پرسش و پاسخ

# دینامیک مریام

دکتر رضا نخعی
مهندس صفابرهانی
مهندس مازیارکاظمی
مهندس محمدعلی ایوبی

Prepared Pdf By Rester

# فـرگـرد یـک

# آشـنـایی بـا دیـنـامـیـک
# Introduction to Dynamics

*1.1* - وزن کسی به جرم *85 kg* به نیوتن و پوند چیست؟

$W=mg$ $180(lb)=m(32.2\ ft/s^2)$ $m=5.59\ slugs$

$180\ lb(4.4482\ N/lb) = 801\ N$

$W=mg$ $801\ N = m(9.81\ m/s^2)$ $m=81.6\ kg$

*1.2* - وزن آدم در چه بلندی $h$ بر فراز قطب شمال، نیم می‌شود؟ شعاع زمین را $R$ بگیرید.

$mg=(1/2)mg_0$ $g_0R^2/(R+h)^2=(1/2)g_0$

Solve for h to obtain $h=(\sqrt{2}-1)R$

*1.3* - ماهواره‌ای در بلندی *250 km* به گرد زمین می‌چرخد. گرانش $g$ در آنجا چند است؟ وزن سرنشین ماهواره که در پهنای جغرافیایی *45°*، *880 N* است، چیست؟

$g_h=Gm_e/(R=h)^2=8.57\ m/s^2$

$m=W/g=880/9.81=89.7\ kg$

$W_h=mg_h=89.7\times8.57=768.7\ N$

The term "zero-g" and "Weightless" are
definetely misnomers in this instance

*1.4* - نیروی خورشید بر کسی به جرم *80 kg* در پهنای *45°* زمین، چیست؟

Force exerted by sun: $F_s=Gm_sm/r_{es}^2=$

$=6.673\times10^{-11}\cdot5.976\times10^{24}\cdot333000\cdot80/1.496\times10^{11^2}=0.475\ N$

Force exerted by earth: $F_e=mg=80\times9.81=785\ N$

*1.5* - نیروی کشش بین دو کره آهنی به قطر *100 mm* و چسبیده به هم، در چه بلندی با کشش زمین برابر می‌شود؟

Mass of iron sphere $m=\rho V=$

$=(7210\ kg/m^3)(4\pi/3)(0.050)^3=3.78\ kg$

Force of mutual attraction: $Gm^2/d^2$

Weight of each sphere: $Gm_e m/r^2 \Rightarrow Gm^2/d^2=Gm_e m/r^2$

$$r=d\sqrt{m_e/m}=0.1\sqrt{5.976\times10^{24}/3.78\times10^{-3}}=1.258(10^8)\ km$$

*1.6* - وزن ناب و وزن نسبت به زمین چرخان برای کسی به جرم *80 kg* در پهنای *45°* چیست؟

$$g_{rel}=9.780327(1+0.005279\ \sin^2\gamma+0.000023\ \sin^4\gamma)$$

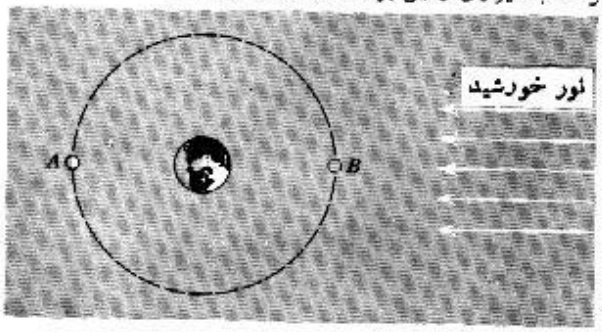
At $\gamma=45^\circ$ $g_{rel}=9.806198\ m/s^2$

$g_{abs}=g_{rel}+0.03382\ \cos^2\gamma=9.823108\ m/s^2$

$W_{abs}=mg_{abs}=(80)(9.823108)=785.8\ N$

$W_{rel}=mg_{rel}=(80)(9.806198)=784.5\ N$

*1.7* - نیروی خورشید بر ماه به نیروی زمین بر ماه در *A* و *B* چیست؟




نگاره *1.7*

Force exerted by earth on moon:

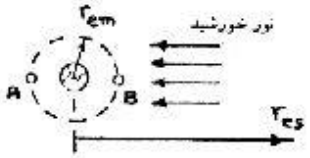
$F_e=Gm_e m_m/r_{em}^2=1.984\times10^{20}\ N$

Forces exerted by sun on moon :

$F_{SA}=Gm_s m_m/(r_{es}+r_{em})^2=4.34\times10^{20}\ N$

$F_{SB}=Gm_s m_m/(r_{es}-r_{em})^2=4.38\times10^{20}\ N$

Ratios: $R_A=2.19$ $R_B=2.21$




*1.8* - همگن بودن بعدهای معادله زیر را بسنجید.

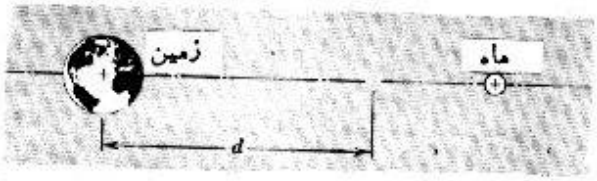
$$mv=\int F dt \quad [M][LT^{-1}]=[MLT^{-2}][T] \quad MLT^{-1}=MLT^{-1}$$

*1.9* - اندازه *d* را چنان بیابید که نیروی گرانش ماه و زمین در آنجا برابر گردد.

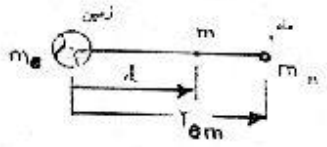
$$Gm_e m/d^2=Gm_m m/(r_{em}-d)^2$$

$$d^2[m_e-m_m]-d[2r_{em}m_e]+m_e r_{em}^2=0$$

$m_e=5.976\times10^{24}$ kg $m_m=0.0123(5.976\times10^{24}$ kg)
$r_{em}=384398000$ m ⇒ d=346022 km =432348 km




نگاره 1.9




*1.10* - در چه پهنای جغرافیایی، اندازه $g$ بر زمین چرخان با اندازه $g$ بر استوای زمین ناچرخان برابر است؟

g realtive to nonrotating earth at equator:
$9.780327+0.03382=9.81415$ m/s² Thus,
$9.81415=9.780327(1+0.005279\sin^2\gamma+0.000023\sin^4\gamma)$
Simplify: $0.000023\sin^4\gamma+0.005279\sin^2\gamma-0.00346=0$
⇒ $\sin^2\gamma=0.65318$ $\sin\gamma=0.80820$ $\gamma=53.9^\circ$

# فـرگـرد دو

## سـیـنـمـاتـیـک ذره
## Kinematics of Particles

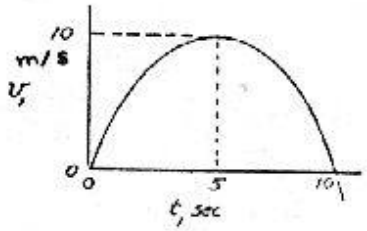
2.1 - ذره‌ای با دستور $s=3+2t^2-(2/15)t^3$ بر خط راست پیش‌می‌رود. نمودار تندی آن را برای 10 ثانیه بکشید و اندازه شتاب آن را در زمان $t=0.5$ s ،10 s بیابید.

$s=3+2t^2-2/15)t^3$ $v=s=4t-(2/5)t^2$

$a=v=4-(4/5)t$

$t=0$, $a_0=4$ m/s$^2$ $t=5$ sec, $a_5=0$

$t=10$ sec $a_{10}=-4$ m/s$^2$




2.2 - ذره‌ای با دستور $s=4t^3+3t^2-18t+5$ حرکت می‌کند. شتابش در $v=0$ چیست؟

$s=4t^3+3t^2-18t+5$

$v=\dot{s}=12t^2+6t-18=6(2t^2+t-3)=6(2t+3)(t-1)$

$a=\dot{v}=6(4t+1)$ $v=0$ $t=1$ s ( $t=-3/2$ s)

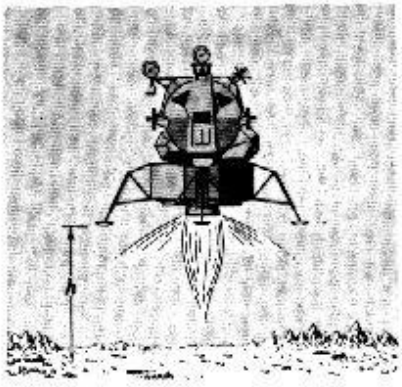
$t=1$ sec $a=6(4+1)=30$ m/s$^2$

2.3 - ماه نشین در $h=6$ m و $v=3$ m/s موتورها را خاموش کرده و بر ماه می‌افتد. تندی برخوردش با ماه چیست؟

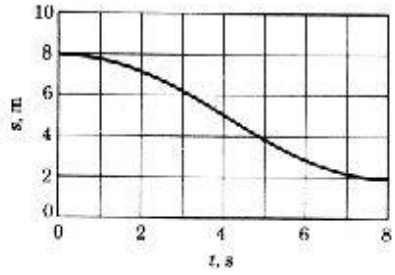
$a=9/6$ $v^2=v_o^2+2as=28.62$ $v=5.35$ m/s

2.4 - ذره‌ای با دستور $\dot{x}=40-3t^2$ حرکت می‌کند. جابه‌جایی آن از $t=2$ s تا $t=4$ s چیست؟

$\dot{x}=40-3t^2$ $\Delta x=\int_2^4 (40-3t^2)dt=96-72=24$ m




نگاره 2.3

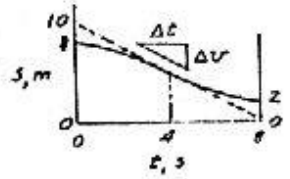


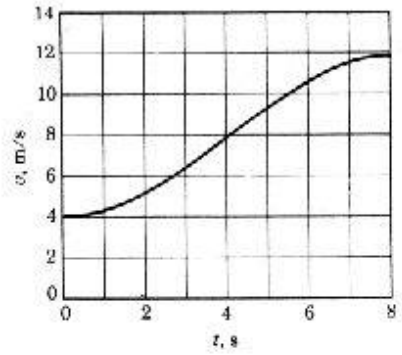

نگاره 2.5

2.5 - نمودار جابه‌جایی-زمان یک ذره را می‌بینید. تندی میانگین و تندی آن در $t=4\ s$ چیست؟

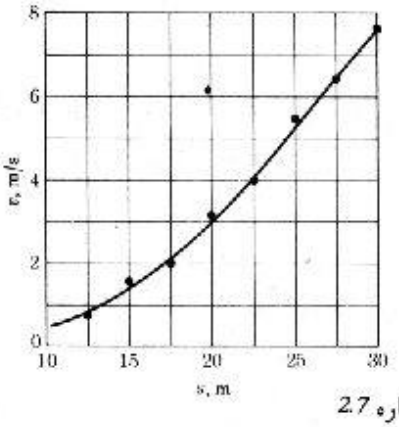
$$v_{Av}=\frac{s_2-s_1}{\Delta t}=-0.75\ m/s$$

$$v=v_A=ds/dt=-10/8=-1.25\ m/s$$




نگاره 2.6




نگاره 2.7

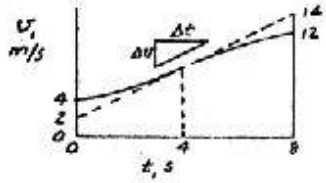
2.6 - نمودار تندی یک ذره را می‌بینید. شتاب میانگین و شتاب در $t=4\ s$ را بیابید. جابه‌جایی ذره چه اندازه است؟

$$a_{Av}=\Delta v/\Delta t=(12-4)/8=1.00\ m/s^2$$

$$a_A=dv/dt=(14-2)/8=1.50\ m/s^2$$

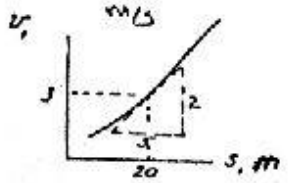
$$\Delta a=a_A-a_{Av}=1.50-1.00=0.50\ m/s^2$$

$$\Delta s=\int v dt\simeq(14+2)8/2=64\ m$$

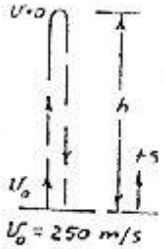



2.7 - شتاب ذره‌ای با نمودار تندی داده شده، در $s=20\ m$ چیست؟

$a=vdv/ds=3(2/5)=1.2$ m/s




2.8 - گلوله‌ای را با تندی آغازین $250$ m/s، رو به بالا پرتاب می‌کنیم. گلوله تا چه بلندی $h$ بالا می‌رود؟ پس از چه زمانی گلوله به زمین باز می‌گردد؟

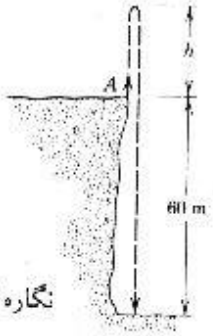



$a=-9.81$ m/s$^2$ $v^2=v_0^2+2a\Delta s$ $0=(250)^2-2(9.81)h$

$h=62500/(2(9.81))=3190$ m $v=v_0+at$

$-250=250-9.81t$ $t=500/9.81=51.0$ s

2.9 - توپی را از $A$ با تندی $24$ m/s به بالا پرتاب می‌کنیم. اندازه بلندی $h$ و زمان رسیدن توپ به زمین چیست؟




نگاره 2.9

$y=v_0t+(1/2)at^2$ $y=24t-1/2(9.81)t^2$

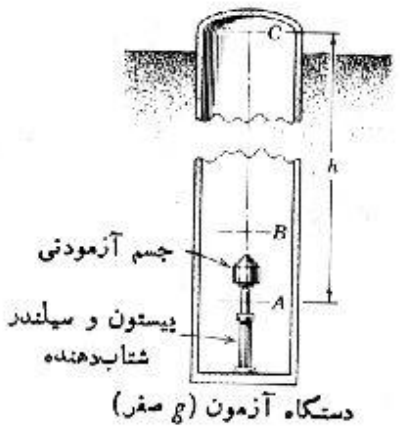
$y=-60$ m $-60=24t-4.905t^2$

$4.905t^2-24t-60=0$ $t=32.93$ s (or $-8.93$ s)

$y=0$ $v^2=v_0^2+2ay$

$y=h=(0-24^2)/(-2(9.81))=29.4$ m

2.10 - جسم آزمودنی را از $A$ تا $B$ با شتاب $g$ $40$ پیش رانده و رها می‌کنیم. اگر زمان برگشت آن به $B$ $10$ ثانیه باشد، $h$ چیست؟




نگاره 2.10

B to C: $t=10/2=5$ s

$v=v_1+at$ $0=v_1-9.81(5)$ $v_1=49.0$ m/s

$v^2=v_0^2+2as$ $0=(49.0)^2+2(-9.81)h_2$

$h_2=122.6$ m

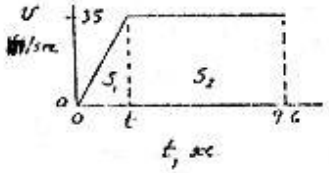
A to B: $v^2=v_0^2+2as$

$(49.0)^2=0+2(400)(9.81)h_1$

$h_1=3.07$ m

$h=h_1+h_2=125.7$ m

*2.11* - دونده‌ای با شتاب یکنواخت در $t$ ثانیه از ایست به تندی $10.5\ m/s$ می‌رسد و با همان تندی، $100\ m$ راه را در $10.5\ s$ می‌دود. زمان $t$ و شتاب میانگین او چیست؟




$v=at \quad \Delta s=\int v dt \quad s_1=(1/2)at^2=1/2vt=(10.5/2)t$

$s_2=v\Delta t=10.5(10.5-t) \quad s_1+s_2=100\ m$

$10.5/2t+10.5(10.5-t)=100 \quad 5.25t=10.25\ sec$

$t=1.95\ s \qquad a=v/t=10.5/1.95=5.37\ m/sec^2$

*2.12* - هواپیمایی با شتاب یکنواخت $0.6\ g$ از ایست به تندی $200\ km/h$ رسیده و از زمین بلند می‌شود. زمان $t$ و فاصله $s$ برای این کار چیست؟

$$v^2=v_0^2+2a\Delta s \quad (200(10)^3/(60)^2)^2=0+2(0.6)(9.81)\Delta s$$

$$s=\Delta s=262\ m \quad v=v_0+at \quad t=\frac{200(10)^3/(60)^2}{0.6(9.81)}=9.44\ s$$

*2.13* - هواپیمایی با تندی $200\ km/h$ بر زمین می‌نشیند و پس از $600\ m$ به تندی $30\ km/h$ می‌رسد. شتاب هواپیما چیست؟

$$\int v dv=\int a ds \qquad \int_{200/3.6}^{30/3.6} v dv=a\int_0^{600} ds$$

$$(30^2-200^2)/(2\times 3.6^2)=600a \Rightarrow a=-2.51\ m/s^2$$

*2.14* - ذره‌ای با دستور $v=400-16t^2\ mm/s$ حرکت می‌کند. جابه‌جایی و مسافت پیموده شده آن در 6 ثانیه نخست چیست؟

$$v=ds/dt=400-15t^2$$

$$\Delta s=\int_0^{\Delta s} ds=\int_0^6 (400-16t^2)dt=1248\ mm=1.248\ m$$

$$D=\Delta s_1+|\Delta s_2| \quad \Delta s_1=1333.3\ mm$$

$$|\Delta s_2|=\left|\int_5^6 (400-16t^2)dt\right|=85.3\ mm$$

$$D=1333.3+85.3=1418.7\ mm \quad D=1.419\ m$$

*2.15* - نمودار شتاب ذره‌ای راکه در آغاز با تندی $100\ m/s$ پیش می‌رود می‌بینید. تندی آن ذره در $t=4\ s$ و $t=8\ s$ چیست؟

$$\Delta v=\int a dt=\text{Area under a-t curve}$$

$t=2\ s \quad v_2-100=-4(9.81)(4-2)/2 \quad v_2=60.8\ m/s$

$t=8\ s \quad v_8-60.8=-4(9.81)(6-4) \quad v_8=-17.72\ m/s$

نگاره 2.15

2.16 -اگر بیشینه و کمینه شتاب، $g$ 0.6 و تندی بیشینه، 400 km/h باشد، کمترین زمان برای پیمودن 10 km راه چیست؟

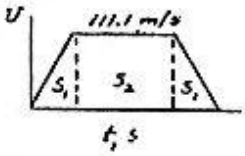
400 km/h = 111.1 m/s $v^2=2as$ $s_1=1049$ m

$s_2=10000-2(1040)=7903$ m

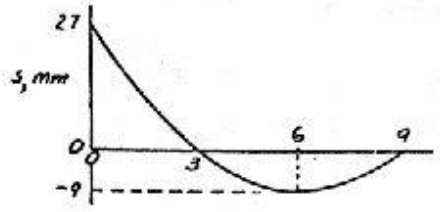
$t_1=v/a=111.1/(0.6(9.81))=18.88$ s

$t_2=s_2/v=7903/111.1=71.133$ s

$t=2t_1+t_2=108.9$ s $=1.81$ min



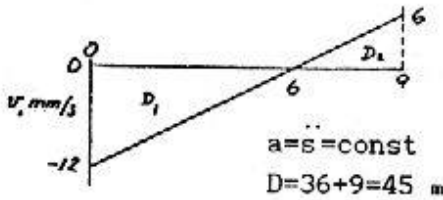

2.17 -ذره‌ای با دستور $s=27-12t+t^2$ mm حرکت می‌کند. نمودار $s$-$t$ و $v$-$t$ را برای 9 ثانیه نخست بکشید. $\Delta s$ و مسافت پیموده شده در این زمان چیست؟




$s=27-12t+t^2$ mm $v=\dot{s}=-12+2t$ mm/s

$a=\dot{v}=2$ mm/s$^2$

$\Delta s=\int v dt=-27$ mm

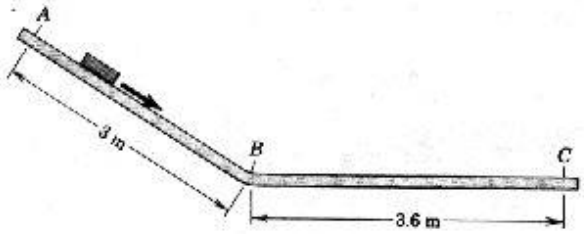



$=1/2(6)(-12)+1/2(3)(6)=-27$ mm

$a=\ddot{s}=$const $|D_1|=6(12)/2=36$ mm $|D_2|=3(6)/2=9$ mm

$D=36+9=45$ mm

2.18 -بسته‌ها با تندی 1.2 m/s از $A$ رها شده و تا $B$، با شتاب $0.3\ g$ پایین می‌آید. اگر پس از 2.8 s که از $A$ رها شد، در $C$ بایستد، شتاب آنها از $B$ تا $C$ چیست؟ زمان رفتن از $B$ تا $C$ را نیز بیابید.




نگاره 2.18

A - B

$v_B^2=v_A^2+2a\Delta s=1.2^2+2(0.3)(9.81)(3)=10.269 \quad m^2/s^2$

$v_B=3.2$ m/s $\quad v_B=v_A+at \quad t_B=2.038$ s

$\Delta t=t_C-t_B=2.8-2.038=.762$ sec

$v_C^2=v_B^2+2a\Delta s \quad 0=10.24+2a(3.6) \quad a=-1.42 \ m/s^2$

*2.19* - خودرویی با تندی *120 km/h* از *A* گذشته و پلیس موتورسوار، دو ثانیه پس از آن، از ایست در *R* به راه می‌افتد. اگر پلیس با *6 m/s²* به تندی بیشینه *150 km/h* برسد و تندیش یکنواخت بماند، کجا به خودرو می‌رسد؟

$s_{car}=vt=(120/3.6)t$

$s_{cycle}=v_{av}t_1+v_{max}t_2=(1/2)(150/3.6)t_1+(150/3.6)t_2$

$t_1=v_{max}/a=150/(3.6(6))=6.94$ s $\quad t_2=t-6.94-2$

$s_{car}=s_{cycle}$

$(120/3.6)t=(75/3.6)6.94+(150/3.6)(t-8.94)$

$t=27.36$ s $\quad s=912$ m

نگاره *2.19*

*2.20* - موشکی با شتاب *6 m/s²* رو به بالا پرتاب می‌شود. اگر سوخت آن، پس از *20 s* پایان یابد، تندی بیشینه و بلندی بیشینه‌ای که به آن می‌رسد، چیست؟

$a=dv/dt \quad v_m=\int adt=at=6(20)=120$ m/s

$h=(1/2)at^2=1/2(6)(20)^2=1200$ m

$$\int_0^{v_m} vdv=\int_0^{\Delta h} -gdy \quad v_m^2=2g\Delta h \quad \Delta h=120^2/2(9.81)=734 \text{ m}$$

Max.h=1200+734=1934 m =1.932 km

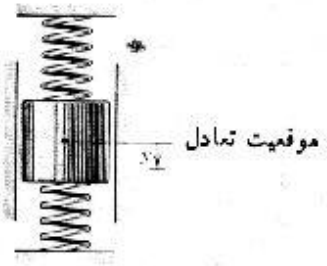
*2.21* جسم فنر سوار، با دستور $y=y_0 Sin2\pi nt$ می‌لرزد. *v(0.2)* و *a(0.5)* در *t=1/(2n)* چیست؟

$y=y_0\sin(2\pi nt) \quad v=\dot{y}=2\pi n y_0\cos(2\pi nt)$

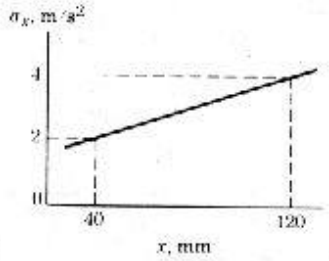
$a=\dot{v}=-4\pi^2n^2y_0\sin(2\pi nt) \quad t=1/(2n)$

$v=v_{1/2}=2\pi n y_0\cos\pi=-2\pi n y_0 \quad a=a_{1/2}=-4\pi^2n^2y_0\sin\pi=0$

*2.22* نمودار شتاب ذره‌ای را بر محور *x* می‌بینید. اگر تندی آن در *x=40 mm* *0.4 m/s* باشد، تندیش در *x=120 mm* چیست؟




نگاره 2.21



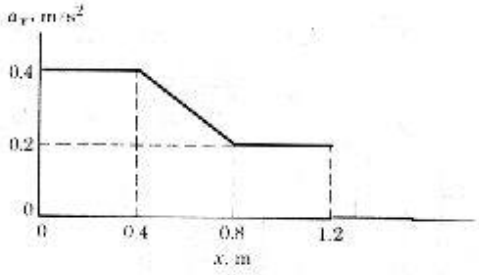

نگاره 2.22

$$\int_{0.4}^{v} v\,dv=\int a_x\,dx \quad 1/2(v^2-0.4^2)=\text{area under } a_x\text{-}x \text{ curve}$$

$$\text{Area}=\int a_x dx=(a_x)_{av}\Delta x=3(120-40)10^{-3}=0.240 \text{ m/s}^2$$

$$v^2=0.4^2+2(0.240)=0.16+0.48=0.64 \quad v=\sqrt{0.64}=0.8 \text{ m/s}$$

2.23 - نمودار شتاب ذره‌ای را می‌بینید. اگر تندی آن در $x=0$، $0.8$ m/s باشد، تندیش در $x=1.4$ m چیست؟




نگاره 2.23

$$\int_{0.8}^{v} v\,dv=\int a\,ds$$

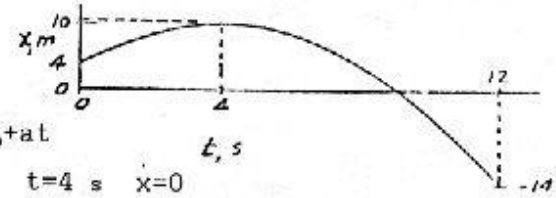
$$v^2-(0.8)^2$$

$$=2[0.4(0.4)+0.3(0.4)+0.2(0.4)]$$

$$v^2=0.64+0.72=1.36$$

$$v=\sqrt{1.36}=1.166 \text{ m/s} \quad x>1.2 \text{ m}$$

2.24 - ذره‌ای با شتاب یکنواخت و تندی $\dot{x}=3$ m/s از $x=4$ m در $t=0$ به راه می‌افتد و در $t=4$ s به جابه‌جایی بیشینه می‌رسد. جابه‌جایی آن را در $t=12$ s بیابید.




$$x=x_0+v_0t+1/2at^2 \quad v=v_0+at$$

$$t=0 \quad x_0=4 \text{ m} \quad v_0=3 \text{ m/s} \quad t=4 \text{ s} \quad \dot{x}=0$$

$$\Rightarrow x=4+3t+1/2at^2 \;,\; 0=3+4a \quad a=-3/4 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad x=4+3t-3/8t^2$$

$$t=12 \text{ s} \quad x=4+3(12)-3/8(12^2)=-14 \text{ m}$$

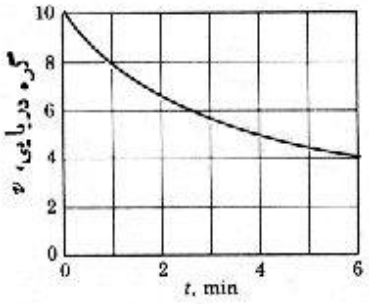
$$t=4 \text{ s} \quad x=x_{max}=4+3(4)-3/8(4^2)=10 \text{ m}$$

2.25 - نمودار تندی یک کشتی را می‌بینید. جابه‌جایی آن پس از $t=6$ s چیست؟

$$\Delta s=\int v\,dt=\sum \Delta t v_{av}=1/60(8.7+7.0+6.0+5.2+4.6+4.2)$$
$$=0.60 \text{ mi (nau)}$$

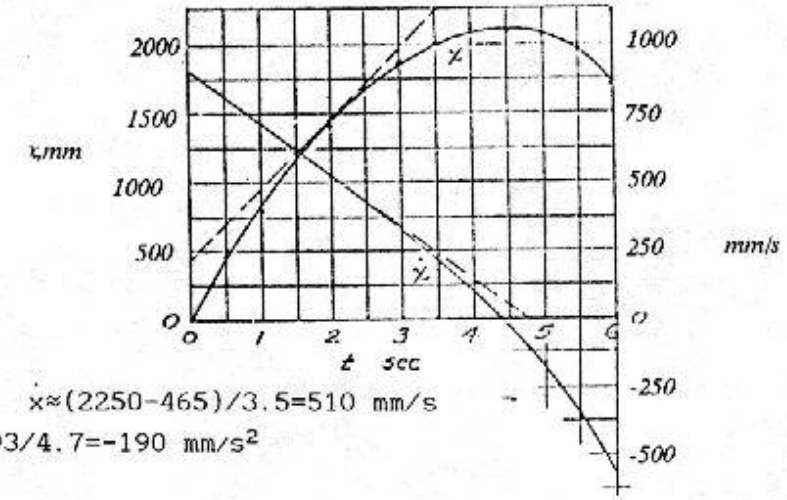
| x, mm | t, s | x, mm | t, s |
|---|---|---|---|
| 2000 | 3.5 | 0 | 0 |
| 2100 | 4.0 | 475 | 0 |
| 2075 | 4.5 | 800 | 1.0 |
| 2050 | 5.0 | 1225 | 1.5 |
| 1975 | 5.5 | 1425 | 2.0 |
| 1725 | 6.0 | 1700 | 2.5 |
| | | 1875 | 3.0 |

سیاهه 2.26




نگاره 2.25

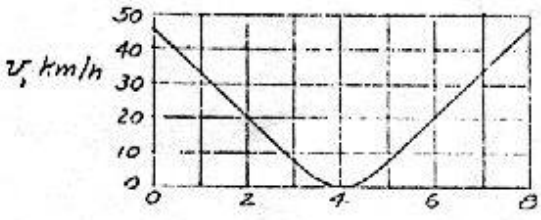
2.26 - ذره‌ای رو به باد پرتاب می‌شود. از داده‌های زیر، تندی و شتاب ذره را در $t=2$ s بیابید.




$t=2$ s $\quad \dot{x}\approx(2250-465)/3.5=510$ mm/s

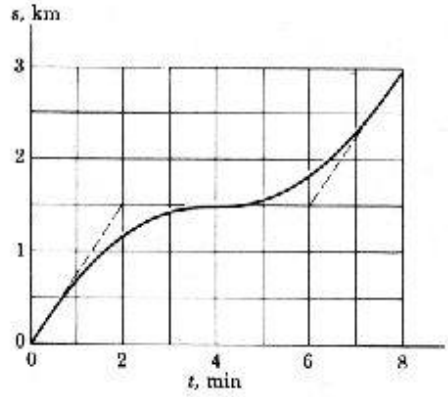
$\ddot{x}\approx-893/4.7=-190$ mm/s$^2$

2.27 - از نمودار $s$-$t$، نمودار $v$-$t$ را بکشید.

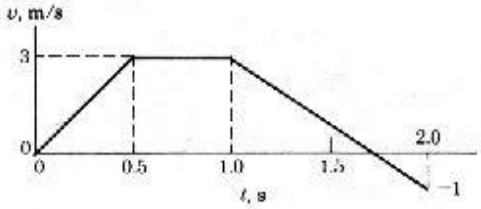



$v_0=v_8=1.5/(2/60)$ km/h $=45$ km/h

$v_2=v_6=0.33(60)=20$ km/h

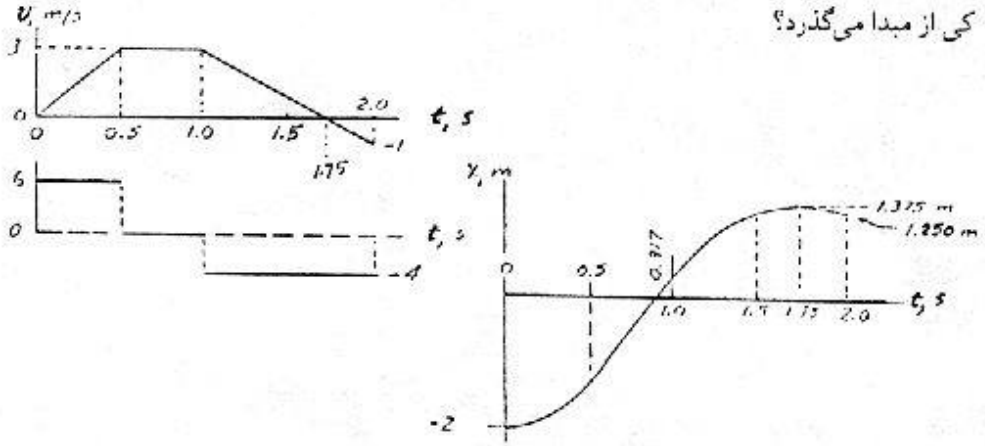



نگاره 2.27

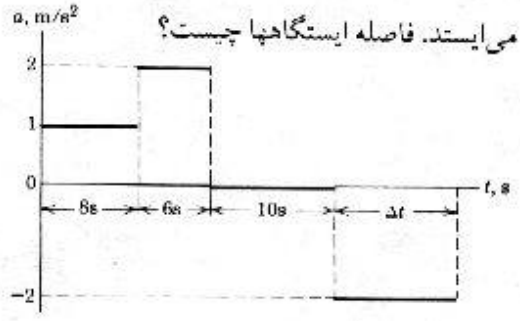



نگاره 2.28

2.28 - ذره‌ای از $x=-2\ m$ راه می‌افتد. نمودار شتاب و جابه‌جایی آن را از روی نمودار تندی بکشید. ذره کی از مبدا می‌گذرد؟




2.29 - نمودار شتاب یک قطار را بین دو ایستگاه می‌بینید. پس از چه زمانی، قطار با شتاب منفی می‌ایستد. فاصله ایستگاهها چیست؟




نگاره 2.29

1st interval $\Delta t=8$ s

$s_8=1/2at^2$ $s_0=1/2(1)(8^2)=32$ m

$v_8=at$ $v_8=1(8)=8$ m/s

2nd interval $\Delta t=6$ s

$\Delta v=\int adt$ $v_{14}-8=2(6)=20$ m/s

$\Delta s=v_0t+1/2at^2=8(6)+1/2(2)(6^2)=84$ m

$s_{14}-32=84$ $s_{14}=116$ m 3rd interval $\Delta t=10$ s $\Delta s=vt$

$s_{24}-116=20(10)=316$ m

Total interval $\Delta t=10$ s $\Delta v=\int a\,dt$ $0-0=8+12+0-2\Delta t$

4th interval $\Delta s=v_0t+1/2at^2=20(10)+1/2(-2)(10^2)$

$s_{34}-s_{24}=100$ m $s_{34}=s=100+316=416$ m

*2.30* - نشان دهید که اگر توان دوم تندی یک ذره، با جابه‌جایی آن متناسب باشد، شتابش یکنواخت است. شتاب یکنواخت $a_1$ و $a_2$ را در نمودار زیر بیابید.

$vdv=ads$ $d(v^2)/2=ads$

$\Rightarrow 2a=d(v^2)/ds \Rightarrow a=cte$ if $d(v^2)/ds=cte$

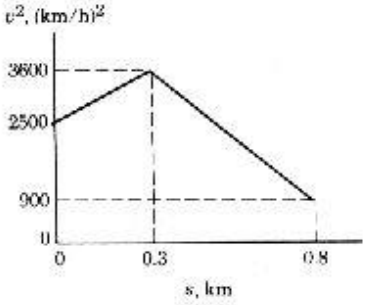
1st interval: $a_1=d(v^2)/2ds$

$=(1/2)(3600-2500)/0.3=1833$ km/h$^2$ $=0.141$ m/s$^2$

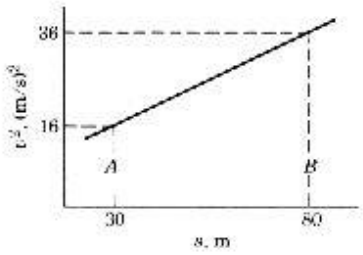
2nd interval:

$a_2=(1/2)(900-2500)/(0.8-0.3)=-1600$ km/h$^2$

$a_2=(-1600)(1000)/(3600^2)=-0.123$ m/s$^2$




نگاره *2.30*




نگاره *2.31*

*2.31* - جابه‌جایی ذره‌ای با نمودار حرکت داده شده، در واپسین 2 ثانیه حرکتش چیست؟

$a=vdv/ds=(1/2)d(v^2)/ds=(1/2)\Delta(v^2)/\Delta s=1/5$ m/s$^2$

$v=v_A+at$ $v=4+(1/5)t$ At B: $6=4+(1/5)t_B$

$t_B=10$ sec $\Delta s=\int vdt=\int_8^{10}(4+1/5t)dt=11.6$ m

*2.32* - گلوله‌ای با تندی $v_0$ در آب شلیک می‌شود. اگر شتاب کاهنده آن $cv^n$ باشد، $v=v(t)$ چیست؟

$a=dv/dt=-cv^n$ $\int_{v_0}^{v} dv/v^n=-c\int_0^t dt$

$-ct=v^{1-n}/(1-n)\Big]_{v_0}^{v}$ $v=[v_0^{1-n}+c(n-1)t]^{1/(1-n)}$

2.33 - گلوله‌ای با تندی $50\ mm/s$ از $x=225\ mm$ با دستور $v^2=k/s$ پرتاب می‌شود. تندی آن در $t=3\ s$ چیست؟

$$v^2=k/s \quad v=\dot{s}=\sqrt{k/s} \quad k=50^2(225)=562500\ mm^3/sec^2$$

$$ds/v=dt \quad \int_{225}^{s}\sqrt{s}ds=750\int_{0}^{t}dt \quad s^{3/2}=3375+1125t$$

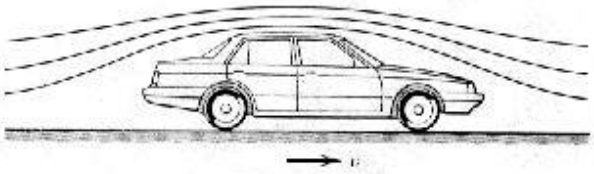
$$t=3\ s \Rightarrow s=357.1\ mm \quad v=(562500/357.1)^{1/2}=39.68\ mm$$

2.34 - خودرویی با دستور $a=-c_1-c_2v^2$، موتورش را در تندی $v_0$ خاموش می‌کند. این خودرو تا ایستادن، چه فاصله $D$ حرکت می‌کند؟

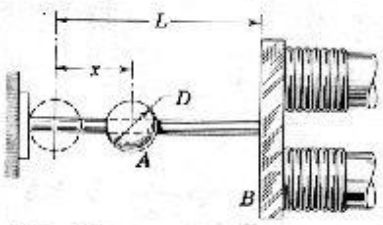
$$vdv=adx \quad \int_{0}^{x}dx=\int_{v_0}^{v}vdv/(-c_1-c_2v^2)$$

$$x=\ln[(c_1+c_2v_0^2)/(c_1+c_2v^2)]/[2c_2]$$

$$v=0 \quad x=D=\ln[1+(c_2/c_1)v_0^2]/[2c_2]$$



نگاره 2.34




نگاره 2.35

2.35 - گلوله آهنی $A$ با شتاب $a=k/(L-x)^3$ از $x=0$ به سوی آهنربای $B$ کشیده می‌شود. تندی رسیدن به آهنربا چیست؟

$$vdv=adx \quad \int_{0}^{v}vdv=\int_{0}^{x}k/(L-x)^2\,dx \quad v^2/2=[k/(L-x)]_0^x$$

$$v^2=2kx/L(L-x) \quad x=L-D/2 \quad v=2\sqrt{k(L-D/2)/LD}$$

2.36 - تندی ذره‌ای از $9\ m/s$ در $s=0$ به نزدیک صفر در $s=18\ m$ کاهش می‌یابد. نشان دهید که ذره هیچگاه به $s=18\ m$ نمی‌رسد. شتاب ذره در $s=12\ m$ چیست؟

$$v=9-ks \quad 0=9-k(18) \quad k=1/2 \Rightarrow v=9-.5s$$

$$v=ds/dt \Rightarrow ds/dt=9-.5s \quad \int_{0}^{s}ds/(9-.5s)=\int_{0}^{t}dt$$

$$t=[-2\ln(9-.5s)]_0^s=-2\ln(1-s/18)$$

$$s=60\ m \quad t=-2\ln(0)=-2(-\infty)=\infty$$

$$a=dv/dt=d(9-.5s)/dt=-.5ds/dt=-.5(9-.5s)$$

$$s=12\ m \quad a=-.5(9-12/2)=-1.5\ m/s^2$$

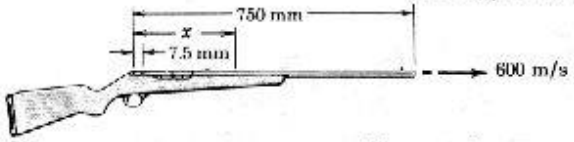
2.37 - خودرویی به جرم $m$ با توان $P$ و شتاب $a=p/(mv)$ از تندی $v_1$ به $v_2$ می‌رسد. مسافت پیموده‌شده $s$ و زمان $t$ برای این کار چیست؟

$a=p/(mv)$ $p, m=cte$ $vdv=ads$ $vdv=p/(mv)\,ds$

$$\int_{v_1}^{v_2} mv^2dv=p\int_0^s ds \quad s=(m/3p)(v_2^3-v_1^3) \quad dv=adt$$

$$dv=p/mv\,dt \quad m\int_{v_1}^{v_2} vdv=\int_0^t pdt \quad t=(m/2p)(v_2^2-v_1^2)$$

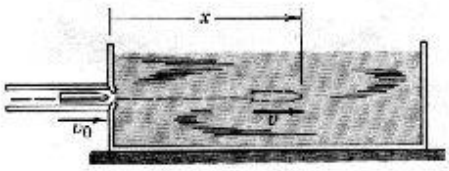
2.38 - گلوله با شتاب $a=k/m$ در لوله تفنگ، از $x=7.5$ mm شلیک می‌شود و با تندی 600 m/s از نوک لوله بیرون می‌زند. شتاب گلوله در میانه راه چیست؟



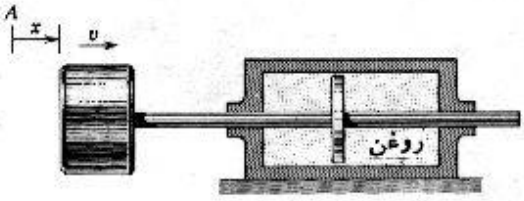

نگاره 2.38

$$a=k/x \quad vdv=k/x\,dx \quad \int_0^v vdv=k\int_{x_1}^x dx/x \quad v^2/2=k\ln(x/x_1)$$

$x=375$ mm $\quad a=104.2$ km/s$^2$




نگاره 2.40




نگاره 2.41

2.39 - یک هواپیمای آب‌نشین با تندی 160 km/h بر آب می‌نشیند و پس از 400 m به تندی 30 km/h می‌رسد. اگر هواپیما با دستور $a=-Kv^2$ پرواز کند، زمان این فرود و اندازه $K$ چیست؟

$vdv=ads$ $\quad vdv/-kv^2=ds \quad \ln(v_2/v_1)=-ks$

$k=\ln(v_1/v_2)/s=1.073(10^{-3})$ ft$^{-1}$

$a=dv/dt \quad -kv^2=dv/dt \quad t=(1/v_2-1/v_1)/k$

$t=25.4$ s

2.40 - گلوله‌ای با تندی $v_0$ به درون آب رفته و با دستور $a=-Kv^2$ پیش می‌رود، زمان $t$ و فاصله $D$ برای

