگونه می‌توانید آموخته‌های خود را به کار برده و مسئله‌های مهمی را حل کنید.

در این کتاب علاوه بر تأکید بر این جنبهٔ ریاضی، به تأثیر فناوری در یادگیری ریاضی نیز توجه شده است. محیط و ابزار فناوری از جمله استفاده از ماشین حساب و نرم‌افزارهای پویا مانند جئوجبرا، این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو فرصت درک شهودی، رشد مهارت‌های تفکر مانند حدسیه و فرضیه‌سازی، الگویابی و غیره را پیدا کند. بنابراین به کارگیری فناوری از اصولی است که در تألیف این کتاب به آن توجه شده است.

در خاتمه برای آنکه کتاب برای شما بهتر قابل استفاده باشد، از نظر برخی از هنرآموزان محترم استفاده شده است که بدین وسیله از ایشان تشکر و قدردانی می‌گردد.

گروه مؤلفان ریاضی

دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

فصل اول

نسبت و تناسب

باستان‌شناسان چگونه از ریاضی استفاده می‌کنند؟

در سال ۲۰۰۱میلادی، باستان‌شناسان جمجمهٔ یک تمساح ماقبل تاریخ به طول یک متر و هشتاد سانتی‌متر را کشف کردند. با استفاده از نسبت و تناسب، آنها توانستند طول این تمساح را ۱۲متر برآورد کنند.

منبع: National Geography Mag

۱ــ۱ــ نسبت‌های مستقیم

سال تحصیلی جدید، مسئله‌های جدید، راه‌حل‌های جدید

دبیر ریاضی وارد کلاس شد و پس از معرفی خود گفت: «سال جدید تحصیلی بر همهٔ شما مبارک باد! امیدوارم امسال، سالی پر از موفقیت برای شما باشد.» سپس از لزوم درس خواندن و یادگیری ریاضی برایمان گفت و در آخر، اضافه کرد: «امسال روش یادگیری متفاوتی داریم. شما خودتان باید مفاهیم ریاضی را در ذهنتان بسازید؛ این کار را هم به کمک یکدیگر و با اجرا کردن فعالیت‌هایی که برایتان در نظر گرفته‌ایم، انجام خواهید داد.» پس از اینکه او قوانین کلاس را برایمان توضیح داد و هنرجویان خودشان را معرفی کردند و دلیل انتخاب شاخهٔ فنی و حرفه‌ای یا کاردانش را برای ادامه تحصیل توضیح دادند، گفت: «اجازه بدهید کارمان را شروع کنیم.»

شما در سال‌های گذشته با اندازه‌گیری آشنا شده‌اید. در ادامه، دو گیرهٔ کاغذ در اندازه‌های مختلف را به ما نشان داد و گفت: «طول گیرهٔ بزرگ ۱/۵ برابر طول گیرهٔ کوچک است.» سپس به هر یک از هنرجویان به طور تصادفی یک گیره داد و گفت: «برای جلسهٔ آینده طول و عرض کتاب ریاضی، طول و عرض یک کاغذ A۴، و طول چند شیء دیگر را در منزل با گیره‌ای که دارید اندازه بگیرید. ظاهراً کاری ساده بود که در دورهٔ ابتدایی هم آن را انجام داده بودیم. با خودم گفتم: اگر همهٔ تکالیف ریاضی امسال به همین سادگی باشند، نمرهٔ ریاضی‌ام ۲۰ خواهد شد! اما در خانه وقتی خواستم اندازه‌گیری‌ها را انجام دهم، متوجه شدم که گیره ام را در مدرسه جا گذاشته‌ام. به علی زنگ زدم تا ببینم او می‌تواند کمکی کند، ولی متوجه شدم اندازهٔ گیرهٔ او با اندازهٔ گیرهٔ من متفاوت است. البته علی راه‌حلی برای مشکل من پیشنهاد کرد.

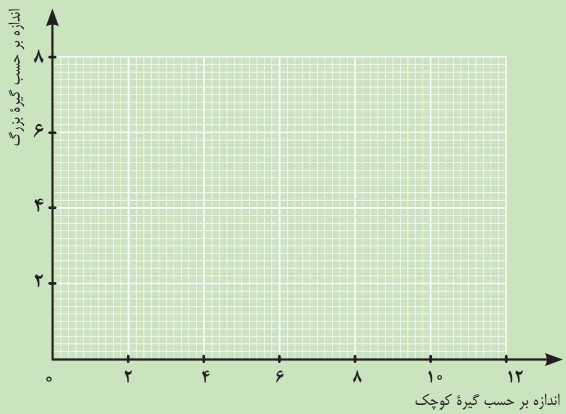
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا متوجه شوید راه‌حل علی چه بوده است.

فعالیت ۱

۱) در جدول زیر، ستون سمت چپ اندازه‌ای را برحسب گیرهٔ بزرگ و ستون سمت راست همان اندازه را بر حسب گیرهٔ کوچک نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

اندازه بر حسب گیرهٔ کوچک	اندازه بر حسب گیرهٔ بزرگ
۰	۰
...	۲
...	۴
...	۶

۲) در زیر، نموداری رسم کنید که رابطهٔ بین اندازه بر حسب گیرهٔ بزرگ و اندازه بر حسب گیرهٔ کوچک را نشان دهد.



۳) اگر طول کتاب $۵\frac{۱}{۲}$ و عرض آن $۳\frac{۲}{۳}$ گیرهٔ بزرگ باشد ، به کمک نمودار بالا طول و عرض کتاب را بر حسب گیرهٔ کوچک پیدا کنید.

....

۴) نسبت طول گیرهٔ بزرگ به طول گیرهٔ کوچک را بنویسید. چگونه می‌توانید با داشتن طول اشیا بر حسب گیرهٔ بزرگ، از این نسبت برای پیدا کردن طول آنها بر حسب گیرهٔ کوچک استفاده کنید؟

....

فعالیت صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که هرگاه دو مقدار با ضریب ثابتی با یکدیگر متناسب باشند، با استفاده از نمودارِ رابطهٔ بین آنها می‌توان با داشتن مقدار یکی، مقدار دیگری را بدون ضرب یا تقسیم به‌دست آورد. نسبت‌های ۱/۵ به ۱ **یا** ۳ به ۲ را می‌توان با عدد کسری $\frac{۳}{۲}$ نشان داد. با توجه به جدول صفحه قبل می‌توانیم بفهمیم که در مقابل هر ۲ گیرهٔ بزرگ، ۳ گیرهٔ کوچک و در مقابل هر ۴ گیرهٔ بزرگ، ۶ گیرهٔ کوچک داریم.

این ارتباط را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}=K$$

یا $۳=۲K$ و $۶=۴K$

K نسبت طول گیرهٔ بزرگ به طول گیرهٔ کوچک را نشان می‌دهد که آن را **ضریب تبدیل واحد** یا در این فعالیت ضریب تبدیل طول با واحد گیرهٔ بزرگ به طول با واحد گیرهٔ کوچک می‌نامند.

نتیجـــه

در حالت کلی، دو نسبت a به b و c به d مساوی‌اند، هرگاه برای یک عدد مانند K ، داشته باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K \quad \textbf{یا} \quad a = Kb \quad \textbf{و} \quad c = Kd$$

مثال ۱

الف) ۲۵۰ سانتی‌متر چند متر است؟

ب) ۳۴ سانتی‌متر چند متر است؟

پ) ۰/۰۱ سانتی‌متر چند متر است؟

اگر طول شیئی برابر A متر باشد، همین طول برابر $۱۰۰A$ سانتی‌متر است. نسبت $\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{A}{۱۰۰A}$ ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر است. برای داشتن درک بهتر به تساوی زیر دقت کنید.

$$\text{متر} = \text{سانتی‌متر} \times \frac{\text{متر}}{\text{سانتی‌متر}}$$

این تساوی به معنای آن است که اگر نسبت متر به سانتی‌متر را تشکیل دهیم، ضریبی به دست می‌آید که با ضرب آن در طول بر حسب سانتی‌متر ، همان طول بر حسب متر به دست می‌آید. پس داریم:

الف) $\frac{۱}{۱۰۰}\times ۲۵۰ = ۲/۵$

ب) $\frac{۱}{۱۰۰}\times ۳۴ = ۰/۳۴$

پ) $\frac{۱}{۱۰۰}\times ۰/۰۱ = ۰/۰۰۰۱$

مثال ۲

الف) ۲۵۰ متر چند سانتی‌متر است؟

ب) ۰/۴ متر چند سانتی‌متر است؟

پ) $\frac{۴}{۷}$ متر چند سانتی‌متر است؟

در این حالت، باید معکوس نسبت در مثال (۱) را حساب کنیم. اگر طول جسمی برابر A متر باشد، همین طول برابر $۱۰۰A$ سانتی‌متر است. نسبت $\frac{۱۰۰A}{A} = ۱۰۰$ ضریب تبدیل متر به سانتی‌متر است.

(برای درک بهتر به تساویِ سانتی‌متر = متر × $\frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{متر}}$ توجه کنید.) پس داریم :

الف) $۱۰۰ \times ۲۵۰ = ۲۵{,}۰۰۰$

ب) $۱۰۰ \times ۰/۴ = ۴۰$

پ) $۱۰۰ \times \frac{۴}{۷} = \frac{۴۰۰}{۷}$

مثال‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهند که در محاسبهٔ ضریب تبدیل دو واحد به یکدیگر، اینکه کدام واحد را به کدام واحد می‌خواهیم تبدیل کنیم، مهم است و اگر جای واحدها را با هم عوض کنیم، ضریب تبدیل معکوس می‌شود. مثلاً، ضریب تبدیل متر به سانتی‌متر، ۱۰۰ است ولی ضریب تبدیل سانتی‌متر به متر، $\frac{۱}{۱۰۰}$ است.

مثال ۳

برای تهیهٔ ۷ لیوان شربت، ۵ لیوان آب را به ۲ لیوان شربت غلیظ اضافه می کنیم. اگر بخواهیم با ۶ لیوان شربت غلیظ، شربتی با همان مقدار شیرینی درست کنیم، چند لیوان آب باید به آن اضافه کنیم؟

این مسئله را می‌توانیم به سه روش حل کنیم.

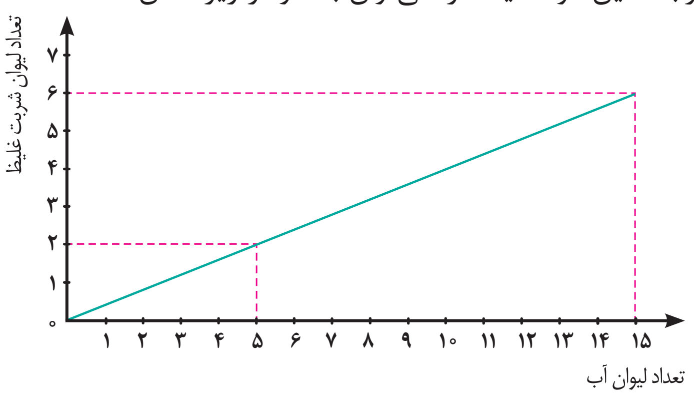
روش رسم شکل: اگر در برابر ۲ لیوان (واحد) شربت غلیظ، ۵ لیوان (واحد) آب نیاز داشته باشیم، به معنای آن است که در برابر هر ۲ واحد شربت غلیظ، به ۵ واحد آب نیاز داریم.

شربت غلیظ	۱	۱			
آب	۱	۱	۱	۱	۱

بنابراین، در برابر ۶ لیوان شربت غلیظ (که ۲ واحد ۳ تایی است)، به ۱۵ لیوان آب (که ۵ واحد ۳ تایی است) نیاز داریم؛ یعنی:

شربت غلیظ	۳	۳			
آب	۳	۳	۳	۳	۳

روش رسم نمودار: رابطهٔ این دو کمیت[1] را می‌توان با نمودار زیر نشان داد :



۱ــ مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را **کمیت‌های فیزیکی** و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را **کمیت‌های هندسی** می‌نامند.

روش عملیات جبری: با توجه به اینکه مقدار شربت غلیظ و آب، کمیت‌های متناسب‌اند، این تبدیل را می‌توان به شکل زیر نیز در نظر گرفت:

$$\frac{۵}{۲}=\frac{x}{۶}=K$$

پس :

$$x=۶K=۶\times\frac{۵}{۲}=۱۵$$

یا

لیوان آب = لیوان شربت غلیظ × (لیوان آب / لیوان شربت غلیظ)

کار در کلاس ۱

۱) آیا دو نسبت ۴۲ به ۸۸ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟

☐ بله؛ K برابر است با ....

☐ خیر؛ نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۴۲ به .... و K برابر است با ....

۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟

☐ بله؛ K برابر است با ....

☐ خیر؛ نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت .... به ....

۳) در یک روزنامه عکس‌ها با ابعاد ۶ × ۵ چاپ می‌شوند.

در مرحلهٔ صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

....

....

کمیت‌های متناسبی که تا اینجا بررسی کردیم، همگی از یک جنس و یک واحد بودند. برای مثال، نسبت طول به عرض یک پنجره، نسبت بین دو طول است و هر دو با واحد متر یا سانتی‌متر قابل اندازه‌گیری هستند یا نسبت مخلوط کردن شربت غلیظ و آب، نسبت بین دو حجم است و هر دو بر حسب حجم یک لیوان قابل اندازه‌گیری هستند. ولی در زندگی روزمره با کمیت‌های متناسبی سر و کار داریم که از یک جنس نیستند یا واحدهای اندازه‌گیری آنها یکی نیست. مثلاً برای ماشینی که با سرعت ثابت در حال حرکت است، مسافت پیموده شده با زمان سپری شده متناسب است. در محاسبهٔ نسبت بین مسافت طی شده و زمان سپری شده، **مسافت** از جنس طول است و با واحدهایی مانند **متر** اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که **زمان** از جنس دیگری است و با واحدهایی مانند **ثانیه** اندازه‌گیری می‌شود. مثالی دیگر، قیمت میوه‌هاست که متناسب با وزن آنهاست. در محاسبهٔ نسبت بین قیمت میوه‌ها به وزن آنها، قیمت از جنس **پول** است و با واحدهایی مانند **تومان** اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که **وزن** از جنس **نیرو** است و با واحدهایی مانند **کیلوگرم**[1] اندازه‌گیری می‌شود. در این حالت‌ها، مقدار نسبت، به واحدهای اندازه‌گیری برای هر کدام از کمیت‌های انتخاب شده، بستگی دارد.

فعالیت ۲

در میدان تره‌بار، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۳۰۰۰ تومان است.

۱ـ گرچه کیلوگرم واحد اندازه‌گیری جرم است، از آن به عنوان واحد رایج اندازه‌گیری وزن در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم.

۱) نسبت **قیمت** سیب زمینی به **وزن** آن ، برابر است با : .... تومان به .... کیلوگرم سیب‌زمینی.

نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با .... تومان به ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی.

این نسبت نشان می‌دهد که با .... تومان می‌توان ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی خرید.

۲) نسبت **وزن** سیب زمینی به **قیمت** آن ، برابر است با : .... کیلوگرم سیب‌زمینی به .... تومان.

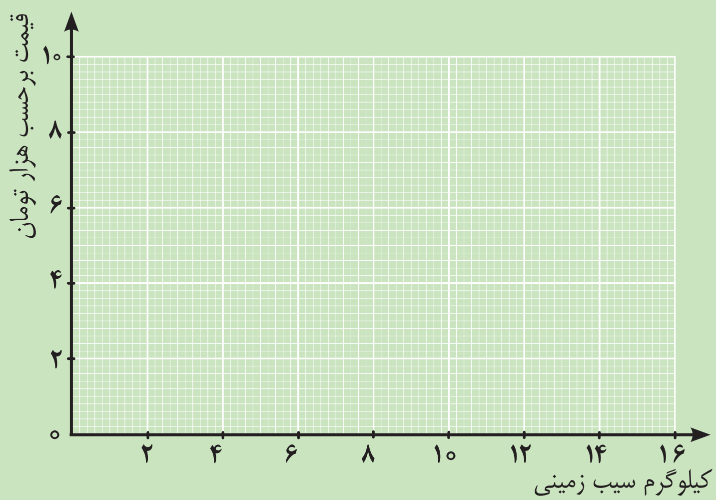
نسبت وزن سیب‌زمینی به قیمت آن برابر است با .... کیلوگرم سیب‌زمینی به ۱ تومان.

این نسبت نشان می‌دهد که با ۱ تومان می‌توان .... کیلوگرم سیب‌زمینی خرید.

۳) برای پیدا کردن قیمت ۵ کیلوگرم سیب زمینی، رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\frac{\text{۵ کیلوگرم سیب زمینی}}{\text{...............تومان}} = \frac{\text{۳ کیلوگرم سیب زمینی}}{\text{...............تومان}}$$

۴) نمودار رابطهٔ بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.



۵) شیب این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

فعالیت ۲ نشان می‌دهد که نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهندهٔ آن است که قیمت ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی چند تومان است. برعکس، نسبت هر مقدار سیب‌زمینی به قیمت آن مقداری ثابت است و این نسبت نشان دهندهٔ آن است که با ۱ تومان، چه مقدار سیب‌زمینی می‌توان خرید.

تعریف

نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف را *نرخ* می‌نامند.

مثال ۴

قیمت پنیر متناسب با وزن آن است. فرض کنید قیمت ۳ کیلوگرم پنیر ۳۰ هزار تومان باشد.

الف) نرخ قیمت پنیر به وزن آن چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ب) نرخ وزن پنیر به قیمت آن چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

واحد اندازه‌گیری وزن پنیر را کیلوگرم انتخاب می‌کنیم و واحد قیمت را هزار تومان درنظر می‌گیریم. نرخ قیمت پنیر (بر حسب هزار تومان) به وزن آن برابر $\frac{۳۰}{۳}=۱۰$ است که نشان می‌دهد قیمت هر کیلوگرم پنیر ۱۰ هزار تومان است.

بر عکس، نرخ وزن پنیر به قیمت آن $\frac{۳}{۳۰}$ است که همان $\frac{۱}{۱۰}$ است. این نرخ نشان می‌دهد که با هزار تومان، $\frac{۱}{۱۰}$ کیلوگرم (۱۰۰ گرم) پنیر می‌توان خرید.

مثال ۵

بنزین مصرفی یک ماشین و مسافت طی شده، دو کمیت متناسب‌اند. برخی ماشین‌ها مسافت ۴۵ کیلومتر را با مصرف ۳ لیتر بنزین طی می‌کنند.

الف) نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ب) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده چقدر است و چه چیزی را نشان می‌دهد؟

نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین (با واحدهای انتخاب شده) $\frac{۴۵}{۳}$ است که برابر است با ۱۵. این نرخ نشان می‌دهد که این ماشین با مصرف هر لیتر بنزین ۱۵ کیلومتر را طی می‌کند.

برعکس، نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده برابر است با $\frac{۳}{۴۵}$، که نشان می‌دهد برای طی کردن ۱ کیلومتر، چند لیتر بنزین مصرف می‌شود.

مثال ۶

جدول زیر قیمت یک کالا را، که در بسته‌بندی‌های مختلف عرضه می‌شود، نشان می‌دهد.

وزن	قیمت (تومان)
۵۰۰ (گرم)	۱۵,۰۰۰
۱/۵ (کیلوگرم)	۴۲,۰۰۰
۲ (کیلوگرم)	۵۰,۰۰۰

کدام‌یک باصرفه‌تر است؟

برای اینکه این قیمت‌ها به درستی مقایسه شوند، ابتدا باید هر کدام از این کمیت‌ها را با واحدهای یکسان اندازه‌گیری کنیم و سپس، نرخ هر کدام را حساب کنیم. مثلاً، وزن را با کیلوگرم و قیمت را با تومان اندازه می‌گیریم. نرخ بستهٔ اول به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{۱۵,۰۰۰}{۰/۵} = ۳۰,۰۰۰$$

یعنی، بستهٔ اول کیلویی ۳۰,۰۰۰ تومان است.

و بستهٔ دوم : $۴۲,۰۰۰ \div ۱/۵ = ۲۸,۰۰۰$؛ یعنی بستهٔ دوم کیلویی ۲۸,۰۰۰ تومان است.

و بستهٔ سوم : $۵۰,۰۰۰ \div ۲ = ۲۵,۰۰۰$ ؛ یعنی بستهٔ سوم کیلویی ۲۵,۰۰۰ تومان است.

بنابراین بستهٔ سوم باصرفه‌تر است.

مثال ۷

نسبت ارزش هر پوند به دلار تقریباً برابر ۳ به ۴ است. ۳,۰۰۰ پوند چند دلار است؟

نوع ارز	خرید	فروش
دلار	۳۴۴۵	۳۴۶۵
یورو	۳۹۰۰	۳۹۲۵
پوند انگلیس	۴۹۱۰	۴۹۷۰
دلار کانادا	۳۶۹۰	۳۷۲۵
دلار استرالیا	۳۵۳	[illegible]
کرون دانمارک	۵۱۵	۵۲۵
کرون نروژ	۴۰۸	۴۱۶
کرون سوئد	۴۰۹	۴۱۷
فرانک سوئیس	۳۵۶۰	۳۶۱۰

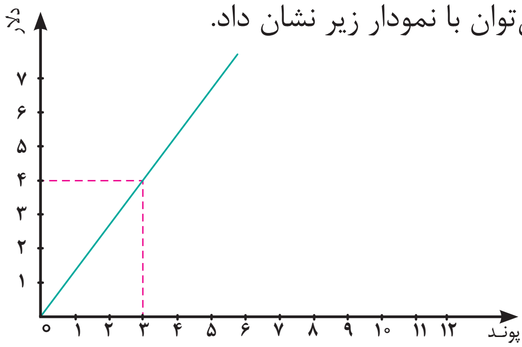
روش رسم شکل : اگر در برابر هر ۳ واحدِ پوند، ۴ واحدِ دلار داشته باشیم:

پوند	۱	۱	۱	
دلار	۱	۱	۱	۱

آنگاه در برابر ۳ واحد ۱,۰۰۰ پوندی، ۴ واحد ۱,۰۰۰ دلاری داریم؛ یعنی:

پوند	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	
دلار	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰	۱,۰۰۰

روش رسم نمودار: رابطهٔ بین این دو کمیت را می‌توان با نمودار زیر نشان داد.



روش جبری : با توجه به اینکه ارزش دلار و ارزش پوند کمیت‌هایی متناسب‌اند، نرخ دلار به پوند به شکل زیر است.

$$\frac{۴}{۳} = k$$

نرخ بالا ضریب تبدیل پوند به دلار است. برای بررسی درستی این مطلب، می‌توانید به تساوی زیر توجه کنید.

$$\text{دلار} = \text{پوند} \times \frac{\text{دلار}}{\text{پوند}}$$

تساوی بالا به معنای آن است که اگر نسبت دلار به پوند را در مقداری پولِ بر حسب پوند ضرب کنیم، حاصل، همان مقدار پول بر حسب دلار است. بنابراین : $\frac{۴}{۳} \times ۳,۰۰۰ = ۴,۰۰۰$.
برعکس، نرخ تبدیل دلار به پوند با ضریب $\frac{۳}{۴}$ به دست می‌آید (پوند = دلار × $\frac{\text{پوند}}{\text{دلار}}$) و نشان می‌دهد هر ۱ دلار برابر $\frac{۳}{۴}$ پوند است.

در نمودار مثال ۳ که مثالی از نسبت است، واحدهای دو محور افقی و عمودی (لیوان به عنوان واحد اندازه‌گیری حجم) یکی هستند. ولی در مثال ۷ که مثالی از نرخ بود دیدیم که واحد محور افقی (پوند) با واحد محور عمودی (دلار) تفاوت دارد.

کار در کلاس ۲

۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب $\frac{\text{۳۰ لیتر}}{\text{۳۲۰ کیلومتر}}$ و $\frac{\text{۲۷ لیتر}}{\text{۳۰۰ کیلومتر}}$ است. کدام ماشین باصرفه‌تر است؟

....

....

۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به‌دست آورید.

....

رابطهٔ بین کمیت‌ها همیشه به گونه‌ای نیست که یکی مضربی از دیگری باشد. در فعالیت زیر، رابطهٔ بین دو کمیت را بررسی می‌کنیم که نمی‌توان یکی را به شکل مضربی از دیگری نوشت.

فعالیت ۳

علی و احمد **با سرعت برابر** در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی او ۹ دور زده بود، احمد ۳ دور زده بود.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	...
۳	۹
...	۱۲
...	۱۵

۲) عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

....

۳) اگر علی و احمد به طور همزمان دوچرخه‌سواری را شروع کرده باشند و علی ۹ دور و احمد ۳ دور زده باشند، دربارهٔ سرعت آنها چه می‌توانستیم بگوییم؟

....

۴) با در نظر گرفتن این حالت، جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
...	۱۲
...	۱۵

۵) عددهای ستون دوم را چگونه می‌توانیم بر اساس عددهای ستون اول محاسبه کنیم؟

....

در حالت اول، مشاهده می‌شود که رابطهٔ بین تعداد دورهایی که علی زده با تعداد دورهایی که احمد زده است، به صورت $A = k+B$ است. در این وضعیت $k = ۶$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، یک واحد افزایش در ستون دوم داریم.

در حالت دوم، این رابطه به صورت $A = kB$ است. در این وضعیت، $k = ۳$ و به ازای هر یک واحد افزایش در ستون اول، ۳ واحد افزایش در ستون دوم داریم. حالت اول یک **رابطهٔ جمعی** و حالت دوم یک **رابطهٔ ضربی** است.

مثال ۸

رابطهٔ بین سن دو نفر، یک رابطهٔ جمعی است. چرا؟

فرض کنید مردی در سال ۱۳۶۸ در سن ۳۲ سالگی دارای فرزندی می‌شود. جدول زیر سن این پدر و فرزند در سال‌های بعد را نشان می‌دهد.

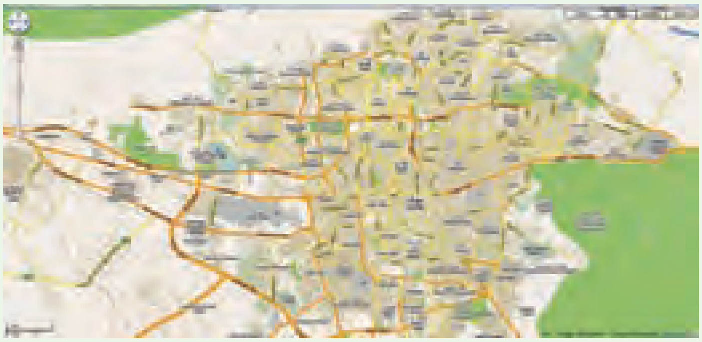
سن فرزند	سن پدر	سال
۱	۳۳	۱۳۶۹
۲	۳۴	۱۳۷۰
⋮	⋮	⋮
۲۶	۵۸	۱۳۹۴

مشاهده می‌شود به ازای هر یک سال که سن پدر افزایش می‌یابد، به سن فرزند نیز یک سال اضافه می‌شود. اگر سن فرزند را x و سن پدر را y باشد داریم: $y = x + ۳۲$. پس رابطه بین سن پدر و فرزند یک رابطه جمعی است.

می‌توان مشاهده کرد که $\frac{۵۸}{۲۶} \neq \frac{۳۴}{۲} \neq \frac{۳۳}{۱}$ است، پس رابطه بین سن پدر و سن فرزند رابطه ضربی نیست.

مسئله‌ها

۱) در نقشهٔ زیر، هر ۲ سانتی‌متر نشان‌دهندهٔ ۵ کیلومتر است. دو نقطه را در روی نقشه انتخاب کنید. فاصلهٔ آنها روی نقشه چقدر است؟ فاصلهٔ واقعی آنها از هم چقدر است؟



۲) مینا برای تهیهٔ نوعی سس سالاد ، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ٪۷۵ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

۳) عکاسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد ۲۵ × ۳۵ بزرگ کند و سپس آن را روی مقوایی به طول ۵۵سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شمارهٔ ماه	**مقدار پس‌انداز** (هزار تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱,۰۵۰
۸	...
۱۰	...

این جدول را به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

۱ـ۲ـ نسبت‌های معکوس

آن روز وقتی از مدرسه به خانه رفتم، متوجه شدم که پدر و مادرم مشغول برنامه‌ریزی برای نقاشی خانه هستند.

پدر گفت: با نقاش صحبت کردم. گفت که ۲ نفر را برای نقاشی خانهٔ ما می‌فرستد. او قول داده است که ۶ روزه کار را تمام کند.

مادر پرسید: ۶ روز؟ چقدر زیاد؟ نمی‌توانیم تعداد کارگرها را بیشتر کنیم تا زمان کمتری طول بکشد؟ مثلاً ۳ کارگر بیایند؟

پدر جواب داد: چندان تفاوت نمی‌کند. اگر ۳ نفر بیایند، چند روز کمتر می‌شود؟

من که درس نسبت و تناسب را خوانده بودم، به سرعت وارد بحث شدم و گفتم: «من حساب می‌کنم.»

و بعد، این تناسب را نوشتم:
$$\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{x}$$

پس از محاسبه به این نتیجه رسیدم که ۳ کارگر نقاش،کارشان را ۹ روزه تمام می‌کنند! چطور شد؟ یعنی کارشان خیلی بیشتر هم طول می‌کشد!

مادرم که کمی کم‌حوصله شده بود، گفت: مثلاً تو ریاضی یاد گرفته‌ای؟ تعداد نقاش‌ها بیشتر می‌شود؛ آن‌وقت به جای اینکه کار زودتر تمام شود، دیرتر هم تمام می‌شود!

من که خودم هم تعجب کرده بودم و نمی‌دانستم چه اتفاقی افتاده است، گفتم: لابد زیاد با هم حرف می‌زنند و کمتر کار می‌کنند!

فردای آن روز با سؤالی که در ذهنم ایجاد شده بود، به کلاس ریاضی رفتم و از دبیرمان سؤال کردم:

آیا تعداد نقاش‌هایی که یک ساختمان را رنگ می‌کنند با زمان اتمام کار، کمیت‌هایی متناسب هستند؟

دبیرمان جواب داد: بله.

با خود گفتم،پس چرا جوابی که من دیروز به پدر و مادرم دادم، منطقی به نظر نمی‌آمد؟ بعد هم ماجرا را برای دبیرمان تعریف کردم. طبق معمول، او با طرح یک فعالیت، جواب من را داد.

فعالیت ۴

برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب، هم‌زمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ *دبیر لبخندزنان به من گفت: حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!*

....

۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

....

۳) رابطهٔ بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

....

فعالیت ۴ رابطهٔ بین دو کمیت متناسب را نشان می‌دهد که بر خلاف کمیت‌هایی که قبلاً با آنها آشنا شده‌ایم، با افزایش مقدار یکی از آنها، مقدار دیگری کاهش می‌یابد.

نکته

در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر نیز افزایش (یا کاهش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطهٔ مستقیم دارند؛ اما اگر با افزایش (یا کاهش) یک کمیت، کمیت دیگر کاهش (یا افزایش) یابد، می‌گویند این دو کمیت متناسب، با هم رابطهٔ معکوس دارند.

پس از انجام دادن این فعالیت گفتم: پس رابطهٔ تعداد نقاش‌ها با تعداد روزهای کار یک رابطهٔ معکوس است؟

دبیرمان گفت: بله. جواب را پیدا کردی!

گفتم: حالا چطور باید تعداد روزهای کار را بر حسب تعداد نقاش‌ها پیدا کنم؟

دبیرمان گفت: فرض کن نقاشی، ساختمانی را در ۱۲ روز رنگ می‌کند. این نقاش در هر روز چه کسری از ساختمان را رنگ می‌کند؟

گفتم: جواب دادن به این سؤال آسان است. این نقاش هر روز $\frac{۱}{۱۲}$ کل خانه را رنگ می‌کند که در ۱۲ روز همهٔ خانه رنگ می‌شود.

دبیرمان پرسید: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۲ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟

جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{۱}{۱۲}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس با هم روزی $۲ \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، دو نفر با هم در ۶ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

دبیرمان گفت: حالا اگر تعداد نقاش‌ها ۳ نفر باشد، چند روز طول می‌کشد تا کل ساختمان رنگ شود؟

جواب دادم: هر کدام روزانه $\frac{۱}{۱۲}$ خانه را رنگ می‌کند؛ پس ۳ نفر با هم، روزی $۳ \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$ خانه را رنگ می‌کنند. بنابراین، ۳ نفر با هم در ۴ روز خانه را رنگ خواهند کرد.

دبیرمان گفت: می‌بینی که حاصل‌ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای لازم برای تمام کردن نقاشی خانهٔ شما، مقدار ثابت ۱۲ است. زیرا کل این کار، نیازمند ۱۲ روز کار یک نقاش است و تعداد نقاش‌ها را به هر نسبت افزایش دهیم، تعداد روزهای مورد نیاز به همان نسبت کاهش می‌یابد؛ به گونه‌ای که حاصل‌ضرب تعداد نقاش‌ها در تعداد روزهای مورد نیاز، عدد ثابت ۱۲ شود.

وقتی دو کمیت با هم رابطهٔ معکوس دارند، به جای اینکه نسبت بین آنها عدد ثابتی باشد، حاصل‌ضربشان عددی ثابت است. در مسئلهٔ تعداد نقاش‌ها و روزهای کاری،

$$۱ \times ۱۲ = ۲ \times ۶ = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

نتیجه

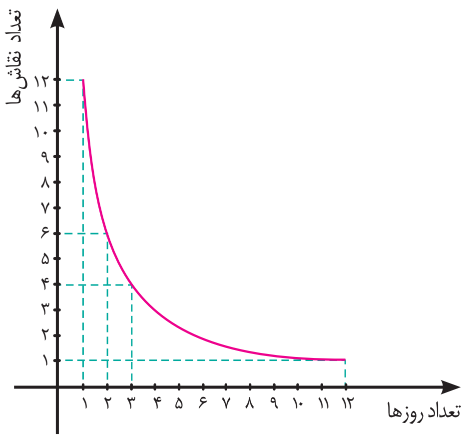
اگر a و b مقادیر متناظر دو کمیت باشند که با هم رابطهٔ معکوس دارند، مقدار $K=a\times b$ ثابت است و اگر c و d دو مقدار متناظر دیگر از همین دو کمیت باشند، داریم:

$$K=a\times b=c\times d$$

$$a=\frac{K}{b} \quad , \quad c=\frac{K}{d}$$

در مسئلهٔ نقاش‌ها و روزهای کار، $K=2\times 6=12$ و داریم : $c=\frac{12}{3}=4$

برای درک بهتر رابطهٔ بین این دو کمیت، نمودار رابطهٔ بین آنها را رسم می‌کنیم.



مثال ۹

محمود هر شب ۳ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. او کتاب را در ۲۰روز تمام می‌کند. اگر محمود بخواهد کتاب را در ۱۵ روز تمام کند، هر شب باید چند صفحه از آن را بخواند؟

به سادگی می‌توان دریافت که برای کاهش زمان مطالعهٔ کتاب، باید تعداد صفحاتی که هر شب محمود مطالعه می‌کند، افزایش یابد. در این مثال، دو کمیت زمان و تعداد صفحات مطالعه شده در هر شب، با هم رابطهٔ معکوس دارند.

در این وضعیت تعداد کل صفحات کتاب برابر است با: $K=3\times 20=60$ و داریم: $c=\frac{60}{15}=4$

کار در کلاس ۳

۱ ـ الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطهٔ معکوس داشته باشند.

....

ب) با در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

....

۲) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم. این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظهٔ روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطهٔ بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

پ) چه رابطه‌ای بین زمان و میزان کاهش طول شمع وجود دارد؟ این دو کمیت چه نوع رابطه‌ای با هم دارند؟

....

مسئله‌ها

۱) جاهای خالی را پر کنید.

- نسبت دوکمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند .... نامیده می‌شود.
- دو کمیت A و B را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از A، یک واحد از B افزایش یابد، دو کمیت رابطهٔ .... دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

....

۳) اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد $\frac{۲}{۳}$ باشد، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟

....

ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟

....

پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.

....

ت) رابطهٔ بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

۴) جدول زیر نوعی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازهٔ کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱,۲۰۰	....	....
متوسط	۴	۳,۰۰۰	....	....
بزرگ	۱۵	۱۰,۰۰۰	....	....

الف) جدول را کامل کنید.

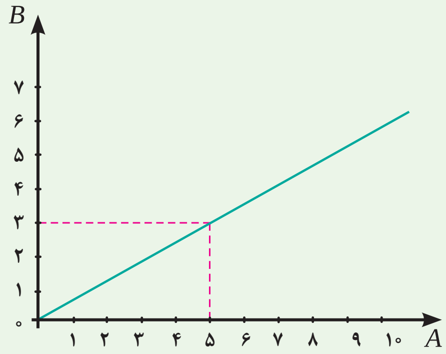
ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

۵) نمودار مقابل رابطهٔ بین کمیت A و کمیت B را نشان می‌دهد:

الف) ضریب تبدیل A به B و B به A را بنویسید.

ب) ۳ واحد از A تقریباً معادل چند واحد از B است؟

پ) ۵ واحد از B تقریباً معادل چند واحد از A است؟



۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟

الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛

ب) تعداد شیرهایی که یک حوض آب را پر می‌کنند و زمان پر شدن حوض؛

پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینهٔ آن؛

ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها با فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛

ث) وزن بستهٔ پستی و هزینهٔ ارسال بدون در نظر گرفتن هزینهٔ ثابت؛

ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیهٔ بارهای یک انبار؛

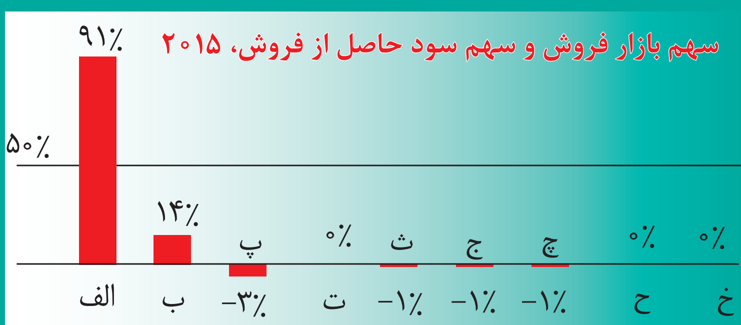
چ) درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

فصل دوم

درصد و کاربردهای آن

گزارشی نشان می‌دهد که در سال ۲۰۱۵ شرکت الف ۹۱ درصد از سود کل بازار تلفن‌های هوشمند را به خود اختصاص داده است.

این در حالی است که شرکت ب هم‌چنان بزرگ‌ترین تولید کننده تلفن هوشمند به شمار می‌رود و ۲۳/۹ درصد از تلفن‌های هوشمند که در سراسر جهان به فروش رسیده، محصول این شرکت است و شرکت الف با کسب۱۷/۲درصد از فروش جهانی، رتبهٔ دوم را به خود اختصاص داده است.



۲ـ۱ـ محاسبه ذهنی درصد

همیشه از دبیران ریاضی می‌شنیدم که می‌گفتند: «ریاضی در زندگی روزمره کاربرد دارد»، ولی هیچ‌وقت به اندازهٔ دیروز درستی این گفته را احساس نکرده بودم. برای خرید وسایل مورد نیاز مدرسه با مادرم به یک مرکز خرید رفته بودم. فروشگاهی اجناس خود را با درصدهای مختلف تخفیف، می‌فروخت. برخی از اجناس با ٪۱۰، برخی با ٪۲۵ و برخی با ٪۵۰ تخفیف به فروش می‌رسیدند. در صف صندوق پرداخت، نفر جلویی ما که سه جفت جوراب برداشته بود، گفت که قیمت‌های حراج خیلی مناسب است؛ هر جفت جوراب قبل از تخفیف ۵,۰۰۰ تومان بوده اما با ٪۲۰ تخفیف، سه جفت جوراب فقط ۶۰۰۰ تومان شده است. از او پرسیدم چگونه حساب کرده است. گفت: سه تا ۵,۰۰۰ تومان، ۱۵,۰۰۰ تومان. سه تا ٪۲۰ هم ٪۶۰ تخفیف. پس باید ٪۴۰ بپردازم. ٪۴۰ از ۱۵,۰۰۰ تومان هم می‌شود ۶,۰۰۰ تومان.

من هم که یک پیراهن با قیمت اولیهٔ ۳۰,۰۰۰ تومان و ٪۵۰ تخفیف، و یک شلوار با قیمت اولیهٔ ۵۰,۰۰۰ تومان و ٪۱۰ تخفیف برداشته بودم، با روشی که او گفته بود شروع به محاسبه کردم. کل خریدم ۸۰,۰۰۰ تومان بود و با در نظر گرفتن ٪۶۰ تخفیف، با محاسباتی که انجام دادم، باید ۳۲۰۰۰ تومان می‌پرداختم.

نوبت به نفر جلویی من رسید. صندوق‌دار گفت: ۱۲,۰۰۰ تومان. او با لحنی اعتراض‌آمیز گفت: «اشتباه است! من باید ۶,۰۰۰ تومان بدهم». بعد هم روش محاسبهٔ خود را برای صندوق‌دار توضیح داد. صندوق‌دار هم با لحنی کنایه‌آمیز و عصبانی گفت: پس اگر دو جفت جوراب دیگر هم بردارید، لابد همهٔ جوراب‌ها مجانی می‌شوند! نفر جلوی من گفت: جدی؟!

نفر جلویی من هنوز متوجه مسئله نشده بود؛ اما من در یک لحظه فهمیدم که هر دو ما چه اشتباهی کرده‌ایم. در تمام مدت خوشحال بودم که نفر اول نبودم، چون آن‌وقت من جای او بودم و ...!

درصد از مفاهیمی است که در زندگی روزمره کاربردهای بسیاری دارد. اشتباهی که در وضعیت صفحهٔ قبل رخ داده بود، از اشتباهاتی است که برای برخی افراد پیش می‌آید. با انجام دادن فعالیت زیر، با مفهوم درصد بیشتر آشنا می‌شوید.

فعالیت ۱

هنرجویان هنرستانی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است.

الف) از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

....

ب) چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

....

پ) آیا جمع درصدهای هنرجویان شرکت‌کننده از این سه کلاس معنای خاصی دارد؟

....

ت) یکی از هنرجویان گفت: برای محاسبهٔ درصد شرکت‌کنندگان سه کلاس در کار فوق برنامه، می‌توانیم میانگین درصد شرکت‌کنندگان این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که درصدهای یک کمیت را که در موارد مختلف به دست آمده‌اند، نمی‌توان با هم جمع کرد یا میانگین آنها را گرفت و این عملیات معنای خاصی ندارند.

کار در کلاس ۱

۱) برای خرید سه جفت جوراب هر جفت به قیمت ۵,۰۰۰ تومان، پس از ٪۲۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

....

۲) برای خرید پیراهنی به قیمت ۳۰,۰۰۰ تومان با ٪۵۰ تخفیف و یک شلوار به قیمت ۵۰,۰۰۰ تومان با ٪۱۰ تخفیف، چقدر باید بپردازیم؟

....

در زندگی روزمره، در بسیاری از مواقع ماشین حساب یا کاغذ و مداد نداریم و لازم است درصدها را خیلی سریع و به صورت ذهنی محاسبه کنیم.

مثال ۱

٪۹۰ از ۳۰,۰۰۰ چقدر است؟

٪۹۰ یک مقدار، ۹ برابر ٪۱۰ آن مقدار است. پس با توجه به آنکه ٪۱۰ از ۳۰,۰۰۰ برابر ۳,۰۰۰ است، ۹ برابر آن ۲۷,۰۰۰ می‌شود.

کار در کلاس زیر به شما کمک می‌کند که در پیدا کردن درصد به صورت ذهنی مهارت پیدا کنید.

کار در کلاس ۲

٪۲ از ۳۰,۰۰۰ تومان، ۶۰۰ تومان است. محاسبه‌های زیر را به صورت ذهنی انجام دهید و در هر مورد، روش محاسبهٔ خود را توضیح دهید.

۱) ٪۴ از ۳۰,۰۰۰ تومان

۲) ٪۱۰ از ۳۰,۰۰۰ تومان

۳) ٪۹۲ از ۳۰,۰۰۰ تومان

۴) ٪۵۰ درصد ۳۰,۰۰۰ تومان را به چند روش می‌توانید پیدا کنید؟ روش‌های خود را توضیح دهید.

در بسیاری از مواقع، اگر درصدی از یک مقدار را بدانید، می‌توانید درصدهای دیگری از همان مقدار را به دست آورید. در برخی موارد دیگر، راه ساده‌تر این است که درصد را به کسر تبدیل کنیم. برای مثال، پیدا کردن یک‌چهارمِ ۱۲۴ (عدد ۳۱ است) از پیدا کردن ٪۲۵ آن مقدار ساده‌تر است؛ کافی است آن را بر ۴ تقسیم کنیم. در برخی مواقع نیز می‌توانیم **به کمک کسر**، درصدی از یک مقدار را **به طور تقریبی** بیان کنیم؛ برای مثال، به جای پیدا کردن $۳۳\frac{۱}{۲}$ از ۳۶۹، بهتر است $\frac{۱}{۳}$ آن را (که عدد ۱۲۳ است) به دست آوریم؛ زیرا $۳۳\frac{۱}{۲}$ تقریباً $\frac{۱}{۳}$ است.

کار در کلاس ۳

۱) ٪۳۳ درصد ۳۰,۰۰۰ تومان را به چند طریق می‌توانید پیدا کنید؟ روش‌های خود را توضیح دهید.

۲) اگر بخواهید $٪۱۲\frac{۱}{۲}$ عدد ۱۶۰ را به طور ذهنی به دست آورید، چگونه عمل می‌کنید؟

مسئله‌ها

۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه زده شده بود، مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود ۵ توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد.

الف) در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

....

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

....

پ) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟

....

۲) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون، در جدول زیر آورده شده است:

الف) جدول را کامل کنید.

ب) درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

شمارهٔ آزمون	تعداد سؤال‌های آزمون	تعداد پاسخ‌های درست	درصد پاسخ‌های درست
۱	۹	۷	...
۲	۶	...	۱۰۰٪
۳	۱۰	۷	...

۳) با توجه به اینکه ٪۳۵ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷۰ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۲۰۰   ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰   پ) ۵ درصد ۲۲۰۰

ت) ۳/۵ درصد ۲۲۰۰   ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰   ج) ۲۱ درصد ۲۲۰۰

....

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

درصد
٪۲۵
٪۵۰
٪۳۰
٪۱
٪۱۰
٪۱۰۰
٪۳۰۰
$\frac{۱}{۲}$٪

توصیف	مثال
من نصفِ نصف هستم.	
من با یک برابرم.	
من از یک چهارم کمتر، ولی از یک صدم بیشتر هستم.	
من با $\frac{۱}{۲}$ برابرم.	شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه
من از نصف کمتر و از یک‌چهارم بیشترم.	
من از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کمترم.	
من یک‌دهمِ یک‌دهم هستم.	
من از یک بیشترم.	

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس، ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ٪۱۰ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ٪۱۰ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ با یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به‌دست آورید.

....

۶) درصدی بنویسید که از $\frac{۱}{۲}$ بیشتر و از $\frac{۳}{۴}$ کمتر باشد. ....

۷) مسعود گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم.

سعید پرسید: مثلاً سریع بگو ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت: ۴۹/۵ = ۵/۵ − ۵۵ .

سعید پرسید: ۶۰ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: ۸۴ = ۱۴ × ۶ .

سعید پرسید: ٪۲۵ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ مسعود گفت: ۱۱ = ۴ ÷ ۴۴.

سعید گفت: ٪۲۵ درصدِ حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان.

در هر حالت، روش محاسبهٔ مسعود را توضیح دهید.

....

۸) الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟

ب) چند درصد از ۹۰ ، برابر با ۸۰ است؟

....

۹) جعفر می‌خواهد نمرهٔ ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ٪۴ بیشتر به سؤال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

....

۱۰) نرگس از فروشگاه (الف) و ناهید از فروشگاه (ب) دو کیف کاملاً یکسان خریدند. قیمت اولیهٔ کیف در هر دو فروشگاه برابر بود. در زیر، تبلیغ فروش دو فروشگاه را می‌بینید.

فروشگاه (الف)	فروشگاه (ب)
همهٔ اجناس فروشگاه با ۳۵ درصد تخفیف به فروش می‌رسد	۲۵ درصد تخفیف +۱۰ درصد تخفیف هدیه به مناسبت بازگشایی مدارس

کدام‌یک مبلغ بیشتری پرداخته است؟ نرگس یا ناهید؟

....

۲ـ۲ـ درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱

قرار بود برای روزنامهٔ دیواری مدرسه خبرهایی در زمینهٔ رشد فناوری در سال‌های گذشته جمع‌آوری کنم. در حال جست و جو در سایت‌های مختلف بودم که ناگهان خبر زیر نظرم را جلب کرد. ولی هر چه سعی کردم آن را تفسیر کنم، نتوانستم.

رشد ٪۱۲۵؟ درصدهایی که تاکنون با آنها کار کرده بودم، کمتر از ٪۱۰۰ بودند. همیشه فکر می‌کردم که درصدی از یک کل باید از ۱، یعنی ٪۱۰۰، کمتر باشد. پس، درصدی که مقدار آن بیشتر از ٪۱۰۰ باشد، که از یک کل بیشتر می‌شود! چه معنایی دارد؟ برای اینکه از درستی خبری که پیدا کرده بودم مطمئن شوم، این سؤال‌ها را با مسئول تهیهٔ خبرنامهٔ مدرسه در میان گذاشتم. او گفت: رشتهٔ من ریاضی نیست ولی با اطلاعاتی که دربارهٔ درصد دارم، برایت توضیح می‌دهم.

آیا تا به حال شنیده‌ای که قیمت تمام شدهٔ یک جفت کفش در کارخانه ۳۰,۰۰۰ تومان است ولی این کفش در فروشگاهی ۹۰,۰۰۰ تومان فروخته می‌شود؟

گفتم: بله.

گفت: می‌توانی توضیح بدهی یعنی چه؟

گفتم: بله، یعنی قیمت کفش در فروشگاه سه برابر قیمت تمام شدهٔ آن در کارخانه است.

گفت: فکر می‌کنم در درس ریاضی، اگر بخواهید نسبت قیمت کفش در فروشگاه را به قیمت کفش در کارخانه بنویسید، چنین می‌نویسید: ۹۰,۰۰۰ به ۳۰,۰۰۰ یا ۳ به ۱. یعنی، قیمت کفش در فروشگاه

سه برابر قیمت تمام شدهٔ کفش در کارخانه است؛ درست است؟

گفتم: بله.

گفت: اگر بخواهید این نسبت را با درصد نمایش بدهید، آن را چگونه می‌نویسید؟

گفتم: $\frac{۳}{۱} \times ۱۰۰ = ۳۰۰٪$

گفت: امیدوارم از جوابی که دادید، متوجه موضوع شده باشید. از درصد همیشه برای بیان جزئی از یک کل استفاده نمی‌شود؛ بلکه از آن برای مقایسهٔ مقادیر یک کمیت در زمان‌ها یا شرایط مختلف نیز استفاده می‌کنند. در این وضعیت است که درصد می‌تواند مقداری بیشتر از ۱۰۰٪ را نیز نشان دهد.

پرسیدم: با این حساب، آیا درصد کمتر از ۱٪ هم داریم؟

گفت: البته! در این وضعیت، درصد هم می‌تواند مفهوم جزئی از کل را داشته باشد و هم مقایسه را نشان می‌دهد.

مثال ۲

تعداد اعضای یک کانون ورزشی در آغاز تأسیس ۲۴ نفر بود. بعد از شش ماه و با تبلیغات بسیار، در حال حاضر ۸۵ نفر عضو این کانون هستند. در بررسی این خبر می‌بینیم که در مدت تأسیس کانون تا این زمان، عضویت در این کانون بیشتر از سه برابر تقریباً $\frac{۸۵}{۲۴} \times ۱۰۰ \approx ۳۵۴٪$ شده است. در این مثال، مقادیر یک کمیت در دو زمان متفاوت مورد مقایسه قرار گرفته است.

مثال ۳

در سال ۱۳۹۰ در یک سرشماری، آمار کسانی که به یک لهجهٔ خاص صحبت می‌کردند ۰/۹٪ جمعیت ایران اعلام شد. اگر جمعیت ایران به طور تقریبی در آن سال ۷۸ میلیون نفر بوده باشد، چند نفر به آن لهجه صحبت می‌کرده‌اند؟

۰/۹٪ یعنی: $\frac{۰/۹}{۱۰۰} = ۰/۰۰۹$

پس داریم: $۰/۰۰۹ \times ۷۸,۰۰۰,۰۰۰ = ۷۰۲,۰۰۰$ نفر

مثال ۴

برای پیدا کردن مقدار $\frac{۱}{۴}$٪ مقدار ۱۲۰ به صورت ذهنی، ابتدا می‌توان گفت که ۱٪ از ۱۲۰ برابر است با ۱/۲. در نتیجه داریم: $۱/۲ \div ۴ = ۰/۳$

مثال ۵

برای پیدا کردن مقدار تقریبی ٪۲۴۹ از ۱۲۰ به صورت ذهنی می‌توان گفت که ٪۲۴۹ تقریباً برابر است با ٪۲۵۰ که به معنای دو و نیم برابر آن است. پس داریم: ۳۰۰ = ۱۲۰ × ۲/۵.

کاردرکلاس ۴

۱) ٪۰/۲ از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

....

۲) ۵ نفر از ۴,۰۰۰ نفر چند درصد این افرادند؟

....

۳) ٪۱۴۰ از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

....

۴) وزن مریم در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۲۱ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

....

۵) مثالی بیان کنید که رشد ۱۲۴ درصدی را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

....

۶) مثالی بیان کنید که کاهش ٪۰/۸ را نشان دهد. آن را تفسیر کنید.

....

برای محاسبهٔ درصدی از یک مقدار، می‌توانیم درصد را به صورت کسر بنویسیم و کسری از یک مقدار را پیدا کنیم. همچنین همان‌طور که مشاهده کردید، می‌توانیم به صورت ذهنی و با روش‌هایی مانند روش بالا آن را یافت. یکی از روش‌هایی که به کمک آن می‌توانیم مسئله‌های مرتبط با درصد را حل کنیم، نمایش مسئلهٔ درصد با **معادله** است.

فعالیت ۲

۱) یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان $\frac{۲}{۳}$ از ۲۴ را پیدا کرد.

....

۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم، یک تساوی با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان ٪۳۰ از ۳۶ را پیدا کرد.

....

۳) یک تساوی با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله، مقدار اولیه را با X ، درصد را با a و مقدار نهایی را با Y نشان دهید.

....

۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکیY، و در یکی a و در یکی X مجهول باشد.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که مسئله‌های مرتبط با درصد را همواره می‌توان به کمک معادله حل کرد. برای این‌کار مهم‌ترین مرحله، تشخیص مجهول است.

مثال ۶

علی ماهانه ۱,۸۰۰,۰۰۰ تومان حقوق دریافت می‌کند. از این مبلغ ٪۷ مالیات کم می‌شود. حقوق احمد بعد از کسر مالیات ۱,۷۵۰,۰۰۰ تومان است. حقوق کدام‌یک بیشتر است؟

۱۲۶,۰۰۰ = ۱,۸۰۰,۰۰۰ × ۰/۰۷ = حقوق × درصد مالیات = مقدار مالیاتی که از حقوق علی کم می‌شود

۱,۶۷۴,۰۰۰ = ۱۲۶,۰۰۰ − ۱,۸۰۰,۰۰۰ = مقدار مالیات − حقوق = مبلغ دریافتی

پس، حقوق احمد بیشتر است.

این مسئله را به صورت دیگری نیز می‌توانیم حل کنیم. اگر حقوق احمد را با A نمایش دهیم، داریم:

$$\text{دریافتی احمد} = A - (۰/۰۷ \times A) = A \times (۱ - ۰/۰۷) = ۰/۹۳ \times A$$

$$۱,۷۵۰,۰۰۰ = ۰/۹۳ \times A \Rightarrow A = \frac{۱,۷۵۰,۰۰۰}{۰/۹۳} \approx ۱,۸۸۱,۷۲۰$$

یعنی، حقوق احمد قبل از کسر مالیات تقریباً ۱,۸۸۰,۰۰۰ تومان است.

کار در کلاس ۵

علی در یک تعمیرگاه لوازم خانگی کار می‌کند. به ازای هر دستگاهی که تعمیر می‌شود، ٪۷۰ هزینهٔ تعمیر را علی و بقیه را صاحب تعمیرگاه دریافت می‌کند.

الف) معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ بین هزینه‌های دریافتی و پولی را که علی دریافت می‌کند نشان دهد.

....

....

ب) اگر علی در این ماه ۷۵۰,۰۰۰ تومان دریافت کرده باشد، صاحب فروشگاه چقدر دریافت کرده است؟

....

....

مسئله‌ها

۱) جدول زیر را کامل کنید.

درصد	به صورت کسر	به صورت اعشاری
۳۷/۵٪	...	...
...	$\frac{۱۱۰}{۱۰۰}$	...
۱٪	...	
...	...	۰/۰۰۵
...	$\frac{۱}{۸}$	...
$\frac{۲}{۵}$٪	...	...

۲) ۰/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷٪ همان مقدار ؟ چرا ؟

....

۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است:

در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۲۰۰,۰۰۰ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۲۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد:

الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

....

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

....

۲ـ۳ـ درصد تغییر

آیا تا کنون به این مسئله فکر کرده‌اید که یک نفر در بازار سهام، چگونه تصمیم‌گیری می‌کند؟ افرادی که در این حوزه فعالیت دارند، باید بتوانند درصد تغییر قیمت سهام مختلف را با هم مقایسه کنند. در بسیاری از گزارش‌های دولتی، تغییرات در سال‌های مختلف را با درصد تغییر بیان می‌کنند. فعالیت زیر در درک این مفهوم به شما کمک می‌کند.

خواندنی ۱

در علم اقتصاد، بورس به بازاری اطلاق می‌شود که قیمت‌گذاری و خرید و فروش کالا و اوراق بهادار در آن انجام می‌پذیرد.

واژهٔ **بورس**(Bourse) در زبان فرانسوی به معنای کیف پول است. در اوایل قرن پانزدهم میلادی، فردی هلندی به نام **واندر بورس**(Vander Bourse) زندگی می‌کرده است که صرّافان شهر در مقابل خانهٔ او به داد و ستد کالا و اوراق بهادار می‌پرداختند. از این رو بعدها کلیهٔ مکان‌هایی که در آنها داد و ستد پول، کالا و اسناد مالی و تجاری صورت می گرفت، **بورس** گفته شد.

بورس ایران در سال ۱۳۴۶ راه‌اندازی شد.

فعالیت ۳

قیمت کالایی در سال گذشته x تومان بود. امسال این کالا با ۱۵٪ افزایش قیمت به فروش می‌رسد. مقدار افزایش قیمت کالا را بر حسب x بنویسید.

مقدار افزایش قیمت کالا = ... × .... = ...

اگر قیمت جدید کالا را با y نشان دهیم، معادله‌ای بر حسب x بنویسید که بتوانید به کمک آن قیمت جدید کالا را حساب کنید.

y = ... + ...

به کمک معادلهٔ بالا، درصد افزایش قیمت را بر حسب x و y بنویسید.

۱۵٪ یا ۰/۱۵ = $\frac{\text{......} - \text{......}}{\text{......}}$

اگر تغییر قیمت a٪ باشد، درصد تغییر قیمت را بر حسب قیمت اولیه و قیمت جدید بنویسید.

تعریف

برای هر کمیتی مقدار $\frac{\text{میزان تفاوت در مقدار}}{\text{مقدار اولیه}} = \frac{\text{مقدار اولیه - مقدار نهایی}}{\text{مقدار اولیه}}$ را نسبت تغییر و حاصل (۱۰۰× نسبت تغییر) را درصد تغییر آن کمّیت می‌نامند.

مثال ۷

وزن نوزادی در هنگام تولد ۳/۵ کیلوگرم بود. در معاینهٔ بعدی، وزن او ۵ کیلوگرم بود. درصد افزایش وزن کودک چقدر بوده است؟

$$\frac{۵ - ۳/۵}{۳/۵} \approx ۰/۴۳$$

بنابر این ، این کودک ۴۳٪ افزایش وزن داشته است.

مثال ۸

یک کتاب‌فروشی در آذر ماه ۳۰۰ جلد کتاب کمتر از ماه آبان فروخته است. اگر در ماه آبان ۱,۲۰۰ جلد کتاب فروخته شده باشد، درصد تغییر میزان فروش این کتاب‌فروشی چقدر است؟

$$\frac{۹۰۰-۱۲۰۰}{۱۲۰۰}=\frac{-۳۰۰}{۱۲۰۰}=-۰/۲۵$$

علامت منفی نشان‌دهندهٔ کاهش فروش است. بنابراین، فروش این کتاب‌فروشی با ٪۲۵ کاهش، روبه‌رو بوده است.

مثال ۹

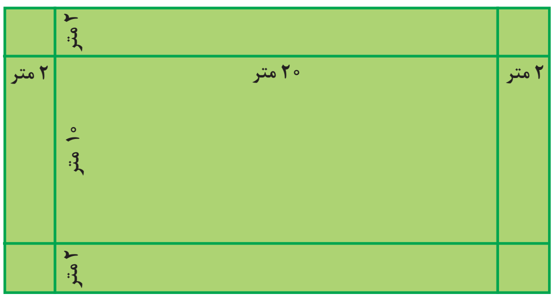
ابعاد یک زمین بازی ۱۰متر × ۲۰ متر است. شهرداری تصمیم دارد این زمین را از هر طرف، ۲ متر گسترش دهد. مساحت زمین چند درصد افزایش خواهد یافت؟

۲۰۰= ۲۰ × ۱۰ : مساحت اولیهٔ زمین (متر مربع)

۳۳۶ = ۲۴ × ۱۴ : مساحت جدید زمین (متر مربع)

$$\text{درصد تغییر مساحت}:\ \frac{۳۳۶-۲۰۰}{۲۰۰}=۰/۶۸$$

بنابراین ، مساحت زمین ٪۶۸ افزایش دارد.



مثال ۱۰

به گزارش زیر توجه کنید :

« چین پرجمعیت‌ترین کشور جهان است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۰۵ تقریباً ۱/۳ میلیارد نفر بود. با وجود قانون *حداکثر یک فرزند برای هر خانواده*، جمعیت چین با نرخ ٪ ۰/۶ در هر سال افزایش یافت.

دومین کشور پر جمعیت دنیا در سال ۲۰۰۵، کشور هند با ۱/۱ میلیارد نفر جمعیت بود. نرخ موالید سالانه در این کشور ٪۲/۲ و نرخ مرگ و میر سالانه ٪۰/۸ بود. »

گزارش بالا به این معناست که نرخ افزایش جمعیت در چین از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۶ برابر ٪۰/۶ بوده است. بر مبنای این گزارش جمعیت چین در سال ۲۰۰۶ چنین تخمین زده شد:

$$\frac{۰/۶}{۱۰۰}=\frac{x-۱/۳}{۱/۳}\Rightarrow x=۰/۰۰۶\times ۱/۳+۱/۳=۱/۳۰۷۸ \text{ میلیارد نفر}$$

نرخ مرگ و میر به معنای درصد کم شدن جمعیت برحسب مرگ و میر است و باید این درصد را به صورت یک عدد منفی در نظر بگیریم. اگر x تعداد جمعیت به دلیل مرگ و میر باشد، داریم:

$$-\frac{۲/۲}{۱۰۰}=\frac{x-۱/۱}{۱/۱}\Rightarrow x=-۰/۰۲۲\times ۱/۱+۱/۱=۱/۰۹۹۴۶۷۶ \text{ میلیارد نفر}$$

کار در کلاس ۶

۱) ابعاد یک پارک به طول x و عرض y را ٪۱۰ افزایش داده‌اند. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.

۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال ٪۲۰ افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره ٪۱۰ افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته ۱,۰۰۰ تومان بوده است.

الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟

....

ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: ٪۳۰ نیست!)

....

مسئله‌ها

۱) در هر پرانتز عبارت درست را مشخص کنید:

الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/ منفی) می‌باشد.

ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ بین ۱ و ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰ ؛ کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

۲) اگر قیمت اولیهٔ یک کالا با x و قیمت جدید آن با y مشخص شده باشد، معادله $y=\frac{۱}{۲}x$ رابطهٔ بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.

الف) درصد تغییر را به‌دست آورید.

ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است، امسال چند تومان است؟

پ) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

۳) قیمت ۴ نوع کالای الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است:

الف) جدول را تکمیل کنید.

ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام **سبد کالا** در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصدتغییر
الف	۱۰۰,۰۰۰	۱۱۵,۰۰۰	...
ب	...	۱۵۰,۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰,۰۰۰	...	۱۰٪
ت	۲۰۰,۰۰۰		-۱۰٪

۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۰/۱ واحد افزایش یافته است. اگر طول ضلع اولیهٔ این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

فصل سوم

واحدهای اندازه‌گیری

شکل ۲ شکل ۱

در تلویزیون‌های قدیمی که اشعهٔ کاتدی باید صفحهٔ تصویر را به اصطلاح *جارو* می‌کرد، اندازهٔ تلویزیون با طول قطر صفحهٔ تصویر بیان می‌شد. برای مثال، یک تلویزیون ۱۹ اینچی تصویری با طول قطر ۱۹ اینچ داشت. امروزه در بسیاری از خانه‌ها تلویزیون‌های قدیمی جای خود را به تلویزیون‌های جدید با صفحه‌های عریض داده‌اند. در این تلویزیون‌ها، گزینه‌هایی وجود دارد که در تلویزیون‌های قدیمی وجود نداشت. یکی از این گزینه‌ها، نسبت تصویر است.

به طور استاندارد در تلویزیون‌ها و صفحه‌های نمایش دو نوع نسبت تصویر داریم. نسبت تصویر ۴:۳ به معنای این است که تصویری با طول ۴۰ اینچ، عرضی برابر با ۳۰ اینچ دارد.

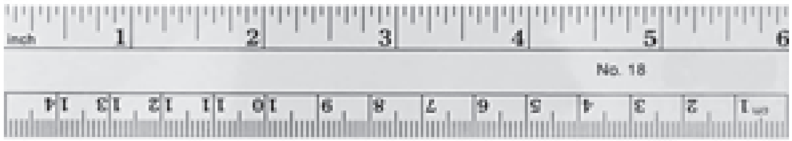
از مقایسهٔ دو تصویر بالا متوجه می‌شویم که نسبت طول به عرض در تصویر دوم بیشتر از تصویر اول است. به همین دلیل، نام *صفحهٔ عریض* روی آنها گذاشته شده است.

۳ــ۱ــ واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی: طول

دیشب در منزل ما شور و هیجانی برپا بود. پدرم قول داده بود که برای ما تلویزیونی نو بخرد. روز خرید تلویزیون فرارسیده بود. اعضای خانواده پشت سر هم از یکدیگر دربارهٔ تلویزیون سؤال می‌کردند؛ خواهرم پرسید: « اندازهٔ تلویزیونی که می‌خواهیم بخریم، چقدر است؟» برادرم گفت: «هر چه بزرگ‌تر، بهتر.» پدرم گفت: «پسر جان، اندازهٔ تلویزیون باید با اندازهٔ اتاق متناسب باشد. یک تلویزیون ۴۶اینچی را که نمی‌توانیم دراین اتاق بگذاریم.» من هم که نمی‌دانستم تلویزیون ۴۶اینچی چقدر است، آن‌قدر ذوق‌زده بودم که بدون‌اینکه سؤالی کنم فوراً رایانه‌ام را روشن کردم و دراینترنت به جست‌وجو پرداختم. تصاویر زیبایی از تلویزیون پیدا کردم. تصاویر زیر سؤال‌هایی در ذهنم ایجاد کرد.

از پدرم پرسیدم: علامتی که در کنار ۳۲ دیده می‌شود، چیست؟ گفت: یعنی اندازهٔ تلویزیون ۳۲ اینچ است. گفتم: یعنی چقدر؟ گفت:الان کار دارم؛ بعداً. گفتم فقط یک سؤال: چرا قطر تلویزیون را نشان داده است؟ گفت: اندازهٔ تلویزیون را با قطرش بیان می‌کنند. اگر خودت کمی جست‌وجو کنی، پاسخ سؤال‌هایت را می‌توانی پیدا کنی.

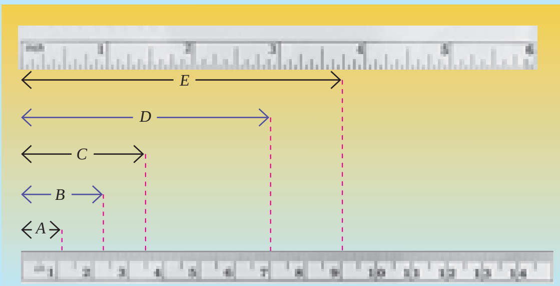
دوباره از پدرم سؤال کردم: «چرا اندازهٔ تلویزیون‌ها را با همان سانتی‌متر بیان نمی‌کنند؟ ۳۲ اینچ یعنی چند سانتی‌متر؟» پدرم خط‌کشی به دستم داد و گفت: «اینچ یکی از واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی[۱] طول است. اگر دقیق به این خط‌کش نگاه کنی متوجه می‌شوی هراینچ (in) چند سانتی‌متر است.»



فعالیت ۱

۱) با توجه به خط‌کشی که بر حسب سانتی‌متر و اینچ علامت‌گذاری شده، بگویید هر اینچ تقریباً چند سانتی‌متر است؟

....



۲) به دو خط‌کش روبه‌رو توجه کنید؛

فکر می‌کنید کدام خط‌کش با سانتی‌متر

و کدام‌یک با اینچ علامت‌گذاری شده است؟

۳) طول‌های مشخص شده را با توجه به هریک از خط‌کش‌ها پیدا کنید.