رسیدن به تندی $v_0/2$ چیست؟

$$a=-kv^2 \quad vdv=adx \quad x=-\ln v/k\Big]_{v_0}^{v}$$

$$v=v_0/2 \Rightarrow x=D=\ln 2/k = 0.693/k$$

$$v=dx/dt \quad kx=\ln(v_0/v) \quad v=v_0e^{-kx}$$

$$\Rightarrow dx/(v_0e^{-kx})=dt \quad t=e^{kx}/kv_0\Big]_0^x=[e^{kx}-1]/kv_0$$

$$x=D \quad e^{kx}=2 \Rightarrow t=[2-1]/kv_0 \quad t=1/kv_0$$

*2.41* - اگر پیستون از $x=0$ با $v_0$ و $a=-kv$ به راه افتد، دستور $v(t)$ و $x(t)$ و $v(x)$ چیست؟

$$a=dv/dt=-kv_1 \quad \ln(v/v_0)=-kt \quad v=v_0e^{-kt}$$

$$v=dx/dt=v_0e^{-kt} \quad x=v_0[1-e^{-kt}]/k$$

$$vdv=adx \quad vdv/v=-kdx \quad v=v_0-kx$$

*2.42* - گلوله‌ای را به درون بشکه‌ای پر از روغن رها می‌کنیم. اگر دستور پایین افتادن آن $a=g-kv$ باشد، $v(t)$ و $y(t)$ چیست؟

$$a=dv/dt \quad a=g-kv \quad -\ln(g-kv)\Big]_0^v/k=t$$

$$kt=\ln[g/(g-kv)] \quad g/(g-kv)=e^{kt} \quad v=g(1-e^{-kt})/k$$

$$v=dy/dt \quad y=g[t+(1/k)\ e^{-kt}]_0^t/k$$

$$y=g[t-(1/k)(1-e^{-kt})]/k$$

*2.43* - گلوله‌ای فولادی از بلندی زیاد با شتاب $g-kv^2$ رها می‌شود. تندی بیشینه گلوله و $y(t)$ چیست؟

$$a=dv/dt \quad a=g-kv^2 \Rightarrow dv/(g-kv^2)=dt$$

$$\int_0^v dv/(g-kv^2)=\int_0^t dt \quad 1/\sqrt{kg}\ \tanh^{-1}(v\sqrt{kg}/g)\Big]_0^v=t$$

$$v=\sqrt{g/k}\ \tanh(\sqrt{kg}\ t) \quad v_{max}=\sqrt{g/k} \quad \int_0^y dy=\int_0^t vdt$$

$$y=\int_0^t \sqrt{g/k}\ \tanh(\sqrt{kg}\ t)dt \quad y=[\ln(\cosh(\sqrt{kg}\ t))]/k$$

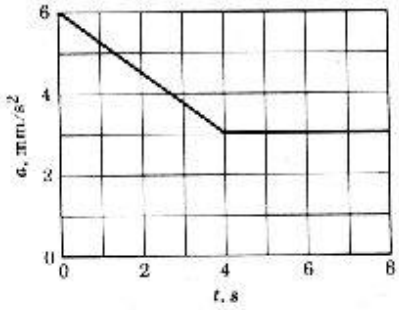
*2.44* - ذره‌ای با دستور $a=3.2-0.2v^2$ $m/s^2$ به راه می‌افتد. کی و کجا به $v=2$ $m/s$ می‌رسد؟

$$a=dv/dt \quad \int_0^t dt=\int_0^2 dv/(3.2-0.2v^2)$$

$$t=1/\sqrt{3.2(0.2)}\ \tanh^{-1}(v\sqrt{3.2(0.2)}/3.2)\Big]_0^2=0.687\ s$$

$$vdv=ads \quad \int_0^s ds=\int_0^2 vdv/(3.2-0.2v^2)=0.719\ m$$

2.45 - نمودار شتاب ذره‌ای راکه با تندی آغازین $8\ mm/s$ پیش می‌رود، می‌بینید، تندی آن در $t=8\ s$ و جابه‌جایی‌اش در $t=4\ s$ چیست؟




نگاره 2.45

نگاره 2.47

$$0<t<4\ s \Rightarrow a=6-kt=6-(3/4)t \quad a=dv/dt$$

$$\Rightarrow \int_{-8}^{v} dv=\int_0^t [6-(3/4)t]dt \quad v+8=6t-3t^2/8$$

$$v=-8+6t-3t^2/8 \quad v_4=-8+6(4)-3(4^2)/8=10\ mm/s$$

$$v=ds/dt \quad \int_0^{\Delta s} ds=\int_0^4 (-8+6t-3t^2/8)dt=[-8t+3t^2-t^3/8]_0^4$$

$$\Delta s=[-8(4)+3(4^2)-(4^3)/8]-0=8\ mm$$

$$4<t<8\ s \Rightarrow a=3\ mm/s^2 \Rightarrow \Delta v=a\Delta t \quad v_8-10=3(8-4)$$

$$v_8=22\ mm/s$$

2.46 - خودرویی با شتاب $a=4-(3/4)t$ به راه می‌افتد و پس از رسیدن به تندی پیشینه‌اش، آن را نگه می‌دارد تا $200\ m$ راه بپیماید. زمان پیمودن $100\ m$ چیست؟

$$a=4-(3/4)t\ m/s^2 \quad dv=adt \quad \int_0^v dv=\int_0^{t_1}(4-(3/4)t)dt$$

$$v=4t_1-\frac{3}{8}t_1^2 \quad \text{max. } v \text{ at } a=0 \quad \text{at } t_1=\frac{16}{3}=5.33\ s$$

$$\Rightarrow v_{max}=32/3\ m/s \quad v=ds/dt$$

$$\int_0^{s_1} ds=\int_0^{t_1}(4t-(3/8)t^2)dt$$

$$s_1=2t_1^2-(1/8)t_1^3=2(16/3)^2-(1/8)(16/3)^3=37.93\ m$$

$$s_2=v_{max}t_2 \quad 100-37.93=(32/3)t_2$$

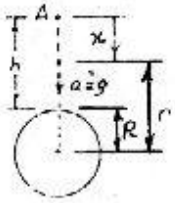
$$t_2=5.82\ s\ ,\ t=t_1+t_2=5.33+5.82=11.15\ s$$

*2.47* - ماهواره‌ای از بلندی $h$ در $A$ به زمین می‌افتد. اگر $g$ متغیر باشد تندی برخورد ماهواره با زمین چیست؟

$$g=g_0(R/r)^2 \quad vdv=gdx \quad x=R+h-r$$

$$\int_0^v vdv=\int_{R+h}^{R} g_0(R/r)^2(-dr)=\left[g_0R^2/r\right]_{R+h}^{R}$$

$$v^2/2=g_0R^2\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]=g_0\cdot\frac{Rh}{R+h} \quad v=\sqrt{2g_0\frac{Rh}{R+h}}$$




*2.48*- خودرویی با شتاب یکنواخت به‌راه‌می‌افتد و پس از *60 m* به تندی *100 km/h* می‌رسد. سپس با شتاب کاهنده‌ای متناسب با تندی، پس از *120 m* دیگر به تندی *50 km/h* می‌رسد. زمان پیمودن این *180 m* چیست؟

$$v^2=v_0^2+2as \quad (27.8)^2=0+2a(60) \quad a=6.44\ m/sec^2$$

$$v=v_0+at \quad v=0+19.36t \quad t_1=4.31\ sec$$

$$vdv=ads \quad a=-kv$$

$$\Rightarrow vdv/(-kv)=ds \quad \int_{27.8}^{13.9} dv=-k\int_0^{120} ds \quad k=0.11\ 1/sec$$

$$a=-0.11v \quad a=dv/dt \Rightarrow \int_{27.8}^{v}\frac{dv}{-kv}=\int_{t_1}^{t} dt \quad \frac{1}{0.11}\ln\left(\frac{27.8}{v}\right)=t-t_1$$

$$t=\frac{1}{0.11}\ln(27.8/13.9)+4.31=10.61\ sec$$

*2.49* - نمودار شتاب ذره‌ای را که با تندی *3 m/s* در $x=0$ پیش می‌رود در زیر کشیده‌ایم. تندی آن در $x=10\ m$ و زمان رسیدن به آن چیست؟

$$vdv=adx \quad \int_{v_0}^{v} vdv=\int_0^x adx \quad v=3\ m/s\ when\ x=10\ m.$$

$0<x<5$ m. $a=2+kx=2+(3/5)x$ $\int_3^v v\,dv=\int_0^x (2+(3/5)x)\,dx$

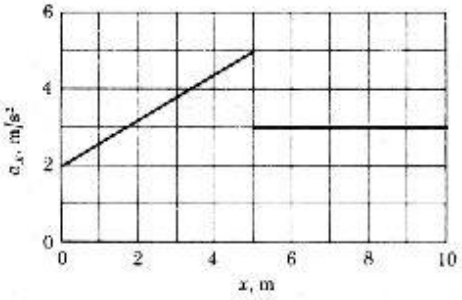
$v=\sqrt{9+4x+(3/5)x^2}$ $v=dx/dt$ $\int_0^{t_5} dt=\int_0^5 dx/\sqrt{9+4x+(3/5)x^2}$

$t_5=1.100$ s

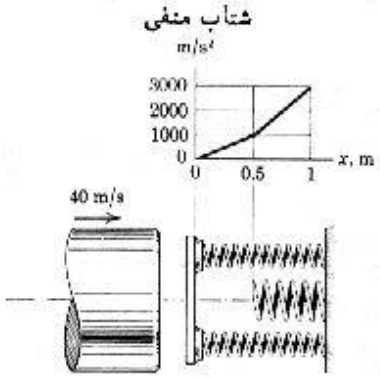
$5<x<10$ $\Delta x=v_5\Delta t+(1/2)a\Delta t^2$ $v_5=\sqrt{9+20+15}=6.63$ m/s

$5=6.63\Delta t+(1/2)(3)(\Delta t)^2$ $\Delta t=0.656$ s (or $-5.08$ sec)

$\Rightarrow t=t_{10}=t_5+\Delta t=1.100+0.656=1.756$ sec

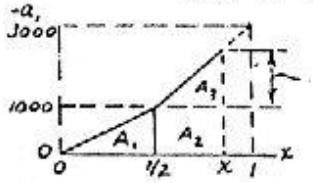



نگاره 2.49




نگاره 2.50

2.50 - گلوله با تندی 40 m/s به ضربه‌گیر می‌خورد. بیشترین فشردگی ضربه‌گیر چیست؟




$\int v\,dv=\int a\,dx$ $\int_{1600}^{0} dv^2=-2$

$A_1=1000/4=250$ $(m/s)^2$ $A_2=(x-(1/2))1000$

$A_3=2000(x-(1/2))^2$ $A_1+A_2+A_3=2000x^2-1000x+250$

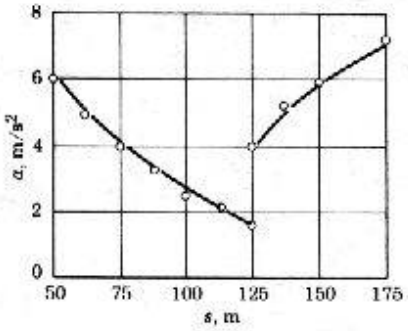
$x^2-0.5x-0.275=0$ $x=0.831$ m $(x>0.5$ m$)$

2.51 - اگر تندی خودرویی در $s=50$ m $30$ km/h باشد، نمودار $v$-$s$ را بکشید و تندی را در $s=175$ m بیابید.

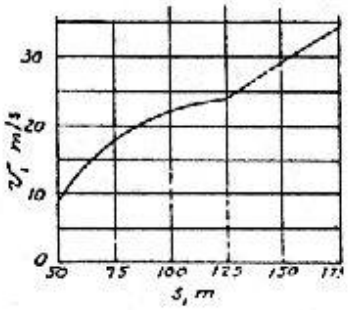
$\int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_0^{\Delta s} a\,ds$ $v^2=v_0^2+2\int_0^{\Delta s} a\,ds$ $v_0^2=69.4$ $(m/s)^2$

$v_{175}=34.3$ m/s

نگاره 2.51




| $\Delta s$ m | $\int ads$ $(m/s)^2$ | $v^2$ $(m/s)^2$ | v m/s |
|---|---|---|---|
| 50-75 | 125 | 319 | 17.9 |
| 75-100 | 83 | 485 | 22.0 |
| 100-125 | 50 | 585 | 24.2 |
| 125-150 | 125 | 835 | 28.9 |
| 150-175 | 170 | 1175 | 34.3 |




2.52 - به یاری دستور $v=v_0e^{-kt}$ ، داده‌های پرسش 2.25 را برآورد کنید و آن را پاسخ دهید.

$v=v_0e^{-kt}$ $t=0 \Rightarrow v=v_0=10$ knots

$t=6$ min $\Rightarrow v=4=10e^{-6k}$ $6k=\ln(10/4)=0.9163$

$k=0.1527$ $min^{-1}$ $v=ds/dt$

$$\int_0^s ds=\int_0^t v_0e^{-kt}dt \quad s=v_0(1-e^{-kt})/k$$

$\Rightarrow s=10(1-e^{-0.9163})/(0.1527\times60)=0.65$ mi/nautical

با دستاورد 0.6 از پرسش 2.25 روبرو کنید.

2.53 - داده‌های پرسش 2.25 را با دستور $v=v_0/(1+v_0kt)$ برآورد کنید و آن را پاسخ دهید.

$$v=\frac{v_0}{1+v_0kt} \qquad t=0 \quad v=v_0=10 \text{ knots}$$

$t=6$ min $=1/10$ hour $\Rightarrow v=4$ knots

$\Rightarrow 4=10/(1+10k/10)$ $k=1.5$ $mi^{-1}$

$$v=ds/dt \Rightarrow \int_0^s ds=\int_0^t \frac{v_0}{1+v_0kt}\,dt \quad s=\left[(1/k)\ln(1+v_0kt)\right]_0^t$$

$=\ln(2.5)/1.5=0.61$ mi(nautical)

با 0.6 از پرسش 2.25 و 0.65 از پرسش 2.52 روبرو کنید.

2.54 - موشکی بر قطب شمال، رو به بالا پرتاب می‌شود تا در بلندی 160 km به تندی 16000 km/h برسد و سوختش پایان یابد. این موشک تا کجا بالا می‌رود؟ شعاع زمین در قطب، 6357 km و گرانی آن، 9.833 $m/s^2$ است.

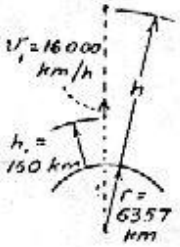
$$a=-g=-g_0r^2/(r+s)^2 \qquad \int_{v_1}^{0} vdv=\int_{h_1}^{h} -g_0r^2/(r+s)^2 ds$$

$$v_1^2/2=-g_0r^2/(r+s)\Big]_{h_1}^{h}=g_0r^2\left[\frac{1}{r+h_1}-\frac{1}{r+h}\right]$$

$$\frac{1}{r+h}=\frac{1}{r+h_1}-\frac{v_1^2}{2g_0r^2}=1.285(10^{-4}) \ 1/km$$

$$\Rightarrow 6357+h=10^4/1.285=7777 \quad h=1420 \ km$$

2.55 - ذره‌ای با دستور $a=kt-k^2x$ از $x=0$ در $t=0$ به راه می‌افتد. $x(t)$ چیست؟




$$a=d^2x/dt^2=Kt-k^2x \quad d^2x/dt^2+k^2x=Kt$$

$$x=x_t+x_p=Asin(kt)+Bcos(kt)+(K/k^2)t$$

$$\dot{x}=Akcos(kt)-Bksin(kt)+(K/k^2)=0$$

$$t=0 \Rightarrow 0=Ak-0+K/k^2 \ , \ A=-K/k^3 \ , \ x=0$$

$$\Rightarrow 0=0+B+0 \ , \ B=0 \Rightarrow x=K(kt-sin(kt))/k^3$$

2.56 - موشکی با شتاب $a=ke^{-bt}-cv-g$ رو به بالا می‌رود. $v(t)$ چیست؟

$$dv/dt=ke^{-bt}-cv-g \quad dv/dt+cv=ke^{-bt}-g$$

$$v=Ae^{-ct}+e^{-ct}\int(ke^{-bt}-g)e^{ct}dt=Ae^{-ct}+ke^{-bt}/(c-b)-g/c$$

$$\Rightarrow v=g(e^{-ct}-1)/c+k(e^{-bt}-e^{-ct})/(c-b)$$

2.57 - ذره‌ای به $x=3t^2-4t$ و $y=4t^2-\frac{t^3}{3}$ پیش می‌رود. تندی و شتاب آن در $t=2$ s چیست؟

$$x=3t^2-4t \quad \dot{x}=6t-4 \quad \ddot{x}=6 \ mm/s^2 \quad y=4t^2-t^3/3 \quad \dot{y}=8t-t^2$$

$$\ddot{y}=8-2t \ mm/s^2 \ , \ t=2 \ s \Rightarrow \dot{x}=12-4=8 \ mm/s$$

$$\dot{y}=16-4=12 \ mm/s \quad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{8^2+12^2}=14.42 \ mm/s$$

$$\theta_x=tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})=56.3^o \quad \ddot{x}=6 \ mm/s^2 \quad \ddot{y}=8-4=4 \ mm/s^2$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{6^2+4^2}=7.21 \ mm/s^2$$

$$\theta_x=\tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})=\tan^{-1}(4/6)=33.7^{\circ}$$

2.58 - تندی و شتاب ذره‌ای با بردار جایگاه زیر چیست؟

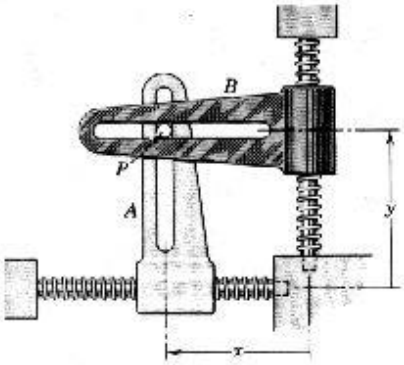
$$\vec{r}=(\frac{2t^3}{3}-\frac{3t^2}{2})\hat{i}+(\frac{t^4}{12})\hat{j}$$

$$\mathbf{r}=(\frac{2}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2)\mathbf{i}+\frac{t^4}{12}\mathbf{j}\ ,\quad \mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=(2t^2-3t)\mathbf{i}+\frac{t^3}{3}\mathbf{j}\ ,$$

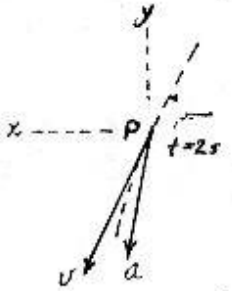
$$\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}=(4t-3)\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}\quad t=3\ \text{s}\quad v=(18-9)\mathbf{i}+9\mathbf{j}=9(\mathbf{i}+\mathbf{j})\ \text{m/s}\ ,$$

$$a=(12-3)\mathbf{i}+9\mathbf{j}=9(\mathbf{i}+\mathbf{j})\ \text{m/s}^2\quad v=9\sqrt{2}\ \text{m/s}\quad a=9\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

2.59 - $x=20+\frac{t^2}{4}$ و $y=15-\frac{t^3}{6}$، تندی و شتاب میخ $P$ در $t=2\ s$ چیست؟ مسیر میخ را بکشید و خمیدگی آن را در آن هنگام بیابید.




نگاره 2.59




$$x=20+\frac{t^2}{4}$$

$$\dot{x}=t/2$$

$$\ddot{x}=0.5\ \text{mm/s}^2$$

$$y=15-t^3/6$$

$$\dot{y}=-t^2/2\qquad \ddot{y}=-t\ \text{mm/s}^2$$

$$t=2\ \text{s}\Rightarrow \dot{x}=1\ \text{mm/s}\quad \dot{y}=-2\ \text{mm/s}$$

$$\ddot{x}=1/2\ \text{mm/s}^2\quad \ddot{y}=-2\ \text{mm/s}^2$$

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=2.24\ \text{mm/s}$$

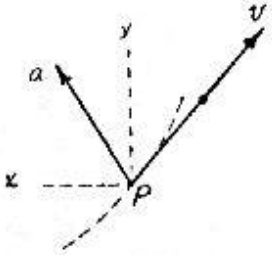
$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(1/2)^2+(-2)^2}=2.06\ \text{mm/s}^2$$

2.60 - اگر در پرسش پیشین $x=30+24Sin(\frac{\pi t}{2})$ و $y=40+32Cos(\frac{\pi t}{2})$ باشد، تندی و شتاب میخ $P$ در $t=2.5\ s$ چیست؟ مسیر حرکت میخ را بکشید و خمیدگی آن را در آن هنگام بیابید.

$$x=30+24\sin(\pi t/2)\qquad y=40+32\cos(\pi t/2)$$

$$\dot{x}=12\pi\cos(\pi t/2)\qquad \dot{y}=-16\pi\sin(\pi t/2)$$

$$\ddot{x}=-6\pi^2\sin(\pi t/2)\qquad \ddot{y}=-8\pi^2\cos(\pi t/2)$$




$$t=2.5\ \text{s}\Rightarrow \dot{x}=-12\pi/\sqrt{2}\ \text{mm/s}$$

$\dot{y}=16\pi/\sqrt{2}$ mm/s

$\ddot{x}=-6\pi^2/\sqrt{2}$ mm/s$^2$

$\ddot{y}=-8\pi^2/\sqrt{2}$ mm/s$^2$

$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=20\pi/\sqrt{2}$

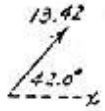
$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=10\pi^2/\sqrt{2}$

2.61 - ذره‌ای با دستور $y=4t^3-3t$ و $a_x=12t$ m/s$^2$ حرکت می‌کند. اگر تندی آن در سوی $x$ در $t=0$ برابر 4 m/s باشد، تندی و شتابش در $t=1$ s چیست؟

$$a_x=12t\ ,\ \int_4^{v_x} dv_x=\int_0^t 12t\,dt\ ,\ v_x=4+6t^2$$

$y=4t^3-3t$ , $v_y=\dot{y}=12t^2-3$ , $a_y=\ddot{y}=24t$

$t=1$ sec $\Rightarrow$ $v_x=10$ m/sec

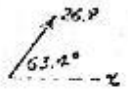



$v_y=9$ in./sec $\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=13.45$ m/s

$\theta_x=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(9/10)=42.0^\circ$

$a_x=12$ in./sec$^2$ , $a_y=24$ m/sec$^2$

$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{12^2+24^2}=26.8$ m/s$^2$



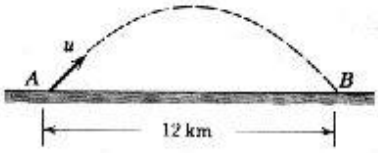

$a_y=24$ m/sec$^2$

$\theta_x=\tan^{-1}(a_y/a_x)=\tan^{-1}(24/12)=63.4^\circ$

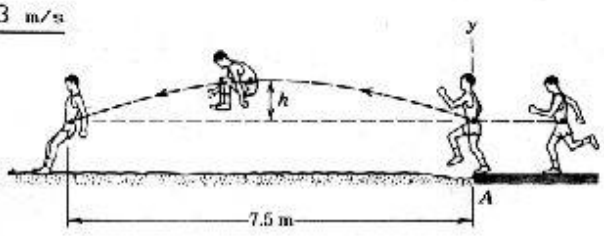
2.62 - کمترین تندی $u$ برای آنکه گلوله از $A$ به $B$ برسد چیست؟

$\theta=45^\circ \quad 2s=(u^2/g)\sin 2\theta \Rightarrow 12(10^3)=u^2/9.81$

$u=\sqrt{9.81(12000)}=343$ m/s




نگاره 2.62




نگاره 2.63

2.63 - تندی دونده در سوی $y$ چه باشد تا از $A$ به $B$ بپرد؟ اندازه $h$ چیست؟ تندی او در سوی $x$، 10 m/s است.

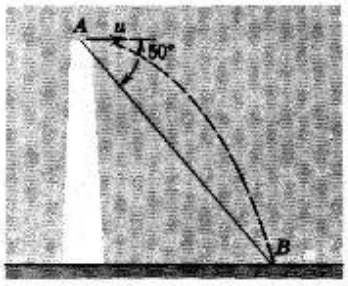
$2s=(u^2/g)\sin 2\theta=2(u\cos\theta)(u\sin\theta)/g$

$2s=7.5$ m , $u\cdot\cos\theta=10$ m/sec

$u\sin\theta=v_y \Rightarrow v_y=2sg/(2u\cos\theta)=3.68$ m/s

$h=(u\sin\theta)^2/2g=v_y^2/2g=0.69$ m

2.64 - تندی آغازین $u$ چه باشد تا گلوله پرتاب شده از $A$، 3.5 ثانیه دیگر، در $B$ به زمین بخورد؟



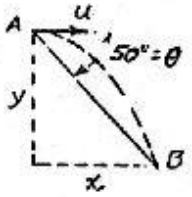

نگاره 2.64

$y=gt^2/2 \quad x=ut$

$\tan\theta=y/x=gt/2u$

$\Rightarrow u=gt/(2\tan\theta)$

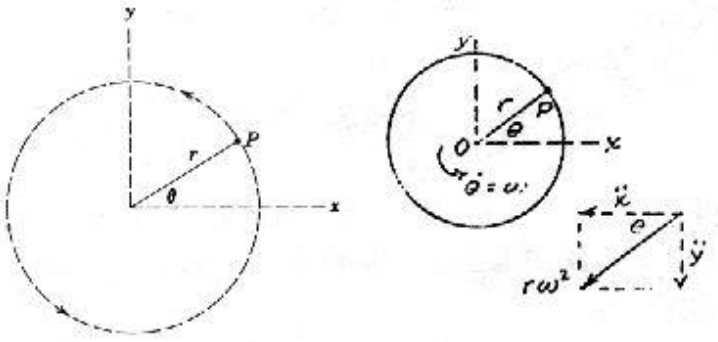
$=14.41$ m/s



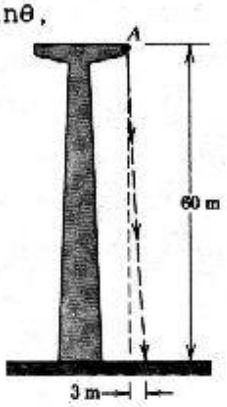

2.65 - نشان دهید که اگر $\dot{\theta}=\omega$ همواره یکنواخت باشد، شتاب $P$ از مرکز دایره می‌گذرد.

$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad \dot{x}=-r\dot{\theta}\sin\theta \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\cos\theta$

$\ddot{x}=-r\dot{\theta}^2\cos\theta=-r\omega^2\cos\theta \quad \ddot{y}=-r\dot{\theta}^2\sin\theta=-r\omega^2\sin\theta.$




نگاره 2.65




نگاره 2.66

2.66 گلوله‌ای از $A$ رها می‌شود. باد، شتابی افقی به آن می‌دهد و گلوله در دو متری زیر $A$ به زمین می‌خورد. شتاب و تندی افقی گلوله، به هنگام رسیدن به زمین چیست؟

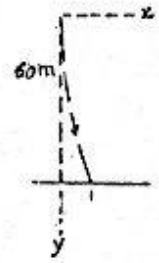
$y=v_{oy}t+a_yt^2/2 \quad 60=0+9.81t^2/2 \quad t^2=120/9.81$

$t=3.5$ s $\quad x=v_{ox}t+a_xt^2/2 \quad 2=0+a_x(3.5)^2/2$

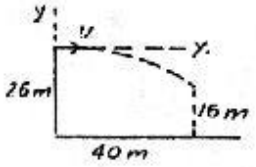
$a_x=4/(3.5)^2=0.33$ m/s²

$v_y=v_{oy}^2+2a_yh \quad v_y=34.3$ m/sec

$v_x=v_{ox}+a_xt \quad v_x=1.15$ m/sec

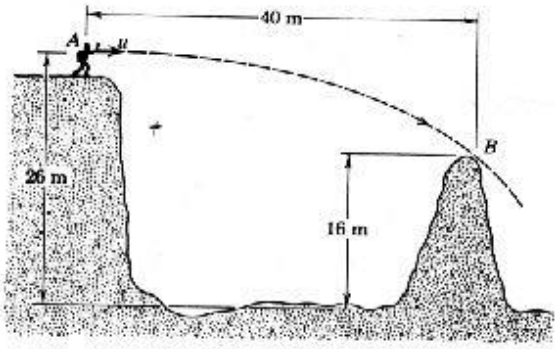



2.67 - پسرک، سنگ را با چه تندی پرتاب کند تا از $B$ بگذرد؟

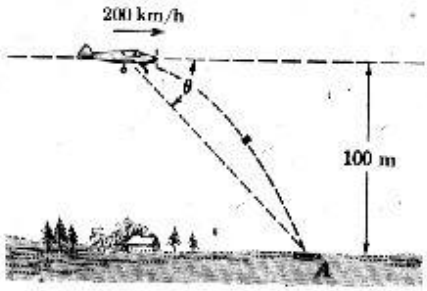



$a_y=-g \Rightarrow y=0-gt^2/2 \quad t=\sqrt{2y/g}=1.428$ s

$x=ut \quad u=40/1.428=28.0$ m/s




نگاره 2.67

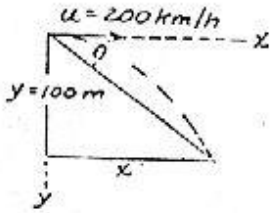



نگاره 2.68

2.68 - زاویه دید $\theta$ چه باشد تا بسته رها شده از هواپیما، در $A$ بیفتد؟

y-motion: $a_y=g=9.81$ m/s$^2$ $y=gt^2/2$

x-motion: $a_x=0$ $x=ut \Rightarrow y=gx^2/(2u^2)$ $x=u\sqrt{2y/g}$




$x=(200/3.6)\sqrt{2(100)/9.81}=251$ m,

$\theta=\tan^{-1}(y/x)=\tan^{-1}(100/251)=\underline{21.7^\circ}$

2.69 - ذره‌ای با دستور $v_y=8t$ m/s و $a_x=4t$ m/s$^2$ حرکت می‌کند و به هنگام $t=0$ در $y=2$ m و $x=0$ و $v_x=0$ است. مسیر ذره و تندیش در $x=18$ m چیست؟

$v_y=\dot{y}=8t$ $y=4t^2+c_1$ $y=2$ m

$t=0 \Rightarrow c_1=2$ $y=4t^2+2$ m $a_x=\ddot{x}=4t$ $\dot{x}=2t^2+c_2$

$\dot{x}=0$ , $t=0 \Rightarrow c_2=0$ $x=2t^3/3+c_3$ m

$x=0$ , $t=0 \Rightarrow c_3=0$

$y=4\sqrt[3]{9x^2/4}+2$ $\underline{(y-2)^3=144x^2}$

$x=18$ m $2t^3/3=18$ $t^3=27$ $t=3$ sec

$\Rightarrow \dot{x}=2(3)^2=18$ m/sec

$\dot{y}=8(3)=24$ m/sec $v=\sqrt{18^2+24^2}=\underline{30}$ m/s

2.70 - شیار عمودی با تندی $20$ mm/s به راست می‌رود. تندی و شتاب میخ $P$ در $x=60$ mm چیست؟

$\dot{x}=20$ mm/s $\ddot{x}=0$ $y=x^2/160$ $\dot{y}=x\dot{x}/80$

$\ddot{y}=(\dot{x}^2+x\ddot{x})/80$

$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{\dot{x}^2+(x\ddot{x}/80)^2}=\dot{x}\sqrt{1+(x/80)^2}$ $x=60$ mm $\underline{v=25}$ mm/s

$$a=\ddot{y}=\dot{x}^2/80 \quad \ddot{x}=0 \quad a=(20)^2/80=5 \ \text{mm/s}^2$$

2.71 -اگر شیار عمودی پرسش 2.70 با دستور $x=60\sin\pi t$ حرکت کند، تندی و شتاب میخ $P$ در $t=0.5$ s چیست؟

$$x=60\sin\pi t \quad \dot{x}=60\pi\cos\pi t \quad \ddot{x}=-60\pi^2\sin\pi t$$

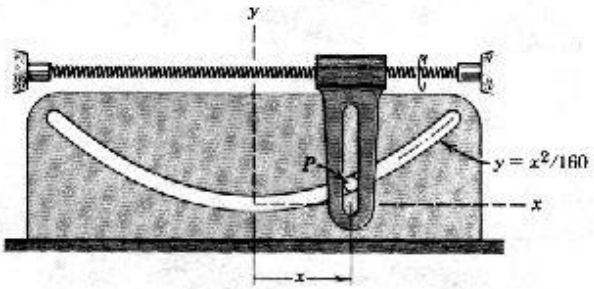
$$y=x^2/160 \quad \dot{y}=x\dot{x}/80=3600\pi\sin\pi t\cos\pi t$$

$$\ddot{y}=(\dot{x}^2+x\ddot{x})/80=45\pi^2(1-2\sin^2\pi t)$$

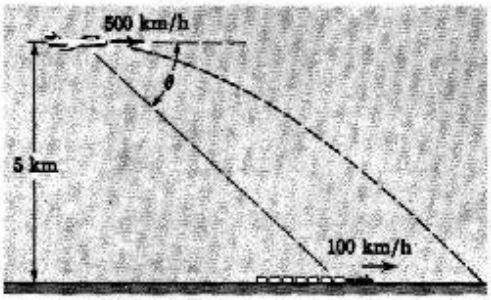
$$t=1/2 \quad \dot{x}=60\pi\cos(\pi/2)=0 \quad \dot{y}=0 \quad \underline{v=0}$$

$$\ddot{x}=-60\pi^2 \ \text{mm/s}^2 \quad \ddot{y}=45\pi^2(1-2)=-45\pi^2 \ \text{mm/s}^2,$$

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(-60\pi^2)^2+(-45\pi^2)^2}=\underline{75\pi^2 \ \text{mm/s}^2}$$

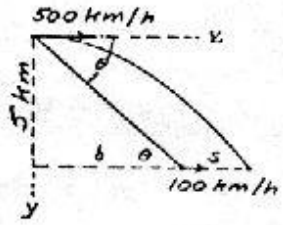



نگاره 2.70




نگاره 2.72

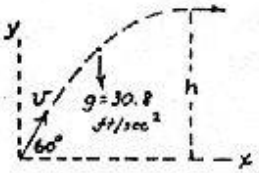
2.72 -زاویه دید $\theta$ چه باشد تا هواپیما، قطار را بزند؟




$$h=gt^2/2 \quad t=\sqrt{2(5000)/9.81}=31.9 \ \text{s}$$
$$s=vt=(100/3.6)/31.9=887 \ \text{m}$$
$$b+s=ut=(500/3.6)31.9=4434 \ \text{m}$$
$$b=4434-887=3547 \ \text{m}$$
$$\theta=\tan^{-1}(5000/3547)=54.6^\circ$$

2.73 -سوخت موشکی در آرایش نشان‌داده، پایان می‌یابد. موشک تا چه بلندی و تا چه زمانی، بالا

می‌رود؟ $g=9.3\ m/s^2$.




$v=1000\ km/hr = 278\ m/sec \quad a_y=-9.3\ m/sec^2$

$v_y=v_{y_o}+at \quad 0=278\sin 60^\circ-9.3t \quad t=25.9\ s$

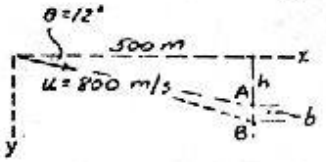
$v_y^2=v_{y_o}^2+2ay$

$0=(278\sin 60^\circ)^2-2(9.3)h \quad h=3116\ m$

نگاره 2.73

نگاره 2.74

2.74 - گلوله با تندی $800\ m/s$ رو به $A$ شلیک می‌شود. اندازه افت $b$ چیست؟

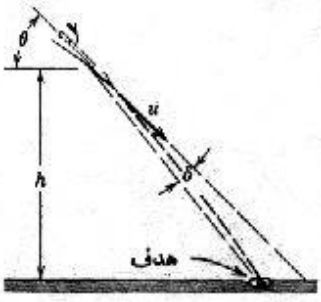



$h=500\tan 12^\circ=106.3\ m$

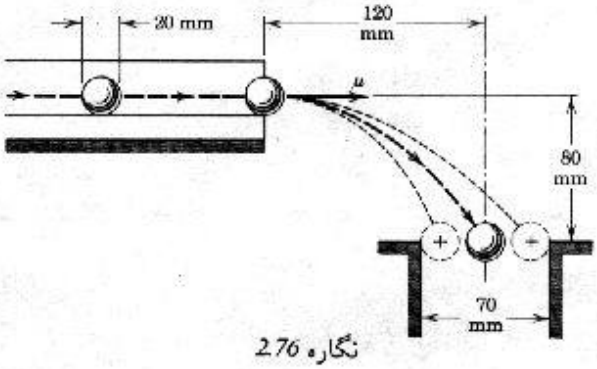
$y=x\tan\theta+(gx^2/2u^2)\sec^2\theta \quad y=h+b=b+x\tan\theta$

$x=500\ m \Rightarrow b=(gx^2/2u^2)\sec^2\theta=$

$=9.81(500)^2/(2(800)^2)\sec^2 12^\circ=2.00\ m$

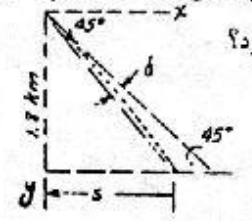



نگاره 2.75




نگاره 2.76

2.75 - هواپیمایی که با زاویه $\theta=45^\circ$ شیرجه می‌رود موشکی در بلندی $h=1.8\ km$ با تندی $u=1000\ km/h$ آتش می‌کند. زاویه $\delta$ چه باشد تا موشک به هدف بخورد؟




$y=ut\sin 45^\circ+gt^2/2 \quad u=1000/3.6=278\ m/s$

$1800=278(0.707)t+9.81t^2/2$

$\Rightarrow t=7.69\ s\ ,\ (t=-47.7\ s)$

$s=ut\cos 45^\circ=278(7.69)(0.707)=1510$ m

$\tan(\pi/4-\delta)=1510/1800=0.8389$

$\pi/4-\delta=39.99^\circ$ , $\delta=45^\circ-39.99^\circ=\underline{5.01^\circ}$

2.76 - کمینه و بیشینه $u$ چه باشد تا گلوله به درون سوراخ بیفتد؟

$x=ut \quad y=gt^2/2 \quad x=u\sqrt{2y/g} \quad u=x\sqrt{g/2y}$

$x_{max}=120+35-10=145$ mm

$x_{min}=120-35+10=95$ mm

$u_{max}=0.145\sqrt{9.81/(2(0.080))}=\underline{1.135}$ m/s

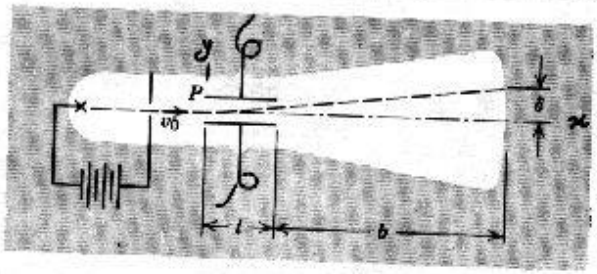
$u_{min}=0.095\sqrt{9.81/(2(0.080))}=\underline{0.744}$ m/s

2.77 - صفحه $P$ به الکترونی که با $v_0$ پرتاب می‌شود، شتاب $eE/m$ می‌دهد. اندازه $\delta$ چیست؟

$t=l/v_o$ , $v_x=v_c=cte \quad v_y=a_yt=eEl/(mv_o)$

$y=a_yt^2/2=eEl^2/(2mv_o^2)$ $\quad Al\Rightarrow \delta-y/b=v_y/v_x \Rightarrow$

$\delta=eEl^2/(2mv_o^2)+beEl/(mv_o^2) \quad \underline{\delta=eEl(l/2+b)/(mv_o^2)}$




نگاره 2.77

2.78 - زاویه $\theta$ و تندی گلوله در گذر از سوراخ چیست؟

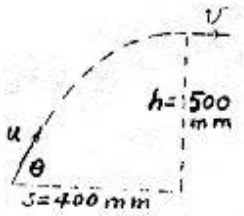
$h=u^2\sin^2\theta/(2g) \quad s=u^2\sin(2\theta)/(2g)$

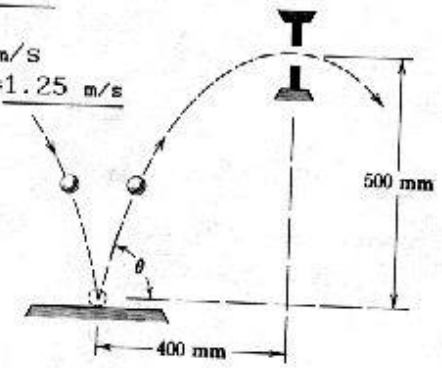
$\Rightarrow h/s=\sin^2\theta/\sin(2\theta)=(1/2)\tan\theta$

$\theta=\tan^{-1}(2h/s)=\tan^{-1}(2(500)/400)=\underline{68.2^\circ}$

$u^2=2gh/\sin^2\theta=11.38$ (m/s)$^2$ $\quad u=3.37$ m/s

$v=u\cos\theta=$constant $\quad v=3.37(0.3714)=\underline{1.25}$ m/s




نگاره 2.78

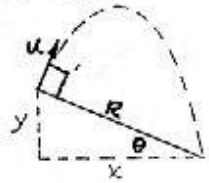
2.79 -اندازه برد $R$ چیست؟

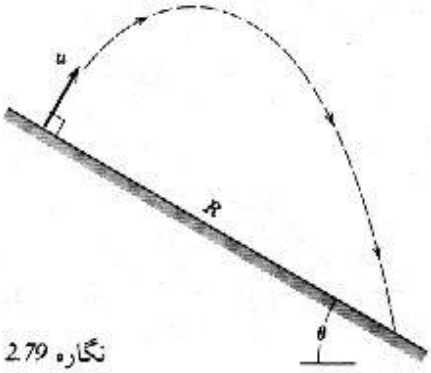
$y=R\sin\theta=-ut\cos\theta+gt^2/2 \quad x=R\cos\theta=ut\sin\theta$

$\Rightarrow R\sin\theta=-R\cos^2\theta/\sin\theta+g(R\cos\theta/u\sin\theta)^2/2$

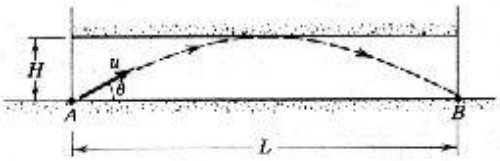
$1/\sin\theta=gR/(2u^2\tan^2\theta)$

$R=2u^2\tan^2\theta/(g\sin\theta)=\underline{2u^2\tan\theta\sec\theta/g}$




نگاره 2.79




نگاره 2.80

2.80 -اندازه $\theta$ و $u$ چه باشد تا گلوله پرتاب شده از $A$ بدون برخورد با سقف، به $B$ برسد؟

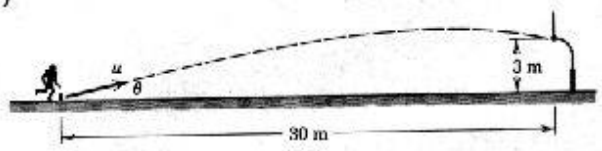
$H=(u\sin\theta)^2/(2g) \quad L=2s=u^2\sin2\theta/g$

$\Rightarrow H/L=\sin^2\theta/(2\sin2\theta)=(1/4)\tan\theta$

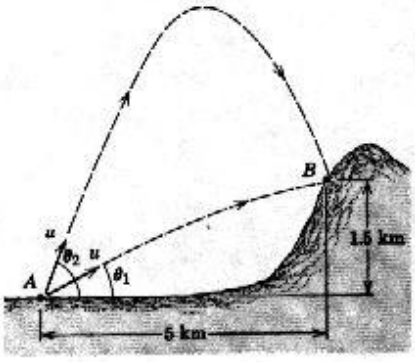
$\Rightarrow \underline{\theta=\tan^{-1}(4H/L)} \quad \sin\theta=\sqrt{2gH}/u$

$Lg/u^2=2\sin\theta\cos\theta=2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}=(2/u)\sqrt{2gH(1-2gH/u^2)}$

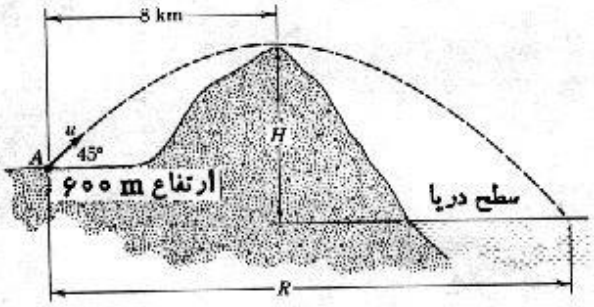
$\Rightarrow u=\sqrt{2gH}\sqrt{1+(L/4H)^2}$