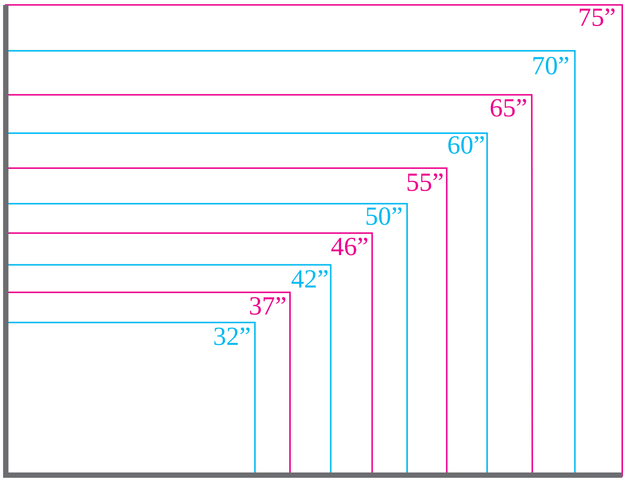
طول بر حسب cm		طول بر حسب in	
A		A	
B		B	
C		C	
D		D	
E		E	

۴) فکر می‌کنید استفاده از کدام واحد برای اندازه‌گیری طول ساده‌تر است؟ چرا؟

....

۱ـ این **گونه** واحدها را **واحدهای مرسوم** نیز می‌نامند.

هنوز پاسخ سؤال‌هایم را پیدا نکرده بودم. پس دوباره به سراغ اینترنت رفتم و جدول زیر را پیدا کردم.[۱]



Size	Width	Height	Area
32”	27.9” 70.9cm	15.7” 39.9cm	437 in² 0.283 m²
37”	32.2” 81.8cm	18.1” 46cm	585 in² 0.376 m²
42”	36.6” 93cm	20.6” 52.3cm	754 in² 0.487 m²
46”	40.1” 101.9cm	22.5” 57.2cm	904 in² 0.582 m²
50”	43.6” 110.7cm	24.5” 62.2cm	1068 in² 0.689 m²
55”	47.9” 121.7cm	27” 58.6cm	1293 in² 0.835 m²
60”	52.3” 132.8cm	29.4” 74.7cm	1538 in² 0.992 m²
65”	56.7” 144cm	31.9” 81cm	1805 in² 1.165 m²
70”	61.1” 155.2cm	34.4” 87.4cm	2102 in² 1.356 m²
75”	65.4” 166.1cm	36.8” 93.5cm	2407 in² 1.553 m²

با دقت در جدول و شکل‌های دو تلویزیون ۳۲ اینچی متوجه شدم که مثلاً تلویزیون‌های ۳۲ اینچی ممکن است طول‌ها و عرض‌های مختلفی داشته باشند و در نتیجه، صفحه‌های آنها نیز ممکن است متفاوت باشند، ولی هنوز نتوانسته بودم بفهمم که برای اتاق پذیرایی ما تلویزیون با چه اندازه‌ای مناسب است.

به جست‌وجو ادامه دادم. جدول روبه‌رو را هم در زیر تصویر دیدم که کمک کرد بفهمم چرا پدرم می‌گوید تلویزیون ۴۶ اینچی برای خانهٔ ما مناسب نیست:[۲]

Screen Size	Recommended Range
19”	2.5’-8.0’(0.7-2.4 m)
22”	3.0’-9.0’(0.9-2.7 m)
28”	3.5’-10.5’(1.0-3.1 m)
32”	4.0’-12.0’(1.2-4.0 m)
37”	4.5’-15.0’(1.5-4.6 m)
40”	5.0’-16.5’(1.6-5.0 m)
42”	5.5’-17.5’(1.6-5.3 m)
46”	6.0’-19.0’(1.0-5.0 m)
52”	6.5’-21.5’(1.9-6.5 m)

۱ـ Size : اندازه Width: عرض Height : ارتفاع Area : مساحت
۲ـ Screen Size : اندازهٔ صفحهٔ تصویر Recommended range : فاصلهٔ توصیه شده

کار در کلاس ۱

۱) با توجه به جدول صفحهٔ قبل، حداقل فاصلهٔ مناسب با تلویزیون ۴۶ اینچی چقدر است؟

....

۲) تصویر زیر یک اتاق نشیمن را نشان می‌دهد. با توجه به جدول صفحهٔ قبل، تلویزیون با چه اندازه‌ای را توصیه می‌کنید؟

....

جدول دیگری پیدا کردم که می‌توانست به من کمک کند تا متوجه شوم که تلویزیون مناسب برای خانهٔ ما باید چه اندازه‌ای داشته باشد. با خودم گفتم: حتماً inch همان اینچ است. ولی feet[1] یعنی چه؟ آیا واحد دیگری برای اندازه‌گیری طول است[2]؟

Viewing Distance in feet	Viewing Distance in inches	Min Size	Max Size
۴	۴۸	۱۹	۳۲
۶	۷۲	۲۶	۴۶
۸	۹۶	۳۲	۶۳
۱۰	۱۲۰	۴۰	۸۰
۱۲	۱۴۴	۴۶	۹۶
۱۴	۱۶۸	۵۲	۱۱۲

۱ـ feet : جمع فوت است. در زبان انگلیسی واحدها جمع بسته می‌شوند. برای مثال ۴ feet بیان می‌شود.

۲ـ Viewing Distance: فاصله از تلویزیون　　Min Size: حداقل اندازه تلویزیون　　Max Size: حداکثر اندازه تلویزیون

فعالیت ۲

۱) اندازه‌های داده شده در ستون دوم (از سمت چپ) جدول زیر را که بر حسب اینچ هستند، به متر تبدیل کنید.

Viewing Distance in feet	Viewing Distance in inches	فاصله از تلویزیون بر حسب متر	Min Size	Max Size
۴	۴۸	...	۱۹	۳۲
۶	۷۲	...	۲۶	۴۶
۸	۹۶	...	۳۲	۶۳
۱۰	۱۲۰	...	۴۰	۸۰
۱۲	۱۴۴	...	۴۶	۹۶
۱۴	۱۶۸	...	۵۲	۱۱۲

۲) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون دوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۳) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون سوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۴) جاهای خالی را پر کنید:

الف) .... متر = ۱ اینچ　　　　ب) .... متر = ... اینچ = ۱ فوت

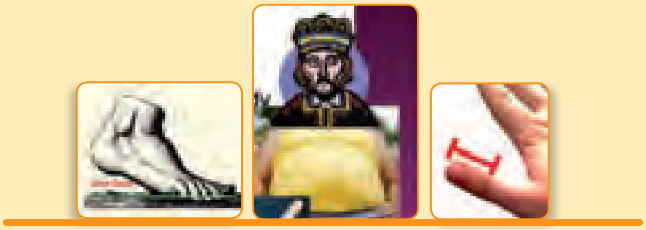
۵) اگر برای پخش فیلم‌های آموزشی بخواهیم تلویزیونی در کلاس شما بگذاریم، فکر می‌کنید چه اندازه‌ای مناسب است؟

....

ما هر روز در زندگی خود در خانه یا مدرسه از اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم. در گذشته، با واحدهای اندازه‌گیری طول (متر، سانتی‌متر، میلی‌متر، کیلومتر و غیره) آشنا شده‌اید. امروزه غالب واحدهای اندازه‌گیری به دو سیستم **استاندارد اندازه‌گیری بین‌المللی** (SI) و سیستم **اندازه‌گیری انگلیسی** (مرسوم) تقسیم می‌شوند.

خواندنی

سیستم اندازه‌گیری انگلیسی راهی برای اندازه‌گیری بود. دراین سیستم، از اعضای مهم بدن به عنوان واحد اندازه‌گیری استفاده می‌شد. برای مثال، در قدیم مردم برای اندازه‌گیری فاصله‌های کوتاه روی زمین از پاهایشان استفاده می‌کردند. مصری‌ها، یونانی‌ها و رومی‌ها نیزاین واحد را به‌کار می‌بردند.



واحدهای دیگر نیز با توجه به ویژگی‌های بدنی پادشاه تعیین می‌شد.
برای مثال، یک یارد اندازهٔ دور کمر پادشاه و یک‌اینچ اندازهٔ اولین بند انگشت شست او بود. تقریباً هر ۱۲اینچ برابر با یک فوت است.
در زمان‌های گذشته انسان برای اندازه‌گیری مسافت‌های طولانی از گام‌هایش استفاده می‌کرد. هر دو گام برابر با ۱ پِیس(pace) بود. رومی‌ها عرض جاده‌ها را بااین واحد تعیین می‌کردند (یک مایل برابر است با طول ۱۰۰۰ پِیس). حجم به کمک وسایل معمول در آشپزخانه مانند فنجان، قاشق غذاخوری یا سطل اندازه‌گیری می‌شد. واژهٔ گالن از واژه‌ای قدیمی گرفته شده است که به معنای *سطل* بود.
با توجه به استاندارد نبودن واحدهای انگلیسی، در ۱۶۷۰ میلادی، سیستم اندازه‌گیری ده‌دهی متریک پیشنهاد شد (در زبان فرانسه، متر معادل واژهٔ *اندازه* است).
در حال حاضر، سه کشور در جهان از سیستم اندازه‌گیری انگلیسی استفاده می‌کنند.
با مراجعه به اینترنت نام‌این سه کشور را پیدا کنید.

واحد طول در سیستم SI، **متر** و در سیستم انگلیسی، **یارد** است. با توجه به‌اینکه واحدهای استفاده شده در سیستم انگلیسی قدیم طوری تعریف شده بودند که افراد مختلف برای یک شیء اندازه‌های مختلفی پیدا می‌کردند، در طول زمان نیاز به استاندارد کردن آنها احساس شد. برخی از واحدهای استاندارد شده طول در سیستم انگلیسی عبارت‌اند از :

۱۲ اینچ (in) = ۱ فوت (ft)
۳ فوت (ft) = ۱ یارد (yd)
۵,۲۸۰ فوت (lb) = ۱ مایل (mi)

ضریب تبدیل این واحدها به یکدیگر به صورت زیر است.

برای تبدیل از	به	ضریب تبدیل (با تقریب کمتر از ۰/۰۱)
مایل	کیلومتر	۱/۶۱
اینچ	سانتی‌متر	۲/۵۴
فوت	متر	۰/۳۱
یارد	متر	۰/۹۱
کیلومتر	مایل	۰/۶۲
سانتی‌متر	اینچ	۰/۳۹
متر	فوت	۳/۲۸
متر	یارد	۱/۰۹

کاردرکلاس ۲

۱- جدول زیر را کامل کنید.

	طول حدس زده شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	طول حدس زده شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری SI	طول اندازه‌گرفته شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی	طول اندازه‌گرفته شده برحسب واحدهای اندازه‌گیری SI
عرض کتاب ریاضی	. . . in	. . . cm	. . . in	. . . cm
طول کتاب ریاضی	. . . ft	. . . m	. . . ft	. . . m
طول پنجرهٔ اتاق	. . . yd	. . . m	. . . yd	. . . m
طول خودکاری که از آن استفاده می‌کنید	. . . in	. . . mm	. . . in	. . . mm
طول اتاق	. . . ft	. . . m	. . . ft	. . . m
دور کمر خودتان	. . . in	. . . cm	. . . in	. . . cm

۲- از نظر شما، کار با کدام سیستم اندازه‌گیری راحت‌تر است؟ چرا؟

....

مسئله ها

۱) ورزشکاری در پرش سه‌گام به ترتیب ۴ فوت و ۶ اینچ، ۴ فوت و ۵ اینچ، ۳ فوت و ۱۱اینچ پرید.

الف)این ورزشکار روی هم چند فوت و چنداینچ پریده است؟

....

ب) او چند متر پریده است؟ ....

پ) اگر رکورداین رشته ۱۲ فوت و ۱۰اینچ باشد، برای شکستن رکورد، چقدر بیشتر باید می‌پرید؟

....

۲) قد شما چند سانتی‌متر است؟

الف) چند متر است؟ ....

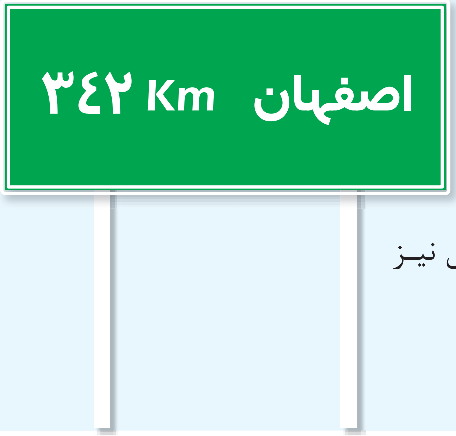
ب) چنداینچ است؟ ....

پ) چند فوت است؟ ....

ت) چند یارد است؟ ....

۳) یک گردشگر از کشوری که از سیستم اندازه‌گیریِ انگلیسی استفاده می‌کند، به‌ایران آمده است.

او در راه اصفهان، تابلوی مقابل را می‌بیند:



فرض کنید شما به عنوان مسئول سازمان جهانگردی می‌خواهید پیشنهاد بدهید فاصلهٔ شهرها را بر حسب مایل نیز روی تابلوهای راهنمایی بنویسند.

حساب کنید تا اصفهان چند مایل باقی مانده است؟

۴) در یک مسابقهٔ دو امدادی، هر تیم باید ۲۰ مایل بدود. اگر هر بازیکن مجاز باشد فقط ۳ کیلومتر بدود، هر تیم چند دونده باید داشته باشد؟

....

۵) یک دبیر هنر، یک بسته نوار تزیینی به طول ۵۰ یارد خرید. هر دانش‌آموز برای تکمیل پروژه به ۰/۸ متر نوار نیاز دارد. ۳۰ دانش‌آموز دراین پروژه شرکت دارند. چند یارد نوار باقی می‌ماند؟

....

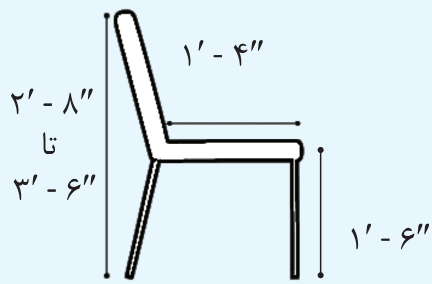
۶) سه وسیله نام ببرید که به طور رایج، اندازه‌شان با واحدهای انگلیسی بیان می‌شود.

....

۷) تحقیق کنید سایز کفش (برای مثال ۳۸، ۴۰ و غیره) چگونه تعیین شده است؟

....

۸) حسین هنرجوی رشتهٔ صنایع چوب است. او برای انجام پروژهٔ خود که ساخت صندلی است به الگوی زیر دست پیدا کرد. ابعاد و اندازه‌های روی شکل بر حسب فوت و اینچ است. این اندازه‌ها را بر حسب سانتی‌متر به‌دست آورید[1].



۱ـ ۲′ یعنی ۲ فوت و ۸″ یعنی ۸ اینچ

۹) در دریانوردی از واحدی به نام گره برای اندازه‌گیری سرعت شناورها در دریا استفاده می‌شود. سرعت یک گره برابر است با یک مایل دریایی بر ساعت. مایل دریایی با واحد مایل که از آن برای اندازه‌گیری طول در خشکی استفاده می‌شود فرق دارد. تحقیق کنید یک مایل دریایی با مایل (اندازه‌گیری در خشکی) چه رابطه‌ای دارد.

....

۱۰) فاصلهٔ دو بندر خارک و بوشهر در دریا برابر با ۳۰ مایل دریایی است. فاصلهٔ این دو بندر از هم چند کیلومتر است؟

....

خواندنی

در قدیم برای اندازه‌گیری سرعت کشتی، روی یک طناب به فاصله‌های یک فوت از هم گره‌هایی می‌زدند. سپس طناب را به پشت کشتی یا قایق طوری می‌بستند که اولین گره روی سطح آب قرار گیرد و بقیه طناب به زیر آب می‌رفت. هر چه کشتی تندتر می‌رفت تعداد گره‌های بیشتری از آب بیرون می‌آمد. تعداد گره‌های روی آب بدون احتساب اولین گره، سرعت را اندازه‌گیری می‌کند. تعداد این گره را سرعت بر حسب گره می‌نامند.

۳ـ۲ـ واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی : جرم

برای شرکت در مراسم عروسی پسرعمویم به همراه خانواده به شهرستان می‌رفتیم. در راه، پدرم از مادرم پرسید: «بالاخره مشخص نشد که چه هدیه‌ای می‌دهیم؟» مادرم گفت: « اجازه بدهید برسیم! به بازار می‌رویم و قطعه‌ای طلا می‌خریم.» پدرم پرسید: «اکنون طلا گرمی چند است؟» مادرم گفت: «نمی‌دانم؛ اخبار ساعت ۱۱ قیمت طلا را در هر روز اعلام می‌کند. ساعت ۱۱ رادیو را روشن کردیم. در پایان اخبار، گوینده رادیو گفت:

امروز طلا در بازار جهانی به قیمت هر اونس ۱,۳۵۴ دلار معامله شد.

پدرم گفت: « یعنی چند؟ » مادرم گفت: «الان بر حسب گرم هم می‌گوید.»

در بازار تهران هر گرم طلای خام به قیمت ۱,۱۳۴,۲۵۰ریال معامله شد.

پرسیدم: «اونس دیگر چیست؟ پدرم گفت: «اونس یکی از واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم انگلیسی است ولی من هم دقیقاً نمی‌دانم چقدر می‌شود. در کتاب‌های درسی ما فقط واحدهای متریک (SI) آموزش داده می‌شد.» با افتخار گفتم: «ولی ما در فنی و حرفه‌ای در کتاب ریاضی واحدهای سیستم انگلیسی را هم می‌خوانیم؛ جلسهٔ گذشته با واحدهای طول آشنا شدیم.» چون قرار بود چند روزی در شهرستان بمانیم، تکالیفم همراهم بود. به امید آنکه توضیحی پیدا کنم، کاربرگ ریاضی‌ام را بیرون آوردم. ولی ...
پدرم پرسید: « خوب، هر اونس چقدر است؟» گفتم: « ننوشته است؛ بایداین فعالیت را انجام دهم تا خودم متوجه شوم! »

فعالیت ۳

۱) وزن یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی تقریباً ۰/۳۶ اونس است. یک سکهٔ ۵۰۰۰ ریالی را در دست بگیرید و وزن آن را بر حسب گرم تخمین بزنید.

۲) بر حسب تخمین خود بگویید ۱ اونس تقریباً چند گرم است.

....

۳) با مراجعه به‌اینترنت، وزن یک سکهٔ ۵,۰۰۰ ریالی را بر حسب گرم پیدا کنید.

....

۴) با در نظر گرفتن وزن یک سکهٔ ۵,۰۰۰ ریالی، هر اونس تقریباً چند گرم است؟

....

برخی واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم انگلیسی عبارت اند از اونس، پوند و تُن.

۱۶ اونس (oz) = ۱ پوند (lb)
۲۰۰۰ پوند (lb) = ۱ تن (T)

همان طور که گفتیم، در بعضی از کشورها از سیستم اندازه‌گیری انگلیسی استفاده می‌شود. ما برای اینکه بتوانیم با مردم این کشورها ارتباط برقرار کنیم باید بتوانیم واحدهای اندازه‌گیری‌مان را به هم تبدیل کنیم. هر اونس برابر با ۲۸ گرم است.

کار در کلاس ۱

۱) فرض کنید می‌خواهید دستور پخت یک غذای اصیل‌ایرانی را برای دوستتان بفرستید و دوست شما اهل کشوری است که در آنجا از سیستم انگلیسی استفاده می‌شود. مقادیر مواد مورد نیاز را برحسب چه واحدهایی می‌نویسید؟

....

۲) ضریب تبدیل اونس به گرم را پیدا کنید.

....

۳) توضیح دهید برای تبدیل اونس به پوند یا برعکس، از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

....

۴) برای تبدیل اونس به کیلوگرم از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

....

۵) برای تبدیل واحدها، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

. . . اونس	۱ گرم
. . . گرم	۱ پوند
. . . اونس	۱ کیلوگرم
. . . کیلوگرم	۱ پوند

مسئله ها

برای انجام دادن تمرین‌های این بخش، با واحدهایی روبه‌رو می‌شوید که در درس به آنها اشاره نشده است. با مراجعه به اینترنت، این واحدها و واحدهای مشابه آنها را نیز در سایر سیستم‌های اندازه‌گیری تشخیص دهید. به کمک ضریب تبدیل یا با استفاده از برنامه‌های نرم‌افزاری که برای تبدیل واحدها در اینترنت پیدا می‌کنید، این واحدها را به هم تبدیل کنید. (نیازی به حفظ کردن این ضرایب نیست.)

۱) پرستو مواد لازم زیر را برای تهیهٔ کیک از یکی از دوستانش در خارج از ایران گرفت. به کمک اینترنت یا منابع دیگر، واحدهایی را که نمی‌شناسید، شناسایی کنید و با انتخاب واحد مناسب و کامل کردن جدول زیر به پرستو کمک کنید تا بتواند کیک خود را بپزد.

مواد لازم	واحدهای سیستم انگلیسی	واحدهای SI
خرمای خرد شده	۱ C	
کره	$\frac{۱}{۲}$ lb	
جوش شیرین	۱ tsp	
نمک	$\frac{۱}{۲}$ tsp	
پودر کاکائو	۳ tbsp	
آرد	۱$\frac{۱}{۲}$ C	
تخم مرغ	۲	
شکر	$\frac{۲}{۳}$ C	
وانیل	۱ tsp	
گردوی خرد شده	$\frac{۱}{۲}$ C	
شکلات خردشده	$\frac{۳}{۴}$ C	
شکر قهوه‌ای	۱$\frac{۱}{۴}$ C	
دمای پخت	۳۵۰ °F	... °C
اندازهٔ ظرف	۱۳ inches × ۹ inches	

۲) پرستو در مقابل می‌خواهد مواد زیر را برای تهیهٔ یک کیک برای دوستش بفرستد. با انتخاب واحد مناسب، جدول زیر را کامل کنید تا مواد لازم برای تهیهٔ کیک مورد نظرش را بر حسب واحدهای اندازه‌گیری در سیستم انگلیسی بفرستد.

مواد لازم	واحدهای سیستم SI	واحدهای انگلیسی
توت فرنگی خرد شده	۷۵۰ g	...
شکر	۵۰ g	...
آرد	۲۵۰ g	...
بیکینگ پودر	۶۰ ml	...
نمک	۲ ml	...
کره	۱۲۰ g	...
تخم مرغ	۱	...
شیر	۱۶۰ ml	...
خامه	۲۵۰ ml	...
دمای پخت	۳۵۰ °C	... °F
اندازهٔ ظرف	ظرف گرد به قطر: ۲۵ cm	...

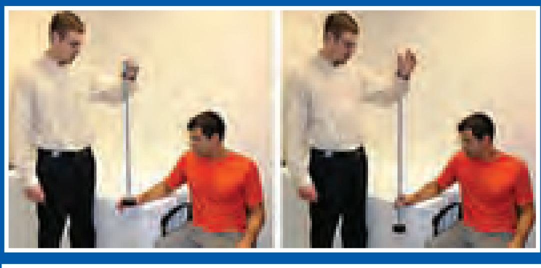
۳) در سیستم انگلیسی برای اندازه‌گیری دما از واحد فارنهایت استفاده می‌شود. رابطهٔ بین درجهٔ فارنهایت و درجهٔ سانتی‌گراد را با فرمول زیر می‌توان نشان داد:

۳۲ + (میزان دما بر حسب سانتی‌گراد × ۱/۸) = میزان دما بر حسب فارنهایت (°F)

لاله با مراجعه به یک سایت وضعیت دمای چند شهر را پیدا کرد. با توجه به جدول، دمای فرانکفورت و آدیس‌آبابا را بر حسب سانتی‌گراد محاسبه کنید.

فصل چهارم

معادله‌های درجهٔ دوم



رایج‌ترین آزمون سرعت عکس‌العمل در تربیت بدنی آزمون *خط‌کش* است. برای اجرا کردن این آزمون، دست‌های آزمودنی را طوری در کنار لبهٔ میز قرار می‌دهند که انگشت شست و سبابهٔ او به طور موازی با یکدیگر قرار گیرند. سپس نقطهٔ صفر خط‌کش را مقابل لبهٔ بالایی دست قرار می‌دهند و در عرض سه ثانیه آن را رها می‌کنند. فرد باید به محض رها شدن خط‌کش، آن را با دست بگیرد. به نظر شما اگر فردی خط‌کش را در فاصلهٔ ۴/۹ سانتی متری پس از رها شدن بگیرد، زمان عکس‌العمل او چقدر بوده است؟

۴ـ۱ـ مفهوم معادله‌های درجهٔ دوم

مادر زهرا از کارآفرینان نمونهٔ کشور است. او یک کارگاه تولید صنایع دستی دارد که افراد زیادی در آنجا مشغول به‌کارند. برای تأمین هزینه‌ها، لازم است که این کارگاه سه میلیون تومان درآمد ماهیانه داشته باشد. مادر زهرا برای کسب درآمد مورد نظر باید بداند چه تعداد کالا تولید شود و به فروش برسد. او برای یافتن جواب این سؤال‌ها، نظر مشاور مالی کارگاه را جویا می‌شود.

مشاور می‌گوید: برای افزایش درآمد می‌توان قیمت کالا را افزایش داد اما با این کار، ممکن است تعداد مشتری‌ها کم و درآمد کمتر شود. یک راه دیگر، افزایش تولیدات است ولی ممکن است همهٔ تولیدات به فروش نرسند و مجبور شویم قیمت را پایین بیاوریم. به این ترتیب، ممکن است درآمد باز هم کمتر شود. باید حساب شده عمل کنیم و رابطهٔ بین تعداد کالای تولید شده و سود به دست آمده را به طور دقیق حساب کنیم.

با بررسی آمار فروش دوره‌های گذشته، می‌توان رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای به فروش رفته را پیدا کرد. بر اساس این اطلاعات، اگر قیمت کالا را با p نشان دهیم و x تعداد کالای فروش رفته با این قیمت باشد، رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$ (با دقت کافی) بین آنها برقرار است.

از طریق این معادله می‌توان پیش‌بینی کرد که اگر قیمت یک واحد کالا p باشد، طبق رابطهٔ بالا، به تعداد x واحد از آن کالا به فروش می‌رسد. بر این اساس، در موقعیت حاضر چند واحد کالا باید تولید شود تا با فروش آنها درآمد کارگاه سه میلیون تومان شود؟ فعالیت زیر به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.

فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

....

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

....

۳) معادلهٔ درآمد را بر حسب x، بنویسید.

....

۴) چند جمله‌ایِ درآمد بر حسبِ x از درجهٔ چند است؟

....

۵) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

....

معادله‌هایی مانند معادلهٔ به دست آمده از فعالیت بالا را **معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌نامند. در بسیاری از مسئله‌های کاربردی، به این گونه معادله‌ها برخورد می‌کنیم.

تعریف

معادله به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند و $a \neq ۰$، معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

مقدارهایی برای x که به ازای آنها تساوی برقرار می‌شود، جواب‌های معادله نامیده می‌شوند.

مثال ۱

کدام یک از معادله‌های زیر، معادلهٔ درجهٔ دوم هستند؟

الف) $(3x-1)(x+2)=6$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $(2x+1)(x-1)=2x^2+2$

معادلهٔ (الف) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(3x-1)(x+2)=6 \quad 3x^2+6x-x-2-6=0 \Rightarrow 3x^2+5x-8=0$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم است.

اما، معادلهٔ (ب) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(2x+1)(x-1)=2x^2+3 \Rightarrow 2x^2-2x+x-1=2x^2+3 \Rightarrow -x-4=0$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ اول است.

مثال ۲

زمینی مستطیل شکل به مساحت ۶۰۰ مترمربع را با ۱۰۰ متر نرده محصور کرده‌ایم. طول و عرض زمین چقدر است؟

اگر طول و عرض این زمین بر حسب متر x و y در نظر گرفته شود، داریم: $2(x+y)=100$ و $xy=600$.

از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $y=50-x$ و با جایگذاری در معادلهٔ دوم داریم:

$$x(50-x)=600 \Rightarrow x^2-50x+600=0$$

این معادله نیز یک معادلهٔ درجهٔ دوم است. پس از یاد گرفتن روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم، می‌توانید آن را حل کنید.

کار در کلاس ۱

در مثال ۲، از معادلهٔ $۲(x+y)=۱۰۰$، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

....

خواندنی‌ها

تاریخچهٔ معادله

معادله‌ها، از اولین دستاوردهای ریاضی بشرند. آنها را می‌توان در قدیمی‌ترین اسناد ریاضیِ مکتوب، مانند متون میخی بابِلی‌های باستان، و پاپیروس‌های مصر باستان، یافت. بنا به ساختار جامعهٔ بابلی، مسئله‌های مربوط به تقسیم ارث، از اهمیت بسیاری برخوردار بودند. اولین پسر همواره بیشترین سهم را دریافت می‌کرد، دومی بیشتر از سومی، و به همین ترتیب.

چنین محاسباتی نسبتاً زیاد رخ می‌دادند و متناظر با معادله‌های خطی ما هستند. پیدا کردن طول و عرض زمین‌هایی که مساحت مشخصی باید داشته باشند منجر به حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌شد. البته مفهوم معادله در آن زمان موجود نبود و فقط مسئله‌هایی مطرح بودند که با دستورالعمل‌هایی حل می‌شدند.

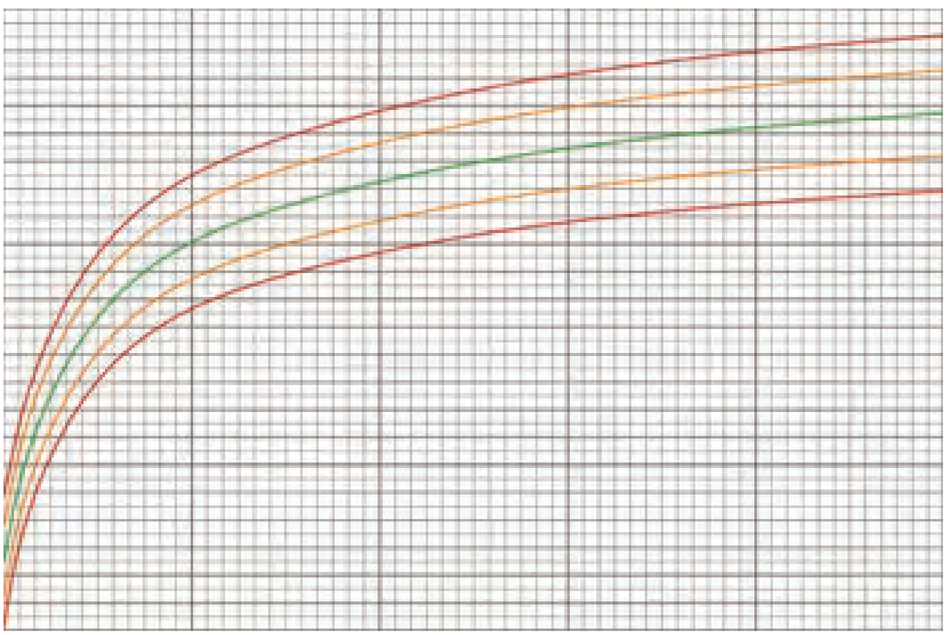
در مسئله‌های مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است و در پاپیروس‌های مصری با علامت h نمایش داده شده است.

پیش از اینکه زبان نمادین جبری مطرح شود، مجبور بودند معادله‌ها را به صورت کلامی بیان کنند. با نوشته شدن کتاب جبر و مقابله توسط خوارزمی در سده‌های سوم و چهارم هجری، جبر وارد ریاضیات شد و به حل معادله‌ها پرداخته شد. واژهٔ جبر به معنای جبران کردن و مقابله به معنای رو به رو قرار دادن دو سوی برابری است.

۴ـ۲ـ رابطه‌های غیر خطی

در فصل‌های قبل، در مورد رابطهٔ بین کمیت‌های متناسب بسیار کار کرده‌اید. در حالتی که دو کمیت به‌طور مستقیم با یکدیگر متناسب‌اند، مقدار هر کدام به صورت مضربی از مقدار دیگری است. در این حالت نمودار این‌گونه رابطه‌ها به صورت خط مستقیم است؛ به همین دلیل، این رابطه‌ها از جمله **رابطه‌های خطی** هستند.

در طبیعت، بسیاری از رابطه‌ها به‌صورت خطی نیستند. برای مثال، طول قد انسان‌ها با سن آنها رابطه دارد. آیا این رابطه یک رابطهٔ خطی است؟ اگر این رابطه، یک رابطهٔ خطی بود، تصور کنید طول قد انسان‌های سالمند چقدر می‌شد؟ می‌دانید که بعد از تولد، طول قد انسان افزایش پیدا می‌کند ولی میزان این افزایش در بازه‌های زمانی ثابت نیست و تقریباً بعد از بیست و دو سالگی، طول قد انسان ثابت می‌ماند. نمودار این رابطه برای یک انسان معمولی مانند شکل زیر است.



فعالیت ۲، تفاوت رابطه‌های خطی و غیرخطی را نشان می‌دهد.

فعالیت ۲

رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

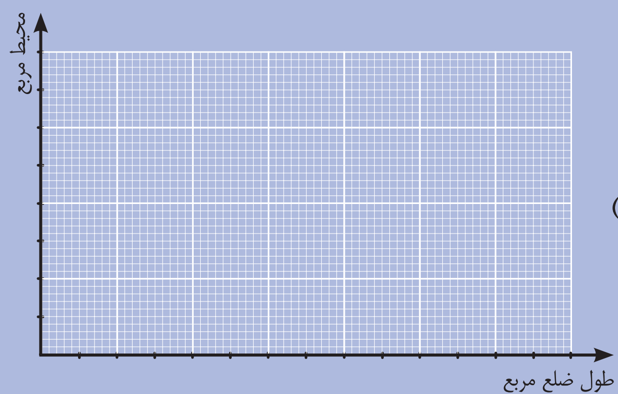
۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

....

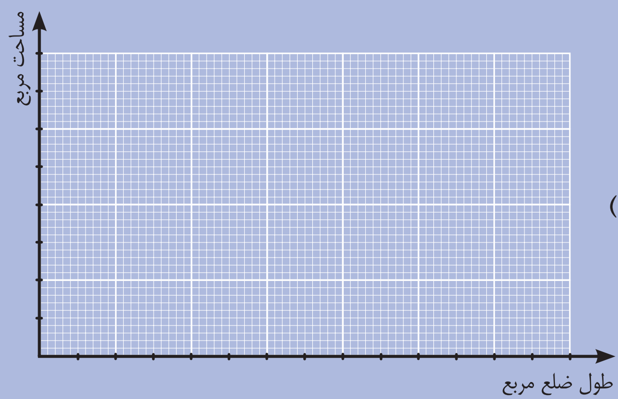
۲) جدول زیر را کامل کنید.

x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
p (محیط مربع)	...	...	...	...	...
s (مساحت مربع)	...	...	...	...	...

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.



شکل (۱)



شکل (۲)

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

....

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

....

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

....

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

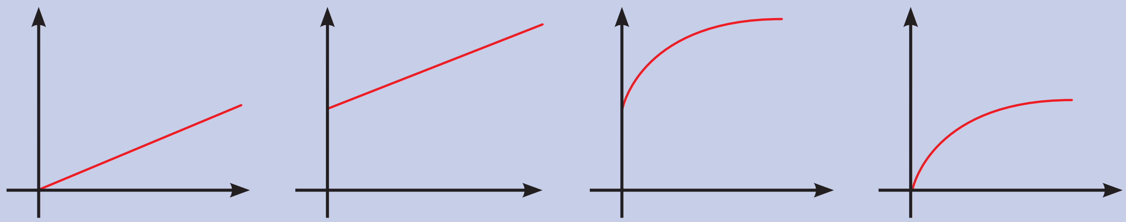
....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که نمودار رابطهٔ بین طول ضلع مربع و محیط آن به صورت خط راست است. در این حالت، نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقداری ثابت است و این دو مقدار باهم رابطهٔ خطی دارند. ولی نسبت افزایش مساحت مربع به طول ضلع آن، مقدار ثابتی نیست. به همین

دلیل، نمودار رابطهٔ طول ضلع مربع و مساحت آن به صورت خط راست نیست و رابطهٔ بین طول ضلع مربع و مساحت آن را **غیرخطی** می‌نامند.

کار در کلاس ۲

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



کار در کلاس زیر، نمودار یک رابطهٔ غیرخطی مهم را بررسی می‌کند.

کار در کلاس ۳

یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن ($x^۲$) را با y نشان دهید.

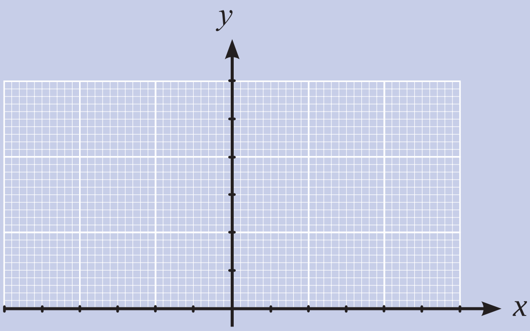
۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

....

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

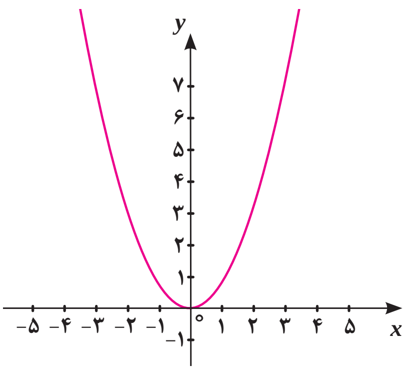
x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	...	...	...	...	...	...	...	...	۱/۴۴	...	...	...	...

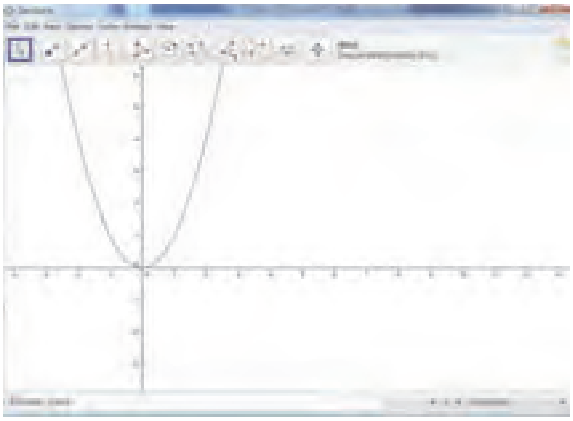
۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ را رسم کنید.



رسم نمودار با جئو جبرا

به کمک جئوجبرا، نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ به طور دقیق‌تر به‌صورت شکل روبه‌رو رسم می‌شود.





برای رسم نمودار یک رابطه، معادلهٔ آن را در کادر پایین صفحه وارد کنید.

در وضعیت‌های زندگی روزمره، گاهی چند پدیده را هم‌زمان بررسی می‌کنیم. در چنین حالاتی ممکن است نمودارِ نمایش‌دهندهٔ این پدیده‌ها با هم برخورد داشته باشند. در فعالیت زیر با معنا و مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه‌ها آشنا خواهیم شد.

فعالیت ۳

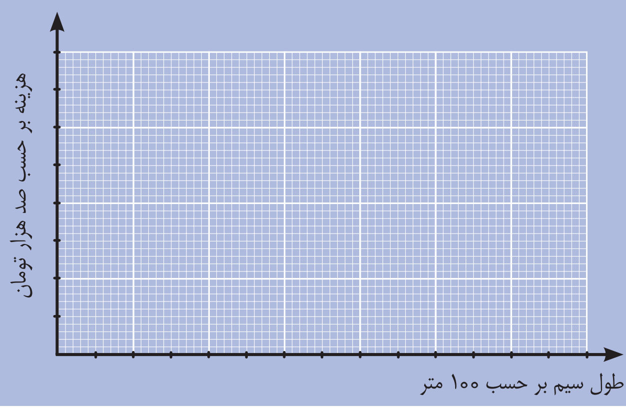
هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	...	...	...	...	...	...	...
درآمد حاصل از فروش (تومان)	...	...	...	...	...	...	...

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشد، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.

....

۵) نقطهٔ تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

....

محل برخورد دو خط، نقطه‌ای است که اگر مختصات آن را در معادله‌های هر دو خط قرار دهیم، تساوی برقرار می‌شود. برعکس، اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه همان محل برخورد دو خط است.

کار در کلاس ۴

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰،۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰،۰۰۰ تومان است.

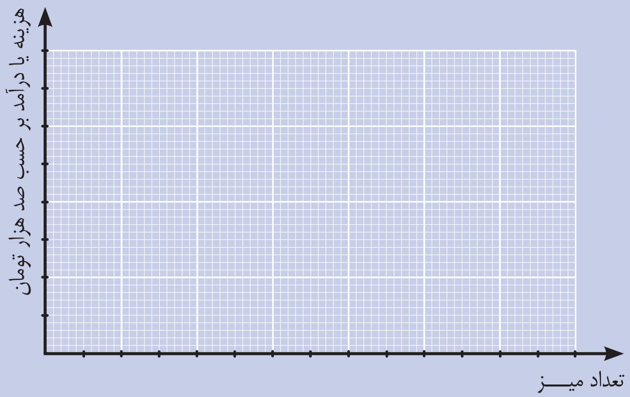
۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزارتومان)	...	...	...	...	...
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزارتومان)	...	...	...	...	...

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

....

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید[1].



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را بیابید.

....

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۱ـ اگر چه تعداد میزها، عدد حسابی و نمودار واقعی گسسته است، برای داشتن تصویر بهتری از روابط، مناسب است نمودار را یک خط فرض کنیم.

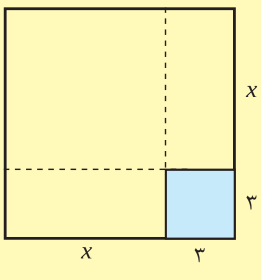
۴ــ۳ــ روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم

در فعالیت‌های قبل با توصیف پدیده‌ها به کمک معادله آشنا شدیم. اما جواب مسئله‌های ما، در واقع با پیدا کردن جواب‌های آن معادله‌ها به‌دست می‌آید. برای حل معادله‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. در فعالیت ۴، با روش حل هندسی معادله‌های درجهٔ دوم آشنا خواهیم شد.

خواندنی

خوارزمی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم، شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آنها را توضیح خواهیم داد.

در این حالت، جملهٔ ثابت C در $ax^{۲}+bx+c$ باید منفی باشد. برای مثال، معادلهٔ $x^{۲}+۶x-۴۰=۰$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی، جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه می‌داریم؛ عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم و معادله را به صورت $x^{۲}+۶x=۴۰$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در این مثال، برابر ۳ است. به این ترتیب، مساحت مربعی با ضلع $x+۳$ را می‌توان حساب کرد.



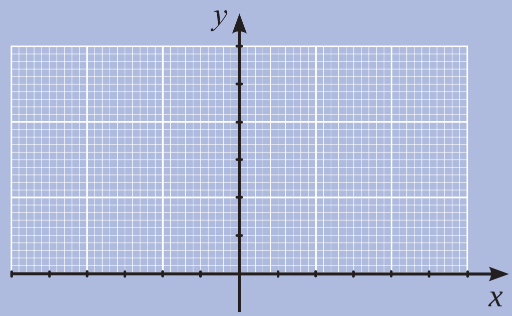
در شکل بالا، مساحت مربع رنگی ۳×۳ می‌شود. مساحت قسمت باقیمانده یعنی $x^{۲}+۶x$ برابر ۴۰ است پس، مساحت مربع بزرگ ۴۹=۹+۴۰ است و طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{۴۹}=۷$ خواهد بود. پس $x+۳=۷$ و در نتیجه $x=۴$. همهٔ معادله‌های درجهٔ دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد. همچنین با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم به دست می‌آید.

فعالیت ۴

۱) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	...	...	...	...	...	...
$۲x+۳$	...	...	...	...	...	...

۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.



۳) مختصات محل برخورد این دو نمودار را بیابید.

....

۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می‌کنند؟

....

۵) آیا طول‌های نقاط برخورد منحنی $y_۱$ و خط $y_۲$ در معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ صدق می‌کنند؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که طول‌های نقاط برخورد دو نمودار رابطه‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ جواب‌هایی برای معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ هستند. برعکس، هر جوابی از این معادله، یک نقطهٔ برخورد نمودارهای $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را نشان می‌دهد. معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ را می‌توان به صورت معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x-۳=۰$ نوشت. ملاحظه می‌شود برای یافتن جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان از این شیوه کمک گرفت.

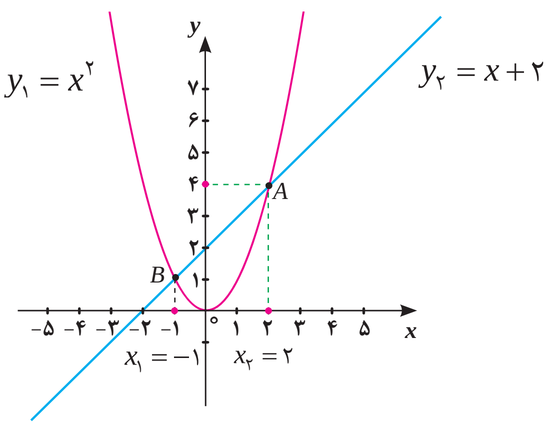
برای مثال، معادلهٔ $x^۲-۲x-۳=۰$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^۲=۲x+۳$ می‌نویسیم. می‌توان گفت جواب‌های این معادله، مقدارهایی از x هستند که به ازای آنها، مقدارهای $x^۲$ و $۲x+۳$ با هم برابر می‌شوند. با رسم نمودارهای $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ و یافتن محل تقاطع این دو نمودار و تعیین طول نقاط تقاطع می‌توان جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۳=۰$ را به دست آورد. به کمک این روش، هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری را نیز می‌توانیم حل کنیم. این روش را **روش هندسی** حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌گویند.

مثال ۳

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-x-۲=۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^۲=x+۲$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=x+۲$ را رسم می‌کنیم. این دو نمودار در نقاط A و B با یکدیگر برخورد می‌کنند. به ازای طول نقطهٔ A و طول نقطهٔ B، مقدارهای $x^۲$ و $x+۲$ مساوی شده‌اند. این مقدارها، دو جواب معادلهٔ $x^۲-x-۲=۰$ می‌باشند. یعنی $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های مسئله هستند.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$x+۲$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵

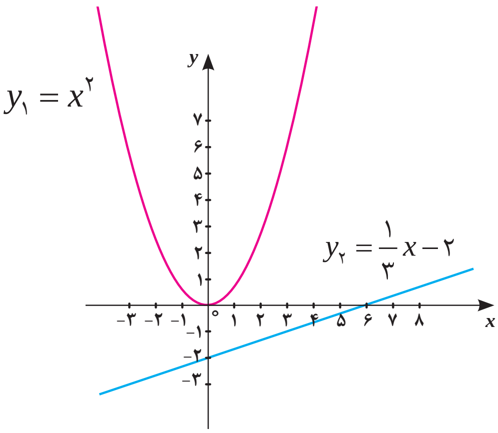


مثال ۴

معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ - x + ۶ = ۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲$ را رسم می‌کنیم. دیده می‌شود که این نمودارها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس، نقطهٔ مشترکی ندارند و به ازای هیچ مقداری از x دو مقدار $x^۲$ و $\frac{۱}{۳}x - ۲$ مساوی نمی‌شوند. پس معادلهٔ $x^۲ = \frac{۱}{۳}x - ۲$ جواب ندارد.

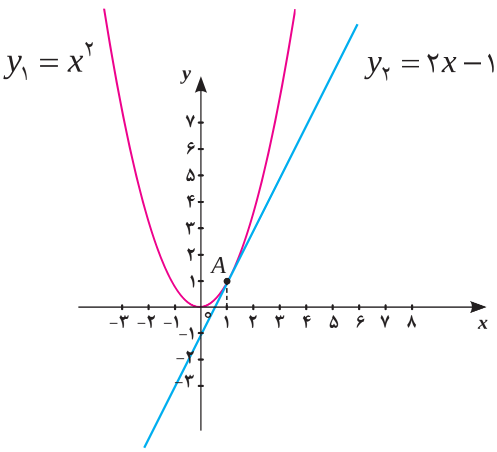
x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$\frac{۱}{۳}x - ۲$	-۳	$-\frac{۸}{۳}$	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	$-\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	-۱



مثال ۵

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲x + ۱ = ۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^۲ = ۲x - ۱$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = ۲x - ۱$ را رسم می‌کنیم. دیده می‌شود که این نمودارها بر هم مماس هستند. با توجه به امکان وجود خطای دید، حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد و برای بررسی درستی حدس خود، از جدول کمک می‌گیریم. در این حالت $x = ۱$ جواب معادله است.



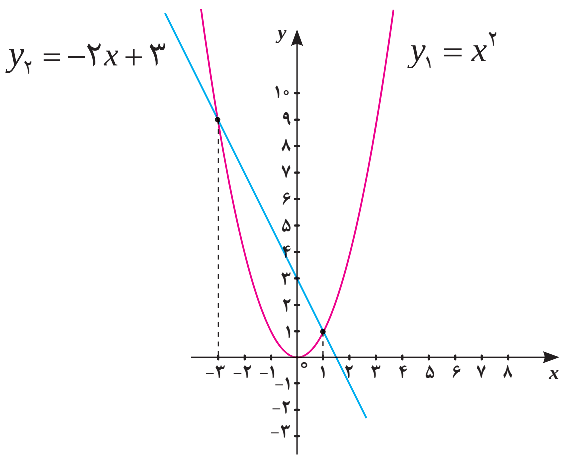
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$x^۲$	۴	۱	۰	۱	۴
$۲x - ۱$	-۵	-۳	-۱	۱	۳

همان طور که در مثال‌ها دیدید، برخی از معادله‌های درجهٔ دوم، دارای یک جواب (یک نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی)، برخی دیگر دارای ۲ جواب (دو نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) و برخی هم بدون جواب (بدون نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) هستند.

مثال ۶

با روش هندسی نشان دهید عدد ۳- یک جواب معادلهٔ $x^2+2x-3=0$ است. سپس جواب دیگر معادله را پیدا کنید.

نمودارهای منحنی $y_1=x^2$ و خط $y_2=-2x+3$ را رسم می‌کنیم.



این دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۳- همدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین ۳- یک جواب معادله است. با دقت در نمودار مشاهده می‌شود که این دو نمودار یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ نیز قطع کرده‌اند. بنابراین، $x=1$ جواب دیگر معادله است.

کاردرکلاس ۵

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^2-2x+1=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $2x^2+x+1=0$

مسئله‌ها

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

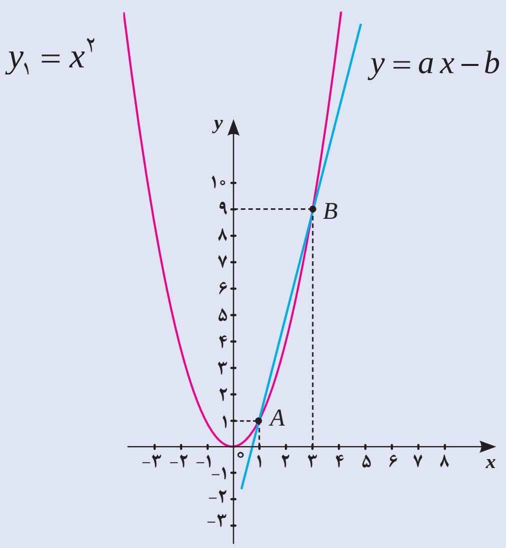
الف) $2x^2 - 3x = 5$

ب) $4x^2 + 8x = 0$

پ) $x^2 + x = 1$

ت) $x^2 + 4x = -4$

۲) خط زیر به معادلهٔ $y = ax + b$ می‌باشد. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشد (**راهنمایی:** یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید، یا ابتدا شیب این خط را بیابید).



روش جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم

با توجه به وجود خطای رسم و اندازه‌گیری، در روش هندسی، همواره نمی‌توان به جواب دقیق رسید. در ادامه، روش دیگری را توضیح می‌دهیم که با استفاده از آن، جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم به‌طور دقیق محاسبه می‌شود.

فعالیت ۵

معادلهٔ $x^{۲}+۶x-۷=۰$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

....

۲) نصف ضریب x در معادلهٔ بالا را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

....

۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

....

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید.

(یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ است.)

....

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به‌دست آورید.

....

روشی را که در بالا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کار بردیم، برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم می‌توان به‌کار برد.

کار درکلاس ۶

معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۲=۰$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

از روش فعالیت ۵ برای حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه استفاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم در چه شرایطی یک معادلهٔ درجهٔ دوم جواب دارد. در صورت وجود جواب، فرمولی هم برای جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم پیدا می‌کنیم.

فعالیت ۶

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax^{۲}+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq ۰$.

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر عدد a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب $x^{۲}$ در آن برابر ۱ باشد.

....

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

....

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

....

۴) عدد به دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

....

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{.....})^{۲}=\frac{.....-۴ac}{.........}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ در چه شرایطی جواب دارد؟

....

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن $b^{۲}-۴ac$ جواب‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}\quad ,\quad x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

با انجام فعالیت صفحهٔ قبل نتیجه می‌گیریم معادلهٔ درجهٔ دوم در صورت مثبت بودن $b^۲-۴ac$، دارای جواب‌های زیر است:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

فرمول‌های بالا را **فرمول‌های محاسبهٔ جواب معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌گویند. در هر معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ ، عبارت $b^۲-۴ac$ را با Δ (بخوانید دلتا) نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادلهٔ درجهٔ دوم این است که $\Delta\geq ۰$.

اگر $\Delta>۰$، معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از : $x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$

اگر $\Delta=۰$، معادله فقط دارای جواب $x=-\frac{b}{۲a}$ است؛ زیرا از فرمول‌های محاسبهٔ جواب معادله، نتیجه می‌شود: $x_۱=x_۲=-\frac{b}{۲a}$.

اگر $\Delta<۰$، معادله جواب ندارد. چرا؟

مثال ۷

جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله $a=۱$ و $b=-۳$ و $c=۱$. بنابراین $\Delta=(-۳)^۲-(۴)(۱)(۱)=۵$.

چون $\Delta=۵>۰$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است:

$$x_۱=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad x_۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

کار در کلاس ۷

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۵x^۲+۲x+۱=۰$ ب) $x^۲-۶=۰$ پ) $x^۲-۳x=۰$

مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^۲+۵x=۰$

ب) $۳x^۲+۱۳x+۳=۰$

پ) $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

ت) $x^۲+x+۲=۰$

ث) $(۲x-۱)^۲=۵$

ج) $(x+۲)^۲=-۴$

۲) اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $۵x^۲+۱۳x+c=۰$ برابر (۳-) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

....

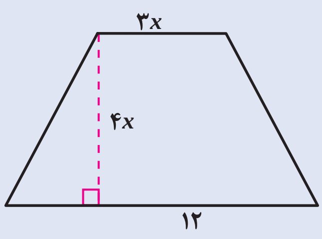
۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

....

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مقابل، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.

....

....



۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

....

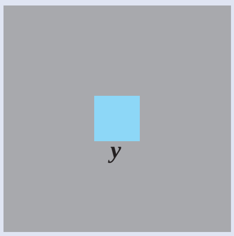
۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

....

۷) نشان دهید $\sqrt{۲}+۱-$ یک جواب معادلهٔ $x^۲+۲x-۱=۰$ است.

....

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ هر ضلع مربع‌ها را بدست آورید.



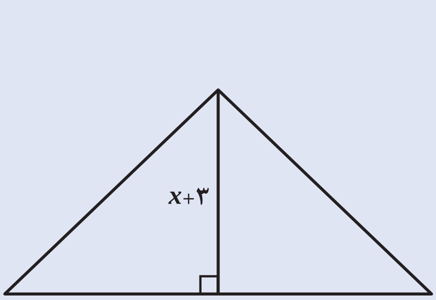
....

....

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیانگذار جبر، کارونا برزینا).

” مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می‌شود.“

این مقدار را پیدا کنید.



۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌مترمربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

....

فصل پنجم

توان‌رسانی به توان عددهای گویا

پژوهشگران به تازگی با استفاده از دست‌کاری ژنتیکی نوعی باکتری، توانسته‌اند روندی برای این باکتری ایجاد کنند که با دریافت هیدروژن و کربن دی اکسید، انرژی تولید کند. این باکتری می‌تواند هیدروژن و کربن دی اکسید را جذب کرده و آنها را به سوخت الکل تبدیل کند. هدف از این کار، رسیدن به یک سطح قابل توجه از بهره‌وری است که بتواند در این زمینه از گیاهان پیشی بگیرد.

محققان اعلام کردند که باکتری‌ها می‌توانند از نور خورشید تا میزان ۱۰ برابر مؤثرتر از گیاهان بهره‌وری کنند.

۵ــ۱ــ مفهوم توان‌رسانی به توان عددهای گویا

محمد مدتی بیمار بود و برای معالجه به دکتر مراجعه کرده بود. دکتر از او در مورد زمان شروع بیماری و شدت آن پرسیده بود. او پس از بهبودی، به مدرسه رفت و از دبیر علوم خود سؤال کرد: «آیا زمان شروع بیماری در تصمیم دکتر برای تجویز دارو مؤثر است؟»

دبیر گفت: «بله. علت بروز بسیاری از بیماری‌ها باکتری‌ها هستند و با گذشت زمان مقدار آنها افزایش می‌یابد؛ مثلاً، نوعی از باکتری‌ها پس از هر ساعت دو برابر می‌شوند. بنابراین، اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، در پایان ساعت‌های اول و دوم و سوم و ... وزن باکتری‌ها به ترتیب ۲ و ۴ و ۸ و ... گرم خواهد شد.»

محمد همان طور که با خود فکر می‌کرد ریاضی در پزشکی هم کاربرد دارد، این سؤال برایش مطرح شد: وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر خواهد شد؟

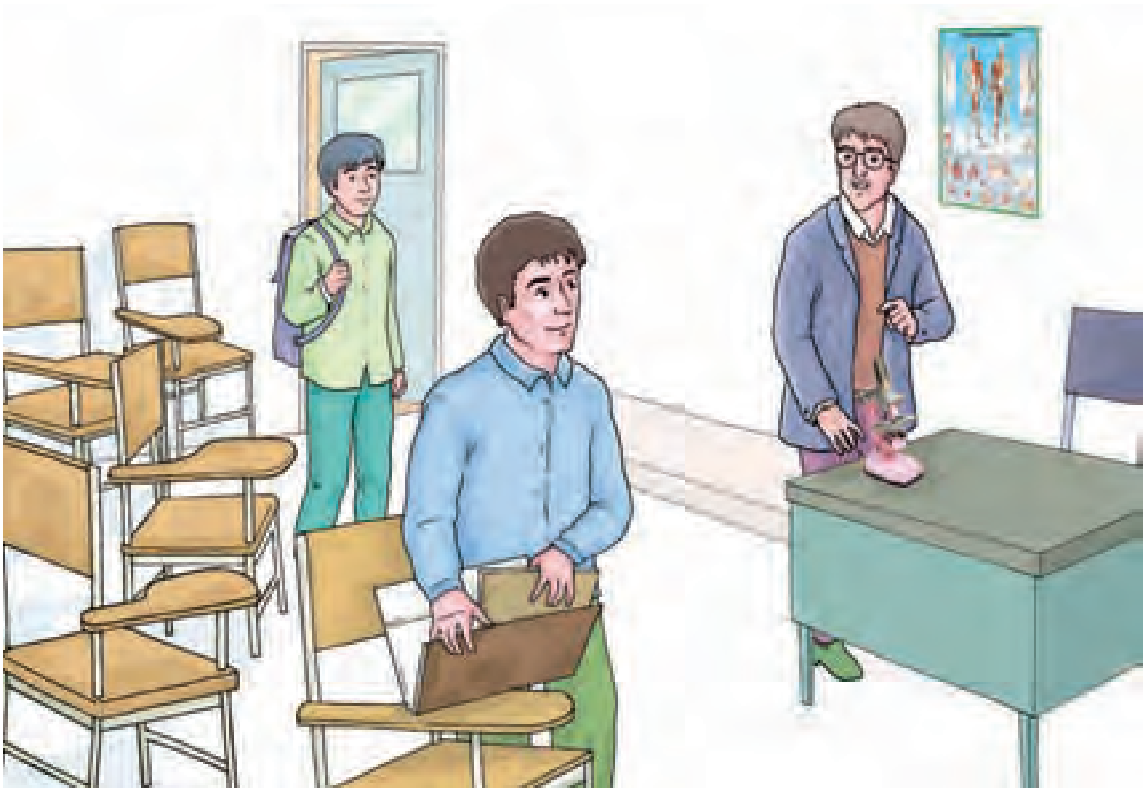
دبیر گفت: «اگر به ارتباط بین وزن باکتری‌ها و زمان سپری شده توجه کنید می‌توانید وزن آنها را حدس بزنید. وزن یک گرم باکتری پس از ۱ ساعت 2^1 گرم، بعداز ۲ ساعت 2^2 گرم و بعداز ۳ ساعت 2^3 گرم و ... می‌شود. آیا می‌توانید حدس بزنید که بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت) وزن باکتری‌ها چقدر می‌شود؟»

محمد گفت: «شاید می‌خواهید بگویید $2^{\frac{1}{2}}$ گرم است.»

دبیر گفت : «فرض کنیم حدسی که زده‌اید درست باشد، آیا این عدد برایتان معنی دارد؟»

محمد گفت: «با عددهایی که توان آنها عدد صحیح است آشنایی دارم؛ اما نمی‌دانم $2^{\frac{1}{2}}$ چیست.»

دبیر گفت: «با انجام فعالیت بعد، شما خودتان هم می‌توانید مقدار این عدد را پیدا کنید.»



فعالیت ۱

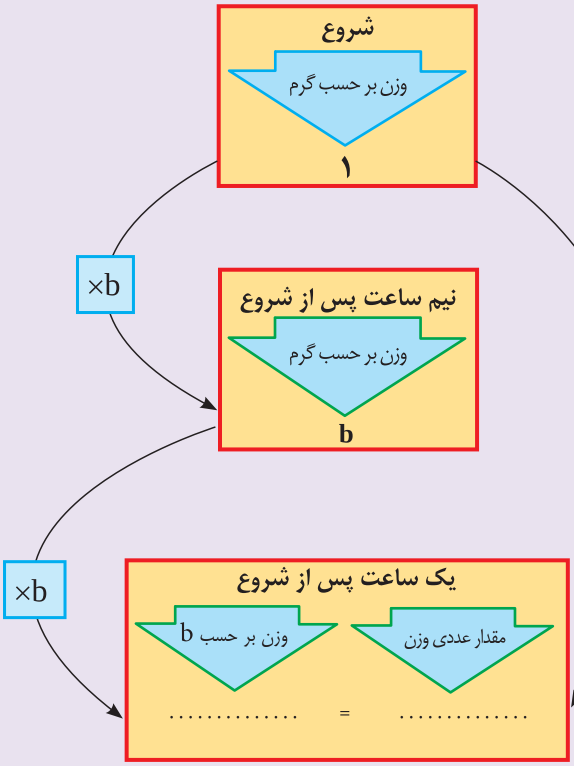
نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشیم، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر نیم‌ساعت b برابر شود، وزن آنها را پس از یک‌ساعت بر حسب b به‌دست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.

....

....

....



۲) وزن ۱ گرم باکتری را پس از یک ساعت برحسب گرم محاسبه کنید و در محل تعیین شده بنویسید. از تساوی حاصل، مقدار b را به‌دست آورید.

....

....

....

محمد گفت: آیا می‌توانیم ازاین فعالیت نتیجه بگیریم که مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ همان $\sqrt{۲}$ است؟

دبیر گفت: بله می‌توانیم. تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ به صورت $\sqrt{۲}$ تعریف مناسبی است. حال فرض کنیم وزن باکتری‌ها پس از یک‌ساعت ۳ برابر می‌شد. اگر با یک گرم باکتری شروع کنیم ، وزنی را که آنها پس از نیم‌ساعت به آن می‌رسند، با نماد $۳^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهیم. این عدد همان $\sqrt{۳}$ است؛ زیرا اگر این عدد را با b نشان دهیم پس از پایان یک‌ساعت مقدار باکتری‌ها از یک طرف ۳ و از طرف دیگر $b^۲$ است. پس $b^۲ = ۳$ ؛ که نتیجه می‌دهد $b = \sqrt{۳}$ ؛ یعنی:

$$۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$$

در حالت کلی، توانِ $\frac{۱}{۲}$ همهٔ اعداد مثبت به همین صورت تعریف می‌شود.

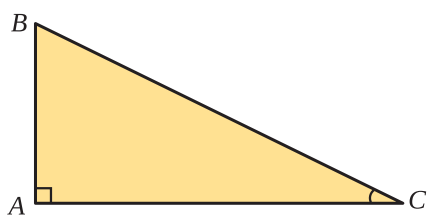
تعریف

اگر a عددی دلخواه و مثبت باشد، بنا به تعریف $a^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{a}$

مثال ۱

الف) نمایش رادیکالی عدد $۳۶^{\frac{۱}{۲}}$ به صورت $\sqrt{۳۶}$ است و $۳۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳۶} = ۶$.

ب) شکل زیر، یک مثلث قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = ۹۰^\circ$). اگر اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه ۵ و ۱۲ باشد، طول وتر را به صورت یک عدد توان‌دار و یک عدد رادیکالی نمایش دهید و آن را ساده کنید.



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۶۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

کاردرکلاس ۱

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۴۹^{\frac{۱}{۲}} =$

$(\frac{۱}{۲۵})^{\frac{۱}{۲}} =$

$(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} =$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌مترمربع است، به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

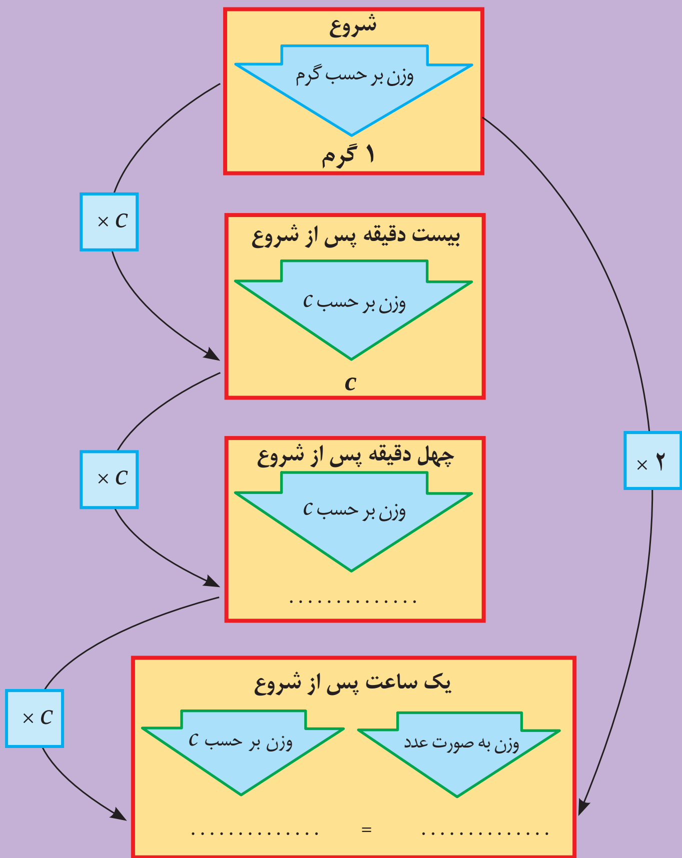
در فعالیت ۲، مفهوم توانِ $\frac{۱}{۳}$ عددهای مثبت را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۲

یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. با روش زیر بررسی کنید که پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.

۱) فرض کنید وزن باکتری‌ها پس از هر $\frac{۱}{۳}$ ساعت c برابر شود. وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت و $\frac{۲}{۳}$ ساعت و یک‌ساعت بر حسب c در نمودار زیر بنویسید.

۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار c را به دست آورید.



در اینجا نیز، وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت با $۲^{\frac{۱}{۳}}$ نمایش می‌دهیم. فعالیت بالا نشان می‌دهد که وزن این نوع باکتری پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت، $\sqrt[۳]{۲}$ است. بنابراین، $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$.

اگر وزن باکتری‌ها پس از هر ساعت ۵ برابر شود و با یک گرم باکتری شروع کنیم، وزن آنها را پس از بیست دقیقه ($\frac{۱}{۳}$ ساعت) با $۵^{\frac{۱}{۳}}$ نشان می‌دهیم. این مقدار با استدلالی شبیه به فعالیت بالا برابر $\sqrt[۳]{۵}$ می‌باشد. در حالت کلی، توانِ $\frac{۱}{۳}$ هر عددِ مثبت a به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف

برای هر عدد مثبتِ a بنا به تعریف $a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$.

مثال ۲

الف) نمایش رادیکالی عدد $۸^{\frac{۱}{۳}}$ به صورت $\sqrt[۳]{۸}$ است، بنابراین : $۸^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۸}=۲$.

ب) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ سانتی‌متر مکعب، $\sqrt[۳]{۲۷}$ سانتی‌متر است که می‌توانیم به‌صورت $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$ نمایش دهیم.

کار در کلاس ۲

۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به‌دست آورید.

الف) $۶^۳=۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\dots\dots}=\dots\dots$

ب) $\left(\frac{۱}{۷}\right)^۳=\frac{۱}{۳۴۳} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳۴۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{\dots\dots}{\dots\dots}}=\dots\dots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $(۹^۳)^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad$ $(۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}=$

استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یک‌ساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب، وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید(توجه کنید، اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشاردادن کلیدها متفاوت باشد).