نگاره 2.82




نگاره 2.81




نگاره 2.83

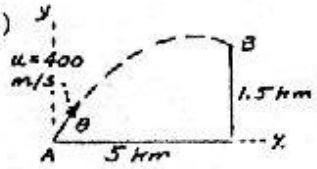
2.81 - اگر گلوله با $u=400\ m/s$ از $A$ پرتاب شود، زاویه $\theta$ چه باشد تا به $B$ برسد؟

$$y=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)\sec^2\theta=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)(1+\tan^2\theta)$$

$$1500=5000\tan\theta-9.81(5000)^2/(2(400)^2)(1+\tan^2\theta)$$

$$\tan^2\theta-6.524\tan\theta+2.957=0$$

$$\Rightarrow \underline{\theta_1=26.1^\circ} \quad \underline{\theta_2=80.6^\circ}$$




2.82 - اگر بازیکن، توپ را با $30\ m/s$ بزند، کمینه $\theta$ چه باشد که توپ، گل شود؟

$$y=x\tan\theta-gx^2/(2u^2)\sec^2\theta$$

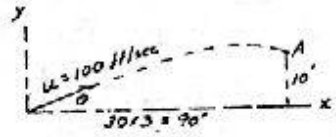
$$m=\tan\theta\ ,\ \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+m^2$$

$$y=xm-gx^2(1+m^2)/(2u^2)\ ,$$

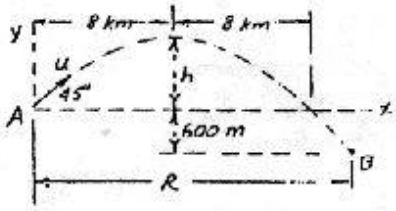
$$m^2-(2u^2/gx)m+(1+(2u^2y/gx^2))=0$$

$$A:\ m^2-6.901m+1.7668=0\ \ m=0.266\ ,\ 6.635$$

$$\theta=\tan^{-1}m=\underline{14.91^\circ}\ (\ 81.4^\circ)$$




2.83 - اندازه $u$ و $H$ و $R$ چیست؟




$$2s=u^2\sin2\theta/g \Rightarrow 16(10^3)=u^2\sin90^\circ/9.81$$

$$u=\sqrt{157000}=\underline{396\ m/s} \quad h=(u\sin\theta)^2/2g$$

$$H=h+600=4000+600=4600\ m$$

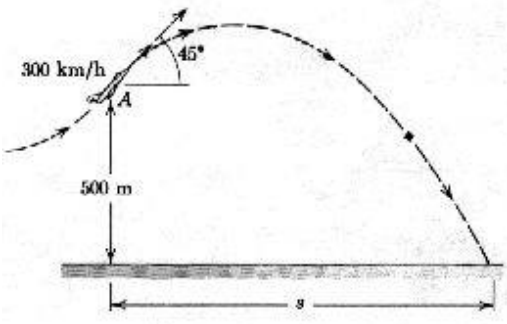
$$y=ut\sin\theta-gt^2/2 \quad -600=396(0.707)t-9.81t^2/2$$

$$t^2-57.11t-122.3=0 \quad t=59.18\ s\ ,(-2.07\ s)$$

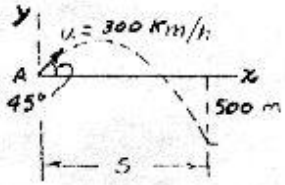
$$x=ut\cos\theta \quad R=396(59.18)\cos45^\circ=16579\ m$$

$$\underline{R=16.58\ km}$$

2.84 - هواپیما در $R$، بسته‌ای را رها می‌کند. برد $s$ و زمان رسیدن به زمین چیست؟




نگاره 2.84




$$u=300/3.6=83.33\ m/s$$

$$s=ut\cos\theta=83.33(0.7071)t=58.93t$$

$$y=ut\sin\theta+a_yt^2/2$$

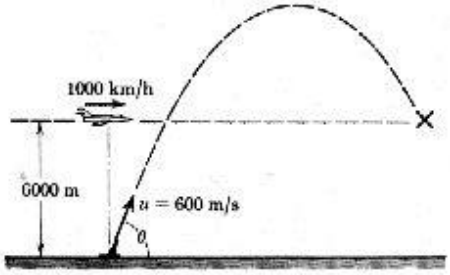
$$-500=83.33t(0.7071)+(-9.81)t^2/2$$

$t^2-12.01t-101.94=0 \quad t=17.75\ s\ ,(-5.74\ s)$
$s=58.93(17.75)=1046.2\ m\ , \quad \underline{s=1.046\ km}$

2.85 - زاویه $\theta$ چه باشد که گلوله به هواپیما بخورد؟ زمان این برخورد چیست؟

$x=ut=88ut \quad x=utcos\theta=2000tcos\theta$
$\Rightarrow 880t=2000tcos\theta$
$\theta=cos^{-1}(880/2000)=\underline{63.9^\circ}$

$h=utsin\theta-gt^2/2 \quad t^2-(2usin\theta/g)t+2h/g=0$
$t=usin\theta/g \pm\sqrt{(usin\theta/g)^2-2h/g}$
$usin\theta/g=1242\ sec^2$
$t=55.8\pm43.2 \quad t=12.5\ sec\ , \quad \underline{t=99.0\ sec}$



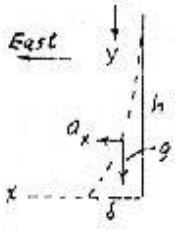
نگاره 2.85

نگاره 2.86

2.86 - گلوله‌ای که از $A$ رها می‌شود، از برای چرخش زمین، شتابی به اندازه $2v_y\omega Cos\gamma$ به سوی شرق می‌گیرد که $\omega$ تندی چرخشی زمین و $\gamma$ عرض شمالی است. $\delta$ چیست؟

$a_y=g \quad v_y=gt \quad a_x=2v_y\omega cos\gamma=2gt\omega cos\gamma$

$$\dot{x}=\int_0^t a_x dt=gt^2\omega cos\gamma \quad x=\int_0^t \dot{x}dt=gt^3\omega cos\gamma/3=\delta$$

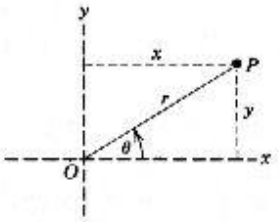



$h=gt^2/2 \Rightarrow \delta=(2h/g)^{3/2}(g\omega/3)cos\gamma$
$\delta=(2\sqrt{2}/3)\omega h\sqrt{h/g}cos\gamma$

2.87 - موشکی با شتاب $0.5g$ از هواپیمایی با تندی $1000\ km/h$ پرتاب می‌شود. $\theta$ چه‌باشد که به هدف بخورد؟

$\ddot{x}=0.5g \quad \dot{x}=u+0.5gt \quad x=ut+(1/2)(0.5g)t^2$
$\ddot{y}=g \quad \dot{y}=gt \quad y=gt^2/2 \quad t=\sqrt{2y/g}=\sqrt{2h/g}$
$x=s=u\sqrt{2h/g}+(1/4)g(2h/g)=u\sqrt{2h/g}+h/2$
$\theta=tan^{-1}(h/5)=tan^{-1}(h/(u\sqrt{2h/g}+h/2))$
$=tan^{-1}(0.2777)=\underline{15.5^\circ}$

نگاره 2.87




نگاره 2.88

2.88 - بردار جایگاه $P$ با $\vec{r}=(b_1Cos\theta)\hat{i}+(b_2Sin\theta)\hat{j}$ نشان می‌شود. اگر $\theta$ یکنواخت باشد نشان دهید که $P$ بر یک بیضی حرکت می‌کند و شتابش به سوی $O$ است.

$$\underline{r}=(b_1\cos\theta)\underline{i}+(b_2\sin\theta)\underline{j}$$

$$\dot{\underline{r}}=(-b_1\dot{\theta}\sin\theta)\underline{i}+(b_2\dot{\theta}\cos\theta)\underline{j}$$

$$\ddot{\underline{r}}=(-b_1\dot{\theta}^2\cos\theta)\underline{i}+(-b_2\dot{\theta}^2\sin\theta)\underline{j}=$$

$$=-\dot{\theta}^2[(-b_1\cos\theta)\underline{i}+(b_2\sin\theta)\underline{j}]$$

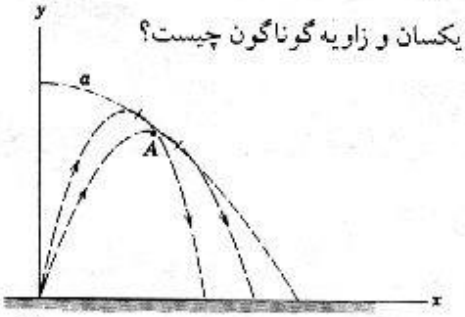
$$\underline{a}=\ddot{\underline{r}}=-\dot{\theta}^2\underline{r} \Rightarrow a=|\underline{a}|=r\dot{\theta}^2$$

$$x=b_1\cos\theta \quad y=b_2\sin\theta \Rightarrow \cos^2\theta=(x/b_1)^2$$

$$\sin^2\theta=(y/b_2)^2 \quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1=(x/b_1)^2+(x/b_2)^2$$

ellipse with semi axes $b_1$ & $b_2$

2.89 - دستور پوش $a$ برای پرتابه‌ای با تندی یکسان و زاویه گوناگون چیست؟




نگاره 2.89

$$y=x\tan\theta-(gx^2/2u^2)\sec^2\theta$$

$$m=\tan\theta \quad \sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+m^2$$

$$\Rightarrow y=mx-(gx^2/2u^2)(1+m^2)$$

$$m^2-(2u^2/gx)m+(1+2u^2y/gx^2)=0$$

$$(2u^2/gx)^2-4(1+2u^2y/gx^2)=0$$

$$\Rightarrow \underline{y=(u^2/2g)-(gx^2/2u^2)}$$

2.90 - ذره‌ای به دایره‌ای به شعاع $0.3\ m$ می‌چرخد. اندازه شتاب آن را، (a) برای تندی یکنواخت $0.6\ m/s$، و (b) برای تندی $0.6\ m/s$ که با آهنگ $0.9\ m/s^2$ افزایش می‌یابد، بیابید.

$$a_n=v^2/r=(0.6)^2/0.3=1.2\ m/s^2$$

(a) $a_t=\dot{v}=0 \Rightarrow \underline{a=a_n=1.2\ m/s^2}$ (b) $a_t=\dot{v}=0.9\ m/s^2$

$$\Rightarrow \quad a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(1.2)^2+(0.9)^2} \qquad \underline{a=1.5 \text{ m/s}^2}$$

*2.91* - ذره‌ای با شتاب $10\ m/s^2$ بر مسیر دایره‌ای به شعاع $2\ m$ می‌چرخد و اندازه تندیش بر دایره، با آهنگ $6\ m/s^2$ افزایش می‌یابد. اندازه تندیش چیست؟

$$a_n=v^2/r=\sqrt{a^2-a_t^2} \quad v^2=2\sqrt{(10)^2-(6)^2}=2(8)=16 \text{ m/s}^2$$
$$\underline{v=4 \text{ m/s}}$$

*2.92* - خودرویی از یک پیچ با شعاع $300\ m$ می‌گذرد. بیشترین تندی آن چه باشد که شتابش از $0.8g$ فراتر نرود؟

$$a_n=v^2/\rho \qquad v=\sqrt{\rho a_n}=\sqrt{300(0.8)(9.81)}=48.52 \text{ m/sec}$$

*2.93* - خودرویی با گرانیگاه $G$ و موتوری که $0.5g$ به آن شتاب می‌دهد از $A$ با شعاع خمیدگی $100\ m$ می‌گذرد. تندی آن در $A$ چیست؟

$$a=a_n=v^2/\rho, v=\sqrt{\rho a_n}=\sqrt{(100-0.6)(0.5)(9.81)}=22.08 \text{ m/s}$$
$$\underline{v=79.5 \text{ km/h}}$$

نگاره *2.93*

نگاره *2.95*

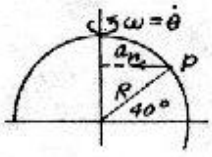
نگاره *2.96*

*2.94* - یک کشتی با تندی یکنواخت $20$ گره دریایی، بر مسیری دایره می‌گردد. اگر برای $90°$ گردش، $60\ s$ زمان بخواهد، شتابش چیست؟

$$a=a_n=v\dot{\beta}=20(1.852)\pi/((3.6)(2)(60))=\underline{0.269 \text{ m/s}^2}$$

*2.95* - شتاب نقطه $P$ چیست؟ قطر زمین را $12742\ km$ و تندی چرخشی آن را $0.729\times10^{-4}\ rad/s$ بگیرید.

$$a=a_n=r\dot{\theta}^2=R\dot{\theta}^2\cos\gamma=$$
$$=12.742(10^6)\cos40°(0.729\times10^{-4})/2=$$
$$=\underline{0.0259 \text{ m/s}^2}$$

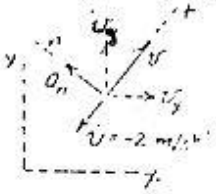



*2.96* - خلبان هواپیمایی که با تندی $800\ km/h$ پیش می‌رود، زاویه دیدش را با چه تندی تغییر دهد که

در بلندی $8\ km$ با شتاب گرانشی $9.79\ m/s^2$ به بی‌وزنی برسد؟

$$a_n=v\dot{\beta} \quad \dot{\beta}=0.04406\ rad/s \qquad \dot{\beta}=0.04406(180/\pi)=2.52\ deg/s$$

2.97 - ذره‌ای با تندی $\vec{v}=3\hat{i}+y\hat{j}\ m/s$ بر مسیر خمیده‌ای به شعاع $6.25\ m$ و شتاب $-2\ m/s^2$ پیش می‌رود. دستور تندی و شتاب آن چیست؟



$$\underline{v}=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \quad \underline{c}_t=\sqrt{5^2+4^2}\underline{c}_t$$

$$\underline{v}=5\underline{c}_t \quad a_t=\dot{v},\ a_n=v^2/\rho=4\ m/s^2$$

$$\underline{a}=4\underline{c}_n-2\underline{c}_t\ m/s^2$$

2.98 - دستورهای برداری شتاب $G$ در $\theta=60^\circ$ و $\dot{\theta}=2\ rad/s$ و $\ddot{\theta}=2.45\ rad/s^2$ برای چارچوب $n$-$t$ و $x$-$y$ چیست؟

$$a_n=r\dot{\theta}^2=4(2.00)^2=16.00\ m/sec^2$$

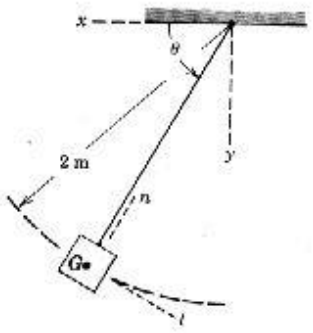
$$a_t=r\ddot{\theta}=4(4.025)=16.10\ m/sec^2$$

$$\underline{a}=16.00\underline{e}_n+16.10\underline{e}_n\ m/sec^2$$

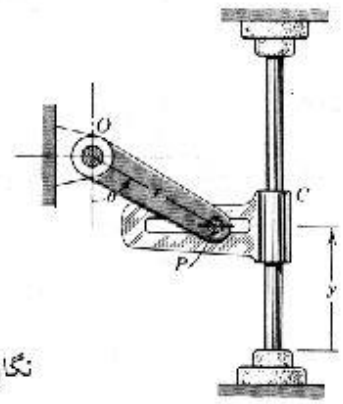
$$a_x=-16.00\cos60^\circ-16.1\sin60^\circ=-21.9\ m/sec^2$$

$$a_y=16.1\cos60^\circ-16.00\sin60^\circ=-5.81\ m/sec^2$$

$$\underline{a}=-21.9\underline{i}-5.81\underline{j}\ m/sec^2$$

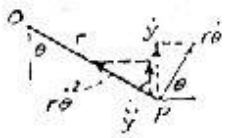


نگاره 2.98



نگاره 2.99

2.99 - $y$ و $\ddot{y}$ را برای داده‌های زیر بیابید. (a) $\ddot{\theta}=\alpha,\ \dot{\theta}=0$ (b) $\ddot{\theta}=0,\ \dot{\theta}=\omega$



(a) $\dot{\theta}=\omega \quad \ddot{\theta}=0 \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\sin\theta=r\omega\sin\theta$

$\ddot{y}=r\dot{\theta}^2\cos\theta=r\omega^2\cos\theta$

(b) $\dot{\theta}=0 \quad \ddot{\theta}=\alpha \quad \dot{y}=r\dot{\theta}\sin\theta=0$

$\ddot{y}=r\ddot{\theta}\sin\theta=r\alpha\sin\theta$

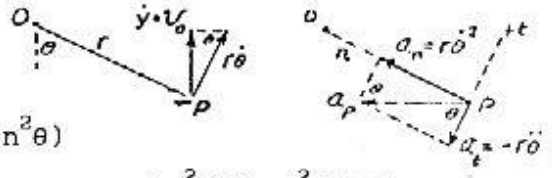
2.100 - اگر در پرسش پیشین، $v_0=y$ باشد، شتاب میخ $P$ در چارچوب $n$ و $t$ چیست؟

$r\dot{\theta}=v_o/\sin\theta \quad \ddot{y}=0$

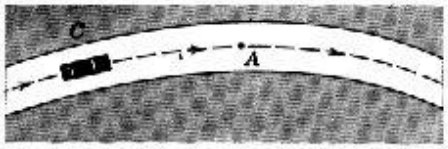
$\Rightarrow a_n=r\dot{\theta}^2=v_o^2/r\sin^2\theta$

$a_t=a_n\operatorname{ctn}\theta=v_o^2\operatorname{ctn}\theta/(r\sin^2\theta)$

$\underline{a_n=(v_o^2/r)\csc^2\theta}$ $\qquad$ $\underline{a_t=(v_o^2/r)\csc^2\theta\operatorname{ctn}\theta}$




2.101- خودروی نشان داده، تندیش را با آهنگ $1.5\ m/s^2$ می‌افزاید. اگر شتاب آن در $A$ با شعاع خمیدگی $200\ m$، $2.5\ m/s^2$ باشد، اندازه تندی و شتاب آن در $A$ چیست؟

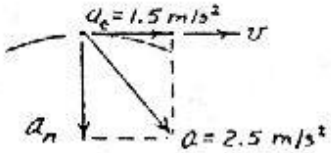



نگاره 2.101

$a^2=a_n^2+a_t^2 \quad a_n=v^2/\rho=\sqrt{a^2-a_t^2}$

$v^2=200\sqrt{2.5^2-1.5^2}=200(2)=400\ (m/s)^2$

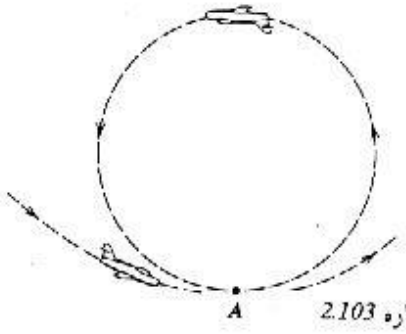
$v=20\ m/s \quad 20(3.6)=\underline{72\ km/h}$



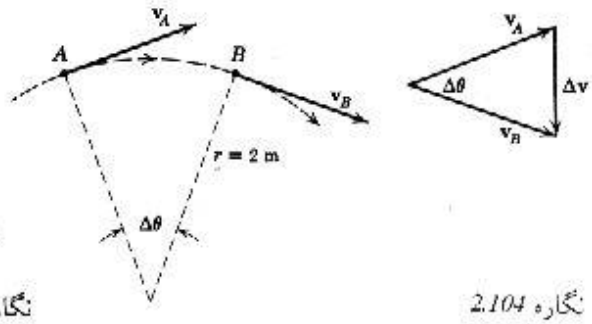

2.102 - خودرویی در سر یک پیچ با شعاع $240\ m$ حرکت می‌کند. اگر شتاب آن در تندی $75\ km/h$ $3\ m/s^2$ باشد، تندیش با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

$a_n=v^2/\rho=1.8\ m/sec^2 \quad a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$

$a_t=\sqrt{a^2-a_n^2}=\sqrt{3^2-(1.8)^2}=2.4\ m/sec^2$




نگاره 2.103




نگاره 2.104

2.103 - شتاب هواپیما در $A$ $3g$ است. اگر تندی هواپیما، $800\ km/h$ باشد و با آهنگ $20\ km/h$ در ثانیه افزایش یابد، شعاع خمیدگی در $A$ چیست؟

$a_t=20/3.6=5.56$ m/s²

$a^2=a_n^2+a_t^2$ $a_n^2=(3(9.81))^2-5.56^2=835.2$

$a_n=28.90$ m/s² $a_n=v^2/\rho$

$\rho=(800/3.6)^2/28.90=\underline{1709}$ m

2.104 - ذره‌ای با تندی 10 m/s از $A$ به $B$ می‌رود. با بخش‌کردن $\Delta v$ بر زمان رفتن از $A$ بر $B$، شتاب عمودی آن را برای (a) $\Delta\theta=30^\circ$ و (b) $\Delta\theta=15^\circ$ و (c) $\Delta\theta=5^\circ$ بیابید.

$\Delta v=2v\sin(\Delta\theta/2)=20\sin(\Delta\theta/2)$ $\Delta t=\Delta s/v=r\Delta\theta/v=2\Delta\theta/10=\Delta\theta/5$

$(a_n)_{av}=\Delta v/\Delta t=100\sin(\Delta\theta/2)/\Delta\theta$

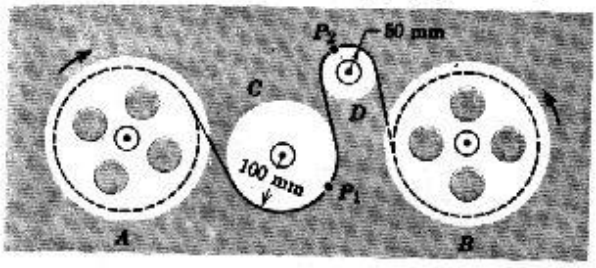
(a) $\Delta\theta=30^\circ$; $\Delta\theta=0.5236$ rad $(a_n)_{av}=49.4$ m/sec²

(b) $\Delta\theta=15^\circ$; $\Delta\theta=0.2618$ rad $(a_n)_{av}=49.9$ m/sec²

(c) $\Delta\theta=5^\circ$ ; $\Delta\theta=0.0873$ rad , $(a_n)_{av}=49.98$ m/sec²

$a_n=v^2/r=100/2=50$ m/sec²

2.105 - نوار از گرد $A$ به گرد $B$ می‌پیچد. اگر در آرایش نشان داده، شتاب عمودی $P_1$، 40 m/s² و شتاب مماسی $P_2$، 30 m/s² باشد، شتاب $P_1$ و $P_2$ و تندی نوار چیست؟




نگاره 2.105

$P_1$: $a_n=v^2/r$ $v=\sqrt{0.1(40)}=\underline{2}$ m/s $P_2$: $a_n=v^2/r=2^2/0.05=80$ m/s²

$a_1=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{40^2+30^2}=\underline{50}$ m/s² $a_2=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{80^2+30^2}=\underline{85.4}$ m/s²

2.106 - ماهواره‌ای در بلندی 200 km به گرد ماه می‌گردد. تندی آن چیست؟

$a_n=v^2/\rho=v^2/(R+h)$ $R=1758$ km

$h=200$ km $g_o=1.162$ m/s²

$a_n=g=g_o(R/(R+h))^2$

$=1.62((1738/(1738+200))^2=1.303$ m/s²

$$v^2=(1738+200)1.303(3600)^2(10^{-3})$$
$$=32.72(10^6)\ \text{(km/h)}^2 \quad \underline{v=5720\ \text{km/h}}$$

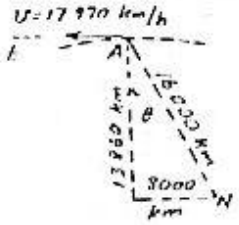
*2.107* - ماهواره‌ای که در بلندی $h=319\ km$ به گرد زمین می‌گردد باید تندی $27790\ km/h$ بدارد. شتاب گرانش را در آنجا بیابید. شعاع زمین را $R=6371\ km$ بگیرید.

$$a=a_n=g=v^2/R=8.9\ \text{m/sec}^2$$
$$g=g_o R^2/(R+h)^2=9.81(6371)^2/(319+6371)^2=8.9\ \text{m/sec}^2$$

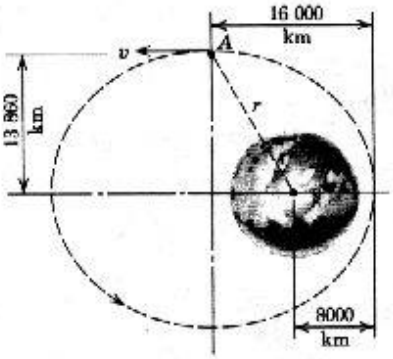
*2.108* - ماهواره‌ای که به گرد زمین می‌گردد در نشیب مدارش با بلندی $400\ km$، تندی $32000\ km/h$ دارد. خمیدگی نشیب مدارش چیست؟ از $g=9821\ m/s^2$ و $D=1272\ km$ سود جویید.

$$a_n=g=v^2/\rho \quad g=g_o(R/(R+h))^2$$
$$\rho=\frac{1}{g_o}\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 v^2=\frac{1}{9.81(10)^{-3}}\left(\frac{\frac{12742}{2}+400}{\frac{12742}{2}}\right)^2\left(\frac{32000}{3600}\right)^2=\underline{9090\ \text{km}}$$

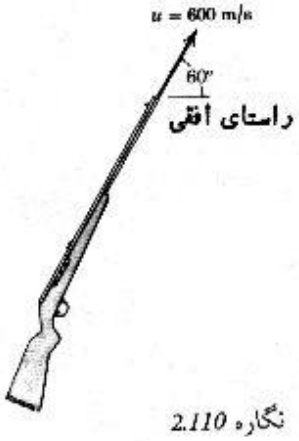
*2.109* - ماهواره در $A$ دارای تندی $17970\ km/h$ است. خمیدگی مدار در $A$ چیست؟ $g$ بر روی زمین، $9.821\ m/s^2$ و شعاع زمین $6371\ km$ است.



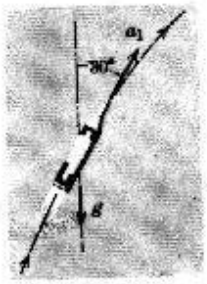

$$a=g=g_o\left(\frac{R}{R+h}\right)^2=9.821(6371/16000)^2=1.557\ \text{m/s}^2$$
$$a_n=1.557\cos\theta=1.557(0.866)=1.348\ \text{m/s}^2 \quad a_n=v^2/\rho\ ,$$
$$\rho=\frac{(17970)^2}{1.348(10^{-3})(3600)^2}=\underline{18480\ \text{km}}$$




نگاره *2.109*




نگاره *2.110*




نگاره *2.111*

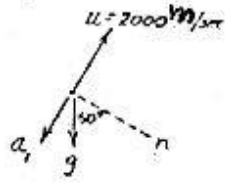
*2.110* - گلوله پس از شلیک، افزون بر شتاب $g=9.81\ m/s^2$، شتابی کاهنده و وارون تندی نیز از برای

اصطکاک هوا دارد. خمیدگی مسیر گلوله در دهانه تفنگ چیست؟

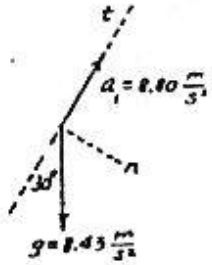
$a_n=v^2/\rho$ , $\rho=v^2/a_n= u^2/(g\cos 60^\circ)$

$\rho=(600)^2/(9.81(0.5))=73394.5$ m

$\Rightarrow \rho=73.394$ km




2.111 - اگر $g=8.43\ m/s^2$ و شتاب پیشران آن $a_t=880\ m/s^2$ و تندی موشک، $30000\ km/h$ و بلندی پرواز آن، $500\ km$ باشد، خمیدگی مسیر آن چیست؟




$a_n=g\sin 30^\circ=8.43(0.5)=4.22$ m/s²

$a_n=4.22(3600)^2/1000=54630$ km/h²

$a_n=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n=(30000)^2/54630=\underline{16480\ km}$

$\dot{v}=a_t=8.8-8.43\cos 30^\circ=\underline{1.50\ m/s^2}$

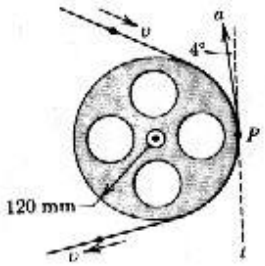
2.112 - اگر گلوله با تندی $600\ m/s$ رو به بالا شلیک شود، خمیدگی مسیر گلوله و بلندی بیشینه آن چیست؟

$v_x=cte=v\cos\theta=100(0.9806)/3.6=27.24$ m/s

$\theta=\tan^{-1}(1/5)=11.31^\circ$ $\cos 11.31^\circ=0.9806$

At top: $a_n=v_x^2/\rho=g$ $\rho=v_x^2/g=(27.24)^2/9.81=\underline{75.6\ m}$

نگاره 2.112




نگاره 2.113

2.113 - نمودار با تندی $4\ m/s$ از چرخ هرزگرد می‌گذرد. اگر شتاب $P$ چنان باشد که کشیده‌ایم، کی نوار می‌ایستد؟

$a_n=v^2/r=4^2/0.120=133.3$ m/s²

$a_t=-a_n\operatorname{ctn}4^\circ=-133.3\operatorname{ctn}4^\circ=-1907$ m/s²

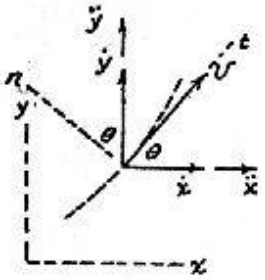
$a_t=cte$ $v_t=v_i+a_t t$ $0=4-1907t$

$t=4/1907=\underline{2.098(10^{-3})\ s}$

2.114 - ذره‌ای با بردار $\vec{r}=(3t^2/2)\hat{i}+(2t^3/3)\hat{j}$ حرکت می‌کند. خمیدگی مسیر در $t=2$ s چیست؟

$\underline{r}=(3/2)t^2\underline{i}+(2/3)t^3\underline{j}$ m  $\underline{v}=\dot{\underline{r}}=3t\underline{i}+2t^2\underline{j}$ m/sec

$\underline{a}=\dot{\underline{v}}=3\underline{i}+4t\underline{j}$ m/sec$^2$



$t=2$ sec  $\dot{x}=3(2)=6$ m/sec  $\dot{y}=2(2^2)=8$ m/sec

$\ddot{x}=3$ m/sec$^2$ , $\ddot{y}=8$ m/sec$^2$

$\theta=\tan^{-1}(6/8)=\tan^{-1}(3/4)$

$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=6^2+8^2=100$ (m/sec)$^2$

$a_n=\ddot{y}\cos\theta-\ddot{x}\sin\theta=8(3/5)-3(4/5)=12/5$ (m/sec)$^2$

$a_n=v^2/\rho$  $\rho=v^2/a_n=100(5)/12$  $\underline{\rho=41.7}$ m

2.115 - خودرو با تندی 250 km/h به $A$ می‌رسد و ترمز می‌کند تا در $C$ به تندی 200 km/h برسد. شتاب خودرو در گذر از $B$ چیست؟

$a_t=$cte  $v_C^2=v_A^2+2a_t\Delta s_{A-C}$  $v_A=250/3.6$ m/s

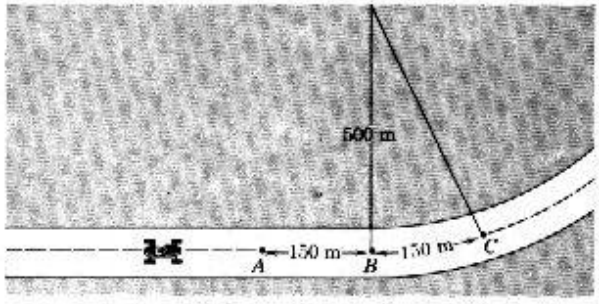
$v_C=200/3.6$ m/s  $a_t=-2.89$ m/s$^2$

$v_B^2=v_A^2+2a_t\Delta s_{A-B}=(250/3.6)^2+2(-2.89\times150)=3954$

$v_B=62.9$ m/s

B: $a_n=v_B^2/\rho=3954/500=7.91$ m/s$^2$

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(7.91)^2+(2.89)^2}=\underline{8.42}$ m/s$^2$




نگاره 2.115

2.116 - گلوله‌ای با تندی 460 m/s با زاویه $30^\circ$ پرتاب می‌شود. خمیدگی مسیر آن، پس از 10 s چیست؟

$v=v_o+at$  $v_x=460(0.866)+0=398.36$ m/sec

$v_y=460(0.5)-9.81(10)=132$ m/sec

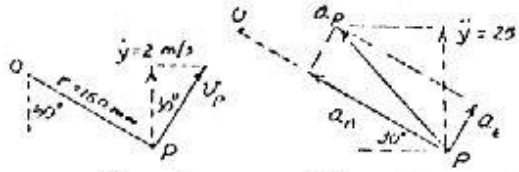
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{398.36^2+132^2}=419.6 \text{ m/sec}$$

$$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(132/398.36)=18.3^\circ$$

$$a_n=g\cos\beta=9.81(0.949)=9.31 \text{ m/sec}^2$$

$$a_n=v^2/\rho \quad , \quad \rho=(419.6)^2/9.31=18911 \text{ m}$$

2.117 - اگر در پرسش 2.99 در $\theta=60^\circ$ و $\dot{y}=2$ m/s و $\ddot{y}=25$ m/s$^2$ باشد، شتاب $a_t$ از میخ $P$ در مسیری به شعاع $r=160$ mm چیست؟




سایه‌های عمودی را اندازه می‌گیریم و با هم برابر می‌کنیم.

$$a_n=v_p^2/r=(2/\cos30^\circ)^2/0.160=33.3 \text{ m/s}^2$$

$$33.3\sin30^\circ+a_t\cos30^\circ=25$$

$$a_t=(25-16.67)/0.866=\underline{9.62 \text{ m/s}^2}$$

2.118 - ریسمان بسته‌شده به یک گاری به دور چرخی به قطر 750 mm می‌پیچد که با تندی 120 rev/min می‌چرخد. مسیر گاری با دستور $y=x^2/16$ برابر است. شتاب گاری $r$ هنگامی که به یک متری زیر $x$ می‌رسد، چیست؟

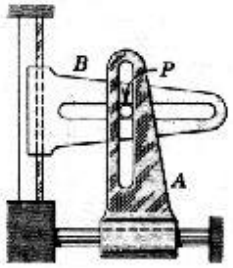
$$y=x^2/16 \quad dy/dx=x/8 \quad d^2y/dx^2=1/8$$

$$\rho=[1+(dy/dx)^2]^{3/2}/(d^2y/dx^2)=[1+(x/8)^2]^{3/2}/(1/8)$$

$$\rho_{y=2}=(1+0.25)^{3/2}/(0.125)=11.18 \text{ m} \quad v=r\dot{\theta}=1.5\pi \text{ m/sec}$$

$$a_t=\dot{v}=0 \quad a=a_n=v^2/\rho=(1.5\pi)^2/11.18=1.98 \text{ m/s}^2$$

نگاره 2.118




نگاره 2.119

2.119 - اگر $A$ با تندی 0.2 m/s و شتاب 0.75 m/s$^2$ به راست برود و $B$ با تندی 0.15 m/s و شتاب 0.5 m/s$^2$ به پایین بیاید، شعاع خمیدگی مسیر $P$ چیست؟

$$v=\sqrt{0.15^2+0.2^2}=0.25 \text{ m/s}$$

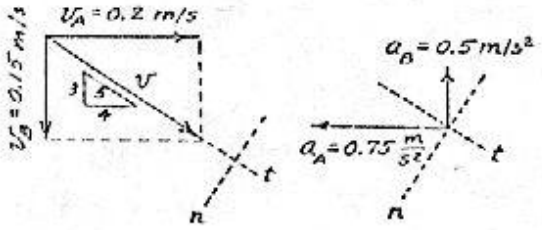
$$a_n=0.15(3/5)-0.50(4/5)=0.05 \text{ m/s}^2$$

$a_n=v^2/\rho$

$\rho=0.25^2/0.05=\underline{1.25\ m}$

$a_t=-0.75(4/5)-0.5(3/5)$

$=-0.9\ m/s^2$




$a_t=dv/dt=d(\rho\dot\theta)/dt=\rho\ddot\theta+\dot\rho\dot\theta=\dot\rho v/\rho+\rho\ddot\theta$

تا هنگامی که $\ddot\theta$ را ندانیم، $\dot\rho$ پیدا نمی‌شود.

2.120 - ذره‌ای از مبدا، با دستور $s=2t^3\ mm$ بر مسیر $y=2x^{3/2}$ پیش‌می‌رود. شتاب آن ذره در $t=1\ s$ چیست؟

$dy/dx=3x^{1/2}\quad d^2y/dx^2=(3/2)x^{-1/2}$

$\rho=[1+9x]^{3/2}/(3/2)x^{-1/2}=(2/3)\sqrt{x(1+9x)^3}$

$s=\int ds=\int_0^x \sqrt{1+(dy/dx)^2}$

$dx=\int\sqrt{1+9x}\ dx=2[\sqrt{(1+9x)^3}-1]/27$

$t=1\ sec\quad s=2\ m\quad 2=2[\sqrt{(1+9x)^3}-1]/27$
$x=0.913\ m$

$\rho=(2/3)\sqrt{0.913(1+9*0913)^3}=17.84\ m$

$v=\dot s=6t^2=6(1^2)=6\ m/sec$

$a_t=\ddot s=12t=12(1)=12\ m/sec^2$

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{(2.02)^2+12^2}=\underline{12.17\ m/s^2}$

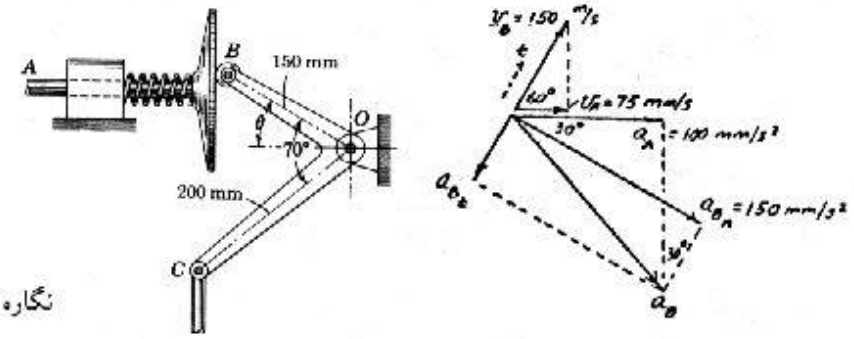
2.121 - میله $A$ با تندی $75\ mm/s$ و شتاب $100\ mm/s^2$ به راست می‌رود. $\dot\theta$ در $\theta=30^\circ$ چیست؟

$a_{B_n}=v_B^2/r=(150)^2/150=150\ mm/s^2$

$\Rightarrow 150\cos30^\circ-a_{B_t}\sin30^\circ=100$

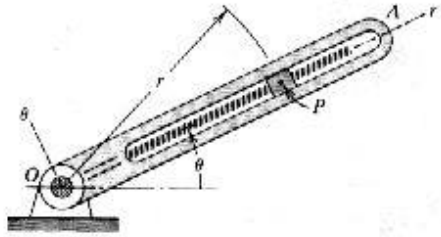
$a_{B_t}=(150(0.866)-100)/0.5=59.8\ mm/s^2$

$a_{B_t}=r\ddot\theta\quad \ddot\theta=-59.8/150=\underline{-0.399\ rad/s^2}$




نگاره 2.121

2.122 - سایه $r$ و $\theta$ از شتاب $P$ را در $\dot{\theta}=8$ rad/s و $\ddot{\theta}=-20$ rad/s² و $r=200$ mm و $\dot{r}=-300$ mm/s و $r=0$ بیابید.




نگاره 2.122

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-200(8^2)=-12800 \text{ mm/s}^2$$

$$a_r=-12.8 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=200(-20)+2(-300)(8)$$

$$=-8800 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta=-8.80 \text{ m/s}^2$$

2.123 - اندازه تندی و سایه‌های $r$ و $\theta$ از شتاب ذره‌ای با جابه‌جایی $r=2+5t^2/2$ و $\theta=0.5+3t^2/4$ در $t=2$ s چیست؟

$$r=2+5t^2/2 \quad ,\dot{r}=5t \quad , \ddot{r}=5 \text{ m/s}^2$$

$$\theta=0.5+3t^2/4 \quad , \dot{\theta}=3t/2 \quad , \ddot{\theta}=3/2 \text{ rad/s}^2$$

$$t=2 \text{ s} \quad r=12 \text{ mm} \quad \dot{r}=10 \text{ mm/s} \quad \ddot{r}=5 \text{ mm/s}^2$$

$$\dot{\theta}=3 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta}=3/2 \text{ rad/s}^2$$

$$v_r=\dot{r}=10 \text{ mm/s} \quad v_\theta=r\dot{\theta}=12(3)=36 \text{ mm/s}$$

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{(10)^2+(36)^2}=37.4 \text{ mm/s}$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=5-12(3^2)=-103 \text{ mm/s}^2$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=12(3/2)+2(10)(3)=78 \text{ mm/s}^2$$

2.124 - تندی و شتاب ذره‌ای که با $r=r_0e^{kt}$ و $\theta=ct$ حرکت می‌کند چیست؟

$$r=r_0e^{kt} \quad \dot{r}=r_0ke^{kt} \quad \ddot{r}=r_0k^2e^{kt}$$

$$\theta=ct \quad \dot{\theta}=c, \ddot{\theta}=0 \quad v_r=\dot{r}=r_0ke^{kt}$$

$$v_\theta=r\dot\theta=r_o ce^{kt} \quad v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=r_o e^{kt}\sqrt{k^2+c^2}$$

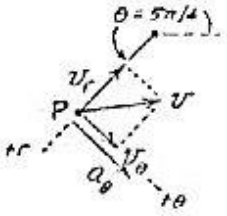
$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=r_o k^2e^{kt}-r_o e^{kt}c^2=r_o e^{kt}(k^2-c^2)$$

$$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta=0+2r_o kce^{kt}$$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=r_o e^{kt}\sqrt{k^4-2k^2c^2+c^4+4k^2c^2}=$$

$$=r_o e^{kt}\sqrt{k^4+2k^2c^2+c^4}=\underline{r_o(k^2+c^2)e^{kt}}$$

2.125 - ذره‌ای در $\theta=5\pi/4$ دارای $a_\theta=16\ mm/s^2$ و $r=5\ mm$ و $\ddot r=6\ mm/s^2$ و $\dot\theta=0.5\ rad/s$ و $\ddot\theta=4\ rad/s^2$ است، تندی آن چیست؟

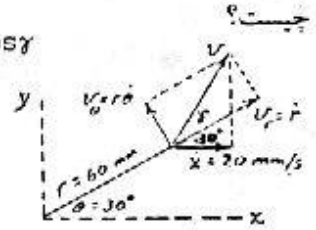



$$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta \quad 16=5(4)+2\dot r(0.5) \quad \dot r=-4\ m/sec=v_r$$

$$v_\theta=r\dot\theta=5(0.5)=2.5\ m/sec$$

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{(-4)^2+(2.5)^2}=\underline{4.72\ m/s}$$

2.126 - ذره‌ای در $r=60\ mm$ و $\theta=30^\circ$ دارای $r=20\sqrt3\ mm/s$ و $\ddot x=20\ mm/s$ است. اندازه تندی و $\dot\theta$ چیست؟




$$v_r=\dot r=20\sqrt3\ mm/s \quad v=20/\cos(\gamma+30^\circ) \quad v=20\sqrt3/\cos\gamma$$

$$\Rightarrow 20/\cos(30+\gamma)=20\sqrt3/\cos\gamma$$

$$\cos\gamma=\sqrt3((\sqrt3/2)\cos\gamma-(1/2)\sin\gamma)$$

$$1=(3/2)-(\sqrt3/2)\tan\gamma \quad \gamma=\tan^{-1}(1/\sqrt3)=30^\circ$$

$$v=20\sqrt3/(\sqrt3/2)=\underline{40\ mm/s} \quad r\dot\theta=v\sin\gamma=40(1/2)=20\ mm/s$$

$$\dot\theta=20/60=\underline{0.333\ rad/s}$$

2.127 - تندی و شتاب ذره‌ای با جابجاگاه $r=\frac{t^3}{3}$ و $\theta=2Cos(\frac{\pi t}{s})$، در $t=2\ s$ چیست؟

$$r=t^3/3, \quad \dot r=t^2 \quad \ddot r=2t$$

$$\theta=2\cos(\pi t/6) \quad \dot\theta=(-\pi/3)\sin(\pi t/6)$$

$$\ddot\theta=(-\pi^2/18)\cos(\pi t/6)$$

$$t=2\ s \quad r=8/3\ m \quad \dot r=4\ m/s \quad \ddot r=4\ m/s^2$$

$$\dot\theta=(-\pi/3)\sin(\pi/3)=-\pi/(2\sqrt3)=-0.907\ rad/s$$

$$\ddot\theta=(-\pi^2/18)\cos(\pi/3)=-\pi^2/36=-0.274\ rad/s^2$$

$v_r=\dot{r}=4$ m/s , $v_\theta=r\dot{\theta}=(8/3)(-0.907)=-2.42$ m/s

$a_r=\ddot{r}-2\dot{r}\dot{\theta}=4-(8/3)(-0.907)^2=4-2.19=1.807$ m/s$^2$

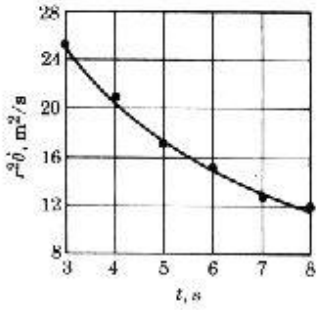
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$=(8/3)(-0.274)+2(4)(-0.907)=-7.99$ m/s$^2$

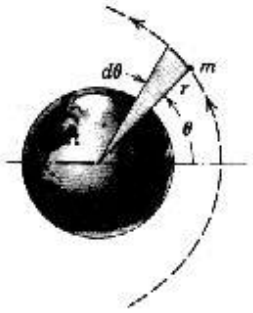
$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{v}=4\mathbf{e}_r-2.42\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}}}$ $\underline{\underline{\mathbf{a}=1.807\mathbf{e}_r-7.99\mathbf{e}_\theta \text{ m/s}^2}}$

*2.128* - سایه شتاب $\theta$ از ذره‌ای با رفتار نشان داده، در $t=5$ s و $r=\frac{1}{3}$ m چیست؟

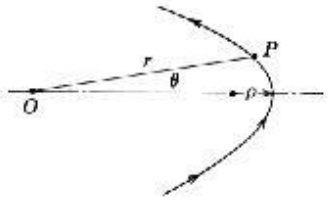
$a_\theta=(1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt=-3(8/3)=-8$ m/s$^2$




نگاره *2.128*




نگاره *2.129*




نگاره *2.130*

*2.129* - ماهواره $m$ بر مداری بیضی به گرد زمین می‌گردد. اگر $a_\theta=0$ باشد، درستی قانون دوم کپلر را نشان دهید.