الف) پس از نیم‌ساعت:

محاسبه از طریق توان‌رسانی[1]:

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{x^y} \rightarrow \boxed{(} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{/} \rightarrow \boxed{2} \rightarrow \boxed{)} \rightarrow \boxed{=}$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{\sqrt{}} \rightarrow \boxed{=}$

ب) پس از ۲۰ دقیقه:

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{x^y} \rightarrow \boxed{(} \rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{/} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{)} \rightarrow \boxed{=}$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$\boxed{2} \rightarrow \boxed{\sqrt[y]{x}} \rightarrow \boxed{3} \rightarrow \boxed{=}$

۱ـ در کادرهای استفاده از ماشین حساب، فلش بین دکمه‌های ماشین حساب به معنای توالی فشردن دکمه‌های ماشین حساب است.

مسئله‌ها

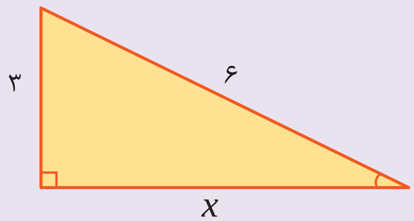
۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow ۱۳۳۱^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\dots\dots\dots} = \dots$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

۲) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی متناظر آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x



ب) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

....

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ را پیدا کنید.

....

۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^{۲} - ۳x - ۲ = ۰$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{۳ \pm \left(\left(-۳\right)^{۲} - ۴ \times ۲ \times \left(-۲\right)\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times ۲} = \dots\dots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامهٔ راه حل و درصورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است :

بدو تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و …

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال n ام را به صورت یک عبارت توان‌دار بر حسب n نمایش دهد.

پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطهٔ قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان‌دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدارِ آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

خواندنی

به‌تازگی دانشمندان موفق شده‌اند فناوری جدیدی ارائه کنند که به کمک آن می‌توان اطلاعات را بر روی رشته‌های دی‌اِن‌اِی باکتری‌ها ذخیره کرد . این روش از این نظر بسیار حائز اهمیت است که برخلاف روش‌های پیشین بدون آسیب رساندن به بافت زندهٔ باکتری، می‌توان این کار را به انجام رساند.

طراحان این روش معتقدند که ذخیرهٔ داده‌ها بر روی بافت‌های زنده می‌تواند مزایای خارق‌العاده‌ای را به همراه داشته باشد زیرا با چنین ساختارهایی می‌توانند به درمان هوشمند بیماری‌ها دست بزنند. البته حجم داده‌های قابل ذخیره در شرایط فعلی به هیچ عنوان به‌اندازه‌ای نیست که بتوان از آن در سطح کاربردی بهره گرفت ولی این روش را می‌توان یک راهکار برای آیندهٔ انباره‌های اطلاعاتی به‌حساب آورد.

۵ــ۲ــ ریشه‌گیری عددهای حقیقی

مسئلهٔ تعیین وزن باکتری‌ها را در نظر بگیرید. وزن باکتری‌ها پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{۱}{۴}$ ساعت) چقدر است؟ پس از ۱۲ دقیقه ($\frac{۱}{۵}$ ساعت) چقدر است؟ این مقادیر را چگونه نشان می‌دهند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها لازم است علاوه بر ریشهٔ دوم و سوم، ریشه‌های دیگر یک عدد را هم بشناسیم.

خواندنی

تاریخچهٔ ریشه‌گیری

از لحاظ تاریخی، ایدهٔ ریشه‌گیری در ارتباط با حل معادله‌های جبری پدید آمده است. در محاسبهٔ جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم و سوم، عبارت‌های پیچیده‌ای از رادیکال‌ها دیده می‌شوند. اگرچه روش‌های عددی در محاسبهٔ جواب‌های معادله‌ها بسیار مؤثرتر هستند، با این حال نیاز به ریشه‌گیری همچنان وجود دارد.

ریشه‌گیری عکس عمل توان‌رسانی است. توان‌رسانی به توان n (برای عدد a) را با a^n نشان می‌دهند و عکس این عمل را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند و آن را ریشهٔ nام از a می‌نامند.

پس از کشف فرمول جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم، تحقیقاتی طولانی برای یافتن فرمول جبری برای حل معادله‌های درجهٔ سوم آغاز شد. برای یافتن چنین فرمولی باید تا قرن شانزدهم صبر می‌شد تا **کاردان**، ریاضیدان ایتالیایی چنین فرمولی را به دست آورد. جواب‌های معادلهٔ $x^۳ + ax = b$ به شکل زیرند.

$$x = \sqrt[۳]{\sqrt{\frac{a^۳}{۲۷} + \frac{b^۲}{۴}} + \frac{b}{۲}} - \sqrt[۳]{\sqrt{\frac{a^۳}{۲۷} + \frac{b^۲}{۴}} - \frac{b}{۲}}$$

بعد از حل معادله‌های درجهٔ سوم، چگونگی حل معادله‌های درجهٔ چهارم نیز به دست آمد. **اویلر** تلاش کرد معادله‌های درجهٔ پنجم را به روش مشابهی حل کند ولی موفق نشد. در قرن نوزدهم **آبل** و **گالوا** ثابت کردند که معادله‌های درجهٔ پنجم به روش‌های جبری قابل حل نیستند و فرمولی جبری از طریق ریشه‌گیری برای جواب‌های معادله‌های درجهٔ پنجم به بالا وجود ندارد.

فعالیت ۳

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید. سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشهٔ دوم عدد ۲۵ عدد .... است؛ زیرا $۲۵ = (......)^{۲}$

....

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

....

۳) یک ریشهٔ سوم عدد ۸ عدد .... است؛ زیرا $۸ = (....)^{۳}$.

....

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

....

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ چهارم مثالی بزنید.

....

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ پنجم مثالی بزنید.

....

۷) برای ریشه‌های kاُم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

....

۸) اگر $b^k = a$ آنگاه .... یک ریشهٔ .... عدد .... است.

با استفاده از فعالیت۳، تعریف زیر از ریشه‌گیری مرتبه‌های بالاتر داده می‌شود.

تعریف

اگر k یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، عدد حقیقی b را یک ریشهٔ kام عدد حقیقی a می‌نامیم، هرگاه $b^k=a$

مثال ۳

الف) عدد ۲ یک ریشهٔ ششم ۶۴ است؛ زیرا $۶۴=۲^{۶}$.

ب) با توجه به $\frac{۱}{۱۰,۰۰۰}=\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}$ ، عدد $\frac{۱}{۱۰}$ یک ریشهٔ چهارم $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ است.

پ) عدد ۲- یک ریشهٔ پنجم ۳۲- است؛ زیرا $-۳۲=(-۲)^{۵}$.

ت) با تجزیهٔ عدد ۱۵,۶۲۵ به عوامل اول، نتیجه می‌شود $۱۵,۶۲۵=۵^{۶}$ یعنی ۵ یک ریشهٔ ششم ۱۵,۶۲۵ است.

کاردرکلاس ۳

۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^{۵}=۲۴۳$ ، عدد .... یک ریشهٔ پنجم عدد .... است.

ب) با توجه به تساوی، $(-۵)^{۶}=\ldots$ عدد .... یک ریشهٔ ششم عدد .... است.

پ) تساوی $\frac{۱}{۸}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\cdots}$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{۱}{۲}$ یک ریشهٔ .... عدد .... است.

۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ ب) $\frac{۱}{۸۱}$ ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

....

فعالیت ۴

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	...	...	۲	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	-۱	-۲
توان چهارم	...	...	...	...	...	...	$\frac{۱۶}{۸۱}$	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا ؟

....

۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

....

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{۱۶}{۸۱}$ را بنویسید.

....

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده، در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که عددهای مثبت دو ریشهٔ زوج دارند و این ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. با دقت در جدول بالا مشاهده می‌شود که توان زوج همهٔ اعداد منفی، همواره عددی مثبت است. بنابراین اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

نکته

۱) هر عددِ مثبتِ a دو ریشهٔ زوج دارد که قرینهٔ یکدیگرند، ریشهٔ k اِم مثبت عددِ مثبتِ a را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم، و ریشهٔ k اِم دیگر آن $-\sqrt[k]{a}$ خواهد بود.

۲) اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

مثال ۴

الف) عدد ۶۴ دارای دو ریشهٔ ششم است که عبارت‌اند از ۲ و ۲-؛ زیرا $۶۴ = ۲^۶ = (-۲)^۶$، بنابراین $۲ = \sqrt[۶]{۶۴}$.

ب) عدد ۶۴- ریشهٔ ششم ندارد؛ زیرا توان ششم هر عدد حقیقی، مثبت است .

پ) عدد۲، دو ریشهٔ چهارم دارد که قرینهٔ یکدیگرند.این دو ریشه به صورت $\sqrt[۴]{۲}$ و $-\sqrt[۴]{۲}$ نوشته می‌شوند.

ت) عدد ۲- ریشهٔ چهارم ندارد؛ زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که توان چهارم آن منفی باشد.

می‌دانیم که رابطهٔ $\sqrt{a^۲} = |a|$ برای هر عدد حقیقی a درست است. در فعالیت زیر درستی این رابطه را برای ریشه‌های زوج دیگر نیز بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۵

۱) جدول زیر را کامل کنید.

a	$-۰/۱$	$۰/۱$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	-۲	۲
$\sqrt[۴]{a^۴}$	$\sqrt[۴]{(-۰/۱)^۴}$	...	...	...	...	...
حاصل	$۰/۱$	...	...	...	...	...

۲) عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟

....

۳) حاصل $\sqrt[۶]{۳^۶}$ و $\sqrt[۶]{(-۳)^۶}$ را به‌دست آورید و با نتیجهٔ قسمت قبل مقایسه کنید.

....

نتیجهٔ فعالیت ۵ در مورد هر ریشهٔ زوج نیز برقرار است.

تعریف

اگر a عددی حقیقی و k عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

مثال ۵

عبارت‌های $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۶}$ و $\sqrt[۴]{\left(۱-\sqrt{۲}\right)^۴}$ را ساده کنید و بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[۶]{\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۶} = \left|-\frac{۲}{۳}\right| = \frac{۲}{۳}$$

$$\sqrt[۴]{\left(۱-\sqrt{۲}\right)^۴} = \left|۱-\sqrt{۲}\right| = \sqrt{۲}-۱$$

کار در کلاس ۴

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}$ پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۵^۶$ ب) ۷۲۹ پ) ۱ ت) $(-۵)^۶$

۳) عبارت‌های $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶}$ و $\sqrt[۴]{\left(۱-\sqrt{۳}\right)^۴}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

....

در فعالیت ۵ دیدید که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند و اعداد مثبت دو ریشهٔ زوج قرینه دارند. در ادامه، این وضع را برای ریشه‌های فرد بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۶

۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشهٔ ...	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	۱-	$-\frac{۱}{۴}$	۲-	عدد
عدد	...	...	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	...	...	...	...	توان پنجم

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشهٔ پنجم دارند؟

....

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که همهٔ عددها ریشهٔ پنجم دارند. این نتیجه در مورد ریشه‌های فرد دیگر نیز درست است. هر عدد حقیقی، یک و فقط یک ریشهٔ فرد kام دارد.

نکته

اگر k عددی فرد باشد، عدد حقیقی a ، یک و فقط یک ریشهٔ فردِ k امُ دارد که آن را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم .

مثال ۶

عدد ۲۴۳ یک ریشهٔ پنجم دارد که عدد ۳ است؛ زیرا ۲۴۳ = $۳^۵$. بنابراین: $\sqrt[۵]{۲۴۳} = ۳$. همچنین عدد ۲۴۳- یک ریشهٔ پنجم دارد که عدد ۳- است؛ زیرا ۲۴۳- = $(-۳)^۵$ پس: $\sqrt[۵]{-۲۴۳} = -۳$.

کاردرکلاس ۵

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[5]{11^{5}}$ ب) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$ پ) $\sqrt[5]{-0/00001}$ ت) $\sqrt[7]{(-3)^{7}}$

اکنون که علاوه بر ریشهٔ دوم و سوم با ریشه‌های دیگر عددها نیز آشنا شده‌ایم، می‌توانیم توان‌های گویای دیگرِ اعداد مثبت را نیز تعریف کنیم.

نکته

اگر a یک عدد حقیقیِ مثبت و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه بنا به تعریف $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

توجه داشته باشید که در تعریف توان‌رسانی به توان عددهای گویای غیر صحیح، پایه همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود و توان گویای اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

مثال ۷

الف) نمایش رادیکالی عدد $32^{\frac{1}{5}}$ عبارت است از $\sqrt[5]{32}$. بنابراین: $32^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{32}=2$.

ب) عدد $625^{\frac{1}{4}}$ برابر است با $\sqrt[4]{625}$ که سادهٔ شدهٔ آن عدد ۵ است؛ یعنی : $625^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{625}=5$.

ج) باکتری‌هایی را در نظر بگیریدکه وزن آنها پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، وزن آنها پس از۱۲دقیقه ($\frac{1}{5}$ ساعت) برابر است با $\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{5}}$ گرم و پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{1}{4}$ ساعت) برابر است با $2^{\frac{1}{4}}$.

کار در کلاس ۶

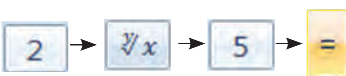
ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) $(۳^۸)^{\frac{۱}{۸}}$ ب) $\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}$ پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}$

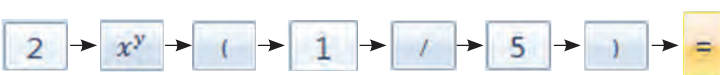
استفاده از ماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $\sqrt[۵]{۲}$ و سپس عدد $۲^{\frac{۱}{۵}}$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و درستی تساوی آنها را بررسی کنید.

به کمک ریشه‌گیری :



به کمک توان‌رسانی :



توان‌رسانی به توان سایر اعداد گویا نیز قابل تعریف است. می‌دانیم که در توان‌رسانی به توان اعداد صحیح خاصیت $(a^m)^n=a^{mn}$ برقرار است. تعریف را به گونه‌ای ارائه می‌کنیم که این ویژگی برای توان‌رسانی به توان اعداد گویا هم برقرار باشد. برای مثال، برای محاسبهٔ $a^{\frac{۲}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times ۲}$ در نظر می‌گیریم. ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. برای محاسبهٔ $a^{\frac{۳}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times ۳}$ در نظر می‌گیریم و ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۳ می‌رسانیم. به همین ترتیب و برای محاسبهٔ $a^{\frac{-۳}{n}}$ ، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times(-۳)}$ در نظر می‌گیریم؛ ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۳- می‌رسانیم.

مثال ۸

مقدارهای $۴^{\frac{۳}{۲}}$ و $۲۷^{-\frac{۲}{۳}}$ و $۰/۰۱^{-\frac{۲}{۳}}$ را محاسبه کنید.

$$۴^{\frac{۳}{۲}}=\left(۴^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۳}=\left(\sqrt[۲]{۴}\right)^{۳}=۲^{۳}=۸$$

$$۲۷^{-\frac{۳}{۲}}=\left(۲۷^{\frac{۱}{۳}}\right)^{-۲}=\left(\sqrt[۳]{۲۷}\right)^{-۲}=(۳)^{-۲}=\frac{۱}{۳^{۲}}=\frac{۱}{۹}$$

$$(۰/۰۱)^{-\frac{۳}{۲}}=\left(۰/۰۱^{\frac{۱}{۲}}\right)^{-۳}=\left(\sqrt[۲]{۰/۰۱}\right)^{-۳}=(۰/۱)^{-۳}=\frac{۱}{(۰/۱)^{۳}}=\frac{۱}{۰/۰۰۱}=۱۰۰۰$$

ویژگی‌های توان‌رسانی با عددهای صحیح ، در توان‌رسانی با اعداد گویا نیز برقرار است.

توجه: در عبارت $\left((-۹)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ نمی‌توان توان‌ها را در هم ضرب کرد؛ زیرا به $(-۹)^{\frac{۲}{۴}}$ تبدیل خواهد شد؛ درحالی که طبق تعریف، در توان‌رسانی به توان اعداد گویای غیر صحیح، پایه نباید منفی باشد. این عبارت به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\left((-۹)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}=۸۱^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳$$

استفاده از ماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $۳^{\frac{۲}{۳}}$ و سپس عدد $(۳^{\frac{۱}{۳}})^{۲}$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و سپس، درستی تساوی آنها را بررسی کنید.

3 → x^y → (→ 2 → / → 3 →) → =

(→ 3 → x^y → (→ 1 → / → 3 →) →) → x^y → 2 → =

همچنین ویژگی‌های

$$a^{m}\times b^{m}=(ab)^{m} \qquad a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

که در توان‌رسانی با عددهای صحیح برقرار بود در توان‌رسانی با اعداد گویا (با شرط $a>۰$ و $b>۰$) نیز برقرار است.

مثال ۹

محاسبات زیر را انجام دهید.

الف) $۶۴^{\frac{۱}{۳}}\times ۶۴^{\frac{۱}{۲}}=۶۴^{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}=۶۴^{\frac{۵}{۶}}=(۶۴^{\frac{۱}{۶}})^{۵}=(\sqrt[۶]{۶۴})^{۵}=۲^{۵}=۳۲$

ب) $۸^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=(۸\times ۲)^{\frac{۱}{۲}}=۱۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴$

پ) $۴^{-\frac{۱}{۳}}\times ۴^{-\frac{۱}{۶}}=۴^{(-\frac{۱}{۳})+(-\frac{۱}{۶})}=۴^{-\frac{۲+۱}{۶}}=۴^{-\frac{۳}{۶}}=۴^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$

ت) $۳^{-\frac{۲}{۳}}\times ۹^{-\frac{۲}{۳}}=(۳\times ۹)^{-\frac{۲}{۳}}=۲۷^{-\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۲۷^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{۱}{(\sqrt[۳]{۲۷})^{۲}}=\frac{۱}{۳^{۲}}=\frac{۱}{۹}$

کار در کلاس ۷

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{۱}{۳}}$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید. سپس حاصل را به دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{\dots} \times \sqrt[۲]{\dots} = \dots$$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها، حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

$$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$$

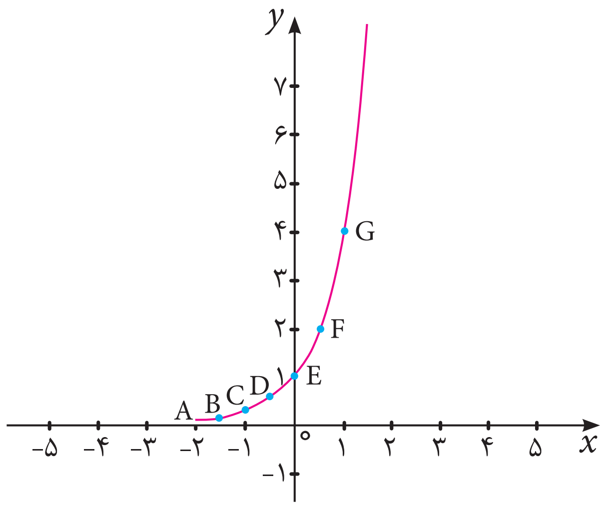
۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. (در هرکدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید.)

الف) $۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}$ ب) $۸^{-\frac{۲}{۳}}$ پ) $۶۴^{\frac{۱}{۱۲}} \times ۶۴^{\frac{۳}{۴}}$ ت) $\left(\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right)^{۳}$ ث) $\sqrt[۳]{۱۶} \times ۲^{\frac{۲}{۳}}$

آشنایی با توان‌های گویای عددهای مثبت موجب می‌شود بتوانیم توان‌های بیشتری از یک عدد را محاسبه کرده و به کمک آنها پدیده‌های طبیعی را به‌طور مناسب مدل‌سازی کنیم. برای مثال، در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد ۴ را مشاهده کنید.

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
۴^{x}	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
مختصات نقطهٔ متناظر	$A\begin{bmatrix}-۲\\ \frac{۱}{۱۶}\end{bmatrix}$	$B\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۸}\end{bmatrix}$	$C\begin{bmatrix}-۱\\ \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$	$D\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$	$E\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$	$F\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ ۲\end{bmatrix}$	$G\begin{bmatrix}۱\\ ۴\end{bmatrix}$

اگر مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر ۴^x را روی محور yها مشخص کنیم و این نقاط را به یکدیگر متصل کنیم، نمودار زیر را خواهیم داشت. همان طور که دیده می‌شود نمودار ۴^x، یک خط راست نیست.



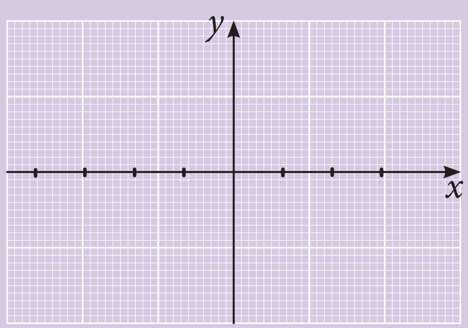
کار در کلاس ۸

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{۱}{۴}$ را می‌بینید:

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$(\frac{۱}{۴})^x$	۱۶	...	...	۲	۱	...	...	...

۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر $(\frac{۱}{۴})^x$ را روی محور y ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.



۳) آیا نمودار $(\frac{۱}{۴})^x$، یک خط راست است؟

....

مسئله‌ها

۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $۷^{۲} = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\dots} = \sqrt[۲]{\dots} =$

ب) $۱۷^{۳} = ۴۹۱۳ \Rightarrow ۴۹۱۳^{\dots} = \sqrt[۳]{\dots} = \dots$

پ) $۱۳^{۴} = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow ۲۸۵۶۱^{\dots} = \sqrt[۴]{\dots} = \dots$

ت) $۱۵^{-۴} = (\frac{۱}{۱۵})^{۴} = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{\frac{\dots}{\dots}} = \sqrt[۴]{\dots} = \dots$

ث) $(\frac{۱}{۳})^{۹} = \dots \Rightarrow (\dots)^{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۹]{\dots} = \dots$

ج) $۵^{۶} = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{\dots}{۶}} = \sqrt[\dots]{۱۵۶۲۵} = \dots$

چ) $(۰/۳)^{۵} = ۰/۰۰۲۴۳ \Rightarrow (۰/۰۰۲۴۳)^{\frac{۱}{\dots}} = \sqrt[۵]{\dots} = \dots$

۲) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینهٔ بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دارِ داده شده باشد:

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$: (تکثیر باکتری‌ها)

....

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$: (زمینهٔ هندسی)

....

۳) هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

$\sqrt[۴]{۶}$	$۴^{\frac{۱}{۳}}$
$\sqrt[۳]{۲^{۲}}$	$۳^{\frac{۱}{۴}} \times ۲^{\frac{۱}{۴}}$
$\sqrt[۶]{۲^{۵}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۳}}$
$\sqrt[۱۲]{۳^{۱۱}}$	$۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۱}{۴}} \times ۳^{\frac{۱}{۳}}$
$\frac{۱}{۹}$	$۳۲^{\frac{۶}{۵}}$
۶۴	$۲۷^{-\frac{۲}{۳}}$

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورتِ عدد توان‌دار و عبارتِ رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

....

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

....

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

....

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

....

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲

پ) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{۱}{۶۴}$

ث) توانِ $\frac{۱}{۳}$ عدد ۲۷

ج) توانِ $\frac{۱}{۵}$ عدد ۳۲

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}} \times ۴^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}} \times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}$

پ) $(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۴}} \times (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۱۲}}$

ت) $۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۲۵^{\frac{۱}{۳}}$

ث) $(۳^{\frac{۱}{۳}})^{۲}$

ج) $(۲۷^{-۲})^{\frac{۱}{۶}}$

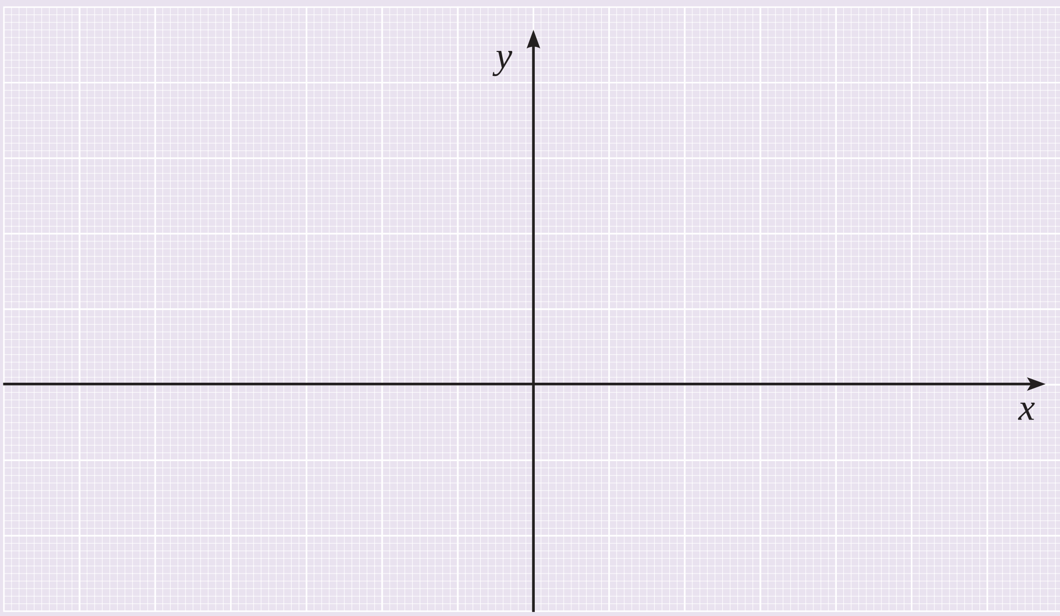
۷) عبارت‌های زیر را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}}$ ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

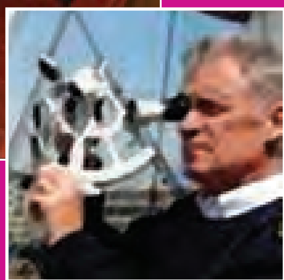
(برای محاسبهٔ توان های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	...	...	...	...	...	...	...



فصل ششم

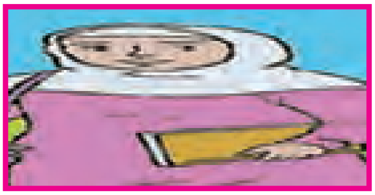
نسبت‌های مثلثاتی

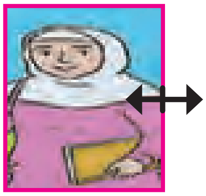


زاویــه‌یاب دریایی، ابزاری است که از آن برای اندازه‌گیری زاویهٔ بین خورشید یا ستارگان دیگر با افق، استفاده می‌شود. از طریق این اندازه‌گیری و به کمک مثلثات، مکان کشتی را تعیین می‌کنند. در صورتی که به طور افقی مورد استفاده قرار گیرد، برای اندازه‌گیری زاویهٔ بین دو شیء در ساحل (یا دریا) نیز به‌کار می‌رود.

۶ــ۱ــ تشابه

یکی از دوستان علاقهٔ زیادی به عکس‌های خودش دارد. دلش می‌خواهد هر جا که بتواند عکس‌های خودش را ببیند! چند روز پیش که خانه‌شان رفته بودم، دیدم کمی در فکر است. از او پرسیدم به چه فکر می‌کند. عکسی از خودش در تعطیلات گذشته را نشان داد و گفت: چون از آن عکس خوشش آمده است، سعی کرده به کمک رایانه آن را به اندازه‌ای بزرگ کند که روی جلد کتابچه‌ای که سفرنامه‌هایش را در آن می‌نویسد، بچسباند. این‌بار به نظرم آمد که ابتکار خوبی بود. پرسیدم مشکل چیست؟ نتیجهٔ کارش را نشان داد. با توجه به مکان فلش، خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!





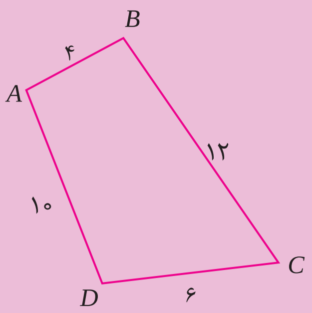
گفتم: می‌توانم کمکت کنم. یک فعالیت می‌گویم. بعد از انجام آن متوجه می‌شوی مشکلت چیست؟

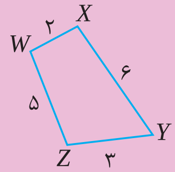
گفت: تو هم دبیر ریاضی شدی؟!

دیدم راست می‌گوید. چقدر از دبیر ریاضی‌ام تأثیر گرفته‌ام. ولی او چون خیلی مشتاق بود عکسش را بزرگ کند، قبول کرد تا فعالیتی را که به او می‌گویم انجام دهد.

فعالیت ۱

دو شکل متشابه روبه‌رو را در نظر بگیرید.





۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

....

۲) هر یک از اضلاع $ABCD$ چند برابر اضلاع متناظرش در $WXYZ$ است؟

....

۳) هر یک از اضلاع $WXYZ$ چند برابر اضلاع متناظرش در $ABCD$ است؟

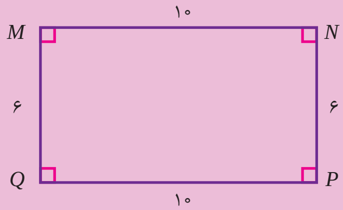
....

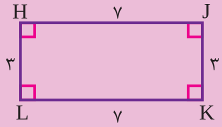
۴) نسبت اضلاع $ABCD$ به $WXYZ$ را با نسبت اضلاع $WXYZ$ به $ABCD$ مقایسه کنید.

....

۵) در شکل های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

....





فعالیت بالا نشان می‌دهد وقتی دو شکل متشابه هستند، نسبت بزرگ شدن یا کوچک شدن اضلاع یکی

به اضلاع متناظر دیگری را می‌توان با یک عدد بیان کرد. به طور مثال در فعالیت ۱ داریم:

$$\frac{AB}{WX}=\frac{BC}{XY}=\frac{CD}{YZ}=\frac{AD}{WZ}=k$$

یا

$$\frac{WX}{AB}=\frac{XY}{BC}=\frac{YZ}{CD}=\frac{WZ}{AD}=k'$$

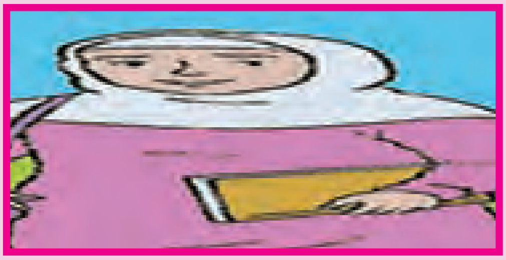
در این صورت می‌گوییم: چهارضلعی $ABCD$ نسبت به چهارضلعی $WXYZ$ با ضریب k بزرگ شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $k>1$** می‌نامیم، یا چهارضلعی $WXYZ$ نسبت به چهارضلعی $ABCD$ با ضریب k کوچک شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $0<k<1$** می‌نامیم.

کار در کلاس ۱

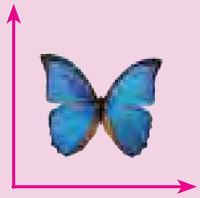
۱) نسبت اضلاع را برای دو شکل زیر بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

....

....



۲) تصویر زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱

الف) اگر عرض هر نقطه روی شکل (۱) را ثابت نگه داشته و طول نقاط آن را ۳ برابر کنیم، کدام شکل به‌دست می‌آید؟چرا؟

....

ب) کدام شکل را می‌توان با ۳ برابرکردن عرض نقاط و ثابت نگه‌داشتن طول نقاط شکل (۱) به‌دست آورد؟

....

پ) در کدام شکل، طول و عرض تمام نقاط ۳ برابر طول و عرض تمام نقاط متناظر در شکل (۱) است؟

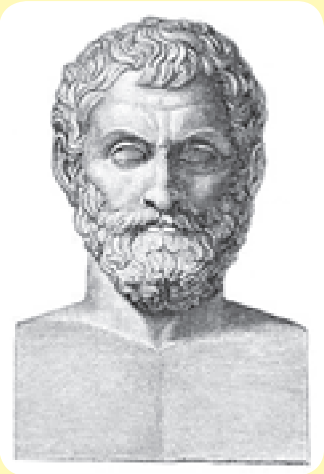
....

در ادامه، داستان زیر از تالس را برایش تعریف کردم.

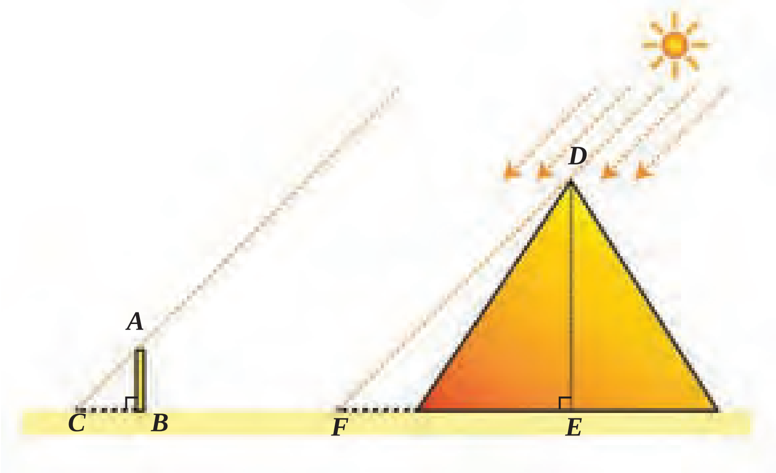
می‌گویند زمانی که تالس در مصر اقامت داشت، توانست به کمک تشابه مثلث‌ها، ارتفاع اهرام مصر را اندازه‌گیری کند. او چوبی با طول مشخص را نزدیک اهرام، به طور عمودی در زمین فرو کرد و سپس به هنگام تابش خورشید، هم‌زمان طول سایهٔ چوب و سایهٔ اهرام را اندازه‌گیری کرد.

خواندنی

تالس ملطی در حدود سال ۶۲۴ پیش از میلاد در شهر میلیتوس در «ایونیا» غرب ترکیه امروزی به دنیا آمد. تالس بیشتر وقت خود را صرف مطالعهٔ ریاضیات و ستاره‌شناسی کرد. عقیده بر آن است که تالس پس از مسافرت به مصر، هندسه را برای یونانیان به ارمغان برد. در ریاضیات، قضیهٔ تالس را به وی نسبت می‌دهند. مورخی به نام پروکلوس گزارش می‌دهد که تالس توانست با کشف این قضیه، فاصلهٔ کشتی‌ها را تا ساحل تعیین کند. تالس در واقع ارتفاع اهرام مصر را از طریق اندازه‌گیری سایهٔ آنها اندازه‌گیری کرد.



طبق نظر تالس، مثلث‌های DEF و ABC متشابه‌اند، او با داشتن طول چوب و طول سایهٔ چوب و طول سایهٔ هرم، با مشخص کردن اضلاع متناظر و نوشتن نسبت طول اضلاع متناظر، ارتفاع هرم را به‌دست آورد.



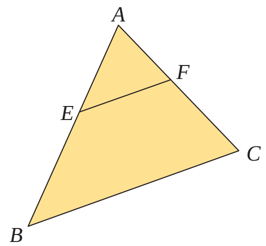
دوستم پرسید: تالس از کجا می‌دانست آن دو مثلث متشابه‌اند؟ از روی شکل، ما فقط تساوی زاویه‌های متناظر را می‌توانیم ثابت کنیم (چگونه؟). آیا شرط تساوی زاویه‌ها برای تشابه دو مثلث کافی است؟

گفتم: در حالت کلی با داشتن تساوی زاویه‌ها، نمی‌توان تشابه دو شکل را نتیجه گرفت (به سؤال ۵ در فعالیت ۱ توجه کنید)، ولی این شرط برای تشابه دو مثلث کافی است و این از نتایج رابطه‌ای است که تالس بیان کرده است.

مثال ۱

در یک مثلث دلخواه ABC از نقطهٔ E روی ضلع AB، خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ F قطع کند. دو مثلث AEF و ABC زاویه‌های مساوی دارند؛ چرا؟ پس، با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



کار در کلاس ۲

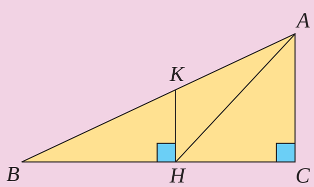
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است.

الف)کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

....

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.

....



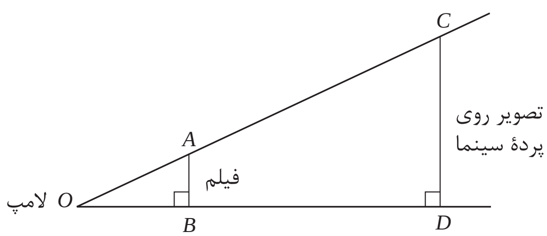
۶ــ۲ــ تانژانت یک زاویه

در یکی از هنرستان‌ها، هنرجویان ممتاز را به همراه دبیر ریاضی به دیدن فیلمی برده بودند. منوچهر که مشغول دیدن فیلم بود، گاهی برمی‌گشت و به پشت سرش نگاه می‌کرد. پس از بازگشت به مدرسه، دبیر از منوچهر پرسید:

چرا به پشت سرت نگاه می‌کردی؟ آیا سؤالی برایت پیش آمده بود؟

منوچهر گفت: بله، می‌خواستم بدانم تصویر به آن بزرگی چگونه روی پردهٔ سینما تشکیل می‌شود. آیا بزرگی یا کوچکی تصویر با فاصلهٔ پرده از چشمهٔ نور ارتباط دارد؟

دبیر گفت: برای درک این مطلب، بهتر است شکلی رسم کنیم. شکل زیر می‌تواند اندازهٔ تصویر روی پردهٔ سینما و اندازهٔ فیلم را به شما نشان دهد.



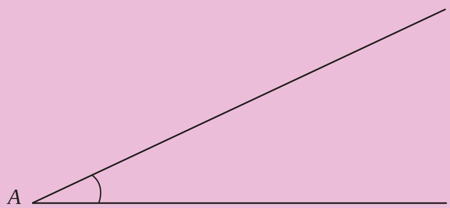
خواندنی

اولین کسانی که از مثلثات استفاده می‌کردند یونانیان بودند. در یونان قدیم از مثلثات برای تعیین طول مدت روز یا طول سال (با مشخص کردن موقعیت ستارگان در آسمان) استفاده می‌شد. بعدها ریاضی‌دانان و منجمان هندی نیز پیشرفت‌هایی در مثلثات به‌دست آوردند ولی پیشرفت این علم مدیون دانشمندان مسلمان است. مسلمانان بیشترین نقش را در پیشرفت این علم ایفا کردند و سپس این اندوخته‌ها را در قرون وسطی به اروپاییان منتقل کردند. اروپاییان نیز از دانش فراوان مسلمانان در مثلثات استفاده کردند و این علم را توسعه داده و به شکل امروزی درآوردند.

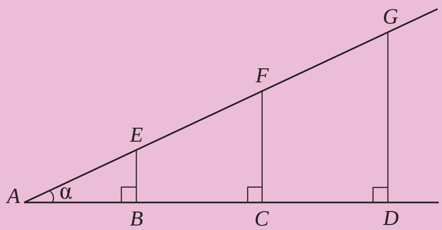
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا بتوانید رابطهٔ بین اندازهٔ تصویر روی پردهٔ سینما و اندازهٔ فیلم و فاصله با چشمهٔ نور را به‌دست آورید.

فعالیت ۲

درشکل روبه‌رو، یک زاویهٔ تند به رأس A رسم شده است.



۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر را به ترتیب، در نقاط E و F و G قطع کند.



۲) با اندازه‌گیری به‌کمک خط‌کش، مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}=\frac{GD}{AD}$$

۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

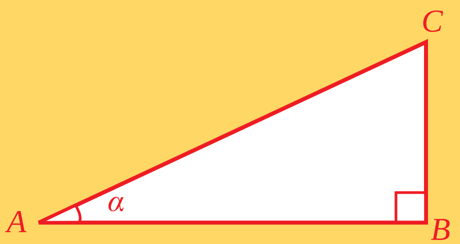
فعالیت بالا نشان می‌دهد که در مسئلهٔ اندازهٔ تصویر در سینما، نسبت اندازهٔ فیلم به فاصلهٔ فیلم تا چشمهٔ نور، با نسبت اندازهٔ تصویر روی پرده به فاصلهٔ پرده تا چشمهٔ نور مساوی است. پس، هرچه پرده دورتر قرار گیرد، باید اندازهٔ تصویر بزرگ‌تر شود تا نسبت آنها تغییر نکند و هر چه پرده نزدیک‌تر شود، اندازهٔ تصویر هم کوچک‌تر می‌شود تا نسبت آنها تغییر نکند.

با داشتن زاویهٔ رأس A ، مقدار نسبت $\frac{EB}{AB}$ در شکل فعالیت ۲ به انتخاب نقطهٔ B بستگی ندارد و مقدار ثابتی است، این مقدار را **تانژانت** این زاویه می‌نامند.

تعریف

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC یک زاویهٔ تند را انتخاب کنید و آن را α بنامید (مثلاً زاویهٔ به رأس A). بنا به تعریف، نسبت $\frac{BC}{AB}$ را تانژانت زاویهٔ α می‌نامند و با $tan\ \alpha$ نشان می‌دهند. این نسبت فقط به α بستگی دارد و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

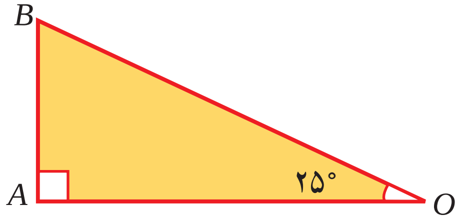
$$\text{تانژانتِ آلفا} = tan\ \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{طول ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{طول ضلع مجاور به } \alpha}$$



مثال ۲

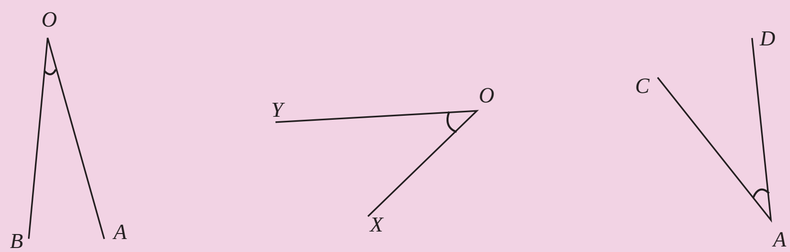
با رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن ۲۵ درجه باشد، تانژانت زاویهٔ ۲۵ درجه را بیابید.

ابتدا به کمک نقاله، یک زاویهٔ ۲۵ درجه رسم می‌کنیم و مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلع مجاور زاویهٔ ۲۵ درجه (OA) مقدار مشخصی، مثلاً ۱۰سانتی‌متر، باشد. طبق شکل، با اندازه‌گیری طول ضلع AB تقریباً ۴/۶ سانتی‌متر است. بنابراین، $tan\ ۲۵°$ تقریباً برابر است با $\frac{AB}{OA} \approx \frac{۴/۶}{۱۰} = ۰/۴۶$.



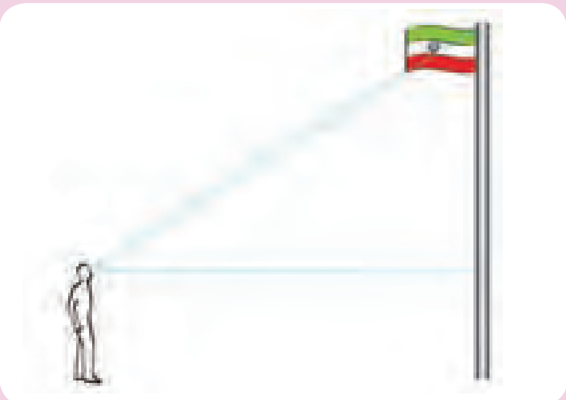
کار در کلاس ۳

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری با خط‌کش محاسبه کنید.



....

۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویهٔ دید خود به نوک تیرک را با سطح افق، تقریباً ۴۰ درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصلهٔ او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات، او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را به‌طور تقریبی بیابد؟

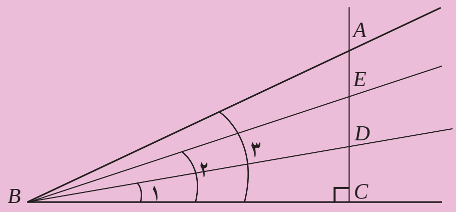


....

سؤالی که دربارهٔ مفهوم تانژانت پیش می‌آید، این است که تانژانت یک زاویهٔ تند چه اعدادی ممکن است باشد و تغییر اندازهٔ یک زاویه، چه تأثیری در اندازهٔ تانژانت آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال‌ها به شما کمک کند.

فعالیت ۳

در شکل زیر AC بر BC عمود است.



۱) هر یک از نسبت‌های $\frac{DC}{BC}$ ، $\frac{EC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود، این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

....

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

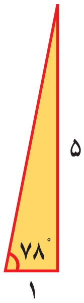
....

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با بزرگ شدن یک زاویهٔ تند، تانژانت آن نیز بزرگ می‌شود و هر عدد مثبتی، می‌تواند تانژانت زاویه‌ای باشد.

مثال ۳



تانژانتِ چه زاویه‌ای برابر ۵ است؟

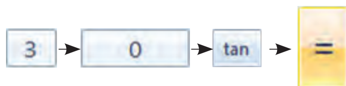
مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱ و ۵ واحد باشد. با نقاله، زاویهٔ مجاور به ضلع به طول ۱ را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۷۸ درجه می‌شود. تانژانت ۷۸ درجه تقریباً ۵ است.

استفاده از ماشین حساب

تانژانت زاویه ۳۰ درجهٔ را با ماشین حساب به‌دست آورید.

....

....



کار درکلاس ۴

۱) اگر زاویهٔ تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

....

۲) اگر زاویهٔ تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود، در مورد تغییرات اندازهٔ تانژانت آن چه می‌توان گفت؟
(**راهنمایی:** به کمک ماشین حساب، برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

....

مسئله‌ها

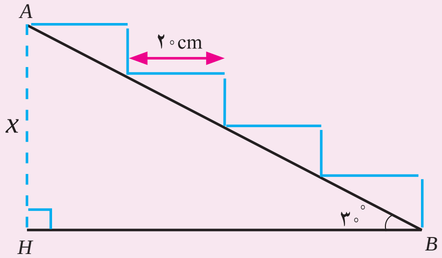
۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰ و ۵۰ درجه را پیدا کنید.

....

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

....

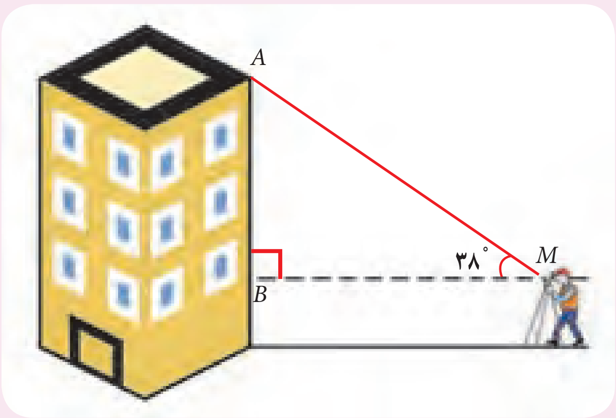
۳) با توجه به شکل روبه‌رو، ارتفاع نقطهٔ A از زمین را بیابید (عرض همهٔ پله‌ها ۲۰cm است).



....

....

۴) برای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۵متری از ساختمان (نقطهٔ B) مستقر کرده‌ایم و به نقطهٔ بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویهٔ دید برابر ۳۸درجه به‌دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.



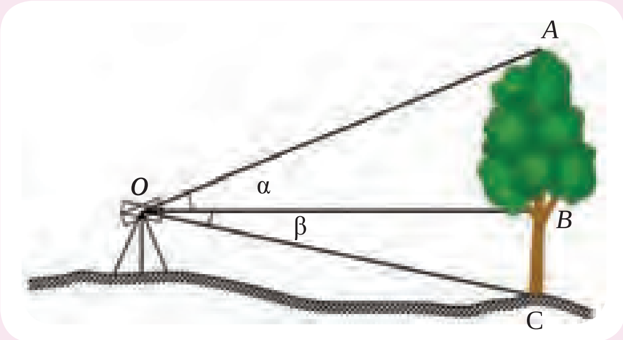
....

....

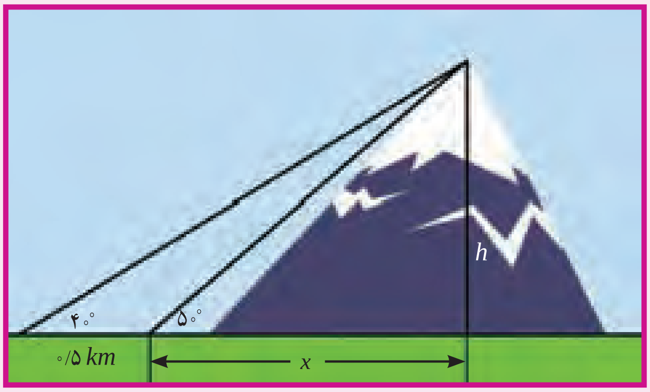
....

....

۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب ۲۳ درجه و ۱۲ درجه به‌دست آمده‌اند و فاصلهٔ افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.

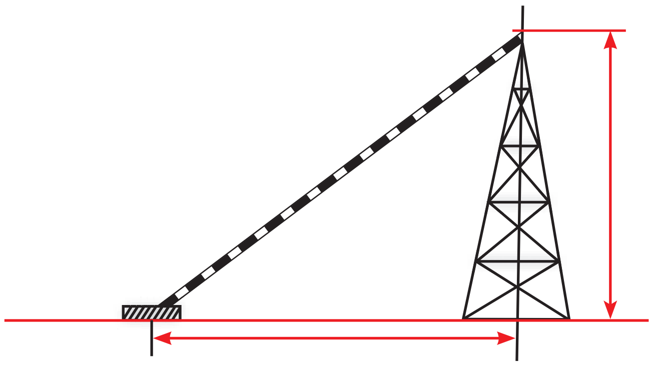


۶) یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبهٔ ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویهٔ ۵۰ درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویهٔ ۴۰ درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



۶ـ۳ـ سینوس یک زاویه

فرزانه در راه مدرسه، کارگرانی را دید که در حال نصب یک دکل مخابراتی بودند. او مشاهده کرد که کارگران برای نگهداری دکل‌ها از سیم نگهدارنده‌ای که به زمین متصل شده است، استفاده می‌کنند. با این مشاهدات، او در کلاس ریاضی از دبیر پرسید که مهندسان چگونه می‌فهمند که برای نگهداری دکل چقدر سیم لازم است؟



دبیر گفت: فعالیت صفحهٔ روبه‌رو به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.

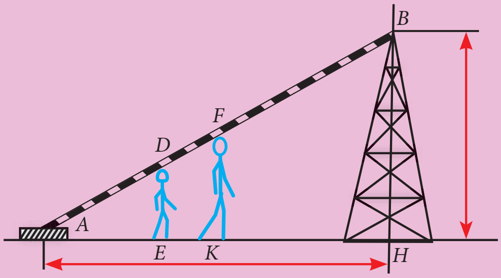
خواندنی

ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی، یکی از مفاخر علمی ایران و متولد ۳۲۸ هجری قمری که در سوم رجب سال ۳۸۸ هجری قمری درگذشته است. وی اهل بوزگان کهنویسی بوده که در هجده کیلومتری شرق شهر تربت جام قرار دارد.

فعالیت‌های علمی بوزجانی دامنهٔ وسیعی از علوم مختلف، مانند هندسه، مثلثات، حساب و نجوم را در بر می‌گرفته است و او در تمام این علوم به‌دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

فعالیت ۴

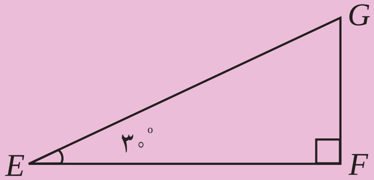
فرض کنید دکلی به ارتفاع ۶۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته است، مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم درنقطه‌ای مانند E چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیلهٔ یک متر فلزی، فاصلهٔ A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.



۱) کارگرانی با طول قدهای متفاوت، این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قد به فاصلهٔ سر تا نقطهٔ A به‌دست می‌آورند. نشان دهید همهٔ آنها یک مقدار را به‌دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنیم، مقدار آن با نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه است، نشان دهید نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند، برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به‌دست آورید.
(**راهنمایی:** تشابه دو مثلث AHB و EFG را نشان دهید.)

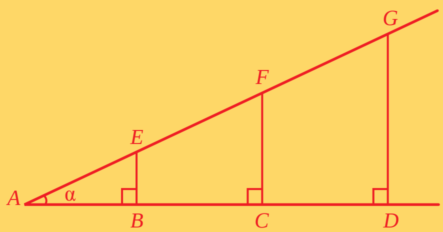


۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارندهٔ دکل را حساب کنید.

تعریف

برای هر زاویهٔ تند α مانند شکل زیر، همهٔ نسبت‌های $\frac{GD}{AG}$ ، $\frac{FC}{AF}$ و $\frac{EB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **سینوس زاویهٔ** α می‌نامند و آن‌را با $\sin\alpha$ نشان می‌دهند.

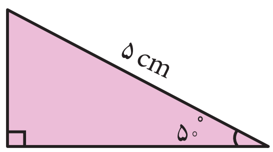
$$\sin\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{CF}{AF}=\frac{DG}{AG}=\frac{\text{طول ضلع روبه‌روی } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۴

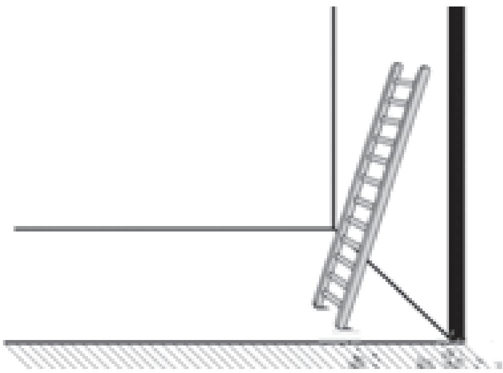
سینوس زاویهٔ ۵۰ درجه را به‌دست آورید.

به کمک نقاله، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ آن ۵۰ درجه و طول وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد. با خط‌کش، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۳/۸ سانتی‌متر است. پس، $\sin 50^\circ$ تقریباً برابر است با $\frac{3/8}{5}=0/76$.



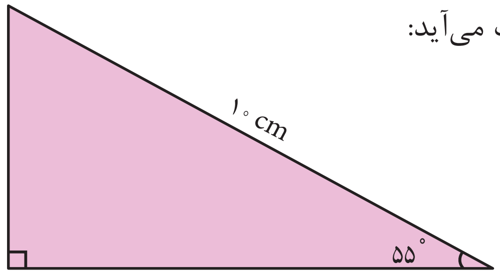
مثال ۵

نردبانی به طول ۶ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویهٔ نردبان با سطح افق ۵۵ درجه باشد، فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین را پیدا کنید.



مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ آن ۵۵ درجه و وتر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد. با اندازه‌گیری

اضلاع این مثلث به‌کمک خط‌کش، سینوس زاویهٔ ۵۵ درجه را پیدا می‌کنیم : $\sin 55^\circ \approx 0/82$. بنابراین، فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$\sin 55^\circ = \frac{\text{فاصلهٔ انتهای نردبان تاسطح زمین}}{6} \Longrightarrow \text{فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین} = 6 \times 0/82 = 4/92\ m$$

کاردرکلاس ۵

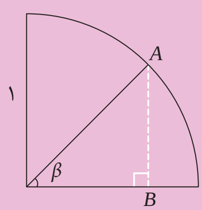
۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

دربارهٔ مفهوم سینوس نیز، این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازهٔ یک زاویه چه تأثیری در اندازهٔ سینوس آن زاویه دارد؟ فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۵

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویهٔ β دارد؟.........



۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ β، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟

....

۳) با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.........

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.........

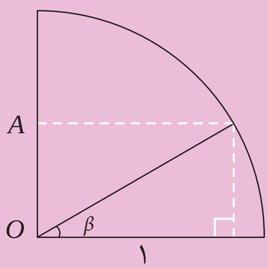
۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟.........

فعالیت ۵ نشان می‌دهد که سینوس زاویه‌های تند، عددهایی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، سینوس آن نیز بزرگ می‌شود.

اگر عددی مانند a را به صورت $0 < a < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که سینوس آن برابر a شود؟ فعالیت زیر می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

فعالیت ۶

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.



۱) اگر طول پاره‌خط OA برابر a باشد سینوس زاویهٔ β چقدر است؟

....

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $0 < a < 1$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

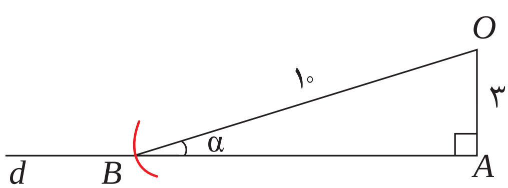
....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان برابر با سینوس زاویه‌ای در نظر گرفت.

مثال ۶

زاویه‌ای بسازید که سینوس آن برابر ۰/۳ باشد.

پاره‌خط OA را به طول ۳ واحد مانند زیر رسم می‌کنیم. در نقطهٔ A خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ O کمانی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد را رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویهٔ ABO در رأس B زاویهٔ مورد نظر است و با نقاله آن را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۱۷ درجه است.



مسئله‌ها

۱- الف) سینوس زاویهٔ ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

....

ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویهٔ رأس آن ۵۰ درجه باشد. اگر قاعدهٔ این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

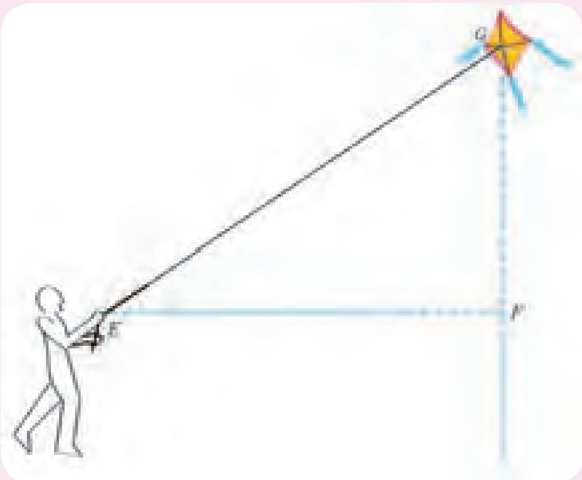
....

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰/۸ است؟

....

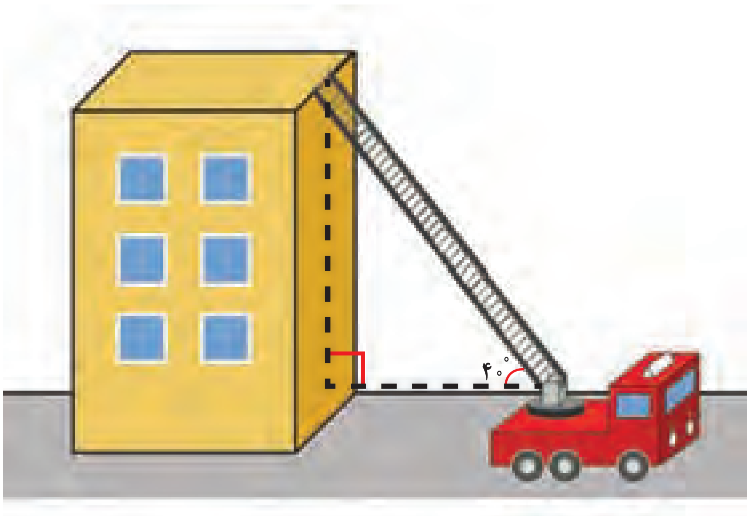
۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویهٔ نخ با سطح افق ۳۹ درجه و فاصلهٔ دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

....



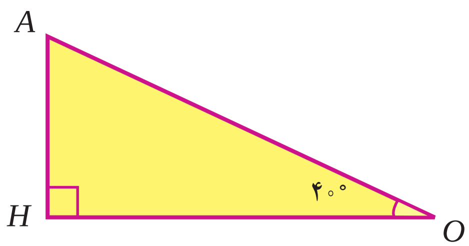
۶ــ۴ــ کسینوس یک زاویه

یک روز، دبیر ریاضی در کلاس داستانی دربارهٔ پله‌های نردبان ماشین آتش‌نشانی تعریف کرد. او گفت: دیروز برای خرید از منزل خارج شده بودم که متوجه شدم طبقهٔ اول یک ساختمان سه طبقه، آتش گرفته است. آتش در حال سرایت به طبقات بالاتر بود و همهٔ ساکنان ساختمان در نقطه‌ای در پشت‌بام جمع شده بودند. پای نردبان ماشین آتش‌نشانی در فاصله حدوداً ۱۵ متری ساختمان قرارداشت. ماشین آتش‌نشانی نردبان خود را با زاویهٔ تقریبی ۴۰ درجه نسبت به افق باز کرد تا به پشت‌بام رسید. آیا می‌توانید بگویید که نردبان ماشین آتش‌نشانی برای رسیدن به پشت‌بام چند متر باز شده بود؟



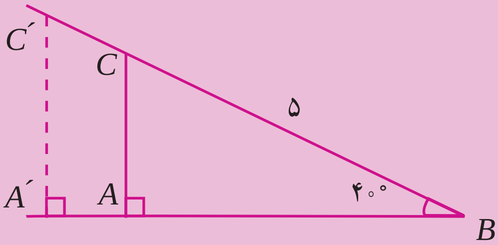
علی گفت: بهتر است یک شکل بکشیم و از روی آن، مسئله را حل کنیم. باید از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ‌آن ۴۰ درجه است، استفاده کنیم. اگر محل تجمع ساکنان ساختمان روی پشت‌بام نقطهٔ A و نقطهٔ ابتدای نردبان، نقطهٔ O و H نقطه‌ای در روی ساختمان باشد به طوری که OH سطح افق را نشان دهد، مثلث زیر را می‌توان رسم کرد.

طول OH و اندازهٔ زاویهٔ رأس O را می‌دانیم ولی طول AO را نمی‌دانیم. دبیر گفت: برای ادامهٔ حل این مسئله می‌توانید از فعالیت ۷ کمک بگیرید.



فعالیت ۷

۱) یک زاویهٔ ۴۰ درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



....

....

۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

....

۳) مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید، آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

....

۴) به کمک نسبتی که در بالا به‌دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

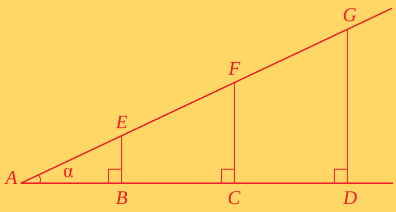
....

فعالیت بالا نشان می‌دهدکه همهٔ نسبت‌های به‌دست آمده، با هم مساوی‌اند و مقدار آنها وابسته به زاویه ۴۰ درجه است. این نسبت را **کسینوس زاویهٔ ۴۰** درجه می‌نامند. برای هر زاویهٔ تند دیگری نیز می‌توان این محاسبات را انجام داد.

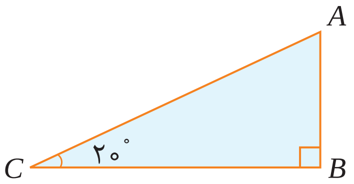
تعریف

برای هر زاویهٔ تند α مانند شکل زیر، نسبت‌های $\frac{AD}{AG}$ و $\frac{AC}{AF}$ و $\frac{AB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **کسینوس زاویه** α می‌نامند و آن را با $\cos\alpha$ نشان می‌دهند.

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۷



مقدار تقریبی کسینوس ۲۰ درجه را محاسبه کنید.

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه را که یک زاویهٔ ۲۰ درجه داشته باشد، رسم می‌کنیم. در شکل روبه‌رو، زاویهٔ رأس C، ۲۰ درجه است. سپس به وسیلهٔ خط‌کش طول ضلع BC و وتر AC را اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت $\frac{BC}{AC}$ را حساب می‌کنیم. نتیجهٔ تقریبی این محاسبه نشان می‌دهد که $\cos ۲۰^\circ \approx ۰/۹۳$.

کاردرکلاس ۶

۱) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

....

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازهٔ یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

....

پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

....

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم شده را حساب کنید.

....

ب) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

....

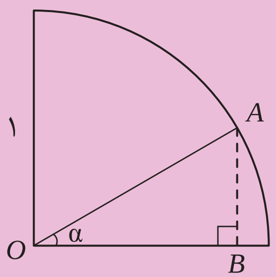
۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

زاویه / نسبت مثلثاتی	۳۰ درجه	۴۵ درجه	۶۰ درجه
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

دربارهٔ مفهوم کسینوس نیز این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازهٔ یک زاویه چه تأثیری در اندازهٔ کسینوس آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۸

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویهٔ α دارد؟

....

۱) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

....

۳) کسینوس زاویهٔ α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

....

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

....

۵) با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

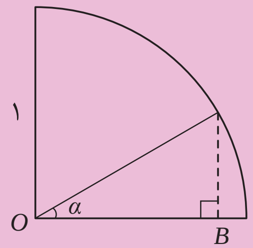
....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، کسینوس آن زاویه کوچک‌تر می‌شود.

اگر عددی مانند b به صورت $0 < b < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوس آن برابر b شود؟ با انجام فعالیت زیر می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

فعالیت ۹

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.



۱) اگر طول پاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویهٔ α چقدر است؟

....

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $0 < b < 1$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

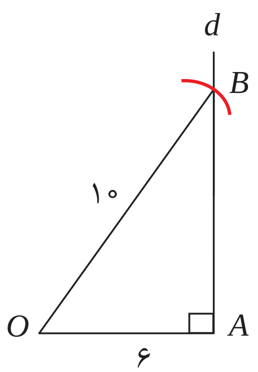
....

فعالیت ۹ نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

مثال ۸

زاویه‌ای بسازید که کسینوس آن برابر ۰/۶ باشد.

مانند شکل زیر، پاره خطی (OA) به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم. در نقطهٔ A، خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. کمانی به مرکز O و شعاع ۱۰ واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویهٔ به‌دست آمده در رأس O جواب مسئله است. اگر با نقاله آن را اندازه بگیریم تقریباً ۵۳ درجه است.



مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵و ۷۵ درجه را حساب کنید.

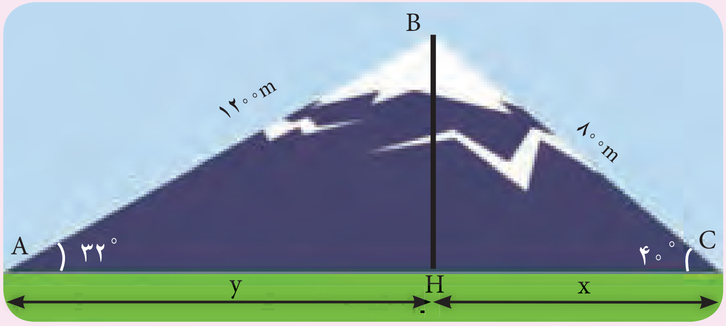
۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ۱۰۰ متر و با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب ، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویهٔ ۵۰درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

۳) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطهٔ متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قلهٔ آن بروند. علی با زاویهٔ ۳۲ درجه و حسن با زاویهٔ ۴۰ درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی ۱۲۰۰ متر و حسن پس از طی ۸۰۰ متر به قلهٔ کوه می‌رسند. فاصلهٔ علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.



۴) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

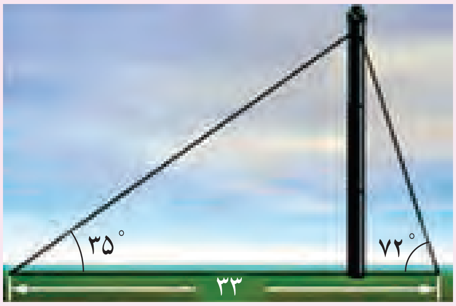
الف) $cos\ ۲۰^\circ < cos\ ۴۰^\circ$

ب) $tan\ ۲۰^\circ < tan\ ۳۰^\circ$

پ) $sin\ ۳۰^\circ < sin\ ۲۰^\circ$

۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\tan ۴۵^\circ-\cos ۳۰^\circ}{۱+\sin ۳۰^\circ} \quad \text{و} \quad B=\frac{\tan ۶۰^\circ+۲\cos ۳۰^\circ-۲\sqrt{۳}}{۱+\sin ۶۰^\circ}$$



۶) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویهٔ بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصلهٔ بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ$ ب) $\sin ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ$

پ) $\cos ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$ ت) $\tan ۶۰^\circ+\tan ۳۰^\circ=\frac{۲}{\sin ۶۰^\circ}$

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A=\sin ۳۰^\circ+\cos ۳۰^\circ$

ب) $B=\frac{۲\cos ۳۰^\circ-۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ+۳\cos ۶۰^\circ}$

پ) $C=۱-۲\sin ۳۰^\circ$

فصل هفتم

تابع

اگر پرتابه‌ای را به طور افقی پرتاب کنیم، پس از مدتی بر روی زمین سقوط می‌کند. هر چه سرعت اولیهٔ پرتابه بیشتر باشد، پرتابه مدت بیشتری در هوا باقی می‌ماند و محل سقوط بر روی زمین فاصلهٔ بیشتری تا محل پرتاب دارد.

فاصلهٔ محل سقوط پرتابه تا محل پرتاب وابسته به سرعت اولیهٔ پرتابه است و می‌گویند این فاصله تابعی از سرعت اولیهٔ پرتابه است.

اما با توجه به گرد بودن زمین، با افزایش سرعت اولیهٔ پرتابه (تقریباً ۷ کیلومتر در ثانیه)، ممکن است پرتابه هرگز بر زمین سقوط نکند.

اگر سرعت اولیهٔ پرتابه از این مقدار بیشتر باشد، پرتابه با زمین برخورد نمی‌کند.

۷ــ۱ــ مفهوم تابع

امروز، کلاس ریاضی ما با نجوم شروع شد.