$dA=(r/2)rd\theta=(1/2)r^2d\theta$

$\dot{A}=dA/dt=(1/2)r^2\dot{\theta}=$constant

$a_\theta=(1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt=0$

*2.130* - ذره $P$ بر مسیر $r=f(\theta)=f(-\theta)$ پیش‌می‌رود و هنگام گذر از $\theta=0$ با شعاع خمیدگی $\rho$ تندی $v$ دارد. $\ddot{r}$ چیست؟

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ , $\theta=0$ $v=r\dot{\theta}$ , $a_r=a_n$ $(a_n=v^2/\rho)$

$\Rightarrow \ddot{r}-r(v/r)^2=-v^2/\rho$

$\ddot{r}=v^2(1/r-1/\rho)=\underline{\underline{-v^2(1/\rho-1/r)}}$

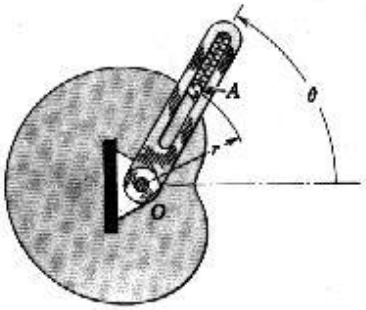
*2.131* - بازو با آهنگ یکنواخت $\dot{\theta}=\omega$ می‌چرخد و میخ $A$ را بر بادامکی با دستور $r=b-c\cos\theta (b>c)$ پیش می‌راند. شتاب $A$ چیست؟

$r=b-c\cos\theta$ , $\dot{r}=c\dot{\theta}\sin\theta$ , $\ddot{r}=c\dot{\theta}^2\cos\theta$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=c\dot{\theta}^2\cos\theta-(b-c\cos\theta)\dot{\theta}^2=(2c\cos\theta-b)\dot{\theta}^2$

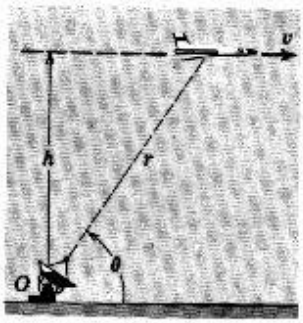
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2c\dot{\theta}^2\sin\theta$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=\omega^2\sqrt{4c^2-4bc\cos\theta+b^2}\ ,\ \omega=\dot\theta$$



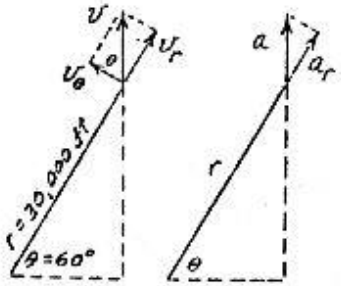

نگاره 2.131

نگاره 2.132




نگاره 2.133

2.132 - موشک نشان داده، با رادار ردیابی می‌شود. اگر در $\theta=60^\circ$ $r=9$ km و $\ddot r=21$ m/s$^2$ و $\dot\theta=0.02$ rad/s باشد، تندی و شتاب موشک چیست؟




$$v_\theta=r\dot\theta=9(10^3)(0.020)=180\ \text{m/sec}$$

$$v=v_\theta/\cos60^\circ=180/0.5=360\ \text{m/s}$$

$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=21-9(10^3)(0.020)^2=17.4\ \text{m/sec}^2$$

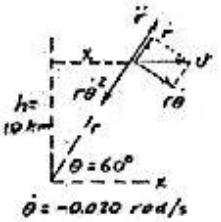
$$a=a_r/\sin60^\circ=17.4/0.866=20.1\ \text{m/s}^2$$

2.133 - اگر $h=10$ km و در $\theta=60^\circ$ $\dot\theta=0.02$ rad/s باشد، $\ddot r$ و $v$ چیست؟

$$a=0\Rightarrow a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=0\quad \ddot r=r\dot\theta^2$$

$$r=h/\sin\theta\quad r=10(2)/\sqrt{3}=11.55\ \text{km}$$

$$\ddot r=11.55(-0.020)^2=0.00462\ \text{km/s}^2=4.62\ \text{m/s}^2$$




$$v=|r\dot\theta|/\sin\theta=h\dot\theta/\sin^2\theta=0.267\ \text{km/s}$$

$$v=0.267(3600)=960\ \text{km/h}$$

2.134 - مسیر ذره $P$ بر پره‌ای از یک تلمبه چرخان، با دستور $r=r_0e^{n\theta}$ بیان می‌شود. اگر تلمبه با آهنگ یکنواخت $\dot\theta=k$ بچرخد، شتاب $P$ به هنگام بیرون پریدن چیست؟

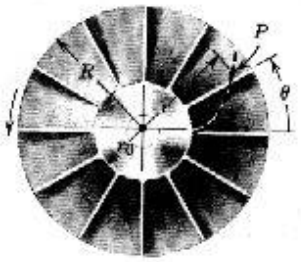
$$r=r_0e^{n\theta}\ ,\ \dot r=r_0n\dot\theta e^{n\theta}=r_0nke^{n\theta}$$

$$\dot\theta=k=\text{cte}\quad \ddot r=r_0n^2k^2e^{n\theta}=rn^2k^2$$

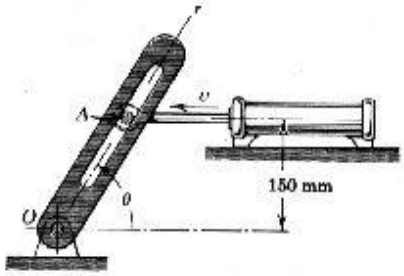
$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=rn^2k^2-rk^2=(n^2-1)k^2$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2rnk^2$$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=rk^2\sqrt{(n^2-1)^2+(2n)^2}=\underline{Rk^2(n^2+1)} \quad r=R$$




نگاره 2.134



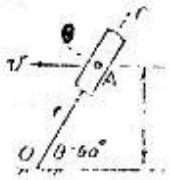

نگاره 2.135

2.135 - اگر $v=0.9\ m/s$ باشد، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ در $\theta=60^\circ$ چیست؟

$$\dot{r}=v_r=-v\cos\theta=-0.9\cos60^\circ=-0.45\ m/s$$

$$r\dot{\theta}=v\sin\theta=0.9\sin60^\circ=0.78\ m/sec$$

$$\dot{\theta}=0.78(2)\sin60^\circ=1.35\ \underline{rad/s}$$



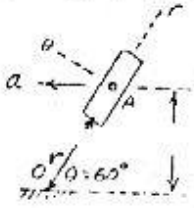

$$a=0 \Rightarrow a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$$

$$r=0.58\ m \quad a=0 \Rightarrow a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0$$

$$\ddot{r}=r\dot{\theta}^2=1.057\ m/sec^2 \quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r=-2(-0.45)(1.35)=1.215\ r/s^2$$

2.136 - اگر پیستون پرسش پیش، از $\theta=60^\circ$ با شتاب $a=1.2\ m/s^2$ به راه افتد، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟




$$v=0 \Rightarrow v_r=\dot{r}=0 \quad v_\theta=r\dot{\theta}=0 \Rightarrow \underline{\dot{\theta}=0} \quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-1.2\cos60^\circ$$

$$\ddot{r}=-1.2(1/2)+0=-0.6\ m/sec^2 \quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=1.2\sin60^\circ$$

$$\ddot{\theta}=1.8\ rad/sec^2$$

2.137 - با $\dot{\theta}=2\ rad/s$، سایه تندی و شتاب $P$ بر $r$، در $\theta=60^\circ$ چیست؟

$$h=x\tan\theta \quad 0=\dot{x}\tan\theta+x\dot{\theta}\sec^2\theta=\dot{x}\tan\theta+(h\cot\theta)\dot{\theta}\sec^2\theta$$

$v=-\dot{x}=h\dot{\theta}ctn\theta sec^2\theta/tan\theta=h\dot{\theta}csc^2\theta$

$=200(2)(2/\sqrt{3})^2=\underline{533\ mm/s}$

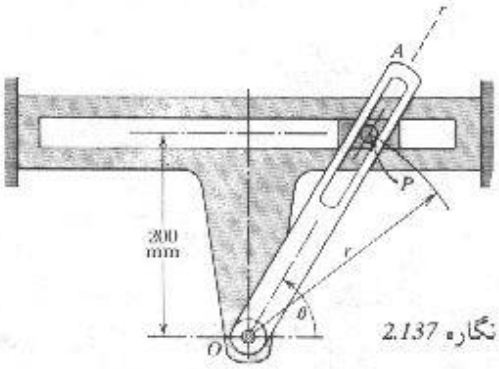
$v_r=-vcos\theta=-533(1/2)=\underline{-267\ mm/s}$

$-a=\dot{v}=h\dot{\theta}(2csc\theta)(-ctn\theta csc\theta)\dot{\theta}=-2h\dot{\theta}^2ctn\theta csc^2\theta$

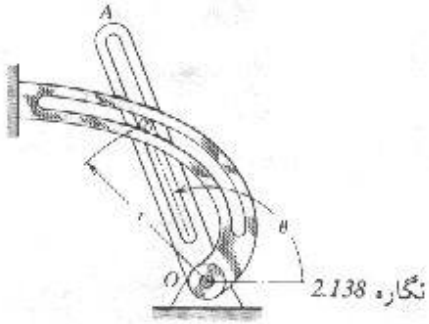
$a=2(200)2^2(2/\sqrt{3})^2/\sqrt{3}=\underline{1232\ mm/s^2}$

$a_r=acos\theta=1232(1/2)=\underline{616\ mm/s^2}$

به همین شیوه $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ از $r=hCos\theta$ به دست می آید.



نگاره 2.137



نگاره 2.138

2.138 - بازوی $OA$ میخی را در شیار خمیده $r=k\theta$ از $\theta=\pi/4$ با شتاب زاویه‌ای یکنواخت $x$ به راه می‌اندازد. شتاب میخ در $\theta=3\pi/4$ چیست؟

$r=k\theta\ ,\ \dot{r}=k\dot{\theta}\ ,\ \ddot{r}=k\dot{\theta}^{\cdot}=k\alpha$

$$\dot{\theta}^2=2\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\alpha d\theta=2\alpha(3\pi/4-\pi/4)=\pi\alpha$$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=k\alpha-k\theta(\pi\alpha)=k\alpha(1-3\pi^2/4)$

$a_\theta=r\dot{\theta}^{\cdot}+2\dot{r}\dot{\theta}=k\alpha(3\pi/4)+2k\sqrt{\alpha r}\sqrt{\pi\alpha}=k\pi\alpha(11/4)$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=k\alpha\sqrt{(1-3\pi^2/4)^2+(11\pi/4)^2}=\underline{10.76k\alpha}$

2.139 - با $b=b_oSin2\pi nt$ بیشینه سایه شتاب نقطه $A$ بر $r$ و $\theta$ چیست؟

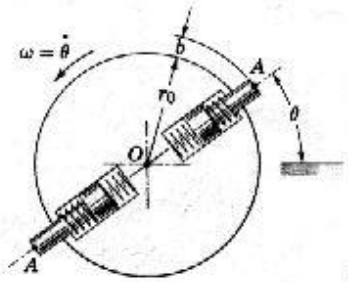
$r=r_o+b_osin(2\pi nt)\ ,\ \dot{r}=2n\pi b_ocos(2\pi nt)\ ,$

$\ddot{r}=-4\pi^2b_on^2sin(2\pi nt)\ \dot{\theta}=\omega\ \dot{\theta}^{\cdot}=0\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$

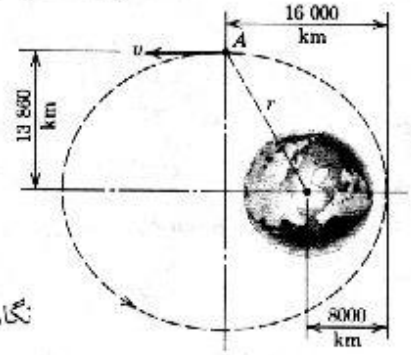
$a_r=-4\pi^2n^2b_osin(2\pi nt)-(r_o+b_osin(2\pi nt))\omega^2$

$|a_r|_{Max.}=\underline{(4\pi^2n^2+\omega^2)b_o+r_o\omega^2}\quad a_\theta=r\dot{\theta}^{\cdot}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$a_\theta=0+4\pi b_o n\omega\cos(2\pi nt)$ $\quad |a_\theta|_{Max.}=4\pi b_o n\omega$




نگاره 2.139

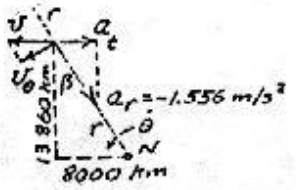



نگاره 2.140

**2.140** - ماهواره در $A$ دارای تندی $v=17970$ km/h است و زمین آن را با شتاب $a=a_r=-1.556$ m/s$^2$ می‌کشد. $\dot r$ و $\ddot r$ چیست؟

$\beta=\tan^{-1}(8000/13860)=30^\circ$ $\quad r=16000$ km

$a_t=-1.556\sin30^\circ$ $\quad \dot v=a_t=\underline{-0.778}$ m/s$^2$




$v_\theta=r\dot\theta$ $\quad \dot\theta=v_\theta/r=v\cos\beta/r$

$\dot\theta=(17970/16000)\cos30^\circ=0.973$ rad/h

$\ddot r=-1.556+16(10^6)(0.973/3600)^2=\underline{-0.388}$ m/s$^2$

**2.141** - رهگیری موشک در $r=10.5$ km اندازه‌های $\dot r=480$ m/s و $\dot\theta=0$ و $\ddot\theta=-0.0072$ rad/s$^2$ را نشان می‌دهد. شعاع خمیدگی مسیر موشک چیست؟

Radial line must be tangent to trajectory for $\dot\theta=0$ ⇒ $+\theta$ direction is in the opposite sense to the normal n-direction of the curve.

$r=10500$ m $\quad \dot r=480$ m/sec $\quad \dot\theta=0$

$\ddot\theta=-7.20(10^{-3})$ rad/s$^2$

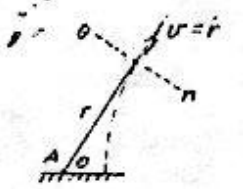
$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta$

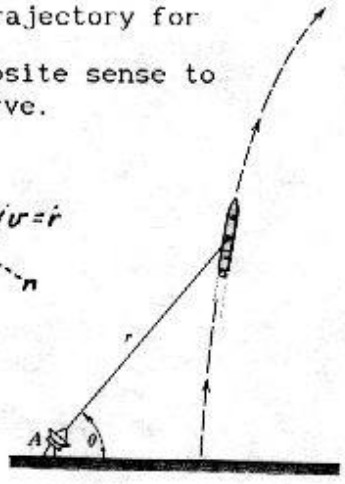
$=10500(-7.20)(10^{-3})+0$

$=-75.6$ m/s$^2$

$-a_\theta=a_n=v^2/\rho$

$\rho=v^2/-a_\theta=(480)^2/75.6=3047$ m



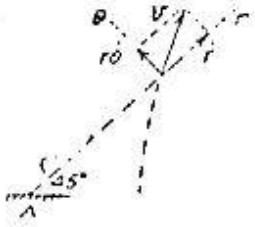




نگاره 2.141

2.142 - اگر موشک پرسش پیش، در $\theta=45^\circ$ به تندی $360\ m/s$ و $r=5.4\ km$ و $\dot{r}=3/2\ m/s$ و $\ddot{r}=16.89\ m/s^2$ و $a\theta=-4.8\ m/s^2$ برسد، $a_r$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

$\dot{r}=1.5$ m/s $\ddot{r}=16.89$ m/s$^2$ $a_\theta=-4.8$ m/s$^2$

$v=360$ m/s




$v^2=\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2$ $|r\dot{\theta}|=\sqrt{(360)^2-(3/2)^2}=360$ m/s

$\dot{\theta}=360/5400=0.0666$ rad/s (+)

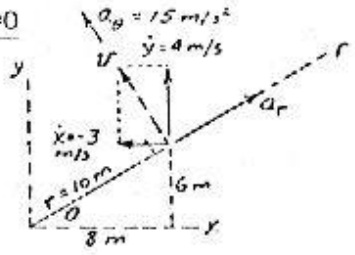
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=16.89-5400(0.0666)^2=-7.062$ m/s$^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

$\ddot{\theta}=(-4.8-2[1.5][0.0666])/5400=\underline{-0.000926}$ rad/s$^2$

2.143 - ذره‌ای در $x=8\ m$ و $y=6\ m$ با $\dot{x}=-3\ m/s$ و $\dot{y}=4\ m/s$ و $a_r=10\ m/s^2$ و $a_\theta=15\ m/s^2$ حرکت می‌کند. در این هنگام، $r$ و $\ddot{r}$ و $\theta$ و $\ddot{\theta}$ و $\rho$ چیست؟

$v=r\dot{\theta}$ $5=10\dot{\theta}$ $\underline{\dot{\theta}=0.5}$ rad/s $a_r=10$ m/s$^2$ $v_r=\dot{r}=0$




$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$ $10=\ddot{r}-10(1/2)^2$ $\underline{\ddot{r}=12.5}$ m/s$^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ $15=10\ddot{\theta}+2(0)(1/2)$

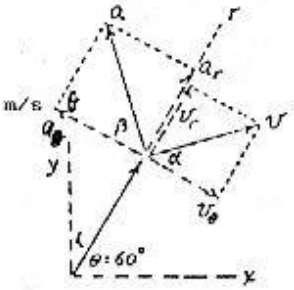
$\underline{\ddot{\theta}=1.5}$ rad/s$^2$

$a_n=a_r=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_r=5^2/10=\underline{2.5}$ m

2.144 - اندازه تندی و سایه‌های $r$ و $\theta$ از شتاب، و همچنین $a_t$ شتاب مماسی ذره‌ای را بیابید که با $r=0.6\ m$ و $\dot{r}=1.2\ m/s$ و $\ddot{r}=4.8\ m/s^2$ و $\theta=\pi/3\ rad$ و $\dot{\theta}=-2\ rad/s$ و $\ddot{\theta}=12\ rad/s^2$ حرکت می‌کند.

$r=0.6$ m $\dot{r}=v_r=1.2$ m/s $\ddot{r}=4.8$ m/s$^2$

$\theta=\pi/3$ $\dot{\theta}=-2$ rad/s $\ddot{\theta}=12$ rad/s$^2$



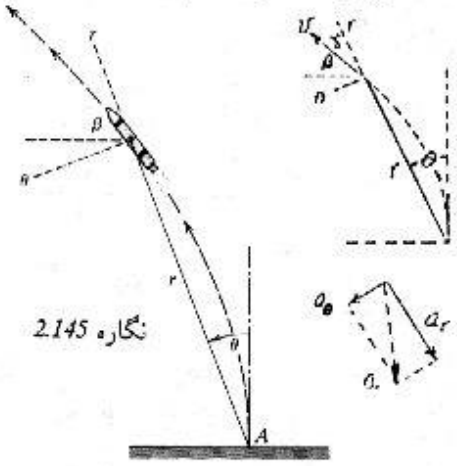

$v_\theta=r\dot{\theta}=0.6(-2)=-1.2$ m/s $v=\sqrt{1.2^2+(-1.2)^2}=1.7$ m/s

$(\alpha=45^\circ)$ $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=4.8-0.6(-2)^2=\underline{2.4}$ m/s$^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0.6(12)+2(1.2)(-2)=\underline{2.4}$ m/s$^2$

$(\beta=45^\circ \Rightarrow \underline{v\perp a})$ $a=a_n$ $\underline{a_t=0}$

**2.145** - 10 ثانیه پس از پرتاب موشک از A، اندازه‌های $\theta=22^\circ$ و $\dot\theta=0.0788$ rad/s و $r=2200$ m و $\dot r=500$ m/s و $\ddot r=466$ m/s$^2$ و $\ddot\theta=-0.0341$ rad/s$^2$ یادداشت می‌شود. در این هنگام، زاویه $\beta$ و اندازه تندی و شتاب موشک چیست؟




نگاره 2.145

$\theta=22^\circ \quad \dot\theta=0.0788$ rad/s

$\ddot\theta=-0.0341$ rad/s$^2$

$r=2200$ m $\quad \dot r=500$ m/s

$\ddot r=4.66$ m/s$^2$ $\quad v_r=\dot r$

$v_\theta=r\dot\theta=2200(0.0788)=173.4$ m/s

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{500^2+(173.4)^2}$$

$$=529 \text{ m/s}$$

$$\gamma=\tan^{-1}(v_\theta/v_r)=\tan^{-1}(173.4/500)=19.12^\circ$$

$$\beta=90-\gamma-\theta=90-19.12-22=48.9^\circ$$

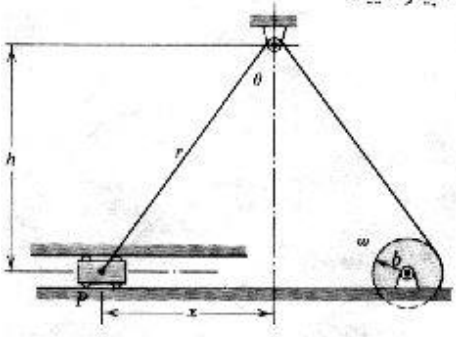
$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=4.66-2200(0.0788)^2=-9.00 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta$$

$$=2200(-0.0341)+2(500)(0.0788)=3.78 \text{ m/s}^2$$

$$a=\sqrt{a_\theta^2+a_r^2}=\sqrt{(3.78)^2+(9.00)^2}=9.76 \text{ m/s}^2$$

**2.146** - چرخ به شعاع $b$ با تندی یکنواخت $\omega$ می‌چرخد و ریسمان را می‌کشد. تندی و شتاب $P$ را بیابید و یافته‌های خود را با مشتق‌گیری از دستور $x^2+h^2=r^2$ بیازمایید.




نگاره 2.146

$$v\sin\theta=-\dot r=b\omega \quad \ddot r=0 \quad v=b\omega/\sin\theta$$

$$v_\theta=r\dot\theta=-v\cos\theta=-b\omega\operatorname{ctn}\theta$$

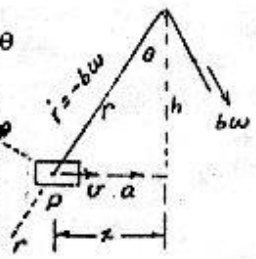
$$\dot\theta=(-b\omega/r)\operatorname{ctn}\theta$$

$$a_r=\ddot r-r\dot\theta^2=-a\sin\theta$$

$$a=(r\dot\theta^2-\ddot r)/\sin\theta$$

$$=(b^2\omega^2/h)\operatorname{ctn}^3\theta$$

$$x^2+h^2=r^2$$

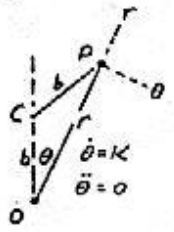


$2x\dot{x}+0=2r\dot{r}$ $\quad v=-\dot{x}=-r\dot{r}/x=b\omega/\sin\theta$ $\quad x\ddot{x}+\dot{x}^2=\dot{r}^2$

$a=-\ddot{x}=(\dot{x}^2-\dot{r}^2)/x=(b^2\omega^2/\sin^2\theta-b^2\omega^2)/h\tan\theta$

$=(b^2\omega^2/h)\cot^3\theta$

2.147 - شتاب $P$ را در بازه‌ای که $\dot{\theta}=k$ و یکنواخت است بیابید.

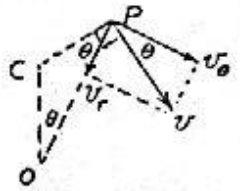



$r=2b\cos\theta$ $\quad \dot{r}=-2b\dot{\theta}\sin\theta=-2bk\sin\theta$ $\quad \ddot{r}=-2bk^2\cos\theta$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-4bk^2\cos\theta$

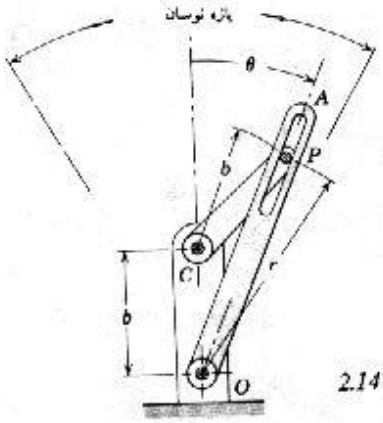
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2(-2bk\sin\theta)k=-4bk^2\sin\theta$

$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=4bk^2\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\underline{4bk^2}$

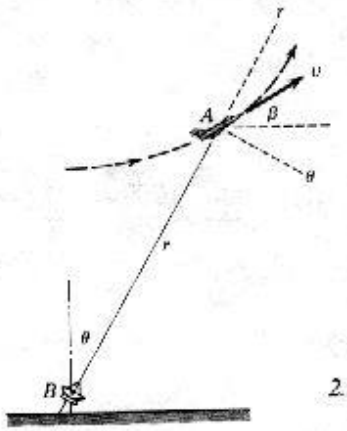



$v_r=\dot{r}=-2bk\sin\theta$ $\quad v_\theta=r\dot{\theta}=2bk\cos\theta$

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\underline{2bk}$ $\quad \Rightarrow a=a_n=v^2/b)$




نگاره 2.147




نگاره 2.148

2.148 - اندازه $v_r$ و $v_\theta$ و $a_r$ و $\ddot{\theta}$ را با $v=400\ km/h$ و $\rho=600\ m$ و $\beta=30^\circ$ و $r=800\ m$ و $\theta=30^\circ$ بیابید.

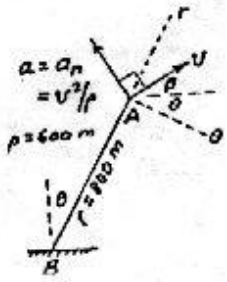
$\theta=\beta=30^\circ$ $\quad v=400/3.6=111.1\ m/s$

$v_r=v\sin(\beta+\theta)=111.1\sin60^\circ=\underline{96.2^\circ}$

$v_\theta=r\dot{\theta}=v\cos(\beta+\theta)=111.1\cos60^\circ=\underline{55.6\ m/s}$

$\dot{r}=v_r=96.2\ m/s$ $\quad \dot{\theta}=55.6/800=0.0694\ rad/s$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a_n\cos60^\circ=(1/2)(111.1)^2/600$



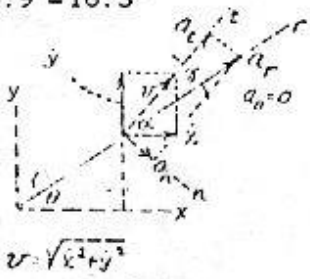
$=\underline{10.29\ \text{m/s}^2}$ $\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-a_n\sin 60^\circ$

$$\ddot{\theta}=-(111.1)^2\sqrt{3}/(600(800)(2))-\frac{2(96.2)(0.0694)}{800}$$

$=\underline{0.0390\ \text{rad/s}^2}$

2.149 - اندازه تندی و $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ و $\rho$ و $a_t$ را برای ذره‌ای با $x=100\ mm$ و $y=75\ mm$ و $\dot{x}=75\ mm/s$ و $\dot{y}=100\ mm/s$ و $a_t=250\ mm/s^2$ و $a_0=0$ بیابید.

$\gamma=\alpha-\theta=\cos^{-1}(75/125)-\cos^{-1}(100/125)=53.1^\circ-36.9^\circ=16.3^\circ$




$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=250\ \text{mm/s}^2$ $\quad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0$

$v_r=\dot{r}=v\cos\gamma=125\cos 16.3^\circ=119.98\ \text{mm/s}$

$v_\theta=r\dot{\theta}=v\sin\gamma=125\sin 16.3^\circ=35.08\ \text{mm/s}$

$\Rightarrow \dot{\theta}=35.08/125=0.2806\ \text{rad/s}$

(b): $\ddot{r}-125(0.2806)^2=250$

$\ddot{r}=250+9.842=\underline{259.842\ \text{mm/s}^2}$

$a_\theta$: $125\ddot{\theta}+2(119.98)(0.2806)=0$ $\quad \underline{\ddot{\theta}=-0.538\ \text{rad/s}^2}$

(c): $a_n=a\sin\gamma=a_r\sin\gamma=250\sin 16.3^\circ=70.17\ \text{mm/s}^2$

$a_n=v^2/\rho$ $\quad \rho=v^2/a_n=125^2/70.17=\underline{222.67\ \text{mm}}$

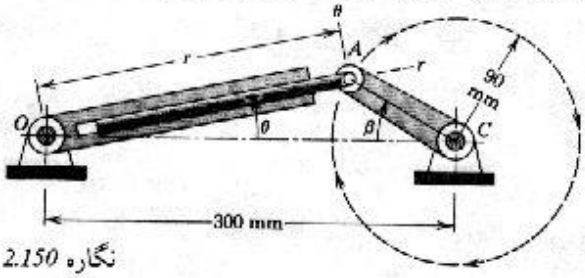
(d): $a_t=a\cos\gamma=a_r\cos\gamma=250\cos 16.3^\circ=\underline{235.95\ \text{mm/s}^2}$

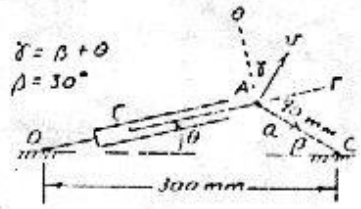
2.150 - اندازه $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ و $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ در $\beta=30^\circ$ و $\dot{\beta}=60\ rad/s$ چیست؟

$r\cos\theta+90\cos 30^\circ=300$ $\quad r\sin\theta=90\sin 30^\circ$

$r=226.6\ \text{mm}$ $\quad \theta=11.46^\circ$ $\quad \gamma=30+11.46=41.46^\circ$

$v=\overline{AC}\dot{\beta}=90(60)=5400\ \text{mm/s}$ or $5.40\ \text{m/s}$




نگاره 2.150

$a=a_n=\overline{AC}\dot{\beta}^2=90(60)^2=324(10^3)$ mm/s$^2$ $=324$ m/s$^2$

$a_t=\overline{AC}\ddot{\beta}=0$ $v_r=\dot{r}=v\sin\gamma=5.40\sin 41.46^\circ=\underline{3.58}$ m/s

$v_\theta=r\dot{\theta}=v\cos\gamma=5.40\cos 41.46^\circ=4.05$ m/s

$\dot{\theta}=4.05/02266=\underline{17.86}$ rad/s $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a\cos\gamma$

$\ddot{r}=0.2266(17.86)^2+324\cos 41.46^\circ=\underline{315}$ m/s$^2$

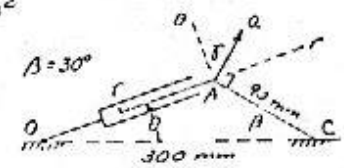
$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=-a\sin\gamma$

$\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r-(a/r)\sin\gamma=-1510$ rad/s$^2$

2.151 - اگر سنگ $CA$ در پرسش پیش، با $\ddot{\beta}=8$ rad/s$^2$ از $\beta=30^\circ$ به راه افتد، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

From Prob 2/150 for $\beta=30^\circ$ $r=0.2266$ m $\theta=11.46^\circ$

$T=41.4$ $a=a_t=\overline{AC}\ddot{\beta}=0.090(8)=0.72$ m/s$^2$




$\dot{\beta}=0 \Rightarrow \dot{\theta}=0$ $\dot{r}=0$ $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a\sin\gamma$

$\ddot{r}=0.72\sin 41.46^\circ+0=\underline{0.479}$ m/s$^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=a\cos\gamma$ $\ddot{\theta}=(0.72/0.2266)\cos 41.46^\circ=\underline{2.38}$ m/s$^2$

2.152 - بازوی $OA$ از دستگاه پرسش 2.147 با دستور $\theta=\theta_0 Sin(2\pi t/\tau)$ تاب می‌خورد. شتاب $P$ را در $t=\tau/4$ (a) و $t=\tau/2$ (b) بیابید.

$r=2b\cos\theta$ $\dot{r}=-2b\dot{\theta}\sin\theta$

$\ddot{r}=-2b\ddot{\theta}\sin\theta-2b\dot{\theta}^2\cos\theta$

$\theta=\theta_0\sin(2\pi t/\tau)$ $\dot{\theta}=(2\pi\theta/\tau)\cos(2\pi t/\tau)$

$\ddot{\theta}=(-4\pi^2/\tau^2)\theta_0\sin(2\pi t/\tau)$

(a): $t=\tau/4$ $\theta=\theta_0$ $\dot{\theta}=0$ $\ddot{\theta}=(-4\pi^2/\tau^2)\theta_0$

$r=2b\cos\theta_0$ $\dot{r}=0$ $\ddot{r}=(8\pi^2/\tau^2)\theta_0 b\sin\theta_0$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=(8\pi^2/\tau^2)\theta_0 b\sin\theta_0-0$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2b\cos\theta_0(-4\pi^2\theta_0/\tau^2)+0$

$$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=(8\pi^2/\tau^2)\theta_o b\sqrt{\sin^2\theta_o+\cos^2\theta_o}=8\pi^2\theta_o b/\tau^2$$

(b): $t=\tau/2$ $\theta=0$ $\dot{\theta}=-2\pi\theta_o/\tau$ $\ddot{\theta}=0$ $r=2b$ $\dot{r}=0$

$$\ddot{r}=-2b(-2\pi\theta_o/\tau)^2=-8\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2$$

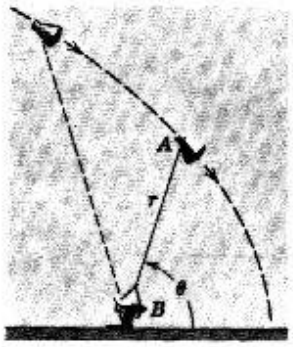
$$a_r=-8\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2-2b(4\pi^2\theta_o^2/\tau^2)=-16\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2$$

$$a_\theta=0 \quad a=-a_r=16\pi^2\theta_o^2 b/\tau^2$$

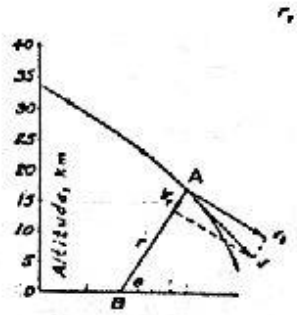
*2.153* - داده‌های موشکی که به زمین باز می‌گردد در زیر آمده است. تندی آن را در $t=40$ s بیابید.

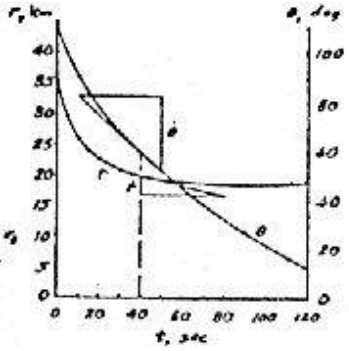
سیاهه *2.153*

| $t$, s | $r$, km | $\theta$, deg | $t$, s | $r$, km | $\theta$, deg |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 36.4 | 110.5 | 60 | 19/0 | 45.0 |
| 5 | 29.9 | 100.0 | 70 | 18.8 | 38.5 |
| 10 | 26.2 | 91.0 | 80 | 18.7 | 32.8 |
| 15 | 24.1 | 83.7 | 90 | 18.7 | 27.0 |
| 20 | 22.7 | 77.7 | 100 | 18.7 | 21.6 |
| 30 | 20.9 | 67.7 | 110 | 18.8 | 16.8 |
| 40 | 20.1 | 58.6 | 120 | 19.0 | 12.0 |
| 50 | 19.3 | 52.0 | | | |




نگاره *2.153*




$t=40$ s $r=20100)$ m

$\dot{r}=-11.5$ m/s

$\dot{\theta}=-0.014$ rad/s

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2}$$

$$=\sqrt{(77.5)^2+(20100)^2(0.014)^2} \quad =284 \text{ m/s}$$

$v=1020$ km/h

2.154 - بر ذره $P$ در پرسش 2.134، نیرویی در سوی $r$ نمی‌نشیند و در $r_0$ تندی شعاعی $v_r$ ندارد. اگر $P$ از $r=r_0$ به راه افتد، معادله مسیر چیست؟

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \quad d^2r/dt^2-K^2r=0$$

$$r=A\cosh(Kt)+B\cosh(Kt) \Rightarrow$$

$$AK^2\cosh(Kt)+BK^2\sinh(Kt)+$$

$$-AK^2\cosh(Kt)-BK^2\sinh(Kt)=0$$

$$r=r_o \quad t=0 \Rightarrow r_o=A+0 \quad A=r_o$$

$$t=0 \quad \dot{r}=0 \Rightarrow r_oK\sinh(Kt)+BK\cosh(Kt)=0$$

$$0+BK=0 \ , \ B=0 \quad \underline{r=r_o\cosh(Kt)}$$

2.155 - هنگامی که $\theta=30^\circ$ می‌شود، شتاب $A$ چیست؟ بادامک از $r=b-c\cos\theta$ با $b=100$ mm و $c=75$ mm ساخته شده است.

$$r=100-75\cos\theta$$

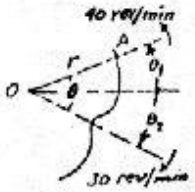
$$\dot{r}=75\dot{\theta}\sin\theta$$

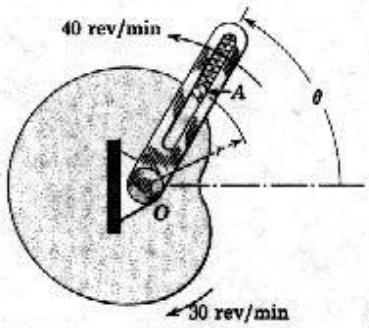
$$\ddot{r}=75\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\ddot{\theta}=0$$

$$\dot{\theta}_1=40(2\pi)/60=4\pi/3 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\theta}_2=30(2\pi)/60=\pi \text{ rad/s}$$




نگاره 2.155

$$\theta=\theta_1+\theta_2 \quad \dot{\theta}=\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2=7\pi/3 \text{ rad/s} \quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}_1^2$$

$$a_\theta=r\dot{\theta}_1+2\dot{r}\dot{\theta}_1 \quad \theta=30^\circ \quad r=100-75\sqrt{3}/2=35.0 \text{ mm}$$

$$\dot{r}=75(7\pi/3)(1/2)=275 \text{ mm/s}$$

$$\ddot{r}=75(7\pi/3)^2(\sqrt{3}/2)=3490 \text{ mm/s}^2$$

$$a_r=3490-35(4\pi/3)^2=2875 \text{ mm/s}^2$$

$$a_\theta=35.0(0)+2(275)(4\pi/3)=2303 \text{ mm/s}^2$$

$$a=\sqrt{(2875)^2+(2303)^2}=3680 \text{ mm/s}^2=\underline{3.68 \text{ m/s}^2}$$

2.156 - در پرسش نمونه 2.11، اگر $L=30$ mm و $b=150$ mm و $\omega=4$ rev/s باشد، تندی و شتاب میانه $A$ چیست؟

$$\tan\gamma=L/12\pi=30/12\pi=0.7957 \quad \cos\gamma=0.7825$$

$$v_\theta=b\dot{\theta}=150(4)(2\pi)=3700 \text{ mm/s}$$

$v=v_\theta/\cos\gamma=3700/0.7825=\underline{4728.4\ mm/s}$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-150(4x2\pi)^2=-94748\ mm/s$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0 \quad a_z=v_z=0 \quad a=|a_r|=\underline{9478\ mm/s^2}$

2.157 - ذره‌ای در فضا دارای $\vec{v}=6\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\ m/s$ و $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}\ m/s^2$ است. نشان دهید که تندی و شتاب بر هم عمود است و $\dot{v}$ و $\rho$ را بیابید.

$\underline{a} \perp \underline{v} \Rightarrow a=a_n \ , \ a_t=\dot{v}=0$

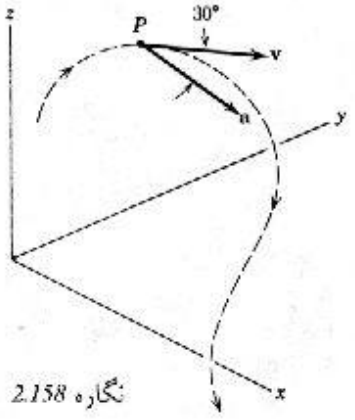
$\underline{v}.\underline{a}=(6\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}).(2\underline{i}+3\underline{j}-6\underline{k})=12-6-6=0 \Rightarrow \underline{v} \perp \underline{a}$

$a=|\underline{a}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7\ m/s^2$

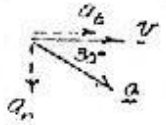
$v=|\underline{v}|=\sqrt{6^2+2^2+1^2}=\sqrt{41}=6.40\ m/s$

$a=a_n=v^2/\rho \ , \ \rho=v^2/a_n=41/7=\underline{5.86\ m}$

2.158 - ذره‌ای با $\vec{v}=4\hat{i}+3\hat{j}\ m/s$، شتاب $10\ m/s^2$ دارد. بردار شتاب و اندازه $\rho$ را بیابید.



نگاره 2.158




$a_n=a\sin30^\circ=10(0.5)=5\ m/s^2$

$v=|\underline{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5\ m/s^2 \quad a_n=v^2/\rho$

$\rho=v^2/a_n=5^2/5=\underline{5\ m}$

$a_t=a\cos30^\circ=10(0.866)=\underline{8.66\ m/s^2}$

2.159 -دانه‌ای با دستور $x=60Cos\omega t$ و $y=40Sin\omega t$ و $z=30t^2$ و $\omega=2\ rad/s$ راه‌می‌رود. شتاب آن در $t=4\ s$ چیست؟

$x=60\cos2t \quad y=40\sin2t$

$T=3t^2+(x/60)^2\ (y/40)^2=\cos^2 2t+\sin^2 2t=1$

$\dot{x}=-120\sin2t \ \ddot{x}=-240\cos2t \ \dot{y}=80\cos2t \ \ddot{y}=-160\sin2t$

$\dot{z}=60t \quad \ddot{z}=60\ mm/s \quad t=4\ s$

$\omega t=2(4)=8\ rad\ (=8(180)/\pi=458.4^\circ)$

$\sin(458.4^\circ)=\sin(98.4^\circ)=0.9874$

$\cos(458.4^\circ)=\cos(98.4^\circ)=-0.1455$

$\ddot{x}=-240(-0.1455)=34.92 \text{ mm/s}^2$

$\ddot{y}=-160(0.9893)=-158.30 \text{ mm/s}^2$

$\Rightarrow a=\sqrt{34.92^2+-158.30^2+60^2}=\underline{172.9 \text{ mm/s}^2}$

*2.160* - تندی ارابه‌های سرنشیندار به هنگام گذر از $A$، $15$ *m/s* و شتاب مماسی آن $gCos\gamma$ است. شتاب سرنشینان چیست؟

$v_\theta=r\dot{\theta}$ , $v_\theta=v\cos\gamma$ $\Rightarrow$

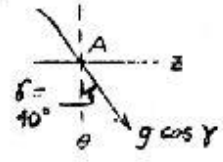
$\dot{\theta}=(v/r)\cos\gamma$ $\dot{\theta}=15(0.7660)/5=2.298 \text{ rad/s}$

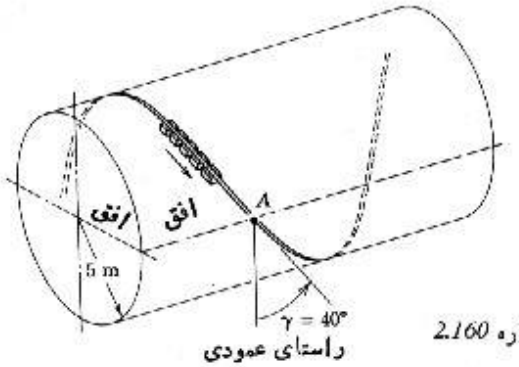
$a_\theta=g\cos^2\gamma=9.81(0.7660)^2=5.76 \text{ m/s}^2$

$a_z=g\cos\gamma\sin\gamma=9.81(0.7660)(0.6429)=4.83 \text{ m/s}^2$

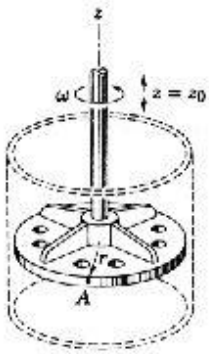
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-5(2.298)^2=-26.41 \text{ m/s}^2$

$a=\sqrt{26.41^2+5.76^2+4.83^2}=\underline{27.5 \text{ m/s}^2}$



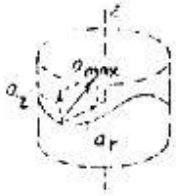




نگاره *2.160*




نگاره *2.161*

*2.161* - شتاب بیشینه نقطه $A$ چیست؟




$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-r\omega^2$ $a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0$

$a_z=d^2(z_0\sin(2n\pi t)/dt^2=-4n^2\pi^2z_0\sin(n\pi t)$

$a=\sqrt{(-r\omega^2)^2+(-4n^2\pi^2z_0\sin(n\pi t))^2}$ $a_{Max.}=\sqrt{r^2\omega^4+16n^4\pi^4z_o^2}$

*2.162* - ذره‌های آب با تندی یکنواخت $c=\dot{l}$ از دید لوله، از آن بیرون می‌زند. تندی و شتاب ذره $P$ در لوله چیست؟

$v_r=l\sin\beta=c\sin\beta$ $v_\theta=r\dot{\theta}=(l\sin\beta)k=Kl\sin\beta$

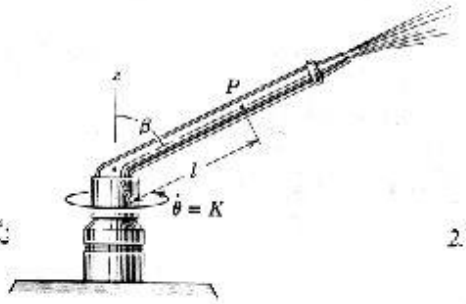
$$v_z=\dot{l}\cos\beta=c\cos\beta$$

$$v=\sqrt{(c\sin\beta)^2+(Kl\sin\beta)^2+(c\cos\beta)^2}=\sqrt{c^2+K^2l^2\sin^2\beta}$$

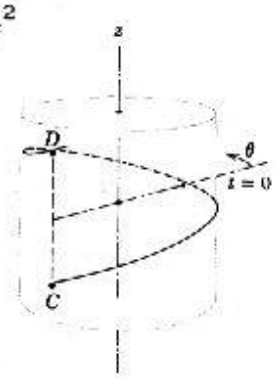
$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-l(K^2)\sin\beta=-K^2l\sin\beta$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2c(K)\sin\beta=2Kc\sin\beta \quad a_z=\dot{v}_z=0$$

$$a=\sqrt{(-K^2l\sin\beta)^2+(2Kc\sin\beta)^2}=K\sin\beta\sqrt{K^2l^2+4c^2}$$




نگاره 2.162




نگاره 2.163

**2.163** - پیچ پرسش نمونه 2.11 با دستور $\theta=\pi Sin2\pi nt$ باز و بسته می‌شود. شتاب گوی $A$ را در $\theta=\pi$ بیابید. گام پیچ $L$ است.

$$v_z=\dot{z} \quad \dot{z}=b\dot{\theta}\tan\gamma=bl\dot{\theta}/2\pi b=l\dot{\theta}/2\pi \quad \theta=\pi\sin(2\pi nt)$$

$$D:\ \theta=\pi \quad \dot{\theta}=2\pi^2n\cos(2\pi nt) \quad \sin(2\pi nt)=1$$

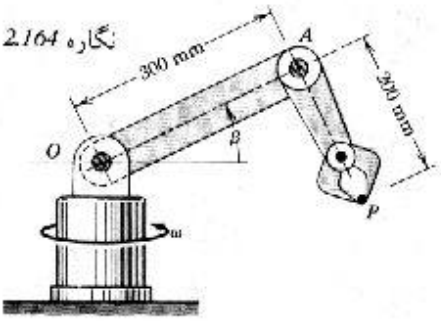
$$t=1/4n \quad \ddot{\theta}=-4\pi^3n^2\sin(2n\pi t) \Rightarrow \dot{\theta}=0 \ \&\ \ddot{\theta}=-4\pi^3n^2$$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-b(0^2)=0 \qquad a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=b(-4\pi^3n^2)+2(0)(0)=-4b\pi^3n^2$$

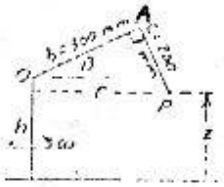
$$a_z=dv_z/dt=d(b\dot{\theta}\tan\gamma)/dt=l\ddot{\theta}/2\pi=-2\pi^2n^2l$$

$$a=\sqrt{0^2+(-4b\pi^3n^2)^2+(-2\pi^2n^2l)^2}=2\pi^3n^2\sqrt{4b^2\pi^2+l^2}$$

**2.164** - شتاب $P$ را برای $\beta=30^\circ$ و $\dot{\beta}=10$ deg/s و $\ddot{\beta}=20$ deg/s$^2$ و $\omega=40$ deg/s بیابید. بازوهای ربات، بر هم عمود است.




نگاره 2.164




$$\dot{\theta}=\omega=40\pi/180=0.698 \text{ rad/s}$$

$$\dot{\beta}=10\pi/180=0.1745 \text{ rad/s}$$

$\ddot{\beta}=20\pi/180=0.349\ \text{rad/s}^2$ $r=b\cos\beta+c\sin\beta$

$\dot{r}=(-b\sin\beta+c\cos\beta)\dot{\beta}$

$\ddot{r}=(-b\cos\beta-c\sin\beta)\dot{\beta}^2+(-b\sin\beta+c\cos\beta)\ddot{\beta}$

$Z=h+b\sin\beta-c\cos\beta$ , $\dot{Z}=(b\cos\beta+c\sin\beta)\dot{\beta}$

$\ddot{Z}=(-b\sin\beta+c\cos\beta)\dot{\beta}^2+(b\cos\beta+c\sin\beta)\ddot{\beta}$ $\beta=30^\circ$

$\dot{r}=4.050\ \text{mm/s}$ $\ddot{r}=-2.860\ \text{mm/s}^2$ $\ddot{Z}=126.30\ \text{mm/s}^2$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-2.860-359.8(0.698)^2=-178.23\ \text{mm/s}^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2(4.049)(0.698)=5.65\ \text{mm/s}^2$

$a_z=\ddot{z}=126.50\ \text{m/s}^2$ $a=\sqrt{a_r^2+a_z^2+a_\theta^2}=\underline{218.5\ \text{mm/s}^2}$

*2.165* - ذره‌ای بر مسیر مارپیچ مخروطی با $\theta$ یکنواخت پایین می‌رود. اگر $\gamma$، شیب مسیر، ثابت بماند، $a_r$ چیست؟

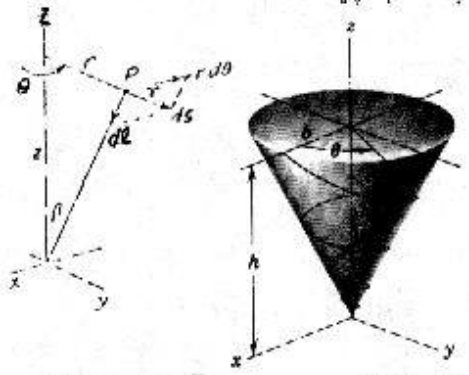
$r=bz/h$ $\tan\beta=b/h$ $dl=rd\theta\tan\gamma$

$dr=-dl\sin\beta=-rd\theta\tan\gamma\sin\beta$

$$\int_b^r dr/r=-\tan\gamma\sin\beta\int_0^\theta d\theta$$

$$\ln r\Big|_b^r=-\tan\gamma\sin\beta(\theta)$$

$$\Rightarrow r=be^{-\tan\gamma\sin\beta(\theta)}$$



نگاره *2.165*

$r=be^{-k\theta}$ $k=\tan\gamma\sin\beta$ $\dot{r}=-bk\dot{\theta}e^{-\gamma\theta}$

$\ddot{r}=bk^2\dot{\theta}^2e^{-k\theta}$ $\ddot{\theta}=0$ $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=b\dot{\theta}^2e^{-k\theta}(k^2-1)$

$\underline{a_r=b\dot{\theta}^2(\tan^2\gamma\sin^2\beta-1)e^{-\theta\tan\gamma\sin\beta}}$ $\underline{\beta=\tan^{-1}(b/h)}$

*2.166* - از نگاره *2.15*، مشتق $e_R$ و $e_\theta$ و $e_\phi$ را به زمان بیابید.

$d\underline{e}_R=d\phi\underline{C}_\phi+(d\theta\cos\phi)\underline{C}_\theta$ $\underline{\dot{e}_R=\dot{\phi}e_\phi+(\dot{\theta}\cos\phi)e_\theta}$

$d\underline{e}_\theta=(-d\theta\cos\phi)\underline{e}_R+(d\theta\sin\phi)\underline{e}_\phi$ $\underline{\dot{e}_\theta=(-\dot{\theta}\cos\phi)\underline{e}_R+(\dot{\theta}\sin\phi)\underline{e}_\phi}$

$$d\underline{e}_\phi=-d\phi\underline{e}_R-(d\theta\sin\phi)\underline{e}_\theta \qquad \underline{\dot{e}}_\phi=-\dot{\phi}\underline{e}_R-(\dot{\theta}\sin\phi)\underline{e}_\theta$$

2.167 - به یاری پاسخ پرسش پیش و با مشتق‌گیری از $\underline{R}=R\underline{e}_R$، سایه‌های کروی شتاب را بیابید.

$$\underline{R}=R\underline{e}_R \qquad \underline{\dot{R}}=\dot{R}\underline{e}_R+R[\dot{\phi}\underline{e}_\phi+(\dot{\theta}\cos\phi)\underline{e}_\theta]$$

$$\underline{\ddot{R}}=\ddot{R}\underline{e}_R+\dot{R}[\dot{\phi}\underline{e}_\phi+(\dot{\theta}\cos\phi)\underline{e}_\theta]+\dot{R}[\dot{\phi}\underline{e}_\phi+(\dot{\theta}\cos\phi)\underline{e}_\theta]+R\ddot{\phi}\underline{e}_\phi+$$

$$+R\dot{\phi}(-\dot{\phi}\underline{e}_R-[\dot{\theta}\sin\phi]\underline{e}_\theta)+R\ddot{\theta}\cos\phi\underline{e}_\theta-(R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi)\underline{e}_\theta+R\dot{\theta}\cos+$$

$$\phi[-(\dot{\theta}\cos\phi)\underline{e}_R+(\dot{\theta}\sin\phi)\underline{e}_\phi]$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{R}}=(\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi)\underline{e}_R+$$

$$+(\dot{R}\dot{\theta}\cos\phi-R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi+R\ddot{\theta}\cos\phi-R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi)\underline{e}_\theta+$$

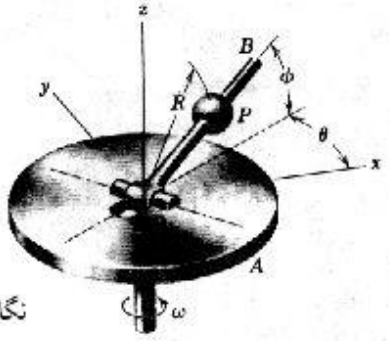
$$+(\dot{R}\dot{\phi}+\dot{R}\dot{\phi}+R\ddot{\phi}+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi)\underline{e}_\phi$$

$$\underline{\ddot{R}}=(\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi)\underline{e}_R+$$

$$+((\cos\phi/R)d(R^2\dot{\theta})/dt-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi)\underline{e}_\theta+$$

$$+((1/R)d(R^2\dot{\theta})/dt+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi)\underline{e}_\phi$$

2.168 - شتاب $P$، با $\omega=\dot{\theta}=\frac{\pi}{3}$ rad/s و $\dot{\phi}=\frac{2\pi}{3}$ rad/s و $R=50+200t^2$ mm در $t=\frac{1}{2}$ s چیست؟



نگاره 2.168

$R=50+200(1/2)^2=100$ mm

$\dot{R}=400t=400(1/2)=200$ mm/s

$\ddot{R}=400$ mm/s$^2$

$\theta=\omega t=(\pi/3)(1/2)=\pi/6$ rad

$\dot{\theta}=\pi/3$ rad/s $\quad\ddot{\theta}=0$

$\phi=\dot{\phi}t=(2\pi/3)(1/2)=\pi/3$ rad

$\dot{\phi}=2\pi/3$ rad/s $\quad\ddot{\phi}=0$

$\sin\theta=1/2$ , $\cos\theta=\sqrt{3}/2$ , $\sin\phi=\sqrt{3}/2$ , $\cos\phi=1/2$

$d(R^2\dot{\theta})/dt=2R\dot{R}\dot{\theta}+R^2\ddot{\theta}=2(0.1)(0.2)\pi/3+0=0.04\pi/3$ m/s$^2$

$d(R^2\dot{\phi})/dt=2R\dot{R}\dot{\phi}+R^2\ddot{\phi}=2(0.1)(0.2)2\pi/3+0=0.08\pi/3$ m/s$^2$

$a_R=-0.0661\ m/s^2 \quad a_\theta=-0.1704\ m/s^2 \quad a_\phi=0.885\ m/s^2$

$a=\sqrt{(-0.0661)^2+(-0.1704)^2+(0.885)^2}=0.904\ m/s^2$

**2.169** - گاریهای بازی با دستور $z=(h/2)(1-Cos2\theta)$ بالا و پایین می‌رود. تندی گاریها را در $\theta=\frac{\pi}{4}\ rad$ و در چارچوب کروی $R$ و $\theta$ و $\phi$ بیابید.

$R=const. \quad \theta=\omega t \quad \sin\phi=Z/R \quad Z=(h/2)(1-\cos2\theta)$ ,

$\dot{Z}=\omega h\sin2\theta \quad \dot{\theta}=\omega \quad \dot{\phi}\cos\phi=\dot{Z}/R$

$\dot{\phi}=(\omega h\sin2\theta)/(R\cos\phi) \quad v_R=\dot{R}=0$

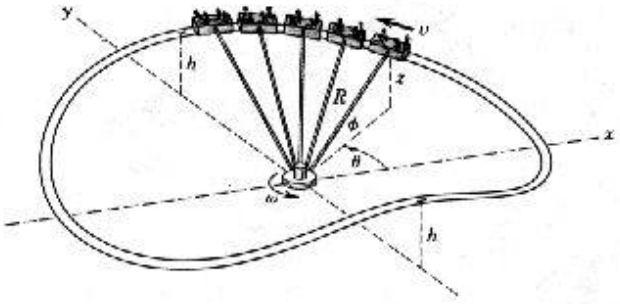
$v_\theta=R\dot{\theta}\cos\phi=R\omega\sqrt{1-\sin^2\phi}=R\omega\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos2\theta))^2}$

$v_\phi=R\dot{\phi}=(\omega h\sin2\theta)/\cos\phi$

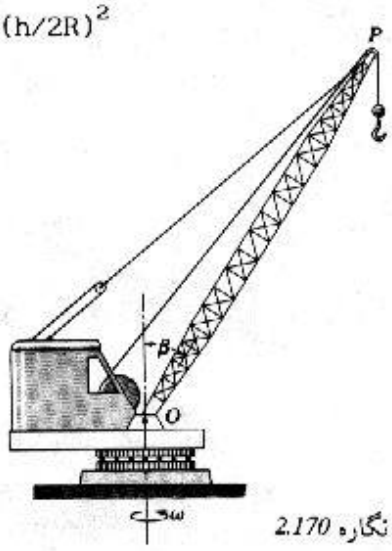
$=h\omega\sin2\theta/\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos2\theta))^2}$

$\theta=\omega t=\pi/4 \quad 1-\cos2\theta=1 \Rightarrow v_\theta=R\omega\sqrt{1-(h/2R)^2}$

$v_\phi=h\omega/\sqrt{1-(h/2R)^2}$ , $\dot{v}_R=0$




نگاره 2.169




نگاره 2.170

**2.170** - تندی و شتاب $P$ با $OP=24\ m$ و $\omega=2\ rev/min$ و $\dot{\beta}=0.1\ rad/s$، در $\beta=30^\circ$ چیست؟

$R=24\ m\ const. \quad \dot{\theta}=\omega=2(2\pi)/60=\pi/15\ rad/s \quad \ddot{\theta}=0$

$\beta=30^\circ \quad \phi=\pi/2-\beta \quad \dot{\phi}=-\dot{\beta}=-0.10\ rad/s \quad \ddot{\phi}=-\ddot{\beta}=0$

$v_R=\dot{R}=0 \quad v_\theta=R\dot{\theta}\cos\phi=24(\pi/15)(1/2)=2.51\ m/s$

$v_\phi=R\dot{\phi}=24(-0.10)=-2.4\ m/s$

$$v=\sqrt{(2.51)^2+(2.4)^2}=\underline{3.48\ m/s}$$

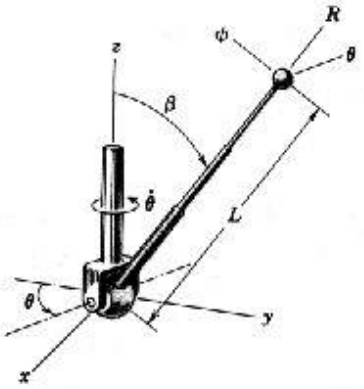
$$a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi=0-24(-0.10)^2-24(\pi/15)^2(1/2)^2$$
$$=-0.503\ m/s^2$$

$$a_\theta=(\cos\phi/R)d(R^2\dot{\theta})/dt-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$=0-2(24)(\pi/15)(-0.10)(\sqrt{3}/2)=0.871\ m/s^2$$

$$a_\phi=(1/R)d(R^2\dot{\phi})/dt+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$
$$=0+24(\pi/15)(1/2)(\sqrt{3}/2)=0.456\ m/s^2$$

$$a=\sqrt{(-0.503)^2+(0.871)^2+(0.456)^2}=\underline{1.104\ m/s^2}$$

2.171 - شتاب کروی نوک میله، با $\dot{\theta}=2$ rad/s و $\dot{\beta}=3.2$ rad/s و $\dot{L}=0.9$ m/s، در $\beta=45^\circ$ و $L=1.2$ m چیست؟



نگاره 2.171

$\dot{\phi}=-\dot{\beta}$ $R=L$ $\dot{\theta}=\omega$

$$a_R=0-1.2(-3/2)^2-1.2(2)^2(1/2)$$
$$=\underline{-5.10\ m/s^2}$$

$$a_\theta=(2L\dot{L}\omega+0)\sin\beta/L+2L\omega\dot{\beta}\cos\beta$$
$$=2\omega(\dot{L}\sin\beta+L\dot{\beta}\cos\beta)$$
$$=2(2)(0.9/\sqrt{2}+1.2(3/2)/\sqrt{2})$$
$$=10.8/\sqrt{2}=\underline{7.64\ m/s^2}$$

$$a_\phi=-2\dot{L}\dot{\beta}+L\omega^2\cos\beta\sin\beta=-2(0.9)(3/2)+1.2(2^2)/2$$
$$=\underline{-0.3\ m/s^2}$$

2.172 - شتاب گاریهای بازی پرسش 2.169 در $\theta=\omega t-\frac{\pi}{2}$ rad چیست؟

$$\dot{\phi}^2=(\omega h/R)^2\sin^2 2\theta/\cos^2\phi=0 \quad \theta=\pi/2$$

$$\cos^2\phi=1-\sin^2\phi=1-((h/2R)(1-\cos 2\theta))^2$$
$$=1-(h/R)^2 \quad \omega t=\pi/2$$

$$\Rightarrow a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi=0-0-\underline{R\omega^2(1-h^2/R^2} \quad \omega t=\pi/2$$

$$d(R^2\dot{\theta})/dt=R^2\ddot{\theta}=0 \text{ for } \dot{\theta}=\omega=\text{const.}$$

$$2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi = 2R\omega(\omega h\sin 2\theta)/(R\cos\phi)\sin\phi = 0 \text{ for } \theta=\pi/2$$

$$\Rightarrow a_\theta = (\cos\phi/R)\,d(R^2\dot{\theta})/dt - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi = 0 \text{ for } \theta=\pi/2$$

$$d(R^2\dot{\phi})/dt = R\ddot{\phi} = R\omega h\left\{(\tan\phi/\cos\phi)\phi\sin 2\phi + 2\omega\cos 2\theta/\cos\phi\right\}$$

$$= -2R\omega^2 h/\sqrt{1-(h/R)^2}$$

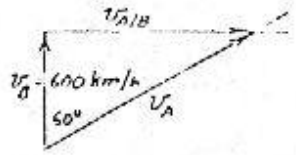
$$R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi = R\omega^2 h(1-\cos 2\theta)/2R\sqrt{1-((h/2R)(1-\cos 2\theta))^2}$$

$$= h\omega^2\sqrt{1-(h/R)^2}$$

$$a_\phi = (1/R)\,d(R^2\dot{\phi})/dt + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

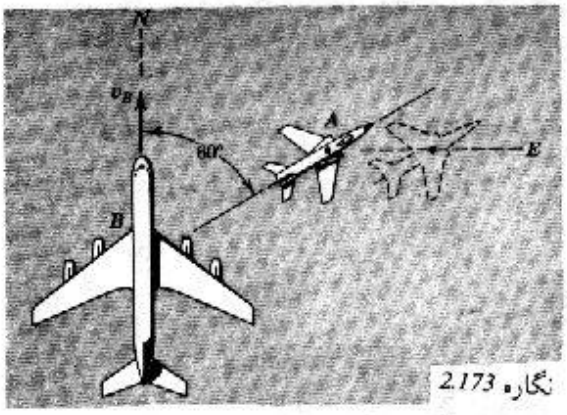
$$= -h\omega^2(1+h^2/R^2)/\sqrt{1-h^2/R^2} \text{ for } \theta=\pi/2$$

*2.173* - از دید سرنشینان $B$، هواپیمای $A$، از پهلو به شرق می‌رود. تندی $A$ و تندی $A$ از دید $B$ را با $v_B=600$ *km/h* بیابید.

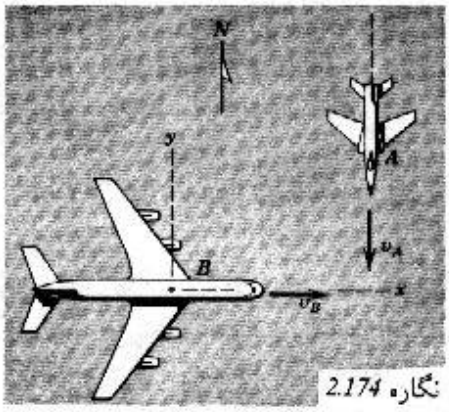



$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} \qquad V_A = 600/\cos 60^\circ = \underline{1200 \text{ km/h}}$$

$$V_{A/B} = 600\tan 60^\circ = \underline{1039 \text{ km/h}}$$



نگاره *2.173*

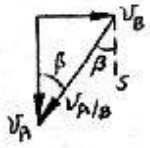


نگاره *2.174*

*2.174* - تندی $A$ از دید $B$، با $v_A=1200$ *km/h* و $v_B=800$ *km/h* چیست؟

$$\underline{V}_A = \underline{V}_B + \underline{V}_{A/B} \qquad V_{A/B} = \sqrt{(1200)^2+(800)^2} = \underline{1442 \text{ km/h}}$$

$$\beta = \tan^{-1}(800/1200) = 33.7^\circ \text{ West of North}$$

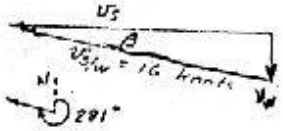



*2.175* - یک کشتی که با تندی *16* گره دریایی در آب ایستاده پیش می‌رود، می‌خواهد در جریان رو به

جنوب 3 گره دریایی، به سوی باختر برود. سوی کشتی و زمان پیمودن 24 گره دریایی چیست؟

w=water  s=ship  $\underline{v}_s=\underline{v}_w+\underline{v}_{s/w}$

$\beta=\sin^{-1}(3/16)=10.8^\circ$  Heading=270+10.8=$\underline{281^\circ}$



$t=\text{Dist./Vel.}=24/\sqrt{(16)^2-3^2}=1.527$ hr

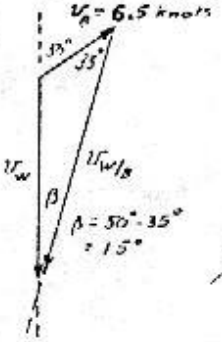
2.176 - اگر بادنما با راستای قایق، زاویه $35^\circ$ بسازد، تندی باد چیست؟

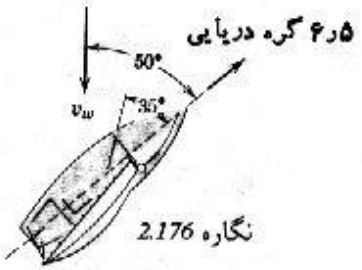
w=wind  B=boat  $\underline{v}_w=\underline{v}_B+\underline{v}_{w/B}$

$v_w/\sin 35^\circ=6.5/\sin 15^\circ$

$v_w=6.5(0.5736)/0.2588$

$=\underline{14.4}$ knots



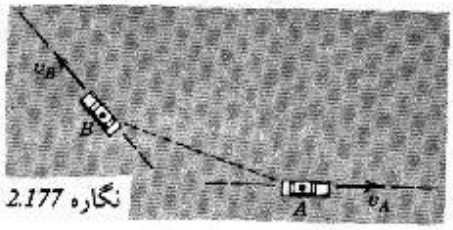



نگاره 2.176

2.177 - اگر آهنگ افزایش $AB$، برابر تندی نسبی آنها باشد، تندی خودروها چگونه است؟

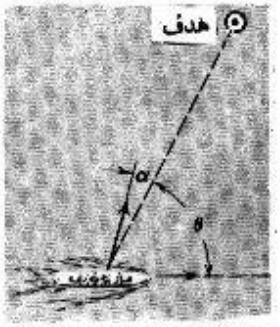
$d(\overline{AB})/dt=|v_{A/B}|$

$\Rightarrow \text{dir.}(v_{A/B})=\text{cte}$



نگاره 2.177

2.178 - ناو، موشکی به تندی 75 m/s از دید خود در $\theta=60^\circ$، با زاویه $30^\circ$ به بالا پرتاب می‌کند. زاویه $x$ چه باشد که به هدف بخورد؟

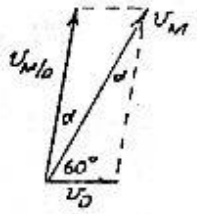



نگاره 2.178

$v_D=30(1.852)=55.6$ km/h

$v_D=55.6/3.6=15.43$ m/s

$v_M$= سایه افقی تندی موشک




$v_{M/D}$= سایه افقی تندی موشک از دید کشتی

$=75\cos 30^\circ=65.0$ m/s  $\underline{v}_M=\underline{v}_D+\underline{v}_{M/D}$

$\sin\alpha=v_D\sin 60^\circ/v_{M/D}=(5.43/65.0)(\sqrt{3}/2)=0.2058$

$\underline{\alpha=11.88^\circ}$

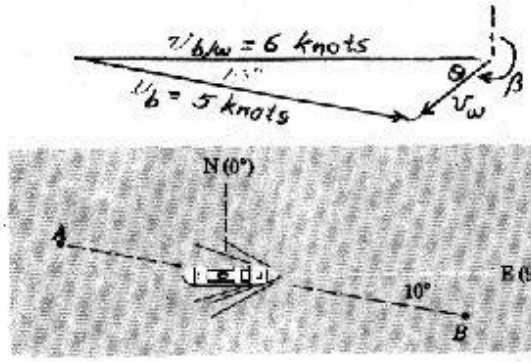
2.179 - قایقی با تندی 6 گره در آب ایستاده، به سوی خاور می‌رود. آب، آن را می‌راند و قایق، دو ساعت پس از راه‌افتادن از $A$، به $B$ می‌رسد. تندی آب و سوی آن چیست؟

w=water b=boat $\underline{v}_b=\underline{v}_w+\underline{v}_{b/w}$

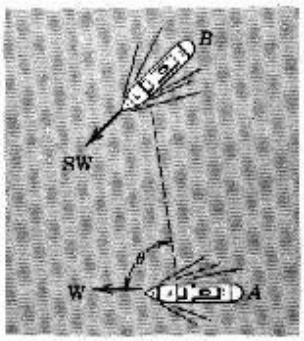
$v_w^2=5^2+6^2-2(5)(6)\cos 10^\circ=1.91$

$v_w=1.38$ knots $5/\sin\theta=1.38/\sin 10^\circ$

$\sin\theta=0.6280$ $\theta=38.9^\circ$ $\beta=270-38.9=231$




نگاره 2.179




نگاره 2.180

2.180 - اگر $\theta=80^\circ$ و فاصله $AB$ در ساعت 3.00 ظ 8 مایل دریایی و تندی $A$، 15 گره باشد، تندی $B$ چیست و چه ساعتی به $A$ می‌خورد؟ $\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_{B/A}$ $v_{B/A}/\sin 45^\circ=v_A/\sin\beta$

$\beta=180-(80+45)=55^\circ$

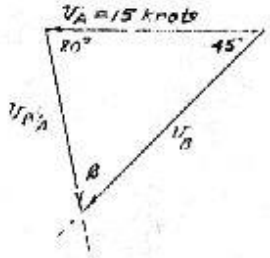
$v_{B/A}=15(0.7071)/0.8192=12.95$ knots

$t=8/12.95=0.618$ hr $t=37$ min

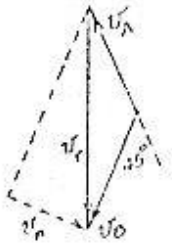
برخورد در 3:37PM رخ می‌دهد.

$v_B/\sin 80^\circ=15/\sin 55^\circ$

$v_B=15(0.9848/0.8192=18.0$ knots




2.181 - با $V_A=500$ km/h و $V_B=500$ km/h، تندی $B$ از دید $A$ چیست؟




$\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_r$ $v_r=v_{B/A}$ $v_A=500$ km/h $v_B=500$ km/h

$v_r^2=(500)^2+(500)^2+2(500)(500)\cos 45^\circ$

$=854(10)^3$ (km/h)$^2$

$v_r=92.4$ km/h $v_n=500\cos 45^\circ=354$ km/h

2.182 - اگر در پرسش پیش، شتاب $A$، 3 km/h و شتاب $B$، 4- km/h باشد، شتاب $B$ از دید $A$

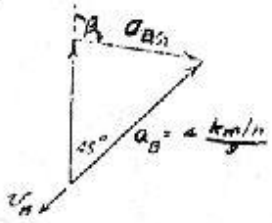
$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}$

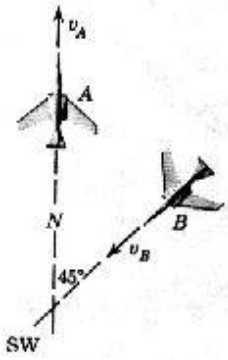
$(a_{B/A})^2=3^2+4^2-2(3)(4)\cos45^\circ=8.03\ (km/h/s)^2$

$a_{B/A}=2.83\ km/h/s\ =0.787\ m/s^2$

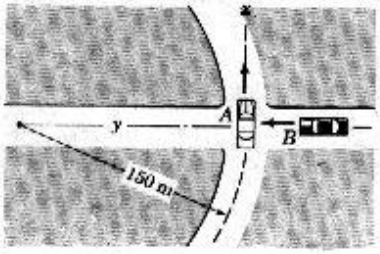
$4^2=3^2+(2.83)^2+2(3)(2.83)\cos\beta$

$\cos\beta=-1.030/17.00=-0.0606\qquad \beta=93.5^\circ$

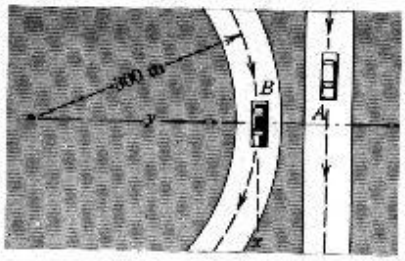



نگاره 2.181




نگاره 2.183




نگاره 2.184

**2.183** - تندی یکنواخت $A$، $54\ km/h$ و تندی و شتاب $B$، $81\ km/h$ و $3\ m/s^2$ است. تندی و شتاب $A$ از دید $B$ چیست؟

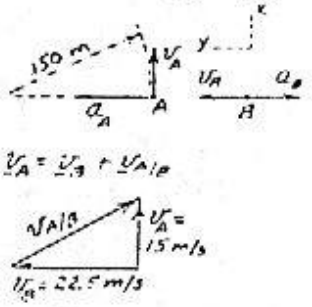
$v_A=54/3.6=15\ m/s\qquad v_B=81/3.6=22.5\ m/s$

$a_A=v_A^2/\rho=15^2/150=1.5\ m/s^2$

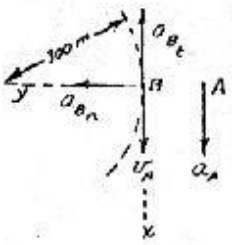
$a_B=3\ m/s^2\qquad \underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{A/B}\qquad \underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B}$

$v_{A/B}=\sqrt{(22.5)^2+(15)^2}=27.0\ m/s$

$\underline{v}_{A/B}=15\underline{i}-22.5\underline{j}\ m/s\qquad \underline{a}_{A/B}=4.5\underline{j}\ m/s^2$




**2.184** - تندی و شتاب $A$، $100\ km/h$ و $8\ km/h$ و تندی و شتاب $B$، $100\ km/h$ و $8\ km/h$ است. شتاب $B$ از دید $A$ چیست؟

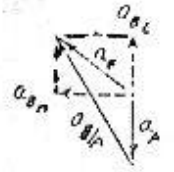



$a_{B_t}=8/3.6=2.22\ m/s^2\qquad a_A=8/3.6=2.22\ m/s^2$

$a_{B_n}=v_B^2/\rho=(100/3.6)^2/300=2.57\ m/s^2$

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}\qquad -2.22\underline{i}+2.57\underline{j}=2.22\underline{i}+\underline{a}_{B/A}$

$\underline{a}_{B/A}=-4.44\underline{i}+2.57\underline{j}\ m/s^2$

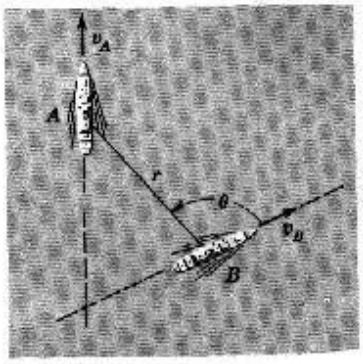


2.185 - نشان دهید که $\ddot{r}=r\dot{\theta}^2$ و $\ddot{\theta}=2\dot{r}\dot{\theta}/r$ است.

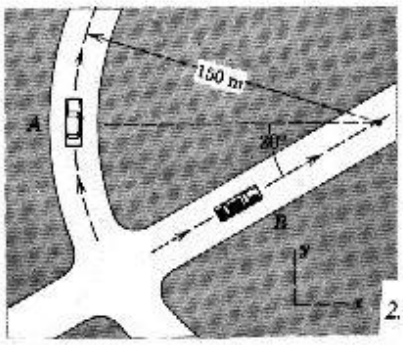
$\underline{a}_A=\underline{a}_B=\underline{0} \Rightarrow \underline{a}_{A/B}=\underline{0}$ (polar coordinates)

$(a_{A/B})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \Rightarrow \ddot{r}=r\dot{\theta}^2$

$(a_{A/B})_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \quad \underline{\ddot{\theta}=-2\dot{r}\dot{\theta}/r}$




نگاره 2.185




نگاره 2.187

2.186 - نشان دهید که برای سه ذره هم صفحه، دستورهای زیر درست است.

$$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_{A/C}+\vec{v}_{C/B} \qquad \vec{a}_{A/B}=\vec{a}_{A/C}+\vec{a}_{C/B}$$

$\underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{A/B}$ $\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B}$ $\underline{v}_C=\underline{v}_B+\underline{v}_{C/B}$ $\underline{a}_C=\underline{a}_B+\underline{a}_{C/B}$

$\underline{v}_A=\underline{v}_C+\underline{v}_{A/C}$ $\underline{a}_A=\underline{a}_C+\underline{a}_{A/C} \Rightarrow \underline{v}_A-\underline{v}_C=\underline{v}_{A/B}-\underline{v}_{C/B}$

$\underline{v}_{A/B}=\underline{v}_{A/C}+\underline{v}_{C/B}$ ، $\underline{a}_{A/B}=\underline{a}_{A/C}+\underline{a}_{C/B}$

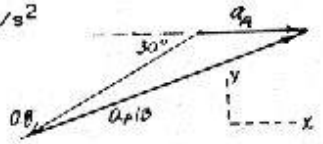
2.187 - تندی $A$، 50 km/h و شتاب $B$، 8 km/h/s-است. شتاب $A$ از دید $B$ چیست؟

$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B}$ $a_A=v^2/\rho=(50/3.6)^2/150=1.28$ m/s²

$a_B=8/3.6=2.22$ m/s²

$a_{A/B}=(2.22\cos30^\circ+1.28)\underline{i}+2.22\sin30^\circ\underline{j}$

$=3.21\underline{i}+1.11\underline{j}$ m/s²



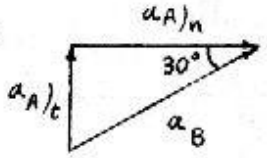

2.188 - در پرسش پیش، خودروی $B$ شتاب می‌گیرد و خودروی $A$ نیز با تندی 50 km/h، شتاب دارد. اگر شتاب $A$ از دید $B$ صفر باشد، شتاب $B$ و $A$ چیست؟

$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B}$ $\underline{a}_{A/B}=0 \Rightarrow \underline{a}_A=\underline{a}_B$

$(a_A)_n=v^2/\rho=(50/3.6)^2/150=3.87$ m/s²

$(a_A)_t=\dot{v}_A=1.28\tan30^\circ=0.739$ m/s²

$a_B=1.28/\cos30^\circ=1.478$ m/s²



*2.189* - ماهواره‌ای در یک مدار قطبی در بلندی *240 km* با تندی *2740 km/h* به گرد زمین می‌گردد. حرکت ماهواره در گذر از استوا و از جنوب به شمال، از دید بیننده زمین چگونه است؟ شعاع زمین *6378 km* و تندی چرخشی آن $0.729\times10^{-4}$ *rad/s* است.

S=satellite A=observer $\underline{v}_S=\underline{v}_A+\underline{v}_{S/A}$

$v_A=R\omega=6378(0.729)(10^{-4})(3600)=1674$ km/h (East)

$v_S=27940$ km/h (North)

$\theta=\tan^{-1}(1674/27940)=3.43^\circ$

موشک از $3.43^\circ$ غرب جنوب می‌گذرد.