دبیر گفت: من در دورهٔ دبیرستان به نجوم خیلی علاقه داشتم و دربارهٔ آن بسیار مطالعه می‌کردم. در کتاب‌های نجوم خوانده بودم که فاصلهٔ خورشید تا زمین ۱۵۰ میلیون کیلومتر است و نور خورشید حدود ۸ دقیقه و ۲۰ ثانیه طول می‌کشد تا به زمین برسد. بعد از خورشید، نزدیک ترین ستاره به زمین، پروکسیما قنطورس *(Proxima Centauri)* نام دارد. نور این ستاره، ۴/۲ سال طول می‌کشد تا به زمین برسد. فاصلهٔ ستارگان از هم زیاد است و برای اندازه‌گیری آن از مقیاس بسیار بزرگی به نام سال نوری استفاده می‌شود. منظور از سال نوری، طول مسیری است که نور در یک سال طی می‌کند. برای مثال، فاصلهٔ پروکسیما قنطورس با زمین، ۴/۲ سال نوری است. دورترین ستاره‌های دیده شده ۱۳/۳ میلیارد سال نوری با ما فاصله دارند.

آرش که از هنرجویان بسیار کنجکاو کلاس بود، با تعجب پرسید:

دانشمندان این فاصله‌ها را چگونه اندازه می‌گیرند؟ ما که نمی توانیم به این ستاره‌ها برویم؛ پس چگونه این فاصله‌ها را اندازه می‌گیریم؟

دبیر گفت: سؤال بسیار خوبی است. اما من یک سؤال آسان‌تر مطرح می‌کنم؛ مساحت یک مربع را چگونه اندازه می‌گیرید؟

آرش گفت: طول ضلع مربع را اندازه می‌گیرم و سپس، آن را به توان دو می‌رسانم.

دبیر گفت: پس، مساحت مربع را به طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌کنید بلکه از طریق طول ضلع آن، مساحتش را به دست می‌آورید.

آرش گفت: بله، مساحت مربع با طول ضلعش رابطه دارد، اما این مطالب چه ربطی به فاصلهٔ ستارگان دارد؟

دبیر گفت: صبر کنید به ارتباط این مطالب و فاصله‌های ستارگان هم می‌رسیم. آیا می‌توانید مورد دیگری هم پیدا کنید که نتوانید آن را به طور مستقیم اندازه‌گیری کنید ولی با اندازه‌گیری یک کمیت[1] دیگر، اندازهٔ آن را به دست آورید؟

آرش گفت: در جایی دیدم که ارتفاع از سطح دریا را با دماسنج اندازه می‌گیرند. نقطهٔ جوش آب، در هر مکان با ارتفاع آن مکان از سطح دریا رابطه دارد. اگر دمای جوش آب را در مکانی اندازه‌گیری کنیم، ارتفاع آن مکان از سطح دریا را می‌توانیم به دست آوریم.

دبیر گفت: برای اندازه‌گیری فاصلهٔ ستارگان تا زمین، آیا می‌توان از این روش استفاده کرد؟

آرش گفت: شاید بشود؛ باید ببینیم این فاصله با چه چیزهایی ارتباط دارد. اگر چیزهایی را بیابیم که با این فاصله‌ها ارتباط داشته باشند و بتوانیم آنها را اندازه‌گیری کنیم، شاید بتوانیم این فاصله‌ها را به دست آوریم.

دبیر گفت: به یک چراغ روشن دقت کنید. هر چه به آن نزدیک‌تر می‌شوید، نور بیشتری به شما می‌رسد و هر چه از آن دورتر می‌شوید، نور کمتری دریافت می‌کنید. آیا این مطلب به حل مسئله کمکی می‌کند؟

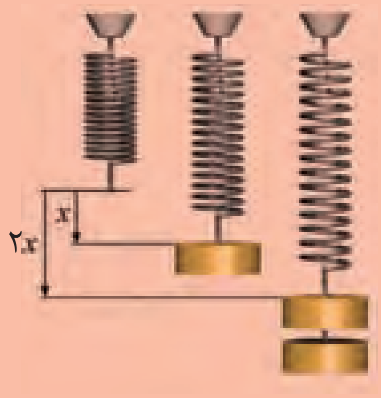
آرش گفت: یعنی میزان نوری که از چراغ به ما می‌رسد، با فاصلهٔ چراغ از ما مرتبط است. پس با اندازه‌گیری نوری که از ستارگان به ما می‌رسد، می توانیم فاصلهٔ آنها را تا خودمان به دست آوریم.

برای درک بهتر مفهوم رابطهٔ بین کمیت‌ها، در فعالیت بعدی ارتباط طول یک فنر و وزن جسمی را که به آن آویزان می‌شود، به طور دقیق‌تری بررسی می‌کنیم.

۱ـ مفاهیمی مانند وزن و جرم و بار الکتریکی و فشار هوا و نظایر آنها را **کمیت‌های فیزیکی** و مفاهیمی مانند طول و مساحت و حجم و نظایر آنها را **کمیت‌های هندسی** می‌نامند. برخی از این کمیت‌ها با یکدیگر ارتباط دارند. شناختن این ارتباط‌ها بخش مهمی از کار علوم تجربی و ریاضی است.

فعالیت ۱

فرض کنید فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱سانتی‌متر به طول فنر اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۶۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود، پاره می‌شود.



۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده .... شود، طول فنر .... می‌شود.

۲) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم، طول آن چقدر می‌شود؟

....

۳) اگر با آویزان کردن وزنه‌ای، طول فنر ۲۰ سانتی‌متر شود، جرم آن چقدر بوده است؟

....

۴) در حالت کلی، اگر یک وزنهٔ a گرمی به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود، طول فنر بر حسب a چقدر خواهد شد؟

....

۵) اگر وزنه‌ای را به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود و طول آن برابر l شود، جرم آن وزنه بر حسب l چقدر است؟

....

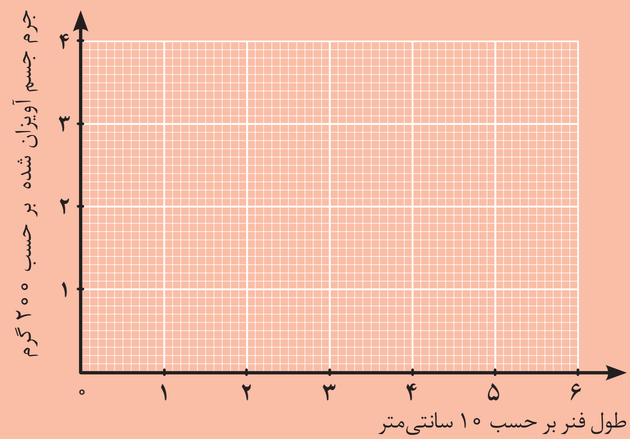
۶) از این طریق، چه ابزاری ساخته می‌شود؟

۷) حداقل و حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟

۸) جدول زیر ارتباط بین طول فنر و جرم وزنهٔ آویزان شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول فنر کشیده شده	۱۰	۱۵	۲۰	...	۴۰	۴۵	۵۰	...
جرم وزنهٔ آویزان شده	۰	...	...	۳۰۰	...	...	...	۷۵۰

۹) در شکل زیر، محور افقی نشان دهندهٔ طول فنر و هر واحد آن معادل ۱۰ سانتی‌متر است. محور عمودی نشان دهندهٔ جرم جسم آویزان شده است و هر واحد آن معادل ۲۰۰ گرم است. جدول بالا، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.



۱۰) حداقل و حداکثر طولی که این فنر پیدا می‌کند، چقدر است؟

در علوم تجربی و ریاضی، کمیت‌های مرتبط بسیاری را می‌توان پیدا کرد؛ مثلاً، مساحت یک مربع، وابسته و مرتبط با طول ضلع آن است. اگر طول ضلع مربع را بدانیم، مساحت آن نیز مشخص می‌شود. فشار هوا در هر نقطه وابسته و مرتبط با ارتفاع آن نقطه از سطح دریاست. هزینهٔ پرداخت شده بابت برق، وابسته و مرتبط با میزان برق مصرف شده است. قیمت بلیت اتوبوس‌های بین شهری وابسته و مرتبط با فاصلهٔ بین

شهرها است. نمونه‌های دیگری از ارتباط کمیت‌ها با یکدیگر را می‌توانید در محیط اطراف خود بیابید.

سؤال مهم این فصل این است که رابطهٔ بین دو کمیت را چگونه باید بشناسیم و بیان کنیم. در فعالیت زیر، نمونهٔ دیگری از ارتباط بین دو کمیت را می‌بینیم که نشان می‌دهد این رابطه را چگونه می‌توان شناخت.

فعالیت ۲

فرض کنید خودرویی با گنجایش ۶۰ لیتر بنزین داریم. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت، پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و لازم است حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

۱) در جای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

هر چه بنزین در باک .... شود، مسافت طی شده .... می‌شود.

۲) حجم بنزین موجود در باک چه مقادیری می‌تواند باشد؟

....

۳) اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر با v نشان دهیم و مسافت طی شده را برحسب کیلومتر با L نشان دهیم ، رابطه‌ای بنویسید که مقدار L را بر حسب مقدار v بیان کند.

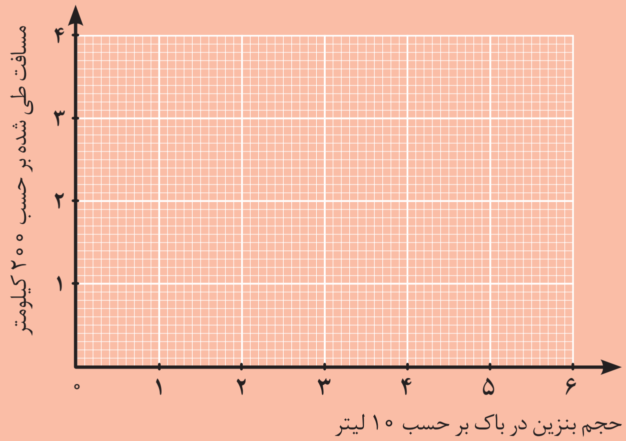
....

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط بین حجم بنزین موجود در باک و مسافت طی شده را نشان می‌دهد. آن را کامل کنید.

حجم بنزین در باک	۶۰	۵۰	۴۵	۳۵	...	۲۰	...	۵
مسافت طی شده	۰	...	...	...	۳۷۵	...	۶۲۵	...

۵) در شکل زیر، محور افقی حجم بنزین در باک را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۱۰ لیتر است. محور عمودی مسافت طی شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ کیلومتر است. جدول صفحهٔ قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.



۶) با در نظر گرفتن میزان بنزین موجود در باک، این خودرو چه مسافت‌هایی را می‌تواند طی کند؟

۷) اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی مانده باشد، ماشین چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟

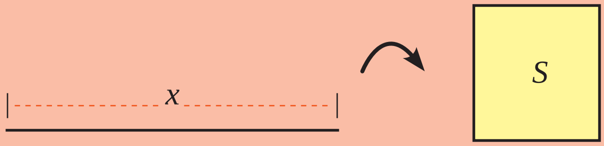
۸) آیا پاسخ دادن به سؤال های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ بین بنزین باقی‌مانده و مسافت طی شده کافی است؟

فعالیت ۲ نشان داد که برای شناخت رابطهٔ بین دو کمیت، باید بدانیم که این کمیت‌ها چه مقادیری می‌توانند داشته باشند و رابطه‌ای که مقدار یکی را بر حسب دیگری بیان می‌کند، چیست. بین کمیت‌ها در زمینه‌های بسیار متنوعی رابطه برقرار می‌شود و در هر زمینه‌ای ما باید بتوانیم این رابطه‌ها را تشخیص دهیم. در فعالیت زیر رابطه‌ای در هندسه را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۳

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بُریم و با آن یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.

۱) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟



....

۲) طول قطعهٔ بریده شده از مفتول، چه مقادیری می‌تواند باشد؟

....

۳) اگر طول قطعهٔ بریده شده از مفتول را با x نشان دهیم و مساحت مربع ساخته شده با آن را با S نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار S را بر حسب مقدار x بیان می‌کند.

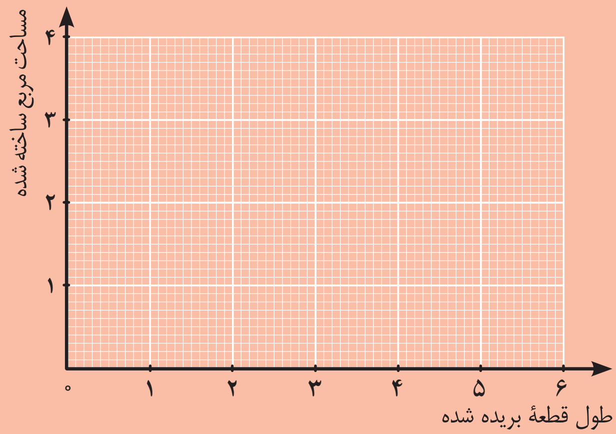
....

با توجه به پاسخ‌های خود، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

۴) جدول زیر، ارتباط طول قطعهٔ بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول قطعهٔ بریده شده	۴	۲۰	۴۴	...	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع	۱	...	...	۱۴۴	...	...

۵) در شکل زیر، محور افقی طول قطعهٔ بریده شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۴۰ سانتی‌متر است. محور عمودی مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ سانتی‌متر مربع است. جدول صفحهٔ قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را بیابید و شکل حاصل را به طور تقریبی رسم کنید.



۶) مساحت‌های مربع‌های ساخته شده، چه مقادیری می‌توانند باشند؟ مجموعهٔ مقادیر این مساحت‌ها را مشخص کنید.

....

۷) برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مفتول را باید ببریم؟

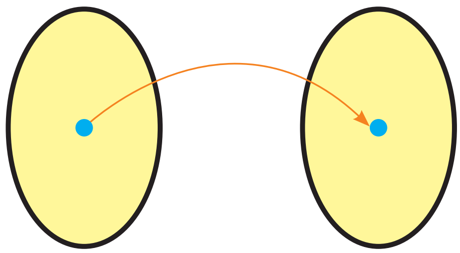
....

۸) آیا پاسخ به سؤال‌های (۲) و (۳) برای شناخت رابطهٔ مساحت مربع ساخته شده و طول قطعهٔ بریده شده از مفتول کافی است؟

....

در همهٔ فعالیت‌های قبل، رابطهٔ بین دو کمیت مرتبط با هم را بررسی کردید. اگر یکی از این کمیت‌ها را کمیت (الف) و دیگری را کمیت (ب) بنامیم، وضعیت‌های مطرح شده به گونه‌ای هستند که با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست می‌آید.

مجموعهٔ مقادیر کمیت (ب)　　　مجموعهٔ مقادیر کمیت (الف)

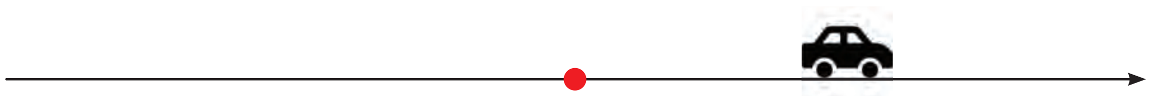


این دسته از روابط بین کمیت‌ها، روابط خاصی هستند که در ریاضی با مفهومی به نام **تابع** بیان می‌شوند و کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می‌نامند.

اما اگر دو کمیت (الف) و (ب) با هم ارتباط داشته باشند ولی با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) نتوان یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست آورد، این رابطه تابع نامیده نمی‌شود.

مثال ۱

فرض کنید خودرویی در جادهٔ مستقیمی در حال حرکت است. این جاده را به صورت محور اعداد در نظر می‌گیریم. هر نقطه روی محور اعداد با یک عدد حقیقی مشخص می‌شود که آن را **مختص طولی** آن نقطه می‌نامند. مثلاً مختص طولی مبدأ، صفر است. مختص طولی این خودرو با فاصلهٔ آن تا مبدأ، ارتباط دارد.



اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ را کمیت (الف) و مختص طولی آن را کمیت (ب) بنامیم، با مشخص شدن مقدار کمیت (الف) مقدار کمیت (ب) مشخص نخواهد شد زیرا ممکن است مختص طولی خودرو دو عدد قرینهٔ

هم باشند. مثلاً اگر فاصلهٔ خودرو تا مبدأ ۸ واحد باشد، خودرو ممکن است دارای مختص طولی ۸- یا ۸ باشد. پس، در این مثال، کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) نخواهد بود اما بر عکس، با مشخص شدن مختص طولی خودرو، فاصلهٔ آن تا مبدأ به خوبی معین می‌شود. پس در این مثال، کمیت (الف) تابعی از کمیت (ب) خواهد بود.

کار در کلاس ۱

۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر کشیده شده است؟ آیا طول فنر کشیده شده، تابعی از جرم جسم آویزان شده است؟

....

۲) مثالی از دو کمیت مرتبط (الف) و (ب) ارائه کنید که در آن کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد ولی کمیت (الف) تابعی از کمیت (ب) نباشد.

....

خواندنی


نیوتن

با رشد علوم، ضرورت بررسی روابط بین کمیت‌ها آشکار شد. نیوتن و گالیله از اولین کسانی بودند که برای توصیف حرکت اشیاء نیاز به یافتن رابطهٔ بین زمان و مکان اشیاء را احساس کردند.

لایب‌نیتز، ریاضیدان قرن هفدهم نیز برای توصیف یک منحنی در صفحه، نیاز به یافتن رابطهٔ بین طول و عرض نقاط یک منحنی را احساس کرد. سرانجام، بررسی روابط بین کمیت‌ها منجر به تعریف مفهوم تابع در ریاضی شد؛ اما رسیدن به مفهوم تابع چندان ساده نبود. پس از اینکه نیوتن و لایب‌نیتز کارهای خود را شروع کردند بیش از سه قرن طول کشید تا مفهوم دقیقی برای تابع پیدا شود.


لایب‌نیتز

(تاریخ ریاضی ایوز، جلد ۲)

فعالیت‌هایی که انجام دادید، نشان می‌دهند که برای مشخص شدن تابعی که رابطهٔ بین دو کمیت (الف) و (ب) را بیان می‌کند، باید به دو سؤال اصلی زیر پاسخ دهیم.

۱) کمیت (الف) چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۲) با مشخص شدن یک مقدار برای کمیت (الف)، چگونه مقدار کمیت (ب) به دست می‌آید؟

مجموعهٔ مقادیرِ ممکنِ کمیت (الف) را **دامنهٔ** این تابع می‌گویند و قانونی را که مقادیر کمیت (ب) را برحسب مقادیر کمیت (الف) مشخص می‌کند، **قانون** یا **ضابطهٔ** این تابع می‌نامند. دو تابع با دامنه و قانون یکسان، دو **تابع مساوی** نامیده می‌شوند.

مثال ۲

در فعالیت (۱) جرم وزنهٔ آویزان شده، تابعی از طولِ فنرِ کشیده شده است. طول فنر می‌تواند مقادیری از ۱۰ تا ۶۰ سانتی‌متر باشد. پس دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} \mid ۱۰ \le x \le ۶۰\}$است. اگر ℓ طول فنر کشیده شده با آویزان کردن یک وزنهٔ a گرمی باشد، مقدار a بر حسب ℓ از طریق تساوی $a = ۱۵\ell - ۱۵۰$ محاسبه می‌شود.

بنابراین قانون این تابع به صورت $a = ۱۵\ell - ۱۵۰$ است.

کار در کلاس ۲

۱) در فعالیت (۲)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

....

۲) در فعالیت (۳)، دامنه و قانون تابعی رابنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مفتول، بیان می‌کند.

....

مسئله ها

۱ـ الف) آیا با مشخص بودن محیط یک دایره، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت دایره، تابعی از محیط آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

....

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک دایره، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط دایره، تابعی از مساحت آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

....

۲ـ الف) دو مثلث رسم کنید که محیط آنها ۱۰ سانتی‌متر و طول اضلاع آنها متفاوت باشد. مساحت این دو مثلث را پیدا کنید. آیا این دو مساحت برابرند؟

....

ب) آیا با مشخص بودن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت مثلث تابعی از محیط آن است؟

....

۳ـ الف) دو مثلث متفاوت با مساحت‌های برابر رسم کنید. محیط آنها را پیدا کنید. آیا مقدار محیط‌ها برابرند؟

....

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط مثلث، تابعی از مساحت آن است؟

....

۴) سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. آیا ارتفاع سنگ از سطح زمین، تابعی از زمان است؟چرا؟ اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

....

۵) در یک سُرسُره که فاصلهٔ پای سُرسُره تا نردبان آن ۲ متر است، مقدار مسافتی که بچه سُر می‌خورد، به ارتفاع سُرسُره وابسته است. اگر حداقل ارتفاع سُرسُره‌ها ۲ متر و حداکثر ارتفاع آنها ۴ متر باشد، تابعی را که مسافت سُر خورده شده را بر حسب ارتفاع سُرسُره بیان می‌کند، با مشخص کردن دامنه و قانون آن به‌دست آورید.

....

۶) یک شیرینی فروشی به طور ثابت، ماهانه ۷ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه و آب و برق و دستمزد کارگران، پرداخت می‌کند. هزینهٔ مواد اولیهٔ هر کیلوگرم شیرینی ۳,۰۰۰ تومان است. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲,۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲,۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد.

الف) درآمد این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

....

ب) هزینهٔ ماهیانهٔ این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

....

پ) سود این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است، این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

....

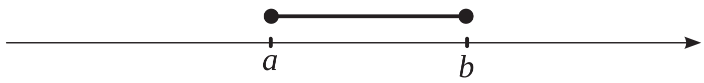
۷) یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اُهمی را به طور موازی با یک مقاومت متغیر می‌بندیم. مقاومت معادل تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱,۵۰۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابعی را به دست آورید که مقاومت معادل را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند.

....

بازه ها

برای اینکه بتوانیم از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی آسان‌تر صحبت کنیم، برخی از زیرمجموعه‌های مهم آن را نام‌گذاری می‌کنیم. زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی را که به صورت زیر نمایش داده شده‌اند، **بازه** می‌نامند.

$\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\leq b\}$

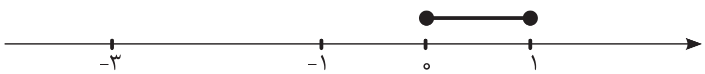


مجموعهٔ بالا را به صورت $[a\,,b]$ نشان می‌دهند و آن را بازهٔ **بسته به ابتدای *a* و انتهای *b*** می‌نامند.

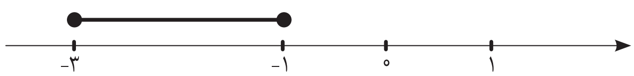
مثال ۳

الف) بازه‌های بستهٔ $[۰\,,۱]$ و $[-۳\,,-۱]$ را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی شکل نشان دهید.

$[۰,۱]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\leq x\leq ۱\}$



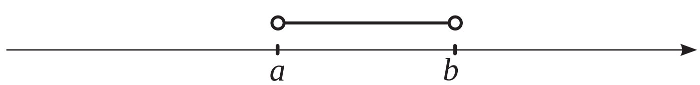
$[-۳,-۱]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-۳\leq x\leq -۱\}$



ب) در فعالیت (۱) دیدیم که جرم وزنه، تابعی از طول فنر است. پس دامنهٔ تابع، بازهٔ بستهٔ $[۱۰\,,۶۰]$ است.

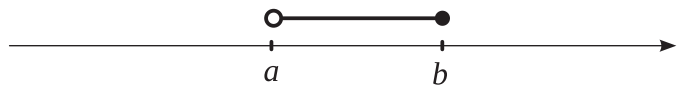
اگر از بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ دو سر آن را خارج کنیم، آن را بـازهٔ **باز به ابتدای *a* و انتهای *b*** می‌نامند و با $(a\,,b)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}$



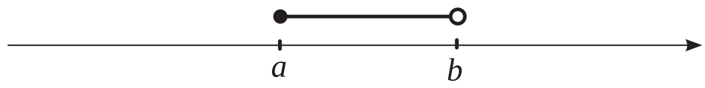
اگر از بازهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ ابتدا یا انتهای آن را خارج کنیم، آن را **بازهٔ نیم باز، نیم بسته** می‌نامند. اگر ابتدای آن را خارج کنیم، آن را با $(a\,,b]$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$$



اگر انتهای آن را خارج کنیم آن را با $[a\,,b)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$$



کاردرکلاس ۳

بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

[۲ , ۵]   ,   (-۱ , ۳)   ,   (۴ , ۷]   ,   (-۴ , -۲)

....

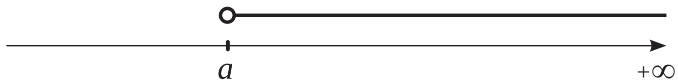
مجموعه‌های به صورت $\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$ نیز بازه نامیده می‌شوند. ابتدای این بازه عدد a است ولی انتهایی ندارد و آن را به صورت $[a\,,+\infty)$ نشان می‌دهند.

$$[a\,,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$$

توجه داشته باشید که در این علامت‌گذاری نماد $+\infty$ به عدد خاصی اشاره ندارد و نشانهٔ هیچ عدد خاصی نیست.

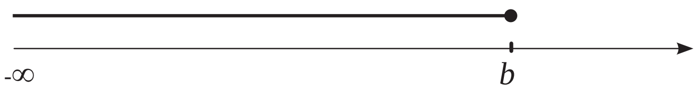
اگر a را از این بازه خارج کنیم، آن را با $(a\,,+\infty)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$(a\,,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$



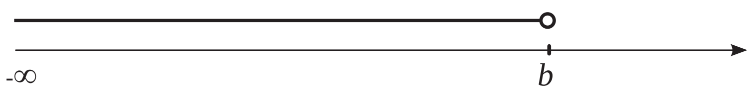
به طور مشابه، مجموعه‌های به صورت $\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$ نیز بازه نامیده می‌شوند. انتهای این بازه عدد b است ولی ابتدایی ندارد و آن را به صورت $(-\infty, b]$ نشان می‌دهند.

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$



اگر b را از این بازه خارج کنیم، آن را با $(-\infty,b)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر:

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$



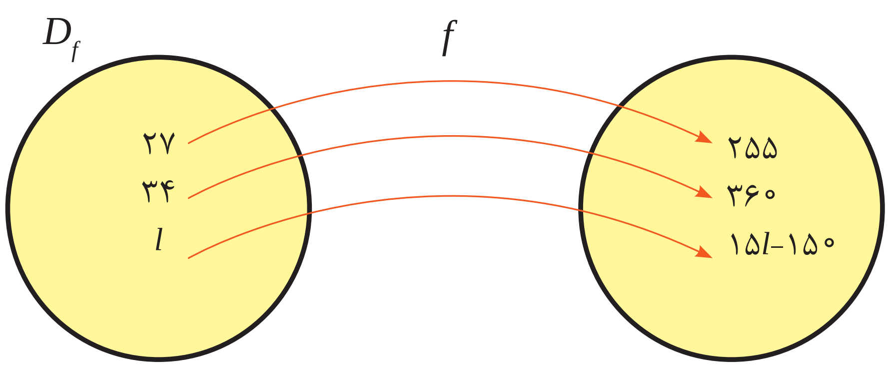
۷ـ۲ــ نمادگذاری تابع‌ها

رابطهٔ بین کمیت‌ها به شکل‌های مختلفی برقرار می‌شود و تابع‌های بسیاری وجود دارند. برای صحبت کردن در مورد تابع‌ها، بهتر است برای هر یک از آنها نامی انتخاب کنیم. مثلاً، تابعی را که در فعالیت فنر به آن رسیدیم، می‌توانیم f بنامیم[۱]. در این صورت، دامنهٔ این تابع را با D_f (بخوانید دامنهٔ f یا دیِ اف)[۲] نشان می‌دهیم؛ پس $D_f = [۱۰ , ۶۰]$.

عدد ۲۷ در دامنهٔ این تابع است و با جایگذاری ۲۷ در قانون تابع، عدد $۲۵۵ = ۱۵۰ - ۲۷ \times ۱۵$ به دست می‌آید. عدد ۳۴ نیز در دامنهٔ این تابع است و با جایگذاری ۳۴ در قانون تابع ، عدد $۳۶۰ = ۱۵۰ - ۳۴ \times ۱۵$ به‌دست می‌آید. اگر یک عدد دلخواه در D_f را با l نشان دهیم، با اِعمال قانون تابع f روی آن، مقدار $۱۵l - ۱۵۰$ به‌دست می‌آید.

مقداری را که با جایگذاری ۲۷ در قانون تابع به دست می‌آید، با $f(۲۷)$ (بخوانید افِ ۲۷) نشان می‌دهند. پس: $f(۲۷) = ۱۵ \times ۲۷ - ۱۵۰ = ۲۵۵$. همچنین، مقداری را که با جایگذاری ۳۴ در قانون تابع به‌دست می‌آید، را با $f(۳۴)$ نشان می‌دهند؛ پس: $f(۳۴) = ۱۵ \times ۳۴ - ۱۵۰ = ۳۶۰$. برای عدد دلخواه $l \in D_f$ نیز مقدار ایجاد شده با اِعمال قانون تابع روی آن را با $f(l)$ (بخوانید افِ اِل) نشان می‌دهند؛ پس:

$$f(l) = ۱۵l - ۱۵۰$$



۱ـ نماد f حرف اول کلمهٔ *function* به معنای تابع است.
۲ـ نماد D حرف اول کلمهٔ *Domain* به معنای ناحیه‌ای معین است

عدد دلخواه $l \in D_f$، مقادیر مختلفی می‌تواند باشد، به همین دلیل l را یک متغیر در دامنهٔ تابع f می‌نامند. همچنین، در عبارت $f(l)$، l را متغیر تابع f نیز می‌نامند. در این مثال، از نماد l به‌عنوان متغیر این تابع استفاده کردیم ولی می‌توانیم از نام‌های دیگری هم استفاده کنیم؛ مثلاً می‌توانیم از نماد x برای متغیر تابع f استفاده کنیم؛ در این صورت، $x \in D_f$ و $f(x) = ۱۵x - ۱۵۰$. انتخاب نام متغیر یک تابع، اختیاری است و هر نمادی را می‌توان برای نمایش متغیر به‌کار برد. در نام‌گذاری تابع‌ها نیز می‌توان از نمادهای دیگری مانند g ، h و غیره استفاده کرد.

در این هنگام، برای احمد سؤالی پیش آمد.

احمد گفت: در فعالیت (۱) که نام تابع را f گذاشتیم، اگر طول فنر l شده باشد، جرم جسم آویزان شده $f(l)$ است. با استفاده از قانون این تابع، من می‌توانم $f(۷۰)$ را هم حساب کنم، اما عدد ۷۰ در دامنهٔ این تابع نیست. پس معنای $f(۷۰)$ چیست؟

دبیر گفت: همان‌طور که گفتید، ۷۰ در دامنهٔ این تابع نیست و فنر مورد بحث در آن فعالیت، نمی‌تواند ۷۰ سانتی‌متری شود؛ پس، در این وضعیت $f(۷۰)$ معنایی ندارد.

احمد گفت: اما ما می‌توانیم $f(۷۰)$ را حساب کنیم. پس چرا می‌گویید معنایی ندارد؟

دبیر گفت: بله، این درست است که می‌توان به ازای $l = ۷۰$ مقداری را محاسبه نمود، ولی این تابع می‌خواهد وضعیت فنری را توصیف کند که حداکثر ۶۰ سانتی‌متر می‌شود و برای این فنر، ۷۰ سانتی‌متر شدن معنایی ندارد. پس، مقدار $f(۷۰)$ معنایی ندارد، اما اگر می‌خواستیم فنر دیگری را توصیف کنیم که همین خصوصیات را داشت؛ با این تفاوت که می‌توانست ۷۰ سانتی‌متر هم بشود، مقدار $f(۷۰)$ معنادار بود و جرم جسم آویزان شده را نشان می‌داد.

نکتـــه

در هر تابعی، مقدار تابع را فقط برای مقادیر دامنه می‌توان محاسبه کرد و خارج از دامنهٔ تابع، حتی اگر قانون تابع معنادار باشد، نباید از مقدار تابع حرف بزنیم.

کار در کلاس ۴

۱ـ الف) تابع به‌دست آمده در فعالیت (۲)، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g نام‌گذاری کنید و D_g را بنویسید.

....

ب) مقدارهای g(۴۵) و g(۱۸) را بیابید. آیا عبارت g(۷۵) معنایی دارد؟

....

....

پ) اگر متغیر این تابع را با v نشان دهیم، مجموعه‌ای که v در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

....

ت) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

....

....

۲ـ الف) تابع به دست آمده در فعالیت (۳)، که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند، h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

....

ب) مقدارهای $h(۵)$ و $h(۱۲)$ را بیابید. آیا عبارت $h(۲۰۰)$ معنایی دارد؟

....

....

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

....

....

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

....

....

در این کار در کلاس، مشاهده می‌کنید که تغییر نام یک تابع تأثیری در تابع ندارد و آن را تغییر نمی‌دهد. اگر چه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود. مثلاً تابع‌های $f(z) = z^۲ + ۱$ ، $g(x) = x^۲ + ۱$ و $h(t) = t^۲ + ۱$ با دامنه $\mathbb{R}$ همگی مساوی هستند و یک تابع می‌باشند.

مسئله ها

۱) طول یکی از ضلع‌های زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث، وابسته به طول وتر آن است. دامنه و قانون تابعی را مشخص کنید که مساحت این مثلث را برحسب طول وتر آن بیان می‌کند. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود، به زبان ریاضی بنویسید.

....

۲) یک باغ میوه به مساحت ۱۰ هکتار در نظر بگیرید. یک کارگر در یک روز می‌تواند ۱۰۰ مترمربع از این باغ را میوه‌چینی کند.

الف) یک کارگر در چند روز تمام میوه‌های باغ را می‌چیند؟ دو کارگر در چند روز کار میوه‌چینی را تمام خواهند کرد؟

....

ب) آیا تعداد روزهای لازم برای چیدن تمام میوه‌های این باغ تابعی از تعداد کارگران است؟ چرا؟ قانون این تابع چیست؟ اگر حداکثر ۳۵ نفر کارگر همزمان قادر به کار میوه‌چینی باشند، دامنه این تابع چیست؟

....

پ) اگر این تابع را g بنامیم، مقادیر $g(۵)$ و $g(۳۰)$ را به‌دست آورید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

ت) آیا $g(\frac{۱}{۲})$ و $g(۴۰)$ معنایی دارند؟

....

۳) کرایهٔ تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰متر طی شده ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را که کرایهٔ تاکسی را برحسب مسافت طی شده بیان می‌کند به دست آورید. با توجه به اینکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰کیلومتر طی می‌کنند، دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

....

۴) مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-۱)$ معنایی دارد؟

....

۵) سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را با متر اندازه‌گیری کنیم و با h نشان دهیم و لحظهٔ رها کردن سنگ لحظهٔ صفر باشد، قانون این تابع به‌صورت $h = h(t) = -۵t^۲ + ۲۵$ است.

....

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

....

ب) مقدارهای $h(۱)$ و $h(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

پ) آیا $h(۳)$ و $h(-۱)$ معنایی دارند؟ چرا؟

....