*2.190* - زاویه دید $\beta$ و راستای *b-b* چگونه باشد که ناویز *S* گمان کند از روبرو به مریخ نزدیک می‌شود؟

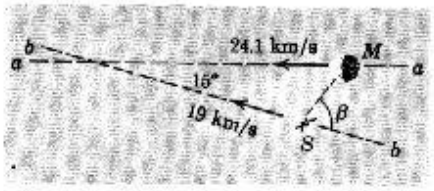
$\underline{v}_M=\underline{v}_S+\underline{v}_{M/S}$

$(\underline{v}_{M/S})^2=(19.0)^2+(24.1)^2-2(19.0)(24.1)\cos15^\circ$

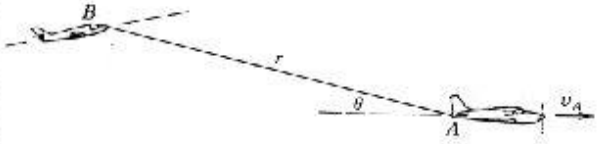
$=57.2$ $(km/s)^2$

$v_{M/S}=7.56$ km/s $24.1/\sin(\pi-\beta)=7.56/\sin15^\circ$

$\sin(\pi-\beta)=\sin\beta=0.8246$ $\underline{\beta=55.6^\circ}$

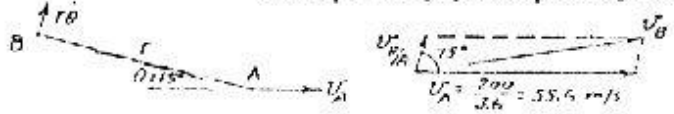



نگاره *2.190*




نگاره *2.191*

*2.191* - هواپیمای *A* با تندی یکنواخت *200 km/h* گلایدر *B* را با ریسمان *r=60 m* می‌کشد. اگر $\dot\theta=5$ *deg/s* باشد، تندی و شتاب گلایدر در $\theta=15^\circ$ چیست؟




$\underline{v}_B=\underline{v}_A+\underline{v}_{B/A}$ $v_{B/A}=r\dot\theta=60(5\pi/180)=5.24$ m/s

$v_B^2=(5.24)^2+(55.6)^2+2(5.24)(55.6)\cos15^\circ$

$=3264$ $(m/s)^2$

$v_B=57.1$ m/s or $v_B=57.1(3.6)=\underline{206}$ km/h

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}$ $a_A=0$ , $a_{B/A}=r\dot\theta^2=60(5\pi/180)^2=0.457$ m/s$^2$

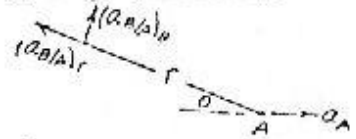
$\Rightarrow a_B=a_{B/A}=\underline{0.457}$ m/s$^2$ B to A

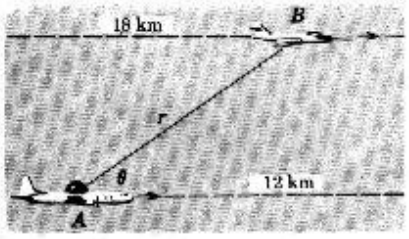
2.192 - اگر در پرسش پیش، هواپیمای $A$ با آهنگ $5$ km/h شتاب بگیرد و ریسمان را با آهنگ $r=2$ m/s شل کند و $\theta$ ثابت بماند، شتاب $B$ چیست؟

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+\underline{a}_{B/A}$ $(a_{B/A})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0-0=0$

$(a_{B/A})_n=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+0=0$

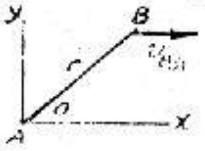
$\Rightarrow a_B=a_A=5/3.6=\underline{1.39\ m/s^2}$




نگاره 2.193

2.193 - هواپیمای $A$، $1.2$ m/s$^2$ شتاب دارد و با تندی $1000$ km/h پیش می‌رود. اگر تندی $B$، $1500$ km/h و $\theta=30^\circ$ باشد، $\dot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

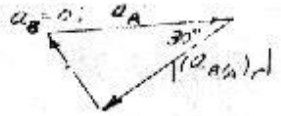



$\underline{v}_B=\underline{v}_A+(\underline{v}_{B/A})_r+(\underline{v}_{B/A})_\theta$

$v_{B/A}=v_B-v_A=[(1500-1000)/3.6]=142.86$ m/s

$(\underline{v}_{B/A})_r=v_{B/A}\cos\theta=\dot{r}$ $\dot{r}=142.86(0.866)=123.72$ m/s

$r=6000/\sin 30^\circ=12000$ m




$(\underline{v}_{B/A})_\theta=-v_{B/A}\sin\theta=r\dot{\theta}$

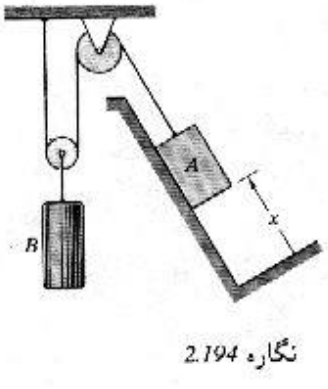
$\Rightarrow \dot{\theta}=-142.86(0.5)/12000=-0.006$ rad/s

$\underline{a}_B=\underline{a}_A+(\underline{a}_{B/A})_r+(\underline{a}_{B/A})_\theta$ $a_B=0$ $a_A=1.2$ m/s$^2$

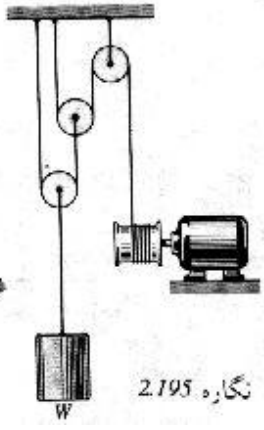
$(\underline{a}_{B/A})_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$, $-1.28\cos 30=\ddot{r}-12000(-0.006)^2$

$\underline{\ddot{r}=-0.676\ m/s^2}$ $(\underline{a}_{B/A})_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$

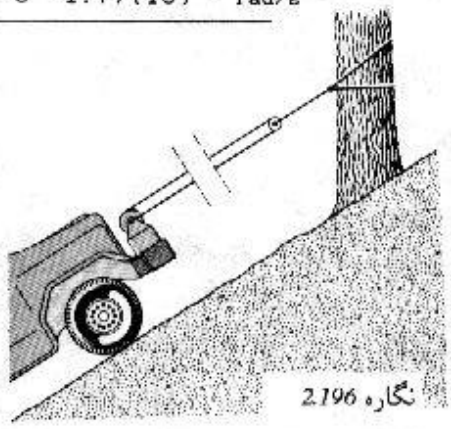
$1.28\cos 30=12000\ddot{\theta}+2(123.72)(-0.006)$ $\underline{\ddot{\theta}=1.77(10)^{-4}\ rad/s}$




نگاره 2.194

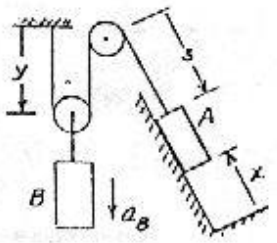



نگاره 2.195



نگاره 2.196

2.194 - با $\dot{x}=0.044$ m/s، شتاب $B$ چیست؟




$L=2y+s+\text{const.}\quad 0=2\dot{y}+\dot{s}\quad 0=2\ddot{y}+\ddot{s}$

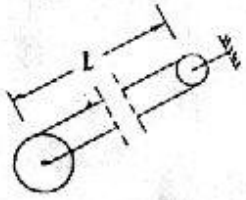
$a_B=\ddot{y}=-\ddot{s}/2=+\ddot{x}/2$

$a_B=0.044/2=\underline{0.022\ \text{m/s}^2}$

2.195 - اگر ریسمان را با تندی 320 mm/s بکشیم، پس از 5 ثانیه، $w$ چه اندازه بالا می‌آید.

$v_w=320/4=80\ \text{mm/s}\quad h=80(5)=\underline{400\ \text{mm}}$

2.196 - اگر خودرو، ریسمان را با تندی 40 mm/s بکشد، کی می‌تواند $m$ 4 بر شیب بالا رود؟

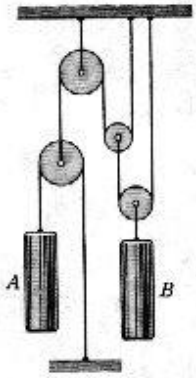



$L=2l\quad \dot{L}=2\dot{l}=40\ \text{mm/s}$

$t=4(10)^3/20=200\ \text{s}\quad \underline{3\ \text{min}\ 20\ \text{s}}$

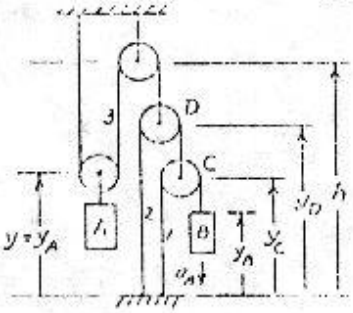
2.197 - اگر $A$ با $v_A$ پایین آید، $B$ با چه تندی بالا می‌رود؟

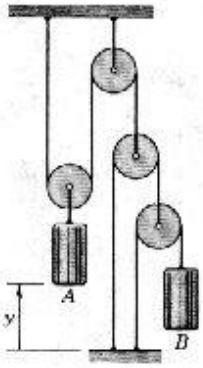
$ds_B=ds_A/8 \Rightarrow \underline{v_B=v_A/8}$




نگاره 2.197

2.198 - با $y=\frac{t^2}{2}$، شتاب $B$ چیست؟




نگاره 2.198

$y=y_A=t^2/4\ \text{m}\quad \dot{y}_A=t/2\ \text{m/s}\quad a_A=\ddot{y}_A=1/2\ \text{m/s}^2$ one dof

Cable: $L_1=y_C+(y_C-y_B)+C_1\quad 0=2\ddot{y}_C-\ddot{y}_B\quad a_B=-\ddot{y}_B$

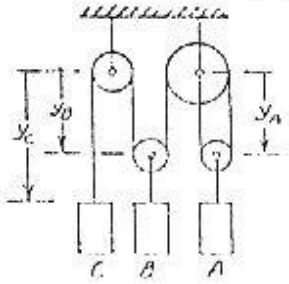
$L_2=y_D+(y_D-y_C)+C_2\quad 0=2\ddot{y}_D-\ddot{y}_C$

$L_3=2(h-y_A)+h-y_D+C_3\quad 0=-2\ddot{y}_A-\ddot{y}_D$

$\Rightarrow \ddot{y}_C\ ,\ \ddot{y}_D\ ,\ \ddot{y}_B=-8\ddot{y}_A\ ,\ a_B=8\ddot{y}_A=\underline{4\ \text{m/s}^2}$

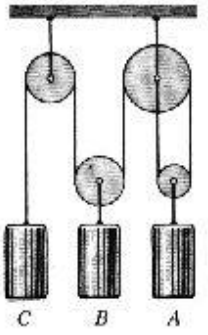
$-dy_B=8dy_A \Rightarrow a_B=8a_A=8(1/2)=4\ \text{m/s}^2)$

2.199 - دستور وابستگی شتاب $A$ و $B$ و $C$ چیست؟ شمار آزادی چند است؟

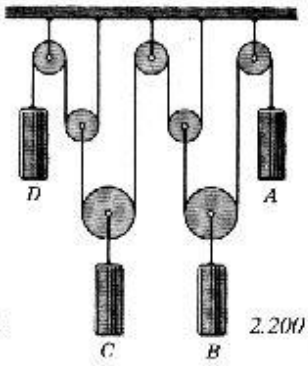



$L=2y_A+2y_B+y_C+\text{const.}\quad 0=2\dot{y}_A+2\dot{y}_B+\dot{y}_C$

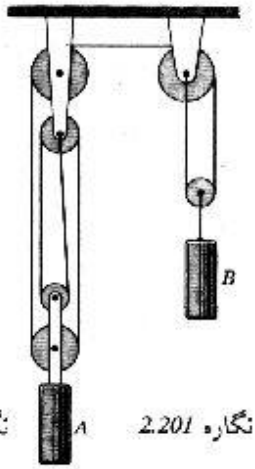
$0=2\ddot{y}_A+2\ddot{y}_B+\ddot{y}_C\quad \underline{2a_A+2a_B+a_C=0}\quad$ 2 dof




نگاره 2.199

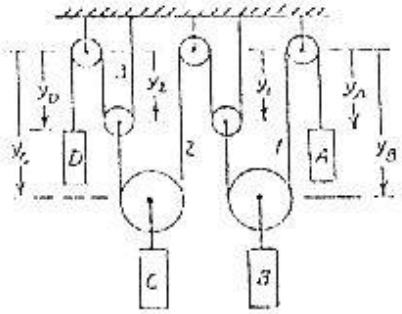



نگاره 2.200




نگاره 2.201

2.200 - دستور وابستگی تندی وزنه‌ها چیست؟ شمار آزادی چند است؟




3 dof $\quad L_1=y_B+y_A+(y_B-y_1)+C_1$

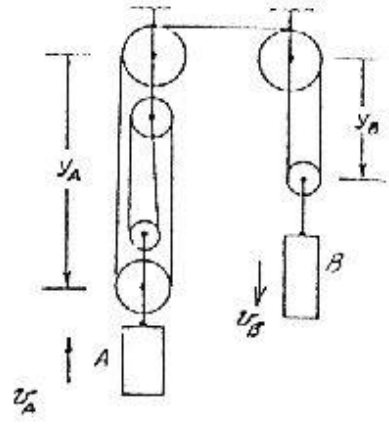
$0=2\dot{y}_B+\dot{y}_A-\dot{y}_1$

$L_2=y_C+2y_1+(y_C-y_2)+C_2\quad 0=2\dot{y}_C+2\dot{y}_1-\dot{y}_2$

$L_3=2y_2+y_D+C_3\quad 0=2\dot{y}_2+\dot{y}_D\Rightarrow$

$\underline{4v_A+8v_B+4v_C+v_D=0}$

2.201 - با $v_B=t^2/2+t^3/6$، شتاب $A$ در $t=2$ s چیست؟




$L=4y_A+2y_B\quad 0=4\dot{y}_A+2\dot{y}_B\quad 0=4\ddot{y}_A+2\ddot{y}_B$

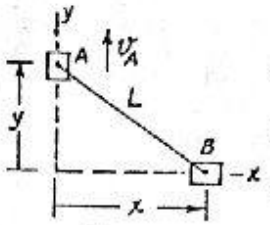
$a_A=-\ddot{y}_A=\ddot{y}_B/2=a_B/2\quad v_B=t^2/2+t^3/6$

$a_B=\dot{v}_B=t+t^2/4$

$t=2$ s $\quad a_B=2+4/2=4$ m/s$^2$

$\Rightarrow \underline{a_A=a_B/2=2\ \text{m/s}^2}$

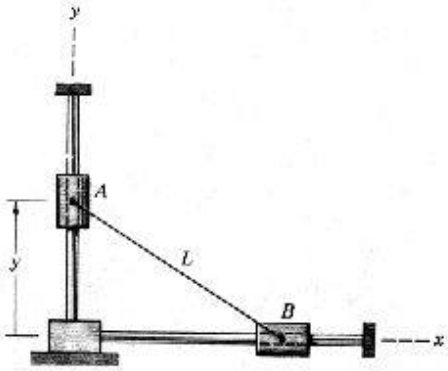
2.202 - با $v_A$ رو به بالا، شتاب $B$ چیست؟



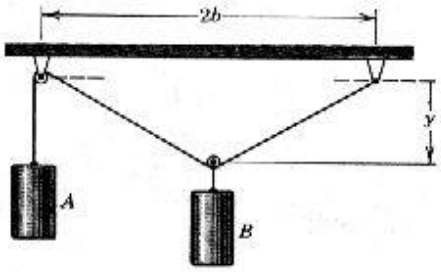

$$x^2+y^2=L^2 \quad x\dot{x}+y\dot{y}=0 \quad \dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0$$

$$\dot{y}=v_A \ , \ \ddot{y}=0 \Rightarrow a_x=\ddot{x}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/x=-(\dot{y}^2y^2/x^2+\dot{y}^2)/x$$

$$a_x=-L^2\dot{y}^2/x^3=-L^2v_x^2/(L^2-y^2)^{3/2}$$

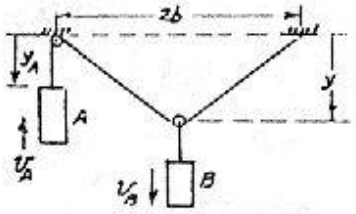



نگاره 2.202




نگاره 2.203

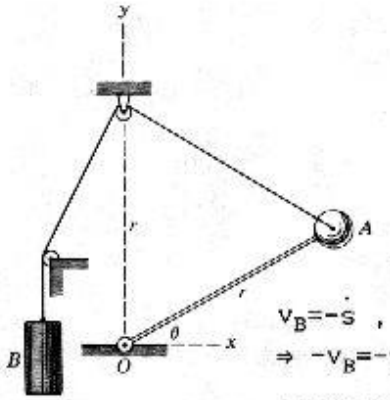
2.203 - وابستگی تندی $A$ و $B$ چیست؟

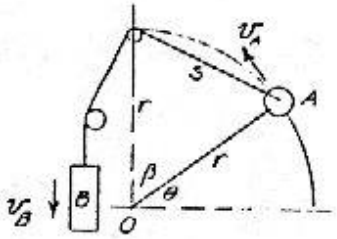



$$L=y_A+2\sqrt{y_B^2+b^2} \quad 0=\dot{y}_A+2y\dot{y}/\sqrt{y_B^2+b^2}$$

$$v_A=-\dot{y}_A \quad v_B=\dot{y} \Rightarrow v_A=2yv_B/\sqrt{y_B^2+b^2}$$

2.204 - وابستگی تندی $A$ و $B$ چیست؟




نگاره 2.204

$$v_B=-\dot{s} \ , \ v_A=r\dot{\theta}=-r\dot{\beta} \quad s=2r\sin(\beta/2) \quad \dot{s}=r\dot{\beta}\cos(\beta/2)$$

$$\Rightarrow -v_B=-v_A\cos(\beta/2)$$

$$\cos(\beta/2)=\cos(\pi/4-\theta/2)=(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))/\sqrt{2}$$

$$v_B=v_A(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))/\sqrt{2}$$

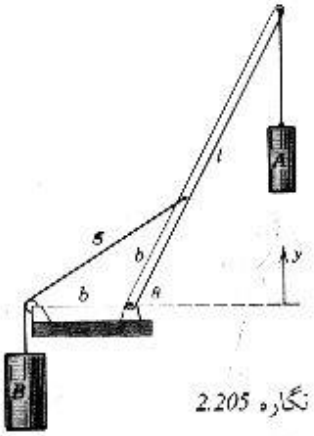
$$v_A=v_B\sqrt{2}/(\cos(\theta/2)+\sin(\theta/2))$$

2.205 - با $v_B$رو به پایین، تندی $A$رو به بالا چیست؟

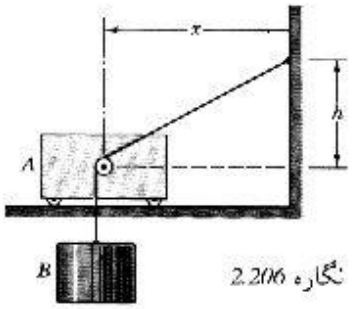
$s^2=2b^2+2b^2\cos\theta=2b^2(1+\cos\theta)$ $2s\dot{s}=2b^2(-\dot{\theta}\sin\theta)$

$v_B=-\dot{s}=(b^2\dot{\theta}/2)\sin\theta$ $y=l\sin\theta$ $(v_A)_y=\dot{y}=l\dot{\theta}\cos\theta$

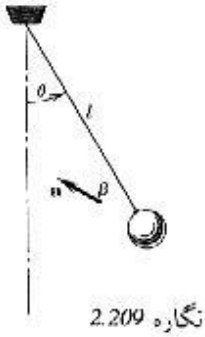
$\Rightarrow (v_A)_y=5v_B l\cos\theta/(b^2\sin\theta)=lv_B\sqrt{2(1+\cos\theta)}/b\tan\theta$




نگاره 2.205

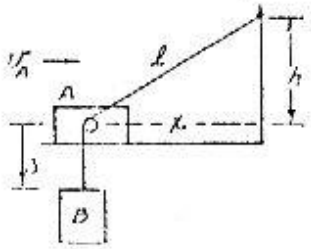



نگاره 2.206




نگاره 2.209

2.206 - وابستگی تندی $A$و $B$ چیست؟



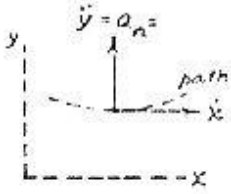

$l^2=x^2+h^2$ $l\dot{l}=x\dot{x}$ $\dot{y}=-\dot{l}=-x\dot{x}/l$

$v_A=-\dot{x}\Rightarrow (v_B)_y=\dot{y}=xv_A/l$

$\dot{y}=0$ $\ddot{x}=0$ $\ddot{y}=a_n=9$ mm/s$^2$

$a_n=\ddot{y}=v^2/\rho$ $\rho=v^2/a_n=6^2/9=4$ mm

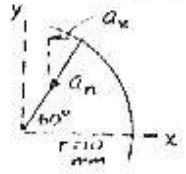
2.207 - ذره‌ای با $\dot{x}=60$ mm/s و $\ddot{x}=0$ و $\dot{y}=0$ و $\ddot{y}=90$ mm/s$^2$ حرکت می‌کند. $\rho$ چیست؟




$\dot{y}=0$ $\ddot{x}=0$ $\ddot{y}=a_n=90$ mm/s$^2$ $a_n=\ddot{y}=v^2/\rho$ ,

$\rho=v^2/a_n=60^2/90=40$ mm $\dot{x}=v=60$ mm/s

2.208 - ذره‌ای با دستور $r=10$ mm و $\theta=4t$ rad حرکت می‌کند. $x$در $\theta=60^\circ$ چیست؟




$\theta=4t$ $\dot{\theta}=4$ rad/sec $\ddot{\theta}=0$

$\Rightarrow a=a_n=r\dot{\theta}^2=10(4)^2=160$ mm/s$^2$

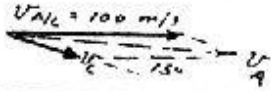
$a_x=-a_n\cos 60^\circ=-160(0.5)$ $\ddot{x}=a_x=-80$ mm/s$^2$

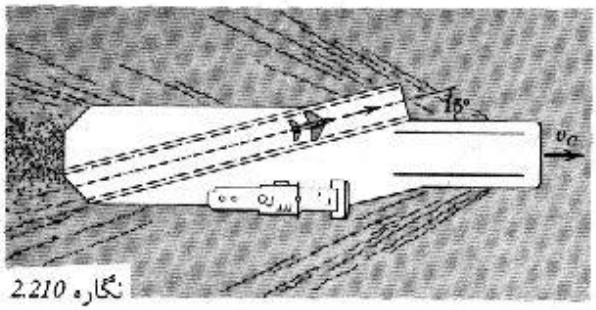
2.209 - شتاب گلوله با راستای نخ، زاویه $\beta$ می‌سازد. در این هنگام، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

$$a_t=-l\ddot{\theta}=a\sin\beta \quad \ddot{\theta}=-(a/l)\sin\beta$$

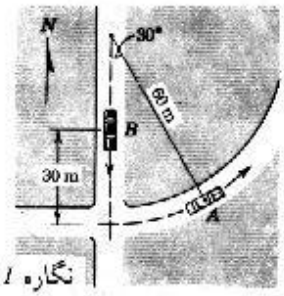
$$a_n=l\dot{\theta}^2=a\cos\beta \quad \dot{\theta}=\pm\sqrt{(a/l)\cos\beta}$$

2.210 - ناو با تندی 30 گره پیش می‌رود و هواپیما را با شتاب $50\ m/s^2$ در باند 100 متری به پرواز درمی‌آورد. تندی هواپیما به هنگام برخاست چیست؟





نگاره 2.210



نگاره 2.211

$$v_{A/C}^2=2as=2(50)100=10000\ (m/s)^2 \quad v_{A/C}=100\ m/s$$

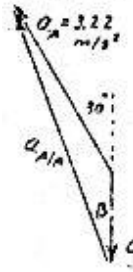
$$\underline{v}_A=\underline{v}_C+\underline{v}_{A/C} \quad \underline{v}_C=30(1.852)/3.6=15.43\ m/s$$

$$v_A^2=(100)^2+(15.43)^2+2(100)(15.43)\cos15^\circ$$

$$=13220\ (m/s)^2$$

$$v_A=115.0\ m/s\ ,\ v_A=v=115.0(3.6)=414\ km/h$$

2.211 - تندی یکنواخت $A$ 50 km/h و شتاب $B$ $1.5\ m/s^2$ است. در این هنگام، شتاب $A$ از دید $B$ چیست؟



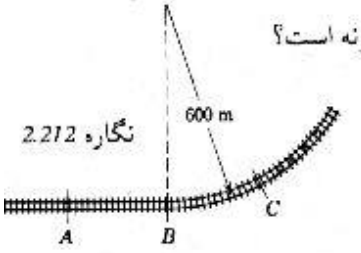
$$\underline{a}_A=\underline{a}_B+\underline{a}_{A/B} \quad a_A=v^2/\rho=(50/3.6)^2/60=3.22\ m/s^2$$

$$a_{A/B}=\sqrt{(3.22\sqrt{3}/2+1.5)^2+(3.22/2)^2}=4.58\ m/s^2$$

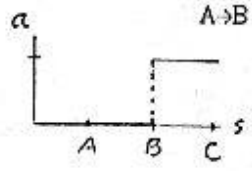
$$\beta=\tan^{-1}(1.608/4.28)=\tan^{-1}(0.3752)$$

$$=20.6^\circ \text{ west of north} \quad a_A=3.22\ m/s^2 \quad a_B=1.5\ m/s^2$$

2.212 - شتاب قطاری با تندی 150 km/h در بازه $A$ تا $C$ چگونه است؟



نگاره 2.212



$$A\to B:\ a=0\ ,\ B\to C:\ a=a_n=v^2/\rho$$

$$a_n=(150/3.6)^2/600$$

$$=2.89\ m/s^2$$

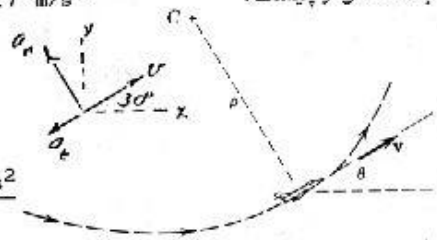
2.213 - در $\theta=30^\circ$، تندی و شتاب هواپیما، $1000\ km/h$ و $15\ km/h/s$-است. اگر $\rho=1.5\ km$ باشد، $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ چیست؟

$v=1000/3.6=278\ m/s \quad a_t=15/3.6=4.17\ m/s^2$

$a_n=v^2/\rho=(278)^2/1500=51.4\ m/s^2$

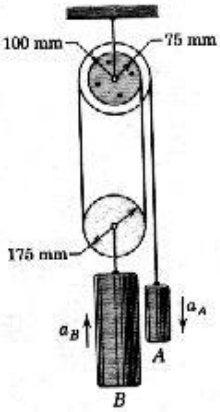
$\ddot{x}=-51.4\sin30^\circ=\underline{-29.3\ m/s^2}$

$\ddot{y}=51.4\cos30^\circ-4.17\sin30^\circ=\underline{42.5\ m/s^2}$

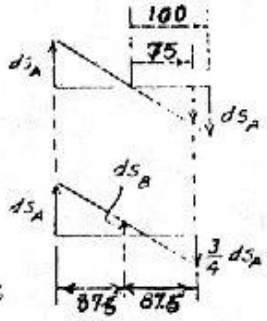



نگاره 2.213

2.214 - اگر شتاب $A$، $2\ m/s^2$ باشد، شتاب $B$ چیست؟




نگاره 2.214




$ds_B=\text{average } ds_A$

$=(-75/100)ds_A$

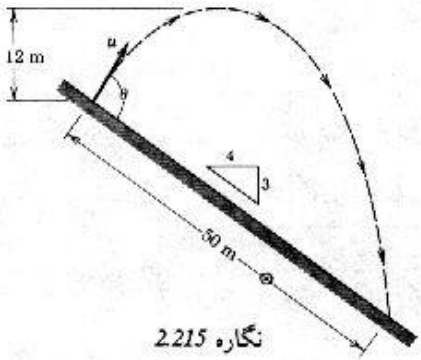
$=(1/2)(ds_A-(3/4)ds_A)$

$=ds_A/8$

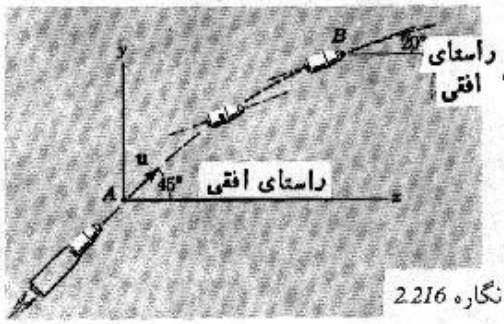
$\Rightarrow a_B=a_A/8=2/8$

$=\underline{0.25\ mm/s^2}$ 2

2.215 - اندازه $u$ و $\theta$ چیست؟




نگاره 2.215




نگاره 2.216

y-direction: $v^2=v_1^2+2as$ ; $0=u_y^2-2g(12)$

A→B: $u_y=\sqrt{2(9.81)(12)}=15.34\ m/s$

$s=v_1t+at^2/2 \quad -30=15.34t-9.81t^2/2$

$t^2-3.128t-6.116=0 \quad t=4.49\ s\ ,\ (t=-1.36\ s)$

x-direction: $40=u_x(4.49)\ u_x=8.91\ m/s$

$u=\sqrt{(8.91)^2+(15.34)^2}=17.74$ m/s

$\theta_1=\tan^{-1}(15.34/8.91)=59.86^\circ \quad \theta_2=\tan^{-1}(3/4)=36.87^\circ$

$\theta=\theta_1+\theta_2=59.86+36.87=96.7^\circ$

2.216 - موشک با تندی 15000 km/h و موتور خاموش به $A$ می‌رسد و تا $B$ می‌رود. اگر $g=9$ m/s$^2$ باشد، زمان گذر از $A$ تا $B$ چیست؟

$\ddot{y}=-g \quad \dot{y}=u\sin45^\circ-gt \quad y=ut\sin45^\circ-gt^2/2$

$\ddot{x}=0 \quad \dot{x}=u\cos45^\circ \quad x=ut\cos45^\circ$

$dy/dx=\dot{y}/\dot{x}=1-gt\sqrt{2}/u=1-2gx/u^2$ ,

$x=(u^2/2g)(1-dy/dx) \quad dy/dx=\tan20^\circ=0.364$

$x=(15)^2(10^6)^2(1-0.364)/[(3600)^2(2)(9)(10^{-3})]$
$=613$ km

$t=x/(u\cos45^\circ)=0.0578$ h $=3$ min 28 s

$h=y=15(10^3)(0.0578)/\sqrt{2}-9(10^{-3})(0.0578)^2(3600)^2/2=$
$=418$ km

2.217 - ذره‌ای با دستور $v=2+0.3t^2$ m/s و با شتاب 2.4 m/s$^2$ در $t=2$ s، در یک صفحه حرکت می‌کند، $\rho$ چیست؟

$v=2+0.3t^2 \quad a_t=\dot{v}=0.6t \quad t=2$ s

$v=2+0.3(2^2)=3.2$ m/s $\quad a_t=0.6(2)=1.2$ m/s$^2$

$a^2=a_t^2+a_n^2 \quad a_n^2=2.4^2-1.2^2=4.32 \quad a_n=2.078$ m/s$^2$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=3.2^2/2.078=4.93$ m

2.218 - اگر در $\theta=60^\circ$، $r=700$ m و $\dot{\theta}=0.03$ rad/s و $a=20$ m/s$^2$ باشد، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟

$r=700$ m $\quad \theta=60^\circ \quad \dot{\theta}=0.03$ rad/s $\quad a=20$ m/s$^2$

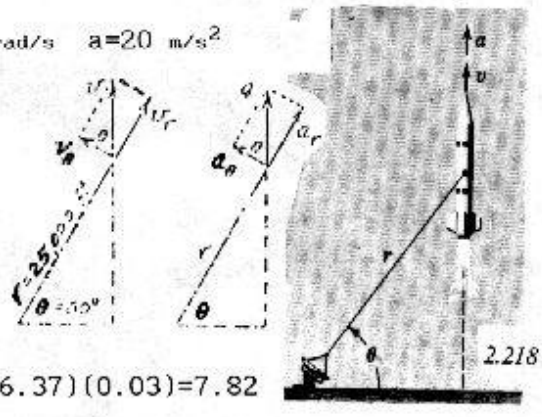
$v_\theta=r\dot{\theta}=700(0.03)=21$ m/s

$v=21/\cos60^\circ=42$ m/s

$v_r=\dot{r}=42\cos30^\circ=36.37$ m/s

$a_\theta=a\cos60^\circ=20(0.5)$
$=10$ m/s$^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow r\ddot{\theta}=10-2(36.37)(0.03)=7.82$



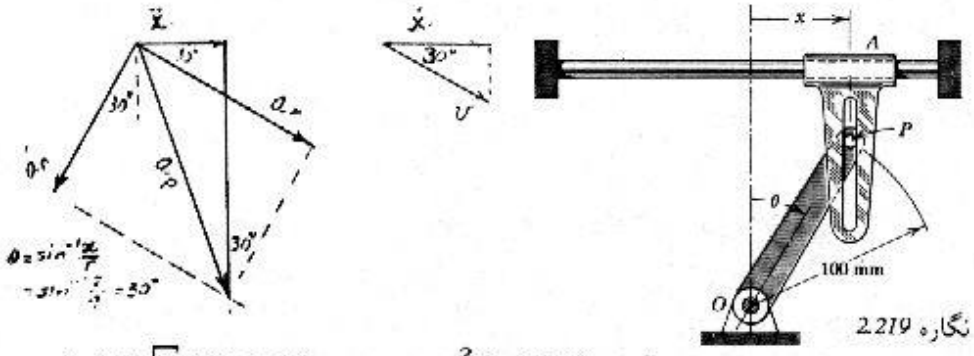
نگاره 2.218

$\ddot{\theta}=7.82/700=0.0111$ rad/s$^2$

$a_r=a\sin60^\circ=20(\sqrt{3}/2)=17.32$ m/s$^2$ $\quad a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \ddot{r}=17.32+700(0.03)^2=17.95$ m/s$^2$

2.219 - اگر در $x=50$ mm $\dot{x}=1.2$ m/s و $\ddot{x}=9$ m/s$^2$ باشد، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ چیست؟




نگاره 2.219

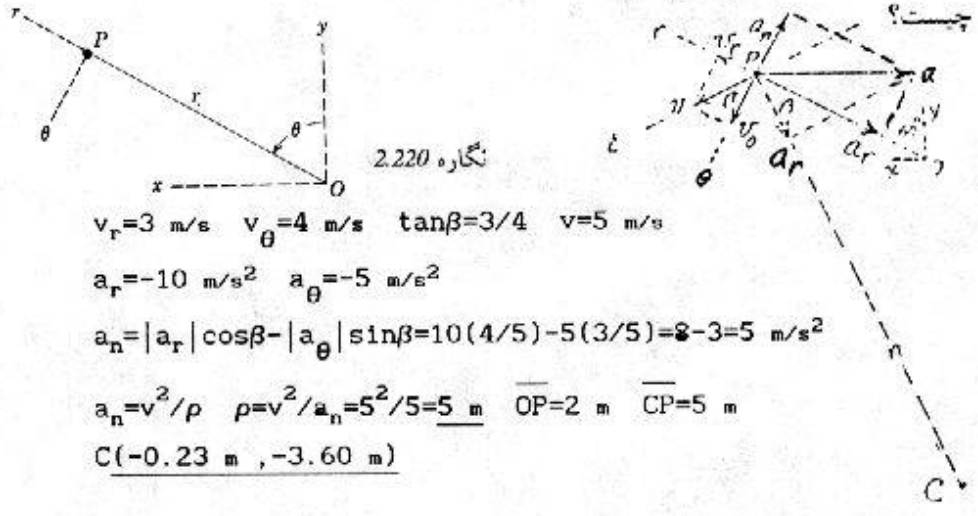
$v=1.2/(\sqrt{3}/2)=1.04$ m/s $\quad a_n=v^2/\rho=10.8$ m/s$^2$

$a_t=124/\sqrt{3}=71.6$ ft/s$^2$ $\quad v=r\dot{\theta}$

$\dot{\theta}=v/r=13.86$ rad/s $\quad a_t=r\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}=a_t/r=71.6/(4/12)=215$ rad/s$^2$

2.220 - با $r=2$ m و $\theta=160^\circ$ و $v_r=3$ m/s و $v_\theta=4$ m/s و $a_r=-10$ m/s$^2$ و $a_\theta=-5$ m/s$^2$، اندازه $\rho$ چیست؟




نگاره 2.220

$v_r=3$ m/s $\quad v_\theta=4$ m/s $\quad \tan\beta=3/4 \quad v=5$ m/s

$a_r=-10$ m/s$^2$ $\quad a_\theta=-5$ m/s$^2$

$a_n=|a_r|\cos\beta-|a_\theta|\sin\beta=10(4/5)-5(3/5)=8-3=5$ m/s$^2$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=5^2/5=5$ m $\quad \overline{OP}=2$ m $\quad \overline{CP}=5$ m

C(-0.23 m , -3.60 m)

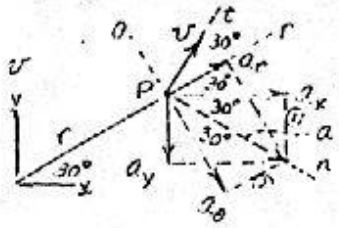
2.221 - با $v=5$ m/s و $a_x=15$ m/s$^2$ و $a_\theta=-15$ m/s$^2$، اندازه $a_r$ و $a_y$ و $a_t$ و $a_n$ و $\rho$ چیست؟

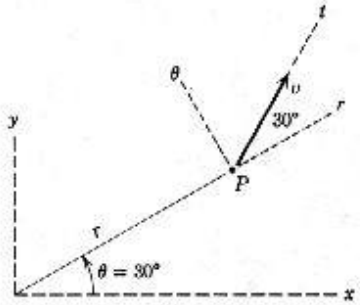
$a_n=a=15/\cos 30^\circ=10\sqrt{3}\ m/s^2$

$a_y=-15\tan 30^\circ=-5\sqrt{3}\ m/s^2$

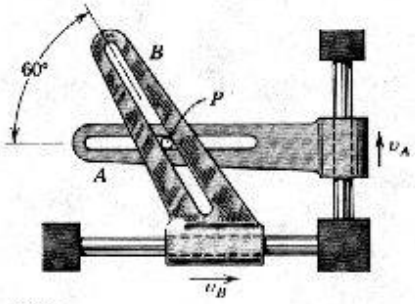
$a_r=10\sqrt{3}\sin 30^\circ=5\sqrt{3}\ m/s^2$

$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=5^2/10\sqrt{3}=1.44\ m$



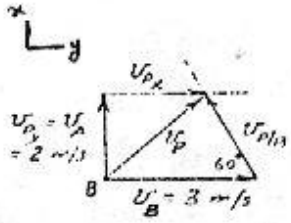


نگاره 2.221



نگاره 2.222

2.222 - با $v_A=2\ m/s$ و $v_B=3\ m/s$، اندازه $v_P$ چیست؟



$\underline{v}_P=\underline{v}_B+\underline{v}_{P/B} \quad \underline{v}_P=\underline{v}_{Px}+\underline{v}_{Py}=\underline{v}_{px}+\underline{v}_A \quad \underline{v}_{Px}+\underline{v}_A=\underline{v}_B+\underline{v}_{P/B}$

$v_P=\sqrt{2^2+(3-2/\sqrt{3})^2}=\underline{2.72\ m/s} \quad v_{Py}=v_A=2\ m/s$

$v_B=3\ m/s$

2.223 - با $\theta=\frac{\pi}{4}+0.12\sin 4\pi t$ و $\dot{\theta}=1.5\ rad/s$ و $\dot{L}=0.9\ m/s$، شتاب نوک میله، در $\theta=\pi/4$ و $L=1.2\ m$ و $\beta=60^\circ$ چیست؟

$\dot{\phi}=-\beta \quad R=L \quad \dot{\theta}=4\pi(0.12)\cos 4\pi t=0.48\pi\ rad/s$

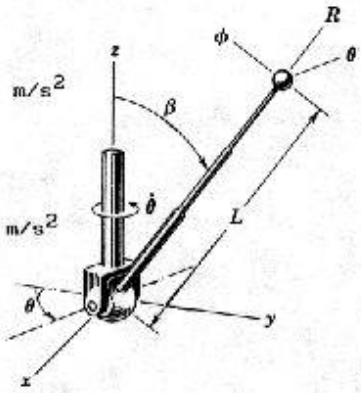
$\ddot{\theta}=-1.92\pi^2\sin 4\pi t=0$

$a_R=0-1.2(-3/2)^2-1.2(0.48\pi)^2(\sqrt{3}/2)^2=-4.75\ m/s^2$

$a_\theta=\cos\phi(2\dot{R}\dot{\theta}+R\ddot{\theta})-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi=5.07\ m/s^2$

$a_\phi=2\dot{R}\dot{\phi}+R\ddot{\phi}+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi \quad \ddot{\phi}=0 \quad a_\phi=-1.518\ m/s^2$

$a=\sqrt{(-4.75)^2+(5.07)^2+(-1.518)^2}=\underline{7.11\ m/s^2}$



نگاره 2.223

2.224 - با $\beta=30^\circ$ و $\dot{\theta}=120\ rev/min$ و $R=400+100\sin 2\pi nt$ و $\alpha=2\ rev/s$ شتاب ماسوره $P$ در بیشینه $R$ چیست؟

$R=400+100\sin 2\pi t \quad \dot{R}=200\pi\cos 2\pi t \quad \ddot{R}=-400\pi^2\sin 2\pi t$

$\dot{\theta}=120\ rad/s \quad \ddot{\theta}=0 \quad \phi=\pi/2-\beta=60^\circ \quad \dot{\phi}=\ddot{\theta}=0$

$\dot{R}$ Max: $\cos 2\pi t=1$ & $\sin 2\pi t=0$

$\Rightarrow a_R=\ddot{R}-R\dot{\phi}^2-R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$

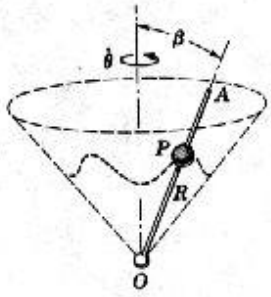
$=0-400(0)-400(2\pi/3)^2(1/2)^2=-438.65\ mm/s^2$

$a_\theta=(\cos\phi/R)d(R^2\dot{\phi})/dt-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$

$=2\dot{R}\dot{\theta}\cos\phi-2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi=438.65\ mm/s^2$

$a_\phi=(1/R)d(R^2\dot{\phi})/dt+R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi=759.76\ mm/s^2$

$a=438.65\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{3})^2}=438.65\sqrt{5}=980.85\ mm/s^2$




نگاره 2.224

2.225 - با $\theta=\theta_0 Cos\omega t$ و $\dot{\phi}=k$، شتاب نوک آنتن را، (a) به هنگام گذر از $A$ و (b) به هنگام گذر از $B$، بیابید.

$\theta=\theta_0\cos\omega t\quad \dot{\theta}=-\theta_0\omega\sin\omega t\quad \ddot{\theta}=-\theta_0\omega^2\cos\omega t$

$\dot{\phi}=K\quad \ddot{\phi}=0\quad R=b\quad \dot{R}=\ddot{R}=0$

$a_R=0-bK^2-b\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t\cos^2\phi$

$a_\theta=b\cos\phi(-\theta_0\omega^2\cos\omega t)-2b(-\theta_0\omega\sin\omega t)K\sin\phi$

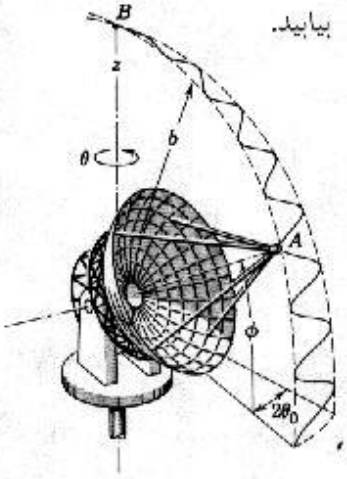
$a_\phi=0+b(\theta_0\omega\sin\omega t)^2\sin\phi\cos\phi$

At A: $\cos\omega t=-1\quad \sin\omega t=0\quad a_R=-bk^2$

$a_\theta=b\omega^2\theta_0\cos\phi\quad a_\phi=0\quad \Rightarrow a=b\sqrt{K^4+\omega^4\theta_0^2\cos^2\phi}$

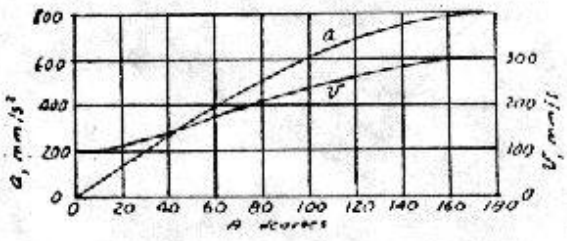
At B: $\cos\omega t=0\quad \sin\omega t=1\quad \phi=\pi/2$

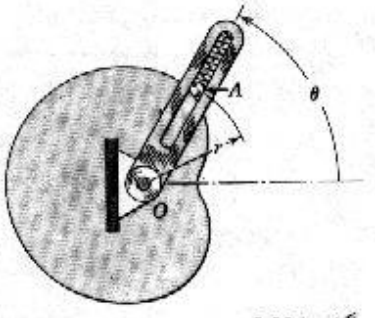
$\Rightarrow a=bK\sqrt{K^2+4\omega^2\theta_0^2}$




نگاره 2.225

2.226 - بازو با $\dot{\theta}=2\ rad/s$ می‌چرخد و میخ $A$ را بر بادامک $r=b-cCos\theta$ $(b>c)$ و $b=100\ mm$ و $c=50\ mm$ می‌مالد. اندازه تندی و شتاب $A$ را از $\theta=0$ تا $\theta=180^\circ$ بکشید.