۷ــ۳ــ نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

مسعود که یکی از شاگردان مدرسه‌مان بود، در مسابقات علمی یک سکهٔ طلا جایزه گرفته بود. به همین دلیل، به قیمت سکه علاقه‌مند بود و در سال گذشته، هر هفته قیمت سکه را یادداشت می‌کرد. بعد از یادگیری درس تابع، این سؤال برای مسعود پیش آمد که آیا می‌تواند قیمت سکه را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیرد. زیرا در هر هفته، سکه قیمت معینی داشت و او در هر هفته از سال گذشته می‌توانست بگوید قیمت سکه چقدر بوده است. یکی از همکلاس‌های مسعود، به نام احمد به او گفت که نمی‌توان قیمت سکه را تابعی از زمان در نظر گرفت. زیرا قیمت سکه و هفته‌های سال با یکدیگر ارتباط طبیعی ندارند و قانونی برای بیان این رابطه وجود ندارد. اگر در اینجا تابعی داشته باشیم، دامنه و قانون آن چیست؟

مسعود سؤال خود و نظر احمد را در کلاس با دبیر ریاضی در میان گذاشت.

دبیر گفت: ابتدا احمد باید بگوید منظورش از رابطهٔ طبیعی چیست؟

احمد گفت: رابطه‌هایی که ما تا به حال بررسی کرده‌ایم، بین کمیت‌هایی بوده که یک قانون طبیعت بر آنها حاکم بوده است و ما این رابطه‌ها را کشف کرده‌ایم. اما قیمت سکه در هر زمان ممکن است کم یا زیاد شود و قانونی برای آن وجود ندارد. بنابراین، بین زمان و قیمت سکه رابطه‌ای طبیعی وجود ندارد.

دبیر گفت: احمد درست می‌گوید. بین هفته‌های سال و قیمت سکه ارتباط طبیعی وجود ندارد. با این حال در هر هفتهٔ خاص در سال گذشته، سکه قیمت مشخصی داشته است.

مسعود گفت: شرط تابع بودن یک رابطه، همین است که برای مقدارهای مشخص از یک کمیت، مقدار مشخصی برای یک کمیت دیگر به دست آوریم. آیا طبیعی بودن یا نبودن این رابطه، در مفهوم تابع دخالتی دارد؟

احمد گفت: مشکل اصلی این است که ما نمی‌توانیم برای بیان رابطهٔ بین این دو کمیت قانونی بنویسیم.

مسعود گفت: من قیمت سکه را در هفته‌های مختلف سال گذشته یادداشت کرده‌ام و در جدولی به شکل صفحهٔ بعد آورده‌ام. البته برای ساده‌تر شدن جدول، فقط ۸ هفتهٔ اول سال را نوشته‌ام.

این جدول درست مانند یک قانون است؛ قانونی که به ازای هر هفته، قیمت سکه را در آن هفته مشخص می‌کند.

زمان (هفته)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
قیمت سکه (تومان)	۸۱۱,۰۰۰	۸۵۰,۰۰۰	۸۸۰,۰۰۰	۸۸۰,۰۰۰	۸۶۰,۰۰۰	۸۴۵,۰۰۰	۸۳۰,۰۰۰	۸۱۰,۰۰۰

احمد گفت: ولی من قانع نشدم؛ مگر قانون یک تابع نباید با فرمول بیان شود؟

دبیر گفت: نه لزوماً. هر روشی را که به کمک آن بتوان مقدار یک کمیت را با داشتن مقدار یک کمیت دیگر مشخص کرد، یک قانون برای محاسبهٔ مقدار تابع می‌دانیم. جدول مسعود نیز نشان‌دهندهٔ قانون این تابع است.

احمد گفت: دامنهٔ این تابع چگونه تعیین می‌شود؟

دبیر گفت: باید ببینیم در این جدول، مسعود قیمت سکه را در کدام هفته‌ها یادداشت کرده است.

مسعود: من فقط ۸ هفتهٔ اول سال را در این جدول آورده‌ام. پس فکر می‌کنم دامنهٔ این تابع باید $\{۱, ۲, . . . , ۸\}$ باشد.

دبیر گفت: بله درست است. این جدول، هم مشخص کنندهٔ قانون تابع است و هم دامنهٔ تابع را نشان می‌دهد. چون مسعود قیمت سکه را فقط در ۸ هفته بررسی کرده، دامنهٔ این تابع، $\{۱, ۲, . . . , ۸\}$ است که هر عضو آن شمارهٔ هفته را نشان می‌دهد.

احمد گفت: مگر دامنهٔ یک تابع را ما به دلخواه خود تعیین می‌کنیم؟ اگر این جدول را برای تمام سال می‌نوشتیم، آیا دامنهٔ این تابع $\{۱, ۲, . . . , ۵۲\}$ می‌شد؟

دبیر گفت: بله، با تغییر جدول، تابع هم عوض می‌شود و با تابع دیگری روبه‌رو می‌شویم. این تابع جدید با تابع قبلی فرق دارد، زیرا دامنه‌اش تغییر کرده است. همان‌طور که در فعالیت (۱) نیز اگر فنر دیگری را در نظر می‌گرفتیم که همان خصوصیات را می‌داشت ولی می‌توانست تا ۹۰ سانتی‌متر کشیده شود، دامنهٔ تابع آن تغییر می‌کرد و عددهای از ۱۰ تا ۹۰ را می‌پذیرفت. جدول جدید، یک تابع دیگر را نشان می‌داد که دامنهٔ آن، بازهٔ $[۱۰ , ۹۰]$ است، تغییر دامنه در این مثال نیز تابع دیگری را معرفی می‌کند.

تعریف

برای هر تابعی می‌توان یک جدول دو سطری رسم کرد به‌طوری که در سطر اول، مقدارهای مناسبی از دامنه را قرار دهیم و در سطر دوم، زیر هر مقدار از دامنه، مقدار تابع را بنویسیم. این جدول را جدول تابع می‌نامند که برای شناخت چگونگی تغییرات مقادیر تابع که رفتار تابع نامیده می‌شود، بسیار مفید است.

برای مثال، جدول قیمت‌های سکه نشان می‌دهد که در سه هفتهٔ اول، قیمت سکه رو به افزایش بوده و در هفتهٔ چهارم، قیمت ثابت مانده است. در هفته های بعد، قیمت سکه کاهش یافته و در هفتهٔ هشتم، قیمت آن از هفتهٔ اول هم کمتر شده است.

جدول هر تابعی، نموداری را در صفحه مشخص می‌کند که آن را **نمودار آن تابع** می‌نامند. از طریق نمودار یک تابع، رفتار تابع را بهتر می‌توان تشخیص داد.

مثال ۴

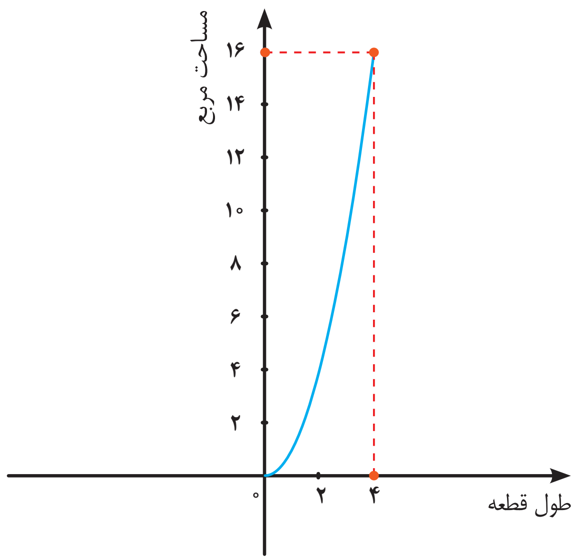
برای تابع h که در فعالیت (۳) به آن رسیدیم، داریم $D_h = [۰ , ۱۶۰]$ و برای $x \in D_h$ داریم $h(x)=\frac{x^۲}{۱۶}$

جدول زیر را برای این تابع رسم می‌کنیم.

x	۴	۸	۱۶	۲۰	۳۶	۶۰	۸۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۴۰	۱۶۰
$h(x)$	۱	۴	۱۶	۲۵	۸۱	۲۲۵	۴۰۰	۶۲۵	۹۰۰	۱۲۲۵	۱۶۰۰

از طریق این جدول، مشخص می‌شود که با زیاد شدن مقدار متغیر، مقادیر تابع نیز زیاد می‌شوند. روشن است که این جدول‌ها را نمی‌توان به ازای تمام اعدادی نوشت که در دامنه قرار دارند و فقط باید از تعدادی متناهی از اعداد استفاده کنیم. معمولاً عددهایی در دامنه را انتخاب می‌کنند که مشخص شدن مقدار تابع در این نقاط، برای تشخیص رفتار تابع (چگونگی تغییرات تابع) در سرتاسر دامنه کافی باشد. تشخیص رفتار تابع از طریق جدول چندان آسان نیست و نمودار تابع، بهتر می‌تواند رفتار آن را نشان دهد. همانند فعالیت ۳، دو محور عمود برهم رسم می‌کنیم. محور افقی نشان‌دهندهٔ طول قطعهٔ بریده

شده است و هر واحد آن را معادل ۴۰ سانتی‌متر در نظر می‌گیریم. محور عمودی نشان‌دهندهٔ مساحت مربع ساخته شده است و هر واحد آن را معادل ۲۰۰ سانتی‌متر مربع در نظر می‌گیریم. جدول صفحهٔ قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. با مشخص کردن این نقاط روی صفحهٔ مختصات شکل تقریبی را رسم می‌کنیم.



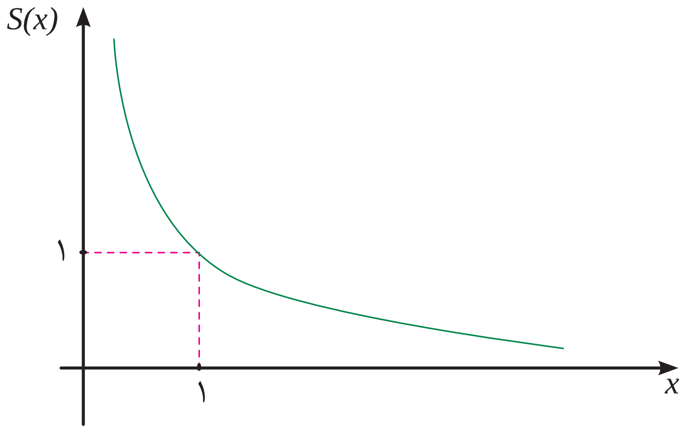
مثال ۵

برای تابع $S(x) = \frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $(۰ , +\infty)$ جدول زیر را رسم می‌کنیم.

x	۰	←	...	۰/۰۱	۰/۱	۱	۱۰	۱۰۰	...	→	$+\infty$
$S(x)$	$+\infty$	←	...	۱۰۰	۱۰	۱	۰/۱	۰/۰۱	...	→	۰

جدول بالا نشان می‌دهد که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه، مقدار تابع کوچک می‌شود و در نهایت، وقتی متغیر بسیار بزرگ می‌شود، مقدار تابع از هر مقداری کوچک‌تر می‌شود. در این حالت، به اصطلاح می‌گویند که **مقدار تابع به صفر نزدیک** می‌شود. این جدول، همچنین نشان می‌دهد که با کم شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن آن به صفر، مقدار تابع بسیار بزرگ و از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این حالت به اصطلاح می‌گویند که **مقدار تابع به بی‌نهایت** می‌رود.

برای درک بهتر رفتار این تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم.



کار در کلاس ۵

۱) برای تابع $f(t) = \frac{۱}{t}$ با دامنهٔ $(-\infty, ۰) \cup (۰, +\infty)$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

....

....

۲) برای تابع $g(t) = t - t^۲$ با دامنه $[-۱, ۲]$ جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

....

....

مسئله ها

۱) تابع f را با قانون $f(x) = (x - ۱)^۲$ و دامنهٔ $[۰ , ۲]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

....

۲) تابع g را با قانون $g(t) = \sqrt{t}$ و دامنهٔ $[۰ , ۴]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

....

۳) تابع f را با قانون $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و دامنهٔ $[-۱ , ۱]$ در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

....

۴) در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها ۲ واحد بیشتر از طول یکی از اضلاع آن است، مساحت آنها تابعی از طول وتر است.

الف) دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.

....

ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

....

۵) در مستطیل‌هایی که طول یک ضلع آن ۵ واحد است، طول قطر مستطیل تابعی از طول ضلع دیگر مستطیل است.

الف) اگر مستطیل‌های با مساحت حداکثر ۱۰۰ واحد را در نظر بگیریم، دامنه و قانون این تابع را مشخص کنید.

....

ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

....

۷ـ۴ـ نمودار برخی تابع‌های خاص

در توصیف طبیعت با روش‌های ریاضی، انواع تابع‌ها مشاهده می‌شوند. پدیده‌های طبیعی با تشخیص رفتار تابع‌ها پیش‌بینی می‌شوند. برای مثال برای طراحی مخزن سوخت یک موشک لازم است تابعی که مسافت طی شده توسط موشک را بر حسب میزان سوخت آن بیان می‌کند، بشناسیم. رفتار این تابع نشان می‌دهد که برای رسیدن به هدف مورد نظر چه مقدار سوخت مورد نیاز است.

مسیر حرکت یک پرتابه در سطح زمین به صورت نمودار یک تابع درجهٔ دوم است. این مسیر در برخی فواره‌ها که آب را با سرعت یکسانی به بیرون پرتاب می‌کنند، دیده می‌شود.

تابع‌های چند جمله‌ای

اگر قانون تابعی به‌صورت یک چندجمله‌ای از متغیر تابع باشد، آن را یک **تابع چندجمله‌ای** می‌نامیم.

برای مثال، تابع‌هایی با قانون‌های زیر تابع چندجمله‌ای هستند.

$$f(x) = ۲x - ۱ \quad , \quad g(u) = -u^{۲} + ۳u + ۱ \quad , \quad h(t) = t^{۳} - ۴t^{۲}$$

دامنهٔ این تابع‌ها می‌توانند تمام اعداد حقیقی باشند، یا آنکه فقط بازهٔ خاصی را به عنوان دامنهٔ آنها در نظر بگیریم.

کار در کلاس ۶

دو تابع چند جمله‌ای مثال بزنید.

....

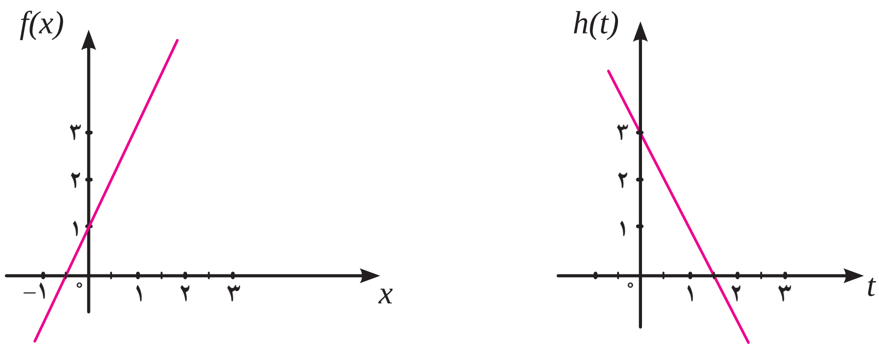
....

تابع های خطی

نمودار آن دسته از تابع‌های چندجمله‌ای که درجهٔ آنها حداکثر برابر ۱ باشد، به‌صورت خط است. به همین دلیل، آنها را **تابع‌های خطی** می‌نامند.

مثال ۶

نمودار دو تابع خطی $f(x) = ۲x + ۱$ و $h(t) = -۲t + ۳$ به شکل زیر است.



مثال ۷

دو کمیت متناسب که مقدار یکی مضربی از دیگری است، با هم رابطهٔ خطی دارند و یکی تابعی از دیگری است. قانون این تابع به صورت $y = ax$ است که یک تابع خطی است.

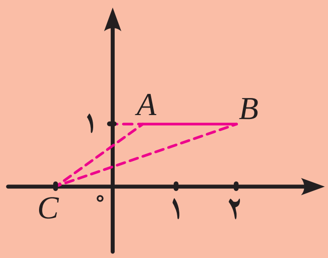
مثال ۸

پارکینگ‌های عمومی معمولاً مبلغی را به‌عنوان ورودی دریافت می‌کنند و به ازای هر ساعت که خودرو در پارکینگ می‌ماند، مبلغ دیگری می‌گیرند. اگر b تومان ورودیه و a تومان به ازای هر ساعت توقف دریافت شود، هزینهٔ x ساعت توقف خودرو در پارکینگ به صورت $ax + b$ تومان خواهد بود. بنابراین، هزینهٔ توقف خودرو تابعی خطی از زمان توقف خودرو است.

فعالیت ۴

در زیر پاره‌خط AB به طول a به موازات محور xها رسم شده است. فاصلهٔ پاره‌خط AB تا محور xها برابر ۱ است. نقطهٔ C به طول x را روی محور اعداد در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث ABC تابعی از طول نقطهٔ C است. این تابع را f بنامید.

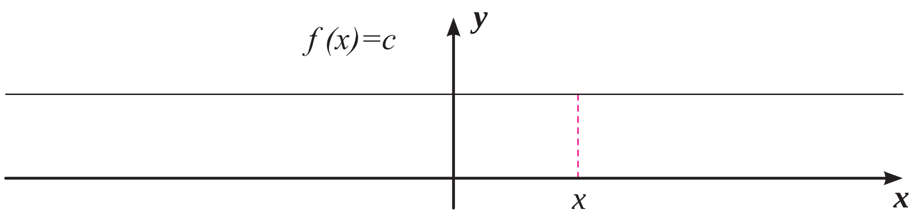
۱) مقدارهای $f(۰)$ و $f(۵)$ و $f(-۸)$ را تعیین کنید.



۲) جدول این تابع را رسم کنید؛ قانون آن را مشخص نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

تابع‌هایی را که فقط یک مقدار دارند، تابع ثابت می‌نامند. اگر f یک تابع ثابت باشد، قانون آن به‌صورت $y = f(x) = c$ می‌باشد که در آن c عدد ثابتی است. تابع‌های ثابت ساده‌ترین نوع تابع‌های خطی هستند

که نمودار آنها یک خط افقی به شکل زیر است.



مثال ۹

معمولاً پس از ۲۲ سالگی رشد قد متوقف می‌شود. در این حالت طول قد به‌عنوان تابعی از زمان در این بازه، تابع ثابت است.

اگر f یک تابع خطی باشد، قانون آن به‌صورت $y=f(x)=ax+b$ و نمودار آن به‌صورت خط است. در فعالیت ۵، چگونگی نمودار این تابع‌ها را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۵

با استفاده از جئوجبرا، نمودار تابع‌های خطی $y=ax+b$ را به ازای مقادیر مختلفی از a و b رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (چگونگی استفاده از جئوجبرا در صفحهٔ بعد توضیح داده شده است.)

۱) با ثابت نگه داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به‌دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟

....

۲) با تغییر مقادیر a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ (مقادیر مثبت و منفی را برای a در نظر بگیرید.)

....

۳) علامت a چه تأثیری بر نمودار تابع‌های خطی دارد؟ وضعیت زاویهٔ خط با محور طول‌ها را توصیف کنید.

....

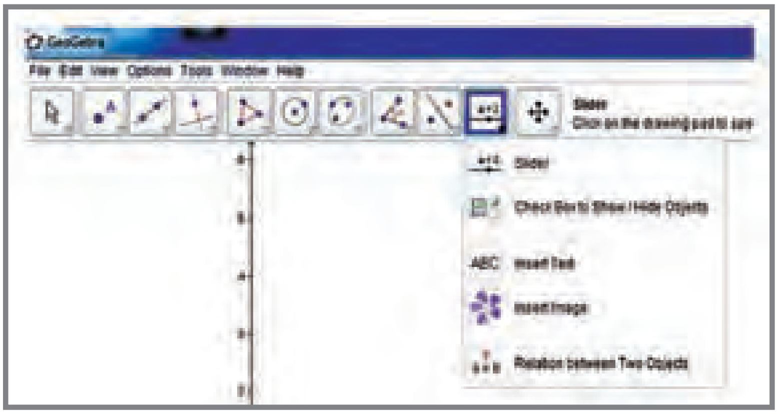
۴) آیا هر خطی در صفحه، نمودار یک تابع خطی است؟

....

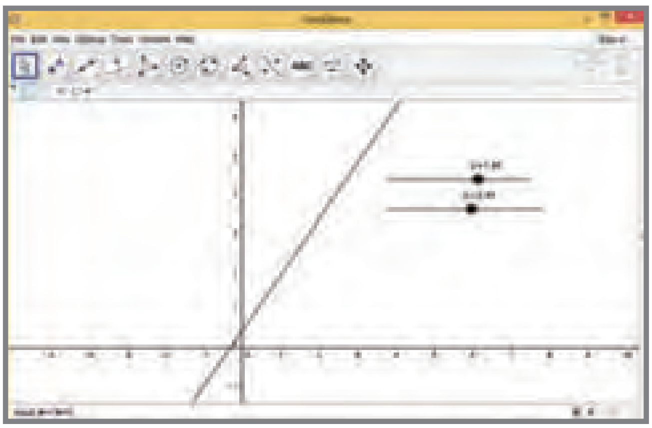
فعالیت ۵ نشان می‌دهد که با تغییر b، نمودار تابع، خطی است که به موازات خود منتقل می‌شود. اگر b را بزرگ‌تر کنیم، این خط به موازات خود به بالا منتقل می‌شود و اگر b را کم کنیم، این خط به موازات خود به پایین منتقل می‌شود و با صفر شدن b، خط از مبدأ می‌گذرد.

لغزنده در جئو جبرا

از نوار ابزار نرم‌افزار جئوجبرا دو *Slider* یا لغزنده به نام‌های a و b انتخاب کنید و دامنه تغییرات برای هر کدام تعریف کنید.



سپس در قسمت وارد کردن تابع، فرمول تابع را که شامل a و b است بنویسید.



برای تغییر مقدار a و b، نقطه روی لغزنده را حرکت دهید.

تابع‌های درجهٔ دوم

تابع‌های چند جمله‌ای از درجهٔ دوم را تابع های درجهٔ دوم می‌نامند. اگر f یک تابع درجهٔ دوم باشد، قانون آن به صورت $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ است. قبلاً با نمودار تابع درجهٔ دوم $y = x^2$ آشنا شده‌اید. در فعالیت زیر، نمودار توابع درجهٔ دوم را در حالت کلی بررسی خواهیم کرد.

فعالیت ۶

به کمک جئوجبرا، نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید.)

۱) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y = x^2 + c$ را به ازای مقادیر مختلف c در لغزندهٔ c رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2 + c$ را با نمودار تابع $y = x^2$ توصیف کنید.

....

۲) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y = (x - b)^2$ را به ازای مقادیر مختلف b (در لغزندهٔ b) رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y = x^2$ را با نمودار تابع $y = (x - b)^2$ توصیف کنید.

....

....

۳) نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y = ax^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت برای a رسم کنید. با تغییر a، وضعیت نمودار $y = ax^2$ چه تغییری نسبت به نمودار $y = x^2$ پیدا می‌کند؟

....

۴) با تغییر علامت a از مثبت به منفی، چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

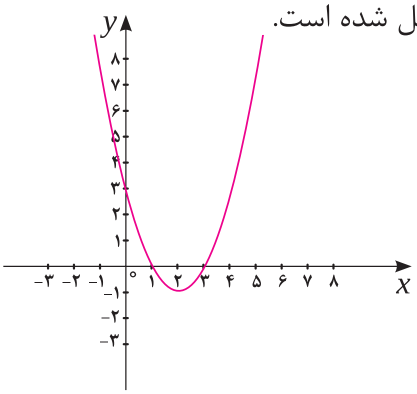
....

در فعالیت ۶ با شکل کلی انواعی از نمودار تابع‌های درجهٔ دوم آشنا شدید. نمودار هر تابع درجهٔ دوم از طریق نمودار تابع $y = x^2$ یا $y = -x^2$ با انتقال به پایین یا بالا (قسمت ۱) و انتقال به چپ یا راست (قسمت ۲) و منبسط یا منقبض کردن (قسمت ۳) ساخته می‌شود.

مثال ۱۰

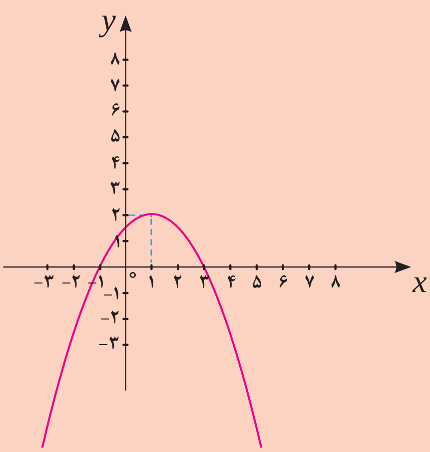
نمودار تابع $y = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید.

برای رسم این تابع، ابتدا نصف ضریب x به توان ۲ (یعنی ۴) را اضافه و کم می‌کنیم و سپس آن را به‌صورت $y = (x - 2)^2 - 1$ می‌نویسیم. نمودار این تابع، همان نمودار تابع $y = x^2$ است که به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست و به اندازهٔ ۱ واحد به پایین منتقل شده است.

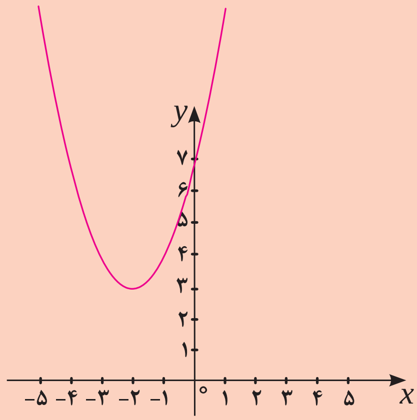


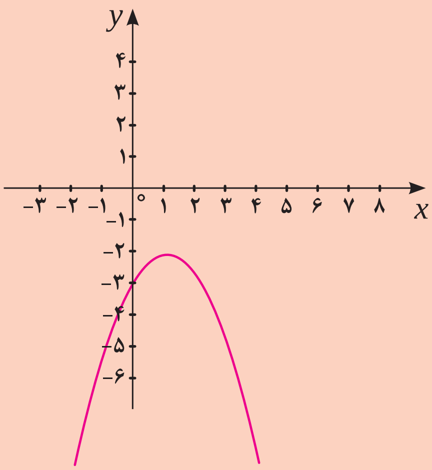
کاردرکلاس ۷

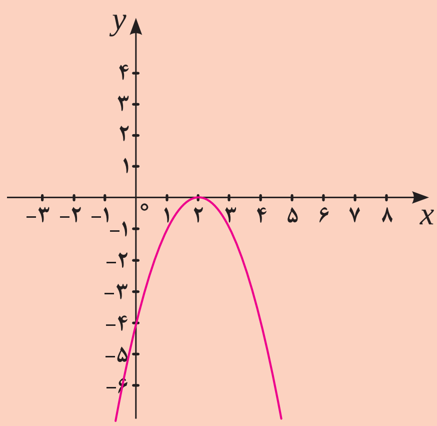
۱) اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y = a(x - b)^2 + c$ به شکل زیر باشد، علامت a، b و c را تعیین کنید.

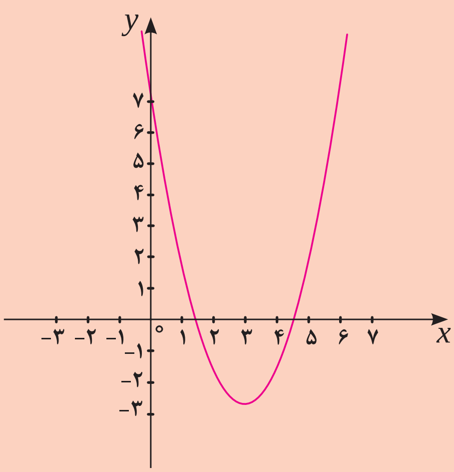


۲) در هر یک از حالات زیر که نمودار یک تابع درجهٔ دوم $y = a\,(x - b)^{2} + c$ را نشان می‌دهد، علامت یا مقدار a، b و c را تعیین کنید.









به کمک نمودارهای تابع‌های درجهٔ دوم می‌توان معادله‌های درجهٔ دوم را حل کرد. در فعالیت صفحهٔ بعد، چگونگی حل معادله‌های درجهٔ دوم را با روش نموداری بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۷

۱) نمودار تابع $y = x^{2} + x - 2$ را با جئوجبرا رسم کنید.

۲) نمودار این تابع در چه نقاطی محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

....

....

۳) جواب های معادلهٔ $x^{2} + x - 2 = 0$ چه مقادیری هستند؟

....

....

۴) آیا بین جواب‌های این معادله و محل تقاطع نمودار آن تابع با محور طول‌ها رابطه‌ای وجود دارد؟

....

....

۵) آیا این نتایج برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم برقرار است؟

....

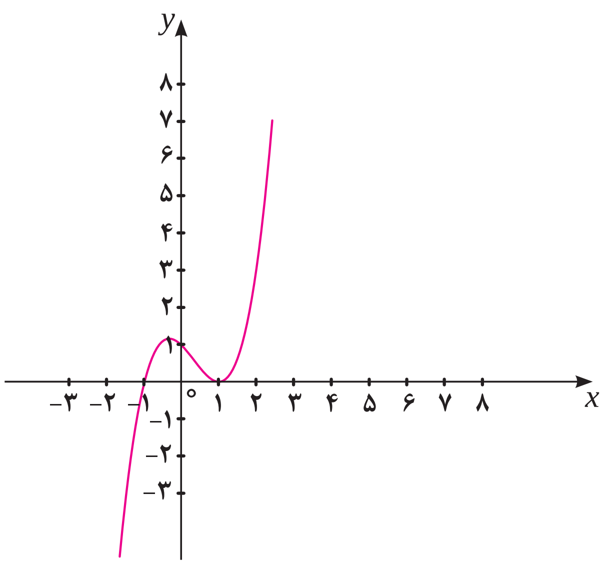
فعالیت ۷ نشان می‌دهد که برای حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌توان از رسم نمودار تابع های درجهٔ دوم استفاده کرد. طول محل‌های برخورد نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ با محور طول‌ها (در صورت وجود)، همان جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ است.

این نتایج در مورد چندجمله‌ای‌های با درجات بالاتر هم درست است. با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای (با هر درجه‌ای)، می‌توانید معادلات چندجمله‌ای را با همین روش حل کنید.

مثال ۱۱

معادلهٔ $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ را با رسم نمودار حل کنید.

در زیر نمودار تابع $y = x^3 - x^2 - x + 1$ به کمک جئوجبرا رسم شده است.



طول نقاط مشترک این نمودار با محور طول‌ها، ۱± است. پس جواب های آن معادله، $x = \pm 1$ هستند.

مسئله ها

۱) نمودار تابع $y = x^{۲} + ۲x + ۲$ را در دامنهٔ $[-۴ , ۴]$ رسم کنید.

۲) نمودارهای دو تابع $y = ۲x + ۱$ و $y = -۲x^{۲} + ۴$ را با جئوجبرا رسم کنید.

الف) این دو نمودار در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

ب) طول نقاط برخورد این دو نمودار، در چه معادله‌ای صدق می‌کنند؟

پ) محل برخورد این دو نمودار را از طریق حل یک معادله به دست آورید.

۳) اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم، برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h = -۵t^{۲} + ۲۰t$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) با رسم نمودار این تابع، تعیین کنید که این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ) در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ از لحاظ فیزیکی وضعیت تعداد جواب‌ها را تفسیر کنید.

خواندنی

هدایت غریزی زنبور عسل؛ مهندس طبیعت

کندوی زنبور عسل نمونهٔ بارزی از طرّاحی و استحکام است. ساختار کندو به‌گونه‌ای است که بیشترین فضا برای جمع‌آوری شیره را دارا می‌باشد. محاسبات ریاضی‌دانان نشان داده است که شش ضلعی مناسب‌ترین شکل هندسی برای دستیابی به این ویژگی است. زنبورها با الهام از وحی الهی، قوانین هندسی را رعایت نموده و پناهگاهی اَمن برای خود طراحی می‌کنند. یافته‌های انسان از دیرباز از به‌کارگیری و مدلسازی پدیده‌های خلقت حکایت دارد. امروزه ساختار کندوی عسل، الهام‌بخش الگوی آجرهای کم وزن و در عین حال با استحکام است. همچنین از بافتی مشابه شانه عسل در ساخت لاستیک‌های مخصوص زمستان یا تختهٔ اسنوبورد استفاده می‌شود.

خداوند متعال این حقیقت علمی را این چنین به زنبور عسل الهام فرموده است:

و پروردگار تو به زنبور عسل الهام کرد: از کوه‌ها، درخت‌ها و بناها خانه‌هایی برای خود برگیر؛ سپس از تمام ثمرات (و شیرهٔ گل‌ها) بخور و راه‌های پروردگارت را به اطاعت بپیما. آنگاه از درون آنها، شربتی رنگارنگ خارج می‌شود که در آن، شفا و درمان برای مردم است. به‌راستی در این امر، برای مردم اندیشمند نشانه‌ای است.
سورهٔ نحل آیات ۶۸ و ۶۹

تحقیقات بسیاری دربارهٔ الگوهای ریاضی موجود در مسیر حرکت زنبورها و دیگر ابعاد زندگی آنها انجام شده است. ساده‌ترین رابطهٔ ریاضی که می‌توان مشاهده کرد، رابطهٔ بین تعداد حجره یا سلول‌ها (شش‌ضلعی‌ها) با شمارهٔ حلقه‌های دور یک سلول است که با یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ نمایش داده می‌شود. اگر n شماره حلقه باشد، $Q(n) = 3n^2 - 3n + 1$ تابعی است که به کمک آن می‌توان تعداد حجره‌ها را پیدا کرد.

منابع و مراجع

۱ . بهادران، امیربهادر. محاسبات فنی ۱. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۲

۲ . یگانه عزیزی، رضا. هندسه (نقشه برداری). چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۲

۳ . نوری فرد، علی اکبر؛ مشایخی، حمیدرضا؛ مختاری، مالک؛ خلیل ارجمندی، محمداسماعیل؛ شجاعی اردکانی، مجید. محاسبات فنی ساختمان. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۴

۴ . داورپناه، مهدی؛ سیدحسینی، فرشاد؛ متینی، امیرحسین. کارگاه محاسبه و ترسیم. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۱

۵ . مجتهدی، حسین. آزمون‌های ورزشی. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۴

۶ . افتخار، رحیم. ریاضیات امور مالی. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۹۴

۷ . بخشعلی زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ دهقانی ابیانه، زین العابدین؛ دیده ور، فرزاد؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛

عالمیان، وحید؛ مسگرانی، حمید. ریاضیات۱. چاپ و نشر کتاب های درسی ایران. ۱۳۸۸

۸ . ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد؛ عالمیان، وحید. ریاضیات۲. چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

9. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .1nd Edition.

10. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .2nd Edition.

11. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .3nd Edition.

12. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 2. McGraw-Hill. 2006

13. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 3. McGraw-Hill. 2006

14. Barber, Dianne B. MATH IN CONTEXT: A Tool Kit for Adult Basic Skills Educators. Appalachian State University. NC Community College System. 2007