$r=100-50\cos\theta\quad \dot{\theta}=2\ rad/s\quad \ddot{\theta}=0$

$\dot{r}=50\dot{\theta}\sin\theta=100\sin\theta\quad \ddot{r}=100\dot{\theta}\cos\theta=200\cos\theta$

نگاره 2.226

$v_r=\dot{r}=100\sin\theta \quad v_\theta=r\dot{\theta}=(100-50\cos\theta)^2=200-100\cos\theta$

$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=100\sqrt{5-4\cos\theta}$

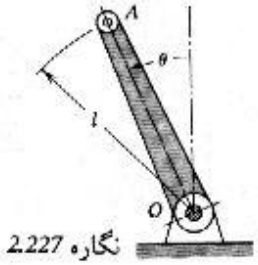
$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=200\cos\theta-4(100-50\cos\theta)=400(\cos\theta-1)$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0+2(100\sin\theta)2=400\sin\theta$

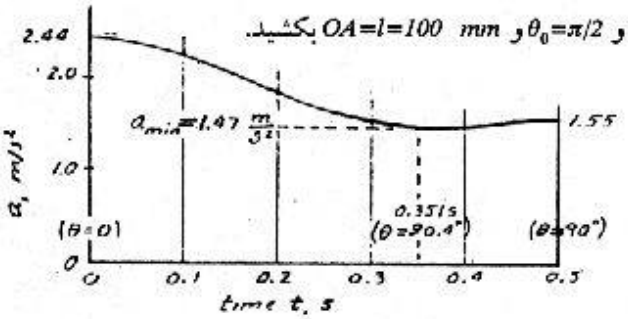
$a=\sqrt{a_r^2+a_\theta^2}=400\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}$

At $\theta=0 \quad a=a_r=0 \quad (\ddot{r}, r\dot{\theta}^2=0$ for b =2c)

2.227 - بازوی $OA$ با دستور $\theta=\theta_0 Sin(2\pi t/\tau)$ تاب می‌خورد. شتاب $A$ را برای $t=0$ تا $t=0.5$ s بـ $\tau=2$ s و $\theta_0=\pi/2$ و $OA=l=100$ mm بکشید.



نگاره 2.227




$\theta=\theta_o\sin(2\pi t/T)=(\pi/2)\sin\pi t \quad \dot{\theta}=(\pi^2/2)\cos\pi t$

$\ddot{\theta}=(-\pi^2/2)\sin\pi t \quad a_n=l\dot{\theta}^2=l(\pi^2/4)\cos^2\pi t$

$a_t=l\ddot{\theta}=-l(\pi^3/2)\sin\pi t$

$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=(l\pi^3/2)\sqrt{(\pi^2/4)\cos^4\pi t+\sin^2\pi t}$

$0<t<0.5$ s , $da^2/dt=0 \quad \cos\pi t=\sqrt{2}/\pi$

$\pi t=1.104$ rad $\quad t=0.351$ s

$a_{min}=1.470$ m/s$^2$ at $\theta=80.4^\circ$

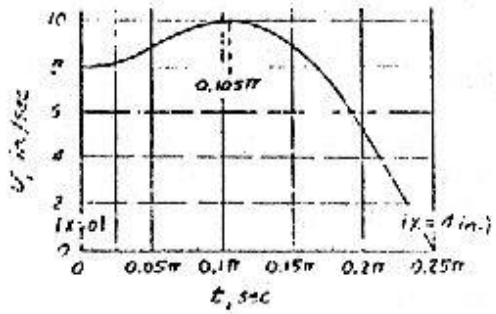
2.228 - اگر شیار قائم، با دستور $x=100Sin2t$ mm پس و پیش رود، اندازه تندی $P$ در شیا $y=\frac{x^2}{100}$ mm، در $x=100$ mm چگونه است؟

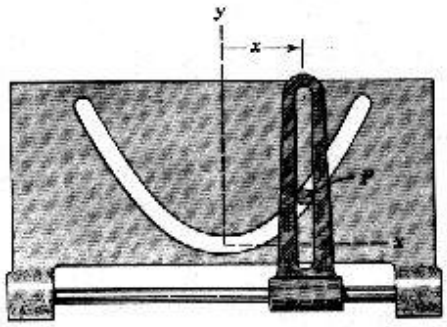
$y=x^2/100 \quad x=100\sin2t$

$\dot{y}=x\dot{x}/50=100\sin2t(200\cos2t)/50=400\sin2t\cos2t$

$\dot{x}=200\cos2t \quad v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=40000\cos^2 2t(1+4\sin^2 2t)$

$v=200\cos2t\sqrt{1+4\sin^2 2t} \quad dv/dt=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 2t=1/4$




نگاره 2.228

$\sin 2t=\sqrt{3/8}$ $\cos 2t=\sqrt{5/8}$ $v=250$ mm/s

$2t=37.76$ $t=18.88$ s

$x=61.2$ mm

2.229 - یک کشتی به جرم 16000 ton با نیروی $T=250$ kN در آب با نیروی اصطکاک $R=4.5v^2$ kN به راه می‌افتد و به اندازه $a=\frac{(T-R)}{m}$ شتاب می‌گیرد. نمودار v-s را برای 5 مایل نخست بکشید. تندی کشتی پس از 1 مایل چیست؟ بیشینه تندی کشتی چیست؟

$vdv=ads$ $a=(T-4.50v^2)/m$ $\int_0^v mvdv/(T-4.50v^2)=\int_0^s ds$

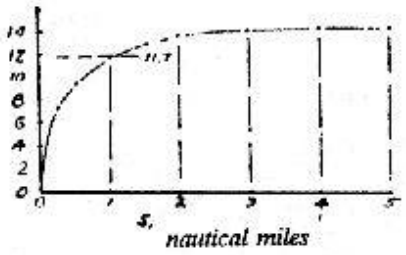
$s=(m/900)\ln(T/(T-4.5v^2))$ $e^{900s/m}=T/(T-4.50v^2)$

$v=\sqrt{T(1-e^{-900s/m})/4.50}$ $T=250$ kn $m=16000$ tons

$v=(3.6/1.852)\sqrt{250(1-e^{-900s/8525/16000})/4.50}$

$=14.49\sqrt{1-e^{-1.042}}$

$v_{1min}=11.7$ knots $v_{max}=14.49$ knots



# فـرگـرد سـه

# سیـنـتـیـک ذره
# Kinetics of Particles

3.1 - یک هواپیمای چهارموتوره 300 Mg که هر کدام نیروی 180 kN می‌سازد، با تندی 220 km/h از زمین برمی‌خیزد. طول باند پرواز چیست؟

$a=4T/m=4(180,000)/300,000=2.4\ m/s^2$

$v=(220\ km/h)(1\ h/3600\ s)(1000\ m/km)=61.1\ m/s$

$v^2-v_o^2=2a(s-s_o)\quad (61.1)^2=2(2.4)s\quad \underline{s=778\ m}$

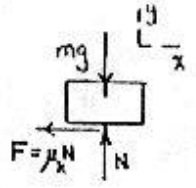
3.2 - بسته نشان داده، کجا و کی می‌ایستد؟

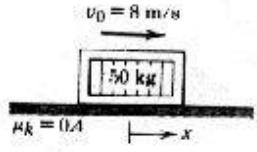
$\sum F_y=0\quad N-mg=0\quad N=mg\quad \sum F_x=ma_{GX}$

$-\mu_k mg=ma_{GX}=-(0.4)(9.81)=-3.92\ m/s$

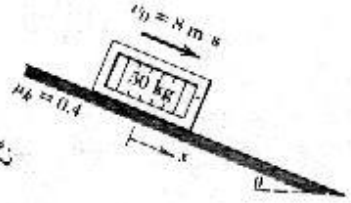
$v^2-v_o^2=2a(x-x_o)\quad 0-8^2=2(-3.92)(x-0)$

$\underline{x=8.15\ m}\quad v=v_o+at\quad 0=8-3.92t\ ,\ \underline{t=2.04\ s}$



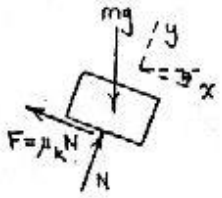




نگاره 3.2




نگاره 3.3

3.3 - بسته نشان داده، کجا و کی می‌ایستد؟




$\sum F_y=0\quad N-mg\cos\theta=0\quad N=mg\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x\quad mg\sin\theta-\mu_k mg\cos\theta=ma_{GX}$

$a_{GX}=g(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)$

a) $\theta=15^\circ$ $a_{GX}=9.81(\sin15^\circ-0.4\cos15^\circ)=-1.25\ m/s^2$

$v^2-v_o^2=2a(x-x_o)$ $0-8^2=2(-1.25)(x-0)$, $\underline{x=25.6\ m}$

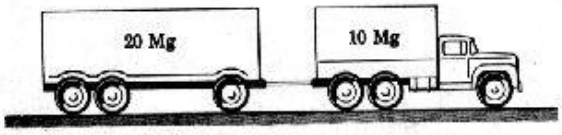
$v=v_o+at$ $0=8-1.25t$ , $\underline{t=6.39\ s}$

b) $\theta=30^\circ$: $a_{GX}=9.81(\sin30^\circ-0.4\cos30^\circ)=1.51\ m/s^2$

*3.4* - اگر خودرو با نیروی *20 kN* به راه افتد، کشش بین دو بخش، و شتاب آنها چیست؟

$\sum F=ma$ $20,000=30,000a$ $a=0.67\ m/s^2$

$\sum F=ma$ $T=2,000(0.67)=13,300\ N$ $\underline{T=13.3\ KN}$



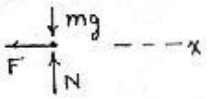

نگاره *3.4*

*3.5* - کودک، *12 kg* جرم دارد و خودرو با تندی *50 km/h* به دیوار می‌خورد و پس از *0.2 s* می‌ایستد. نیروی $F$ در تسمه‌های نگهدارنده صندلی کودک چیست؟

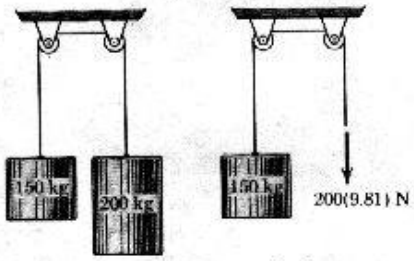
$50\ km/hr=13.89\ m/s$ $v=v_o+at$ $0=13.89+a(0.2)$

$a=-69.45\ m/s^2$

$\sum F_x=ma_x$ $-F=12(-69.45)$ $\underline{F=833.4\ N}$



نگاره *3.5*




(الف) (ب) نگاره *3.7*

*3.6* - پرسش پیش را با این گمان که تندی خودرو در برخورد، از دستور $v=v_0(b-e^{ct})$ پیروی می‌کند دوباره پاسخ دهید.

$v=v_o(b-e^{ct})$ $t=0$ $v_o=v_o(b-1)$ $b=z$

$t=0.2s$ $0=v_o(z-e^{c(0.2)})$ $z=e^{0.2c}$

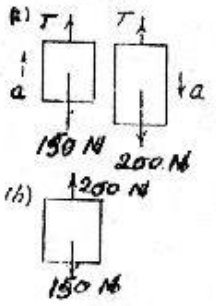
$\ln z=0.2c$ $c=3.466\ s^{-1}$ $\Rightarrow$ $v=13.89(z-e^{3.466t})$

$a=dv/dt=13.89(3.466)e^{3.466t}=48.14e^{3.466t}$

$a_{max}=a(t=0.2)=96.29\ m/s^2$

$$F_{max}=ma_{max}=12(96.29)=1155.5\ \text{N}$$

3.7 - شتاب استوانه $150\ kg$ چیست؟



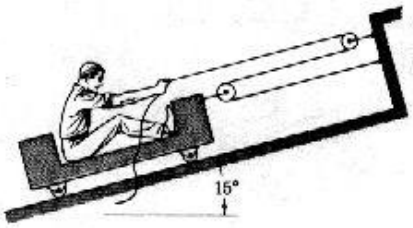

$$\sum F=ma;\ T-150(9.81)=150a$$
$$200(9.81)-T=200a \quad 50(9.81)=350a,$$
$$a=1.402\ \text{m/s}^2$$
$$(200-150)9.81=150a,\ a=3.27\ \text{m/s}^2$$

3.8 - ذره‌ای به جرم $3\ kg$ با تندی $4\ m/s$ در سوی $y$ با نیروی $F_y=5+2t^2$، پس از $t=3\ s$ به چه تندی می‌رسد؟

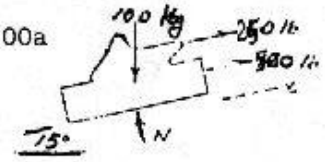
$$\sum F_y=ma_y:\ 5+2t^2=3a \quad a=dv/dt \quad \int_0^3 (5+2t^2)dt=3\int_4^v dv$$
$$5(3)+(2/3)3^2=3(v-4) \quad v=15\ \text{m/s}$$

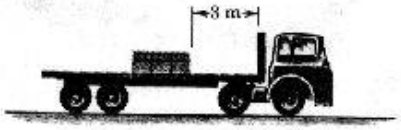
3.9 - اگر جرم مرد و گاری، $100\ kg$ باشد و مرد، ریسمان را با نیروی $250\ N$ بکشد، شتابش چیست؟

$$\sum F_x=ma_x \quad 500+250-100(9.81)\sin 15^\circ=100a$$
$$a=496/100=4.96\ \text{m/s}^2$$




نگاره 3.9

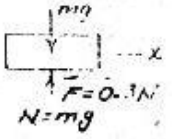



نگاره 3.10

3.10 - ضریب اصطکاک بین بسته و کف کامیون، $0.3$ است. کمترین فاصله‌ای که کامیون با تندی $70\ km/h$ می‌تواند در آن بایستد چیست؟

$$\sum F_x=ma_x \quad -0.3mg=ma_x$$
$$a_x=-0.3g=-0.3(9.81)=-2.94\ \text{m/s}^2$$
$$\int_v^0 vdv=\int_0^s a_x dx \quad -v^2/2=a_x s$$
$$s=-(70/3.6)^2/[-2(2.94)]=64.3\ \text{m}$$



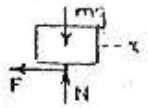
*3.11* -اگر کامیون پرسش پیش، با تندی *70 km/h*، پس از *50 m* بایستد، آیا بسته به دیوار پشتی می‌خورد؟ اگر چنین شود، تندی برخورد چیست؟ از ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی *0.25* و *0.3* بهره گیرید.

$v^2-v_o^2=2a_T(x-x_o)$ $0^2-(19.44)^2=2a_T(50-0)$

$a_T=-3.78\ m/s^2$ $\sum F_x=ma_x: -F=m(-3.78)$

$F=3.78\ m$ $F_{max}=\mu_s N=0.3(9.81m)=2.94\ m$

$F>F_{max}, F=\mu_k N$ $\sum F_x=ma_x: -0.25mg=ma_c$




$a_c=-2.45\ m/s^2$

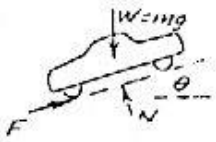
$a_{c/T}=a_c-a_T=-2.45-(-3.78)=1.328\ m/s^2$

$v_{c/T}^2-v_{c/T_o}^2=2a_{c/T}(x_{c/T}-x_{c/T_o})$

$v_{c/T}^2-0^2=2(1.328)(3-0), v_{c/T}=2.82\ m/s$

stopping time=5.14 s impacts at 2.13 s

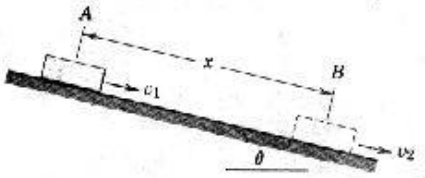
*3.12* -شتاب خودرو پس از *A* چیست؟




For $\theta=\theta_1$ $a=0$ $\sum F=0; F=W\sin\theta_1$ $\theta=\theta_2 \Rightarrow \sum F=ma$

$\Rightarrow mg\sin\theta_1-mg\sin\theta_2=ma$ $a=g(\sin\theta_1-\sin\theta_2)$

نگاره *3.12*

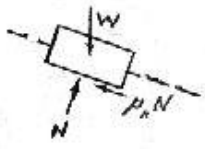



نگاره *3.13*

*3.13* - با $v_1=20\ m/s$ و $v_2=10\ m/s$ و $x=75\ m$ و $\theta=15^\circ$، ضریب اصطکاک جنبشی چیست؟

$\sum F_x=ma_x; W\sin15^\circ-\mu_k(W\cos15^\circ)=(W/g)a_x$

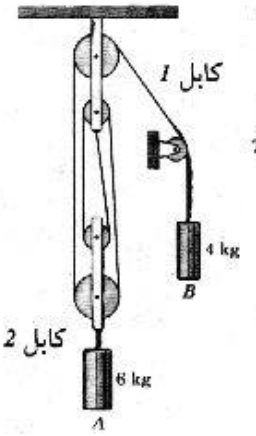
$$\int_{20}^{10} v\,dv=\int_0^{75} a_x\,dx,\ a_x=\frac{100-400}{2(75)}=-2\ m/s^2$$



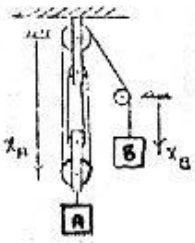

$\Rightarrow g(\sin15^\circ-\mu_k\cos15^\circ)=a_x=-2$

$\mu_k=\tan15^\circ+2/(9.81\times0.9650)=0.479$

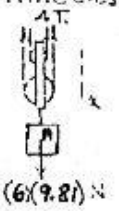
3.14 - شتاب $A$ و $B$ پس از رهایی دستگاه چیست؟

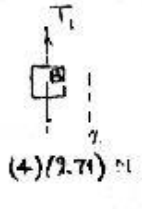



نگاره 3.14




Kinetics:




$4x_A+x_B=L_{rope}+cte \quad 4a_A+a_B=0 \quad (1)$

$\sum F_x=ma_x: 6(9.81)-4T_1=6a_A \quad (2)$

$\sum F_x=ma_x: 4(9.81)-T_1=4a_B \quad (3)$

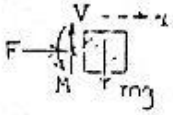
$(1)-(3) \Rightarrow a_A=-1.401 \text{ m/s}^2 \quad a_B=5.61 \text{ m/s}^2$

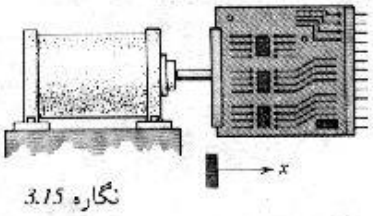
$T_1=16.82 \text{ N} \quad T_2=4T_1=67.3 \text{ N}$

3.15 - لرزاننده، بسته‌ای به جرم $m$ را با $x=XSin\omega t$ می‌لرزاند. نیروی بیشینه چیست؟

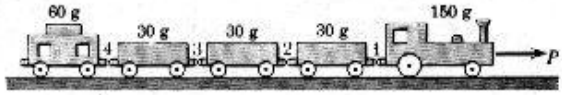
$x=X\sin\omega t \quad \dot{x}=X\omega\cos\omega t \quad \ddot{x}=-X\omega^2\sin\omega t \quad \ddot{x}_{max}=X\omega^2$

$\sum F_x=ma_x: F=m(-X\omega^2\sin\omega t) \quad F_{max}=mX\omega^2$



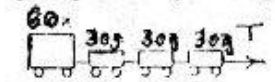




نگاره 3.15



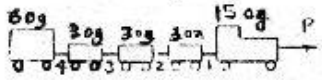

نگاره 3.16

3.16 نیروی بیشینه آهنرباهای چسباننده واگنهای بازی، $0.9$ N است. بیشینه $P$ چیست؟ اگر $P$ بزرگتر شود کدام واگن جدا می‌شود؟



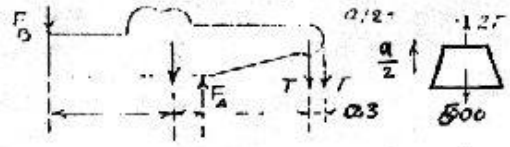

- پیوند $d$ پیش از همه می‌گسلد

$\sum F_x=ma_x \quad T=0.9=(150/1000)a \quad a=6 \text{ m/s}^2$




$\sum F_x=ma_x \quad P=(300/1000)(6) \quad P=1.8 \text{ N}$

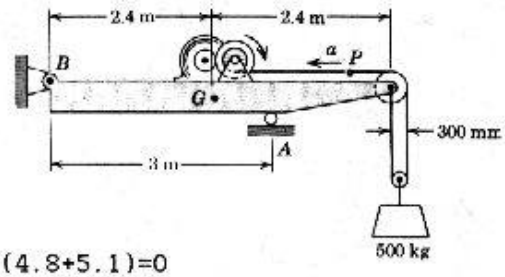
3.17 - جرم تیر نشان‌داده، با گرانیگاه $G$، $1200$ kg است. اگر شتاب $\rho$، $6$ m/s$^2$ باشد، واکنش در $A$ چیست؟



$\sum F=ma$

$2T-500(9.81)=500(6/2)$

$T=3202.5$ N




نگاره 3.17

$\sum M_B=0$

$1200(9.81)(2.4)-3F_A+322.5(4.8+5.1)=0$

$F_A=19.99$ N

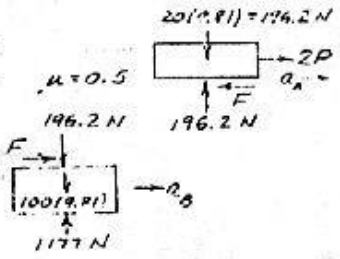
*3.18* - اگر ضریب اصطکاک بین بسته‌ها، 0.5 باشد، شتاب آنها با *(a)* $P=60$ *N* و *(b)* $P=40$ *N* چیست؟

(a) $2P=120$ N $\quad F_{max}=0.5(196.2)-98.1$ N$<2P$

slipping $\Rightarrow F=98.1$ N

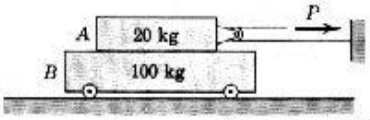
A; $\sum F=ma; 120-98.1=20a_A \quad a_A=1.10$ m/s$^2$

B; $\sum F=ma; 98.1=100a_B \quad a_B=0.98$ m/s$^2$

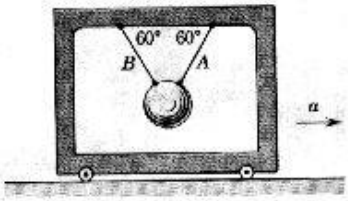



(b) $2P=80$ N$<F_{max}$ no slipping

$\sum F=ma; \quad 80=120a \quad a_A=a_B=a=0.67$ m/s$^2$

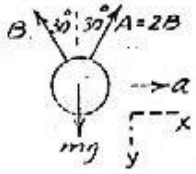



نگاره 3.18




نگاره 3.19

*3.19* - شتاب $a$ چه باشد تا کشش در $A$ دو برابر $B$ گردد؟

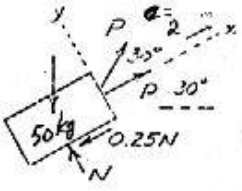



$\sum F_x=ma_x \quad 2B\sin 30-B\sin 30=ma$

$\sum F_x=0 \quad 2B\cos 30+B\cos 30-mg=0$

$\Rightarrow \quad a=9/3\sqrt{3}$

*3.20* - کشش $P$ چه باشد تا شتاب بسته، $2$ *m/s*$^2$ گردد؟




$\sum F_x=ma_x$

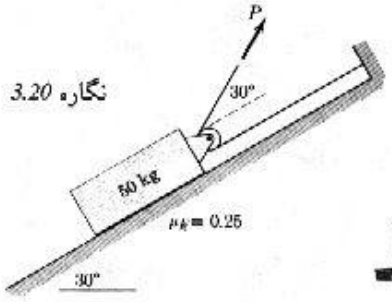
$P(1+\cos 30^\circ)-0.25N-50(9.81)\sin 30^\circ=50(2)$

$\sum F_y=0; \quad N+P\sin 30^\circ-50(9.81)\cos 30^\circ=0$

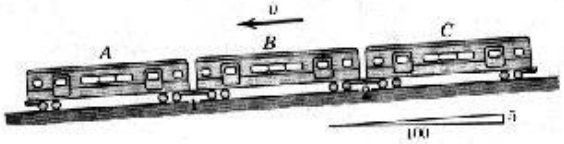
$1.866P-0.25N=345.25 \quad 0.5P+N=424.8$

$\Rightarrow \quad P=226.74$ N

نگاره 3.20




نگاره 3.21



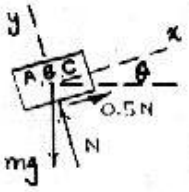

3.21 - جرم هر واگن، 2500 kg است و همگی با هم ترمز می‌گیرد. اگر نیروی ترمز، نیم برابر نیروی واکنش زمین باشد، شتاب قطار و کشش بستهای 1 و 2 را برای هنگامی‌که (a) همه ترمزها درست است و (b) ترمز A از کار می‌افتد و (c) ترمز B از کار می‌افتد و (d) ترمز C از کار می‌افتد، بیابید.

$\theta=\tan^{-1}(5/100)=2.86^\circ$

$\sum F_y=0 \quad N=mg\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x \quad 0.5mg\cos\theta-mg\sin\theta=ma$

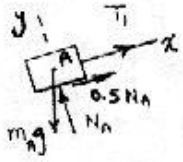
$a=g(0.5\cos\theta-\sin\theta)=\underline{4.41\ m/s^2}$




$\sum F_y=0 \quad N_A=m_A g\cos\theta$

$\sum F_x=ma_x \quad T_1+0.5m_A g\cos\theta-m_A g\sin\theta=m_A(4.41)$

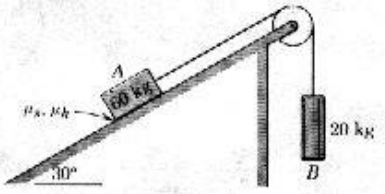
$\underline{T_1=0} \quad \underline{T_2=0}$

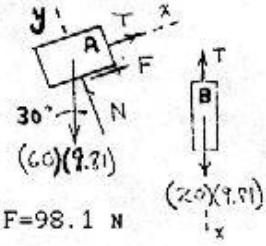



| By | similar(b) | angles(c) | d |
|---|---|---|---|
| a | 2.78 $m/s^2$ | 2.78 | 2.78 $m/s^2$ |
| $T_1$ | 8160 N(T) | 4080 N(C) | 4080 N(C) |
| $T_2$ | 4080 N(T) | 4080 N(T) | 8160 N(C) |

3.22 - شتاب A و B و کشش ریسمان را پس از رهایی، برای (a) $\mu_s=0.25$ و $\mu_k=0.2$ و (b) $\mu_s=0.15$ و $\mu_k=0.1$ بیابید.

نگاره 3.22




$T=196.2$ N

$\sum F_x=0 \quad 196.2+F-(60)(9.81)\sin30^\circ=0 \quad F=98.1$ N

$F_{max}=\mu_s N=0.25(60)(9.81)\cos30^\circ=127.4$ N

no motion ⇒ a=0  T=196.2 N

$F_{max}=0.15(60)(9.81)\cos30^\circ=76.5$ N  motion

A: $\sum F_x=ma_x$

$T-60(9.81)\sin30^\circ+0.1(60)(9.81)\cos30^\circ=60a$

B: $\sum F_y=ma_y$  $20(9.81)-T=20a$

⇒ $a=-0.589$ m/s² $T=208$ N

3.23 - با $\mu_s=0.25$ و $\mu_k=0.2$، شتاب $A$ و $B$ و کشش ریسمان، پس از رهایی چیست؟

B: $2T=196.2$  $T=98.1$ N

A: $\sum F_x=0$  $98.1-588.6\sin30^\circ+F=0$  $F=196.2$ N

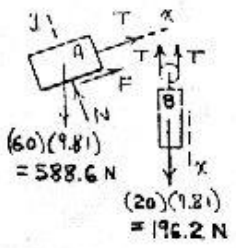
$F_{max}=\mu_s N=0.25(588.6)\cos30^\circ=127.4$ N

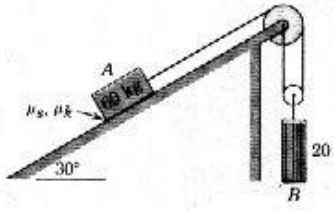
$F>F_{max}$ ⇒ motion  $a_A=2a_B=2a$  A: $\sum F_x=ma_x$

$T+0.2(588.6\cos30^\circ)-588.6\sin30^\circ=60(2a)$

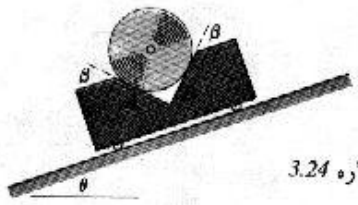
B: $\sum F_x=ma_x$: $-2T+196.2=20a$

$a=-0.725$ m/s² $T=105.4$ N




نگاره 3.23

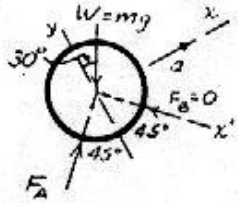



نگاره 3.24

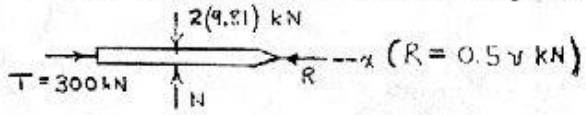
3.24 شتاب بیشینه ارابه رو به بالا چه باشد که استوانه به جرم $m$، با $\beta=45^\circ$ و $\theta=30^\circ$ نیفتد؟

$\sum F_x=ma_x$; $mg\cos(30^\circ+45^\circ)=ma\cos45^\circ$

$a=(\cos75^\circ/\cos45^\circ)g=9.81(0.2588/0.707)=0.366g$

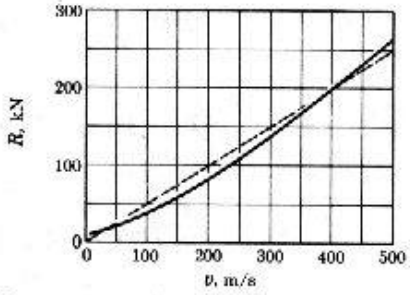



3.25 - نیروی مقاوم $R$ را با خط‌چین جانشین کنید و بگویید با $T=300$ kN و $m=2$ Mg، موشک کی به 300 m/s می‌رسد؟




$\sum F_x=ma_x$  $300-0.5v=2a$  $(300-0.5v)dx=2vdv$

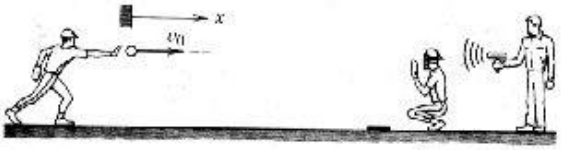
نگاره 3.25



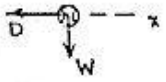

$$\int_0^x dx = 2\int_0^v \frac{v\,dv}{300-0.5v}$$

$$x = 2/(0.5)^2[300-0.5v-300\ln 9300-0.5v)]_0^{400} \qquad \underline{x = 1037 \text{ m}}$$

3.26 - بازیکن، توپی به جرم $0.146\ kg$ و محیط $230\ mm$ را با $v_0 = 140\ km/h$ پرتاب می‌کند. اگر نیروی پرا از دستور $D = 0.4(\rho v^2/2)S$ به دست‌آید، وابستگی $v$-$x$ در بازه $x = 18\ m$ چیست؟




نگاره 3.26




$$P = \pi D = 0.23 \text{ m} \quad D = 0.073 \text{ m} \quad s = \pi D^2/4 = 0.0042 \text{ m}^2$$

$$\text{Drag} \quad D = C_D(\rho v^2/2)s = (C_D\rho s/2)v^2 =$$

$$= (1/2)(0.4)(1.2062)(0.0042)v^2 = 0.001v^2 = kv^2$$

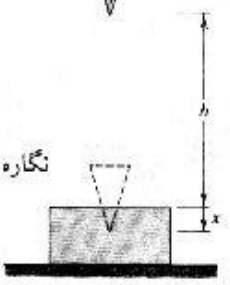
$$\sum F_x = ma_x \quad -kv^2 = mv\,dv/dx \quad -k/m\int_0^x dx = \int_{v_0}^v dv/v$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{-(k/m)x} = v_0 e^{-0.007x}$$

$$v_0 = 140 \text{ km/hr} = 38.89 \text{ m/s}, \quad x = 18 \text{ m}$$

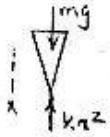
$$v_{18} = 38.89e^{-0.007x} = 34.31 \text{ m/s} = 123.5 \text{ km/hr}$$

3.27 - سوزن $m$ از بلندی $h$ می‌افتد و با اصطکاکی $R = -kx^2$ در $x = d$ می‌ایستد. $k$ چیست؟




نگاره 3.27

$$\sum F_x = ma_x \quad mg - kx^2 = mv(dv/dx)$$




$$\int_0^d (g - kx^2/m)dx = \int_{v_0}^0 v\,dv$$

$$gd - (k/3m)d^3 = -v_0^2/2$$

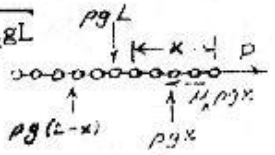
$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad \underline{k = (3mg/d^3)(h+d)}$$

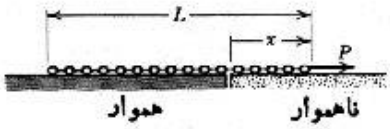
*3.28* - زنجیر از $x=0$ با نیروی $P$ به راه می‌افتد و بر سطح ناهموار با ضریب اصطکاک $\mu_k$ کشیده می‌شود. تندی زنجیر در $x=L$ چیست؟ کمترین $P$ چیست؟

$$\sum F_x=ma_x \quad P-\mu_k\rho gx=\rho La_x \quad \int_0^v vdv=\int_0^L a_x dx$$

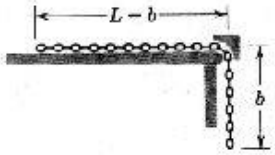
$$v^2/2=\int_0^L (P/\rho L-\mu_k gx/L)=P/\rho-\mu_k gL/2 \quad v=\sqrt{2P/\rho-\mu_k gL}$$

$$P>\mu_k\rho gx \Rightarrow \underline{P_{min}=\mu_k\rho gL}$$

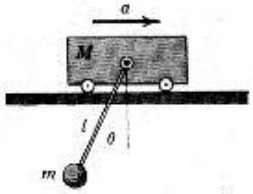



نگاره *3.28*




نگاره *3.29*




نگاره *3.30*

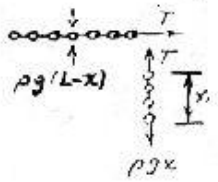
*3.29* - زنجیر از آرایش نشان داده، با یک تکان به راه می‌افتد. تندی آن به هنگام افتادن آخرین ذره چیست؟

$$\sum F_x=ma_x$$

$$(L-x)\text{part: } T=\rho(L-x)a_x \quad (x)\text{part: } \rho gx-T=\rho xa_x$$

$$\Rightarrow a_x=gx/L \quad \int_0^v vdv=\int_0^L a_x dx$$

$$v^2/2=gx^2/2L\Big]_b^L=(g/2L)(L^2-b^2) \quad v=\sqrt{gL(1-b^2/L^2)}$$

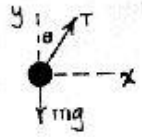


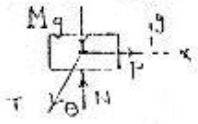

*3.30* - اگر $M$ با شتاب $a$ پیش رود، زاویه $\theta$ و نیروی شتاب دهنده چیست؟

$$\sum F_y=0 \quad T\cos\theta-mg=0 \quad T=mg/\cos\theta$$

$$\sum F_x=ma_x \quad T\sin\theta=m_x \quad (mg/\cos\theta)\sin\theta=ma$$

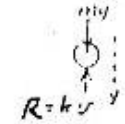
$$\underline{\theta=\tan^{-1}(a/g)}$$




$$\sum F_x=ma_x \quad P-T\sin\theta=Ma \quad P=ma+Ma=\underline{(m+M)a}$$

*3.31* - گلوله‌ای در آب با نیروی برای $R=kv$ می‌افتد. وابستگی ژرفای $h$ و تندی $v$ چیست؟

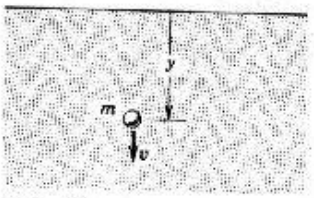



$$\sum F_y=ma_y \quad mg-kv=ma \quad a=g-kv/m \quad vdv=ady$$

$$\int_0^v \frac{vdv}{g-kv/m}=\int_0^h dy$$

$$h=(m/k)^2(-kv/m-g\ln(1-kv/mg))$$

$$h=(m/k)^2 g\ln[1/(1-kv/mg)]-mv/k$$

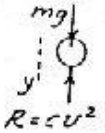



نگاره 3.31

3.32 - در پرسش پیش اگر $R=cv^2$ باشد، وابستگی $h$ و $v$ چیست؟

$$\sum F_y=ma_y \quad mg-cv^2=ma \quad a=g-cv^2/m$$

$$vdv=ady \quad \int_0^v vdv/(g-cv^2/m)=\int_0^h dy$$




$$h=-(m/2c)\ln(g-cv^2/m)]_0^v \quad h=(m/2c)\ln\left(\frac{mg}{mg-cv^2}\right)$$

3.33 در $x_A=0.4\ m$ تندی $A$ ، $0.9\ m/s$ است. شتاب هر لغزنده و نیرو در میله چیست؟

$$x_A^2+x_B^2=l^2 \quad x_A\dot{x}_A+x_B\dot{x}_B=0 \quad x_A\ddot{x}_A+\dot{x}_A^2+x_B\ddot{x}_B+\dot{x}_B^2=0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_B=-x_A\dot{x}_A/x_B=-(0.4)(0.9)/0.3=-1.2\ m/s$$

$$\ddot{x}_B=-(x_A\ddot{x}_A+\dot{x}_A^2+\dot{x}_B^2)/x_B=-7.5-(4/3)\ddot{x}_A$$

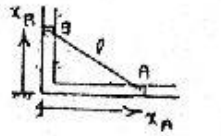
$$a_B=-7.5-(4/3)a_A \quad (1)$$

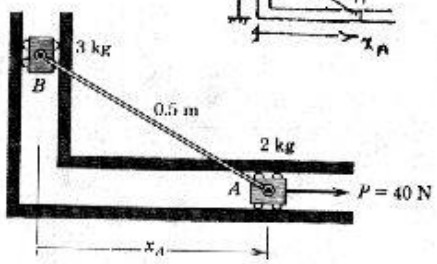
$$\sum F_x=ma_x \quad 40-(4/5)T=2a_A \quad (2)$$

$$\sum F_x=ma_x \quad -(3/5)T=3a_B \quad (3)$$

$$(1)-(3) \Rightarrow a_A=1.364\ m/s^2$$

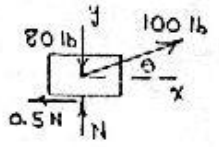
$$a_B=-9.32\ m/s^2 \quad T=46.6\ N$$



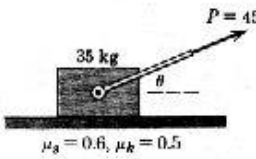

نگاره 3.33

3.34 - $\theta$ چه باشد تا بسته به شتاب $9\ m/s^2$ برسد؟




$$\sum F_x=ma_x: 450\cos\theta-0.5N=35(9)$$

$$\sum F_y=0: N-35(9.81)+450\sin\theta=0 \Rightarrow 2\cos\theta+\sin\theta=2.16$$




$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta} \Rightarrow 5\cos^2\theta-8.64\cos\theta+3.67=0$$

$$\theta=12.57^\circ, 41.23^\circ$$

$$\theta=12.57^\circ \Rightarrow N=343-450\sin 12.57^\circ=245\ N$$

$$F_{max}=0.5(245)=122.5\ N<450\cos 12.57^\circ=439\ N$$

نگاره 3.34

$\theta=41.23^\circ \Rightarrow N=46.76$ N

$F_{max}=23.38$ N  $450\cos 41.23^\circ=338.43$ N

3.35 - نیروی $P$ از صفر تا $260$ N افزایش می‌یابد شتاب بسته‌ها چگونه است؟

$N_B=755.4$ N  $F_{B_{max}}=\mu_s N=(0.15)(755.4)=113.3$ N

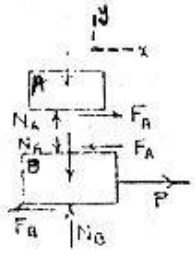
$0 \le P \le 113.3$  no motion

$N_A=343.4$ N  $F_{A_{max}}=0.2(343.4)=68.7$ N

A: $\sum F_x=ma_x$  $68.7=35a_A$  $a_A=1.96$ m/s$^2$

system: $\sum F_x=ma_x$

$P-0.1(755.4)=77(1.96)$  $P=226.5$ N




$113.3 \le P \le 226.5$

$\sum F_x=ma_x$  $P-0.1(755.4)=77a$

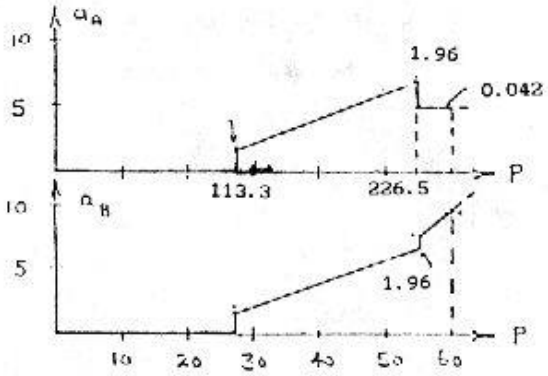
$a_A=a_B=a=0.013P-0.986$

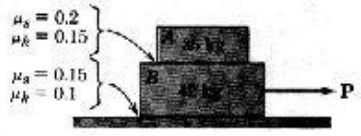
$P \ge 226.5$ N

A: $0.15(343.4)=35a_A$  $a_A=0.042$ m/s$^2$

B: $P-(0.1)(755.4)-(0.15)(343.4)=42a_B$

$a_B=0.023P-3.03$




نگاره 3.35

3.36 - $A$ با شتاب $a$ پیش می‌رود. $\theta$ چه باشد تا هیچگاه $B$ بر $A$ نلغزد؟ ضریب اصطکاک بین $A$ و $B$، $\mu_s$ است.

$\sum F_x=ma_x$  $N\sin\theta+F\cos\theta=ma$

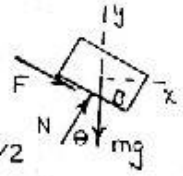
$\sum F_y=0$  $N\cos\theta-F\sin\theta-mg=0$

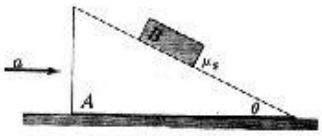
$\Rightarrow F=m(a\cos\theta-g\sin\theta)$ $N=m(a\sin\theta+g\cos\theta)$

$F=\mu_s N \Rightarrow m(a\cos\theta-g\sin\theta)=\mu_s m(a\sin\theta+g\cos\theta)$

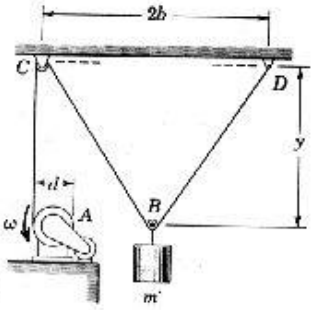
$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}(a-\mu_s g)/(\mu_s a+g)$

$(a\gg g) \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1/\mu_s)$ $\tan^{-1}(1/\mu_s) \le \theta \le \Pi/2$

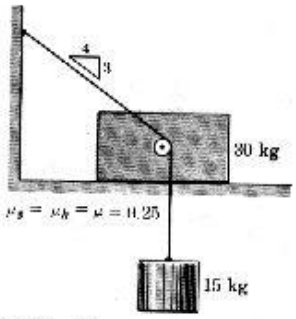



نگاره 3.36




نگاره 3.37




نگاره 3.38

3.37 - وابستگی کشش $T$ و جابه‌جایی $y$ چیست؟

$\sum F_y=ma_y$ $mg-T=m\ddot{y}$ $y^2+b^2=s^2$ $s=\overline{CB}=\overline{BD}$

$y\dot{y}+0=s\dot{s}$ $2\dot{s}=-d\omega/2 \Rightarrow y\dot{y}=s(-d\omega/2)$

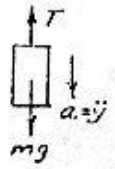
$\dot{y}^2+y\ddot{y}=\dot{s}(-d\omega/4)+0$

$\Rightarrow \ddot{y}=(-\dot{y}^2-\dot{s}\omega d/4)/y=(-s^2\omega^2d^2/16y^2+\omega^2d^2/16)/y$

$\ddot{y}=(\omega^2d^2/16y)(1-s^2/y^2)=(\omega^2d^2/16y)[1-(b^2+y^2)/y^2]$

$=-\omega^2d^2b^2/16y^3$

$\Rightarrow T=mg+m\omega^2d^2b^2/16y^3=mg(1+\omega^2d^2b^2/16gy^3)$




3.38 - دستگاه رها می‌شود. کشش $T$ در ریسمان و شتاب بسته بزرگ چیست؟

$a=-\ddot{x}$ $a_1=-\ddot{l}$ $l^2=b^2+x^2$ $l\dot{l}=0+x\dot{x}$ $\dot{l}=(x/l)\dot{x}$

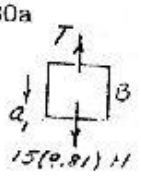
$\Rightarrow a_1=(4/5)a$

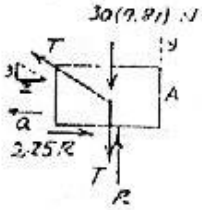
A: $\sum F_y=0$ $R+(3/5)T-30(9.81)-T=0$ $R=0.4T+294.3$

$\sum F_x=ma_x$ $0.8T-0.25(0.4T+294.3)=30a$

B: $\sum F_y=ma_y$; $15(9.81)-T=15(4a/5)$

$T=138.0$ N $a=0.77$ m/s²



*3.39* - دو گلوله نشان داده با نیروی گرانش به سوی هم حرکت‌می‌کند. زمان و تندی برخورد چیست؟

$F=Gm^2/x^2 \quad m=\rho v=7210(4\pi/3)(0.05^3)=3.775\ kg$

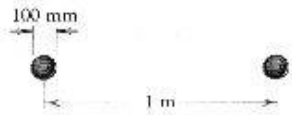
$\sum F_x=ma_x \quad -Gm^2/(2x)^2=mv(dv/dx)$

$$(-Gm/4)\int_{x_0=0}^{x} dx/x^2=\int_0^v vdv$$

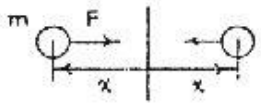
$$v=\sqrt{Gm}\sqrt{(1/2x)-1}=$$

$$=\sqrt{(6.673\times10^{-11})(3.775)}\sqrt{(1/2(0.05))-1}=$$

$$=4.76\times10^{-5}\ m/s$$



نگاره *3.39*

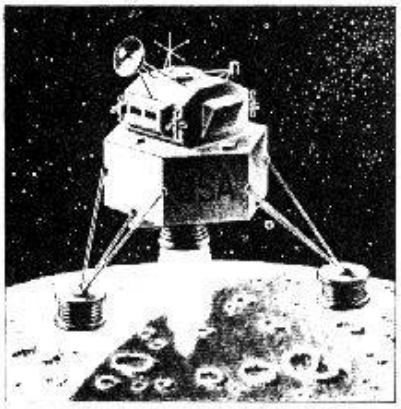



$$dx/dt=-\sqrt{Gm}\sqrt{\frac{1/2-x}{x}}$$

$$\int_{0.5}^{0.05}\sqrt{x/(1/2-x)}\qquad dx=\sqrt{Gm}\int_0^t dt$$

$t=48,800\ s \quad t=13\ hr\ 33\ min$

*3.40* - ماه‌نشینی به جرم *17.5 Mg* با تندی *1.5 m/s* بر ماه می‌افتد. اگر سختی هر یک از سه فنر آن *15 kN/m* و شتاب گرانشی ماه، *1.62 m/s²* باشد، بیشینه تکان *(jerk)* ماه‌نشین چیست؟


نگاره *3.40*

$g'=1.62\ m/s^2 \quad \sum F_x=m\ddot{x} \quad mg'-3kx=m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x}+\omega^2x=g' \quad \omega_n=\sqrt{3k/m}$$

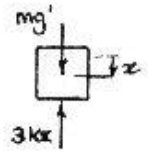
$$x=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t+g'/\omega_n^2$$

$t=0 \quad x=0 \quad A=-g'/\omega_n^2$

$t=0 \quad \dot{x}=v_o=1.5\ m/s \quad B\omega_n=v_o \quad B=v_o/\omega_n$

$$J=\dddot{x}=-\omega_n^2\dot{x}$$

$$=-\omega_n^2[(g'/\omega_n)\sin\omega_n t+v_o\cos\omega_n t)$$

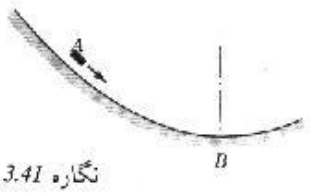



$$J=-\omega_n^2(g'\cos\omega_n t-v_o\omega_n\sin\omega_n t)=0$$

$$\tan\omega_n t=g'/(v_o\omega_n),\ \sin\omega_n t=g'/\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2}$$

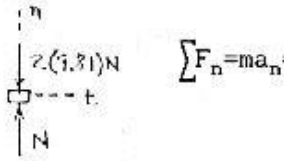
$$\cos\omega_n t=v_o\omega_n/\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2} \quad J=-\omega_n\sqrt{v_o^2\omega_n^2+g'^2}$$

$|J|=4.65\ m/s^2$

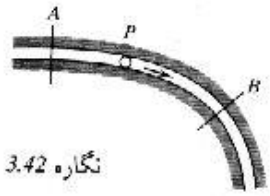


نگاره *3.41*

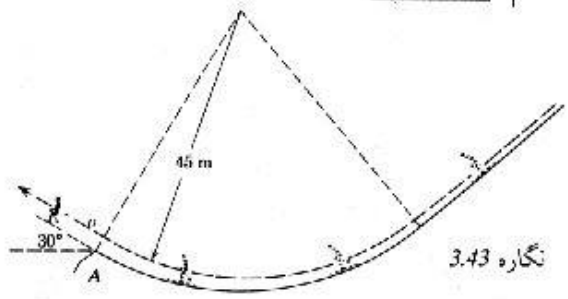
*3.41* - ذره $A$ به جرم $2\ kg$ با تندی $3\ m/s$ از $B$ با شعاع خمیدگی $1.5\ m$ می‌گذرد. نیروی واکنش زمین بر $A$ چیست؟




$$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho \quad N-2(9.81)=2(3^2)/1.5 \quad \underline{N=31.6\ N}\ \uparrow$$

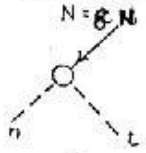



نگاره *3.42*




نگاره *3.43*

*3.42* - ذره $P$ به جرم $1.5\ kg$ با تندی $2\ m/s$ از $A$ پرتاب شده و هنگام گذر از $B$، نیروی واکنش $8\ N$ می‌پذیرد. شعاع خمیدگی در $B$ چیست؟

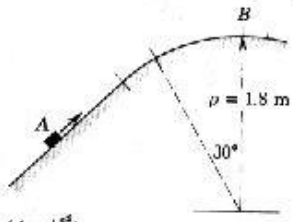



$$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho: \quad 8=1.5(2^2/\rho) \quad \underline{\rho=0.750\ m}$$

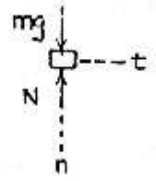
*3.43* - اسکی بازی به جرم $80\ kg$ با تندی $25\ m/s$ از $A$ می‌پرد. واکنش زمین بر او چیست؟

$$\sum F_n = ma_n \quad N-785\cos 30^\circ = 80(25^2/45)$$
$$N=1791\ N$$

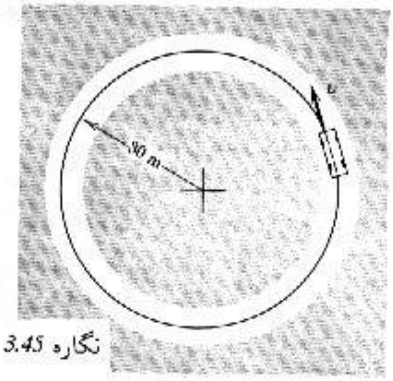
*3.44* - ذره $A$ به جرم $2\ kg$ با تندی $2\ m/s$ از $B$ می‌گذرد. واکنش زمین بر آن چیست؟




نگاره *3.44*

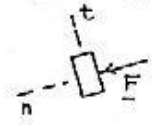



$$\sum F_n = ma_n = mv^2/\rho: 2(9.81)-N=2(2^2/1.8)$$
$$\underline{N=15.18\ N}$$




نگاره *3.45*

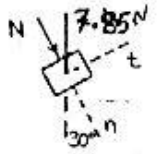
*3.45* - اگر خودروی $1400\ kg$ با تندی $55\ km/h$ بر مسیر نشان داده بگردد، دو تا از چرخهایش از زمین بلند می‌شود. $a_n$ و نیروی اصطکاک زمین چیست؟




$$a_n = v^2/\rho = [(55/3.6)^2]/30 = 0.793g$$

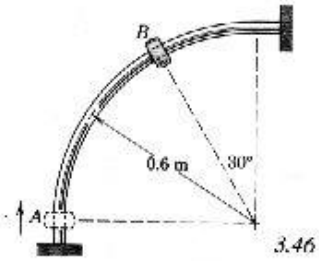
$\sum F_n=ma_n: 1400(7.78)=10892$ N

*3.46* - ماسوره *0.8 kg* از *A* به بالا پرتاب می‌شود و با تندی *4 m/s* از *B* می‌گذرد. *(a)* واکنش میله و *(b)* آهنگ کاهش تندی چیست؟

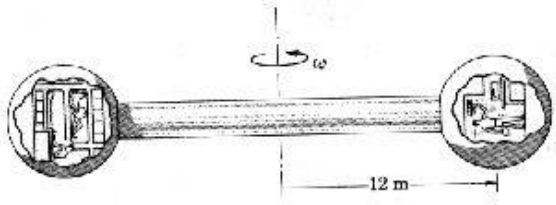



$\sum F_n=mv^2/\rho: N+7.85\cos 30^\circ=0.8(4^2/0.6)$ $N=14.53$ N

$\sum F_t=ma_t: -7.85\sin 30^\circ=0.8\dot{v}$ $\dot{v}=-4.9$ m/s²




نگاره *3.46*



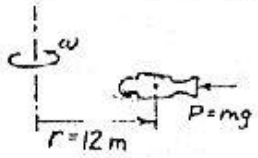

نگاره *3.47*

*3.47* - تندی چرخشی ایستگاه فضایی چه باشد تا در اتاقها، گرانش زمین پدید آید؟

$\sum F_n=ma_n$ $mg=mr\omega^2$ $\omega=\sqrt{g/r}$

$\omega=\sqrt{9.81/12}=0.904$ rad/s

$N=0.904(60/2\pi)=8.63$ rev/min

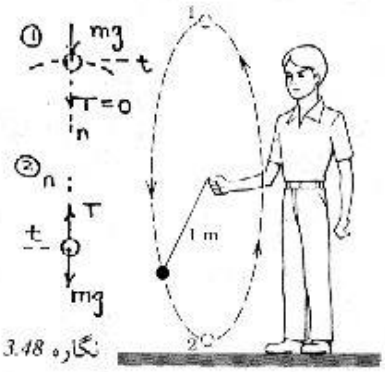



*3.48* - کودک، گلوله *50 g* را می‌چرخاند. کمترین تندی گلوله در *1* و کشش نخ در *2* چیست؟

$\sum F_n=mv^2/\rho$ $mg=mv^2/1$ $v=\sqrt{g}=3.13$ m/s

$\sum F_n=mv^2/\rho$ $T-mg=mg/1$

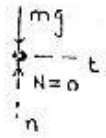
$T=2mg=2(0.050)(9.81)=0.981$ N




نگاره *3.48*

نگاره *3.49*

*3.49* - $\rho$ چه باشد تا در هواپیما با تندی *900 km/h*، بی‌وزنی پدید آید؟



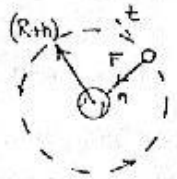

$\sum F_n=ma_n$ $mg=mv^2/\rho$ $\rho=6371$ m

*3.50* - بلندی پرواز ماهواره چه باشد تا دماهنگ آن $h$ *23.9344* باشد؟

$\sum F_n=ma_n \quad T\sin\beta=m(l\sin\beta)\omega^2$

$\sum F_y=0 \quad T\cos\beta-mg=0 \quad \underline{T=ml\omega^2}$

$\cos\beta=mg/T=mg/ml\omega^2 \quad l\cos\beta=h=\underline{g/\omega^2}$



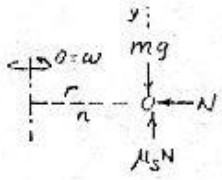

*3.51* - کمترین تندی چرخشی چه باشد تا ذره $A$ با ضریب اصطکاک $\mu_s$ به پایین نلغزد؟

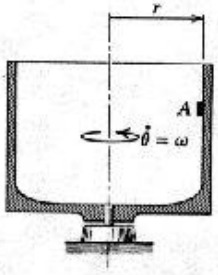
$\sum F_n=ma_n \quad F=Gmm_e/(R+h)^2=mv^2/(R+h)$

$v=s/t=2\pi(R+h)/[23.944x3600]$

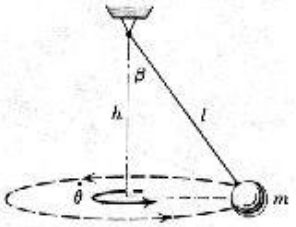
$v=2\pi(R+h)/[23.944x3600]=\sqrt{Gm_e/(R+h)}$

$\Rightarrow \underline{h=3.580x10^7 m} \quad (35,800\ km)$

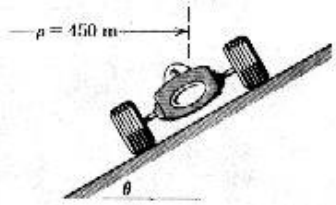



نگاره *3.51*

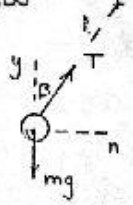



نگاره *3.52*




نگاره *3.53*

*3.52* - بلندی $h$ و کشش ریسمان چیست؟



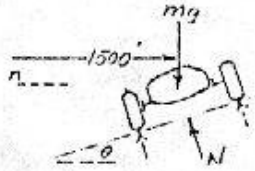

$\sum F_n=ma_n;N=mr\omega^2 \quad \sum F_y=0;\mu_s(mr\omega^2)=mg$

$\omega^2=g/(\mu_s r) \quad \omega=\sqrt{g/(\mu_s r)}$

*3.53* - $\theta$ چه باشد تا خودرویی با تندی *200 km/h* به هنگام گذر از پیچ $m$ *450* به هیچ سو نلغزد؟

$a_n=g\tan\theta \quad \theta=\tan^{-1}(a_n/g)=\tan^{-1}(v^2/g\rho)$

$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}(0.641) \quad \underline{\theta=32.7^\circ}$




*3.54* - اگر در پرسش پیش، $\theta=20^\circ$ و $m$ *300* و $\rho$ و $\mu_s=0.9$ باشد، بازه تندی خودرو برای لیز نخوردن چیست؟

$\sum F_y=0: N\cos\theta-mg-\mu_s N\sin\theta=0$

$\sum F_n=ma_n: N\sin\theta+\mu_s N\cos\theta=mv^2/\rho$

$v=\sqrt{\rho g(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta-\mu_s\sin\theta)}$ =

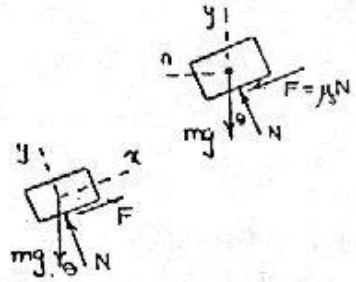
$=74.4$ m/s

$\sum F_x=0 \quad F=mg\sin\theta=0.342mg$

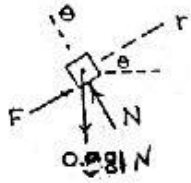
$\sum F_y=0 \quad N=mg\cos\theta=0.940mg$

$F_{max}=\mu_s N=0.9(0.940mg)=0.846mg$

$F>F_{max} \Rightarrow$ no slip $\Rightarrow$ $0\le v\le 74.4$ m/s



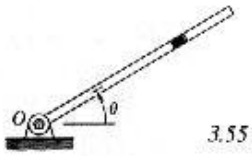

*3.55* - ذره *0.1 kg* با تندی *1.2 m/s* درون لوله تو پوچ چرخنده با *3 rad/s* در $\theta=30^\circ$، به سوی *O* می‌لغزد، واکنش لوله بر ذره چیست؟



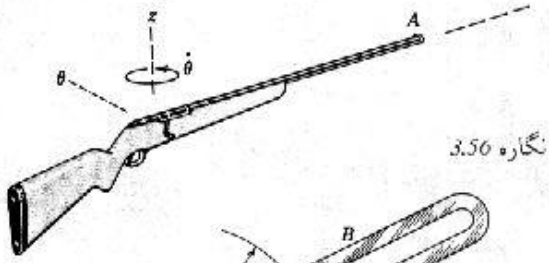

$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)$

$N-0.981\cos 30^\circ=0.1(2)(-1.2)(3)$

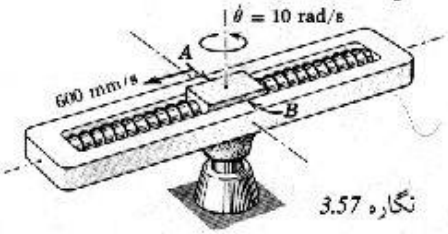
$N=0.1296$ N



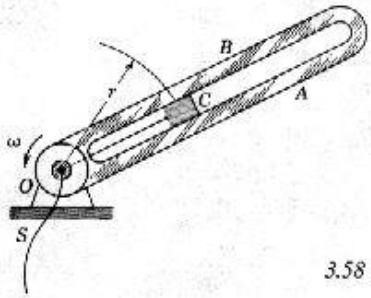

نگاره *3.55*




نگاره *3.56*

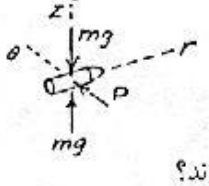



نگاره *3.57*



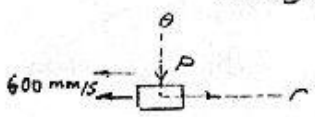

نگاره *3.58*

*3.56* - تفنگ با $\dot\theta=0.5$ *rad/s* می‌چرخد و گلوله *60 g* با تندی *600 m/s* از دهانه بیرون می‌زند. واکنش تفنگ بر گلوله چیست؟




$\sum F_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) \quad P=0.06(0+2[600][0.5])=36$ N

*3.57* - در آرایش نشان داده، کدام پهلو و چه نیرویی بر بسته *1.5 kg* می‌نشاند؟

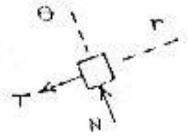



$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)$

$-P=1.5[0+2(-0.6)(10)] \quad P=18$ N

$\omega=6$ rad/s باشد و با آهنگ $2$ rad/s$^2$ کاهش یابد، کشش ریسمان و نیروی شیار بر $C$ چیست؟

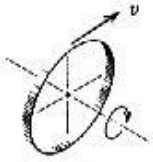
$$\sum F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$$
$$-T=2[0+0.055(-6) \quad T=0.66 \text{ N}$$




$$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$N=2[-2+2(0.055)(-6)]$$
$$N=-5.32 \text{ N}$$

3.59 - نیروی کشش بر لبه حلقه‌ای که با تندی $v$ در کناره می‌چرخد چیست؟

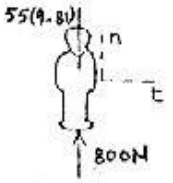
$$\sum F_n=ma_n \quad 2T\sin(d\theta/2)=\rho r d\theta(v^2/r) \quad T=\rho v^2$$



نگاره 3.59

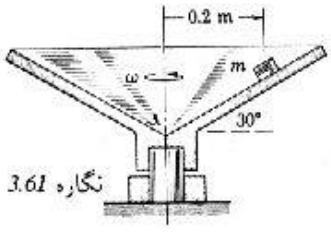
نگاره 3.60

3.60 - $\dot{\theta}$ چه باشد تا یک خانم به جرم $55$ kg، شماره $800$ N را بر ترازوی درون هواپیما با تندی $960$ km/h بسنجد؟



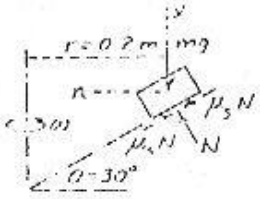

$$960 \text{ km/hr}=266.7 \text{ m/s}$$
$$\sum F_n=ma_n \quad 800-55(9.81)=55a_n \quad a_n=4.74 \text{ m/s}^2$$
$$a_n=v\dot{\theta} \quad \dot{\theta}=a_n/v=4.74/266.7=0.018 \text{ r/s}=1.031 \text{ deg/s}$$
$$a_n=v^2/\rho \quad \rho=v^2/a_n=266.7^2/4.74=15006 \text{ m}$$

3.61 - بازه $\omega$ چه باشد تا $m$ با ضریب اصطکاک $0.3$ به هیچ سو نلغزد؟




نگاره 3.61

$$\mu_s N \quad \mu_s N \quad \sum F_y=0; N\cos\theta=\mu_s N\sin\theta=mg$$
$$\sum F_n=ma_n; N\sin\theta=\mu_s N\sin\theta=mr\omega^2$$
$$(\sin\theta \pm\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta \mp\mu_s\sin\theta)=r\omega^2/g$$




$$\omega=\sqrt{g/r}\sqrt{(\sin\theta \pm\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta \mp\mu_s\sin\theta)}$$

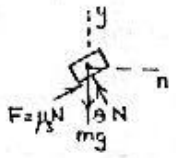
$\omega_{min}=3.41$ rad/sec $\qquad$ $\omega_{max}=7.21$ rad/sec

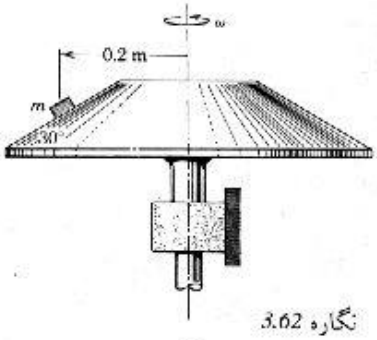
3.62 - بیشینه $\omega$ چه باشد تا $m$ با ضریب اصطکاک 0.8 نلغزد؟

$$\sum F_y=0:\ N\cos\theta-mg+\mu_s N\sin\theta=0$$

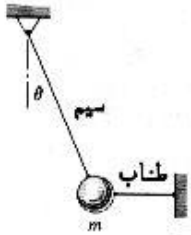
$$\sum F_n=ma_n:\ -N\sin\theta+\mu_s N\cos\theta=mr\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{r}\frac{(\mu_s\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)}}=2.73\ \text{rad/s}$$

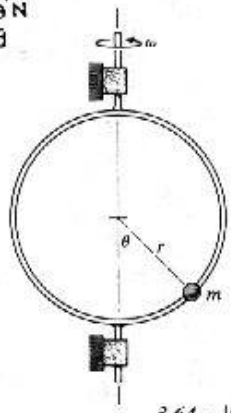



نگاره 3.62

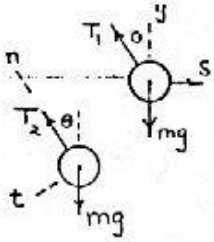



نگاره 3.63




نگاره 3.64

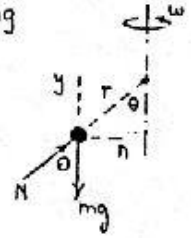
3.63 - کشش سیم، پس از بریدن طناب به پیش از بریدن آن چیست؟




$$\sum F_y=0:\ T_1\cos\theta=mg \qquad \sum F_n=ma_n=mv^2/r=0$$

$$T_2=mg\cos\theta \Rightarrow k=T_2/T_1=\cos^2\theta$$

3.64 - وابستگی $\omega$ و $\theta$ چیست؟




$$\sum F_y=0:\ N\cos\theta-mg=0 \qquad N=mg/\cos\theta$$

$$\sum F_n=ma_n:\ N\sin\theta=m(r\sin\theta)\omega^2$$

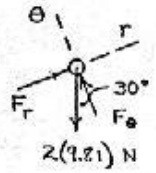
$$\omega=\sqrt{g/(r\cos\theta)} \qquad \cos\theta=g/r\omega^2<<1 \qquad \omega^2\geq g/r$$

3.65 - کمترین نیروی $P$ با ضریب اصطکاک 0.5 چه باشد تا گلوله 2 kg در $\theta=30^\circ$ و $\dot\theta=-50$ deg/s و $\ddot\theta=200$ deg/s و $r=-500$ mm/s چیست؟ کمترین نیروی $P_s$ ایستا چیست؟

$$\sum F_r=ma_r=m(\ddot r-r\dot\theta^2)$$

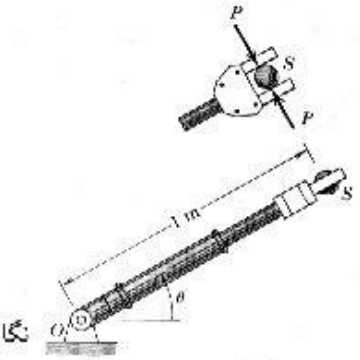
$$F_r-19.62\sin30^\circ=2[0-1(-0.873)^2] \Rightarrow F_r=8.29\ \text{N}$$

$$\sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) \qquad F_\theta-19.62\cos30^\circ=25.7\ \text{N}$$

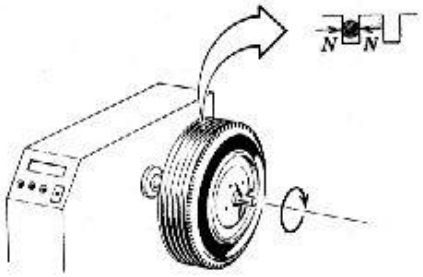



$$F=\sqrt{F_r^2+F_\theta^2}=27.0\ \text{N} \qquad P=F/2\mu_s=27.0/1=\underline{27.0\ \text{N}}$$

static gripping force $=\underline{19.6\ \text{N}}$

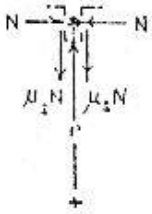



نگاره 3.65




نگاره 3.66

3.66 - اگر ریگ 10 g در 4000 rev/min از چرخ به قطر 700 mm بیرون بپرد، نیروی نگهدارنده ریگ با ضریب اصطکاک 0.9 چیست؟




$\omega=(4000\ \text{rev/min})=418.9\ \text{rad/sec}$

$\sum F_n=ma_n \quad 2\mu_s N=mr\omega^2 \quad N=mr\omega^2/2\mu_s \quad \underline{N=323\ \text{N}}$

3.67 - کامیون با شتاب $2\ m/s^2$ بر پیچ و شیب نشان داده، به راه می‌افتد. با ضریب اصطکاک 0.3، کی بسته می‌لغزد؟

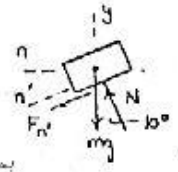
$\sum F_y=0 \quad N\cos10^\circ-F_n\sin10^\circ-mg=0$

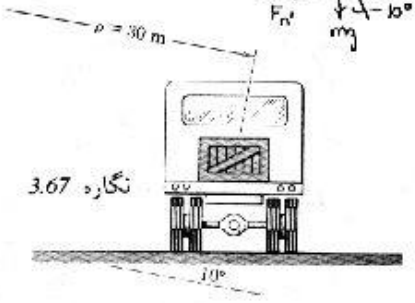
$\sum F_n=ma_n \quad F_n\cos10^\circ+N\sin10^\circ=m(2t)^2/30$

$\sum F_t=ma_t \quad F_t=m(2) \quad F_n=m[4t^2\cos10^\circ/30-g\sin10^\circ]$

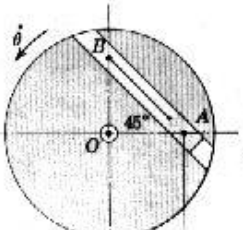
$N=m[4t^2\sin10^\circ/30+g\cos10^\circ]$

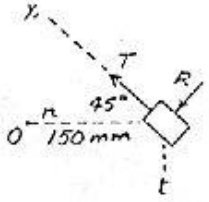
$\sqrt{F_t^2+F_n^2}=\mu_s N \quad \underline{t=5.58\ \text{s}}$




نگاره 3.67




نگاره 3.68

3.68 - کشش ریسمان نگهدارنده A در $\dot{\theta}=300\ \text{rev/min}$ چیست؟ اگر چرخش وارون باشد آیا کشش تغییر می‌کند؟

$a_n=r\dot{\theta}^2=0.15(300\times2\pi/60)^2=148.0\ \text{m/s}^2$

$\sum F_x=ma_x;\ T=3(148.0\cos45^\circ)=\underline{314\ \text{N}}$

3.69 - اگر گرده نشان داده با شتاب $0.5\ rad/s^2$ به راه افتد، کشش سیمهای 1 و 2 و نیروی شیار بر بسته $2\ kg$ در بازه $0\le t\le 5\ s$ چگونه است؟

$\omega=\omega_0+\alpha t=0.5t$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-0.1(0.5t)^2=-0.025t^2\ m/s^2$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0.1(0.5)=0.05\ m/s^2 \quad t=1.414\ s$

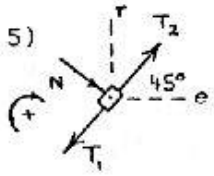
$0<t<1.414\ s$

$\sum F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad -N\cos45^\circ+T_2\cos45^\circ=2(-0.1)(0.5t)^2$

$\sum F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}):N\cos45^\circ+T_2\cos45^\circ=2(0.1)(0.5)$

$T_2=0.0707-0.0354t^2 \quad N=0.0707+0.0354t^2$

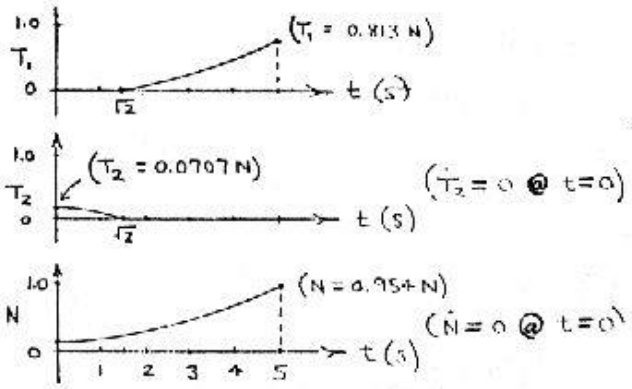
$1.414\le t\le 5\ s$

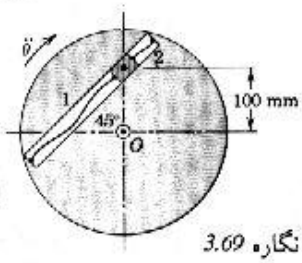



$\sum F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad -N\cos45^\circ+T_1\cos45^\circ=2(-0.1)(0.5t)^2$

$\sum F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}):N\cos45^\circ-T_1\cos45^\circ=2(0.1)(-0.5)$

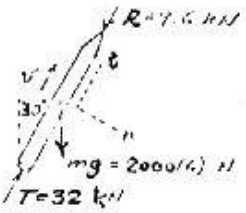
$T_1=-0.0707+0.354t^2 \quad N=0.0707+0.0354t^2$




نگاره 3.69

3.70 - موشک $2000\ kg$ با $T=32\ kN$ و $R=0.6\ kN$ و شتاب گرانش $6\ m/s^2$ با تندی $3\ km/s$ پیش می‌رود. شعاع خمیدگی و تغییر تندی موشک چیست؟

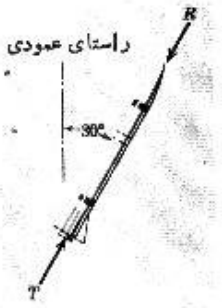



$\sum F_n=ma_n \quad 2000(6)\sin30^\circ=2000(3000)^2/\rho$

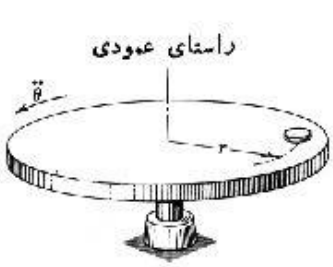
$\rho=3000\ km$

$\sum F_t=m\dot{v} \quad 32(10^3)-2000(6)\cos30^\circ-9600=2000\dot{v}$

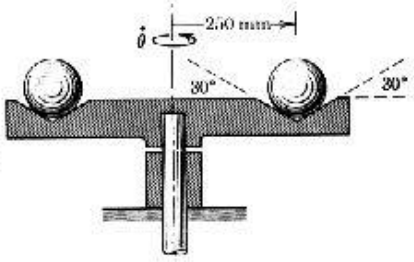
$\dot{v}=6.00\ m/s^2$




نگاره 3.70




نگاره 3.71




نگاره 3.72

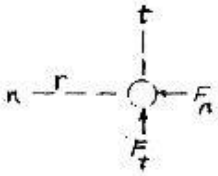
3.71 - اگر گرده با $\dot{\theta}=\alpha$ به راه افتد، پیش از لغزیدن سکه با ضریب اصطکاک $\mu_s$، چند بار می‌چرخد؟

$$\sum F_t=ma_t \quad F_t=mr\alpha \quad \sum F_n=ma_n \quad F_n=mr\omega^2$$

$$F_{max}=\mu_s N=\mu_s mg \Rightarrow mr\sqrt{\alpha^2+\omega^4}=\mu_s mg$$

$$\omega^2=\sqrt{(\mu_s g)^2-(r\alpha)^2}/r \quad \omega^2=2\alpha\theta=2\alpha(2\pi N)$$

$$N=\omega^2/4\pi\alpha=(1/4\pi)\sqrt{(\mu_s g/r\alpha)^2-1}$$



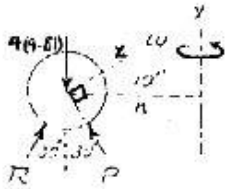

3.72 - با $\dot{\theta}=30\ rev/min$، نیروی واکنشی بزرگتر بر گلوله‌های $4\ kg$ چیست؟

$\omega=30\times 2\pi/60=\pi\ rad/s$

$$\sum F_y=0 \quad (R+P)\cos 30^\circ=4(9.81)=39.24$$

$$\sum F_n=ma_n \quad (R-P)\sin 30^\circ=4(.250)\pi^2=9.87$$

$$2R=45.31+19.74 \quad R=32.53\ N$$

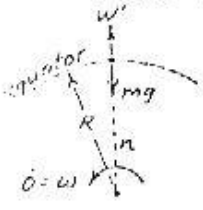



$$\sum F_x=ma_x$$

$$R\cos 30^\circ-39.24\sin 30^\circ=4(0.250)\pi^2\cos 30^\circ$$

$$R=32.53\ N$$

3.73 - چیزی به وزن $100\ N$، در استوا با گرانش مطلق $g=0.815\ m/s^2$ زمین چه وزنی دارد؟




$$\sum F_n=ma_n \quad mg-W=mR\omega^2 \quad W=m(g-R\omega^2)$$

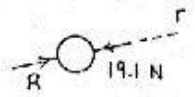
$$k=W/mg=1-R\omega^2/g$$

$$W=mg(1-R\omega^2/g)=100(1-0.00345)=99.655\ N$$

3.74 - با $\dot{\theta}=\omega=12$ rad/s و $r_0=100$ mm و $b=10$ mm و $r=r_0+b\sin N\omega t$ و $N=6$ و نیروی فنر بین 11.5 N و 19.1 N، نیروی بادامک بر میخ 100 gr در نوک یک برآمدگی چیست؟

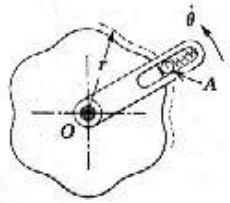
$r=100+10\sin(6\times12t)$ mm $\quad \dot{r}=720\cos72t$ mm/s

$\ddot{r}=-51.84\sin72t$ m/s$^2$ $\quad r=r_{max} \Rightarrow \cos72t=0$

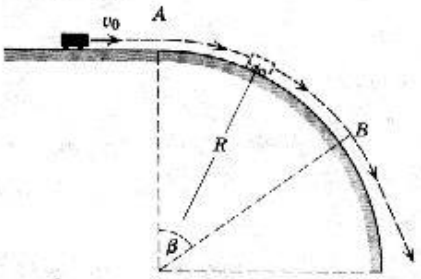



$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-51.84-0.110(12)^2=-66.7$ m/s$^2$

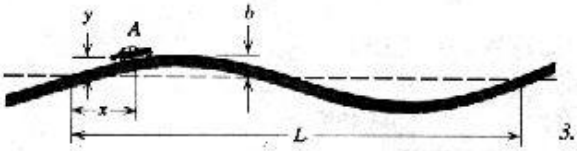
$\sum F_r=ma_r: R-19.1=0.1(-67.7) \quad \underline{R=12.33\ \text{N}}$




نگاره 3.74




نگاره 3.75




نگاره 3.76

3.75 - ارابه در چه $\beta$ از زمین جدا می‌شود؟

$\sum F_t=ma_t; mg\sin\theta=ma_t, a_t=g\sin\theta$

$\int v\,dv=\int a_t\,ds \quad \int_{v_0}^{v} v\,dv=\int_0^{\theta} g\sin\theta(R\,d\theta)$

$v^2=v_0^2+2gR(1-\cos\theta) \quad \sum F_n=ma_n; mg\cos\theta-N=mv^2/R$

$\underline{\beta=\cos^{-1}(2/3+v_0^2/3Rg)}$

3.76 - بیشترین تندی خودرو در گذر از برآمدگی $y=b\sin(\frac{2\pi x}{l})$ چه باشد تا از جاده جدا نشود؟ با آن تندی، واکنش در پایین گودی جاده چیست؟

$\sum F_n=ma_n \quad mg=mv^2/\rho \quad v=\sqrt{g\rho}$

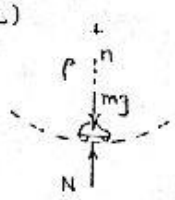
at top: $dy/dx=0$ , $\rho=(d^2y/dx^2)^{-1}$ , $y=b\sin(2\pi x/L)$

$\Rightarrow dy/dx=(2\pi b/L)\cos(2\pi x/L)$

$d^2y/dx^2=-(4\pi^2b/L^2)\sin(2\pi x/L)$

$x=L/4$ , $\sin(2\pi x/L)=1$ , $|d^2y/dx^2|=1/\rho=4\pi^2b/L^2$

$\Rightarrow v=(L/2\pi)\sqrt{g/b}$




at bottom: $\sum F_n=ma_n \quad N-mg=m(g\rho/\rho) \quad \underline{N=2mg}$

*3.77* - خودرو با تندی *70 km/h* و شتاب *0.5 g*- از جاده نشان داده می‌گذرد. کمترین شیب صندلی $\theta$ چه باشد تا بسته با ضریب اصطکاک *(a) 0.2* و *(b) 0.4* نلغزد؟

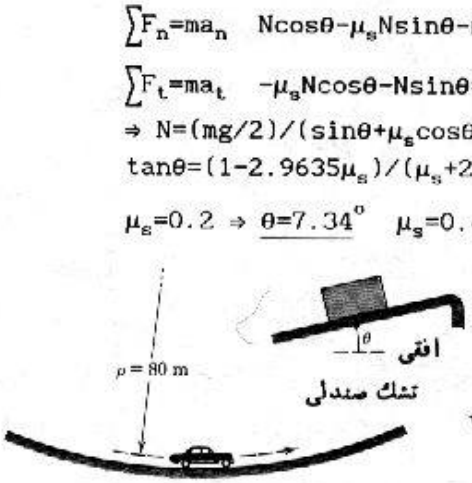
$$\sum F_n = ma_n \quad N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta - mg = m(19.44^2/80)$$

$$\sum F_t = ma_t \quad -\mu_s N\cos\theta - N\sin\theta = -mg/2$$

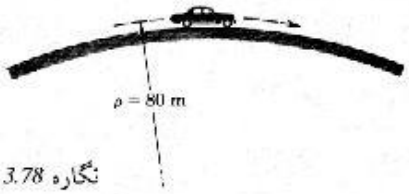
$$\Rightarrow N = (mg/2)/(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

$$\tan\theta = (1 - 2.9635\mu_s)/(\mu_s + 2.9635)$$

$\mu_s = 0.2 \Rightarrow \underline{\theta = 7.34^\circ}$ $\mu_s = 0.4 \Rightarrow \underline{\theta = -3.16^\circ}$ !!




نگاره *3.77*




نگاره *3.78*

*3.78* - پرسش پیش را با آرایش نوین پاسخ دهید.

$$\sum F_t = ma_t \quad -\mu_s N\cos\theta - N\sin\theta = -mg/2$$

$$N = (mg/2)/(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

$$\sum F_n = ma_n \quad -N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta + mg = m(19.44^2/80)$$

$$\tan\theta = (1 - 1.036\mu_s)/(\mu_s + 1.036)$$

$\mu_s = 0.2 \Rightarrow \underline{\theta = 32.7^\circ}$, $\underline{N>0}$ $\mu_s = 0.4 \Rightarrow \underline{\theta = 22.2^\circ}$, $\underline{N>0}$

*3.79* - خودرو با نیروی پیشران $T$ و کشش زمین، از $A$ به راه می‌افتد. تندی آن در $B$ و واکنش زمین چیست؟

$$\sum F_t = ma_t \quad T + mg\cos\theta = ma_t$$

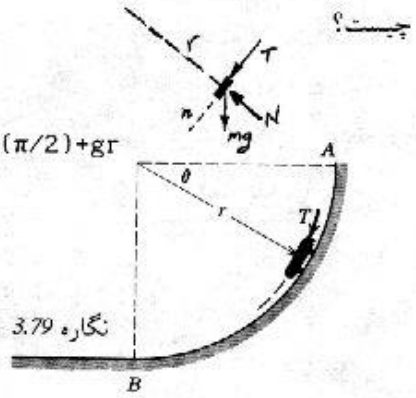
$$a_t = T/m + g\cos\theta \quad vdv = a_t(rd\theta)$$

$$\int_0^v vdv = \int_0^{\pi/2} (T/m + g\cos\theta)rd\theta \quad v^2/2 = (Tr/m)(\pi/2) + gr$$

$$v^2 = r(\pi T/m + 2g) \quad v = \sqrt{r(\pi T/m + 2g)}$$

at B: $\sum F_n = ma_n$ $N - mg = mv^2/r$

$$N = mg + T\pi + 2mg \quad \underline{N = T\pi + 3mg}$$




نگاره *3.79*

*3.80* ماهواره $S$ با جرم $150\ kg$ و تندی $v=26730\ km/h$ در آرایش نشان داده با نیروی $519\ N$ به سوی زمین کشیده می‌شود. $\ddot{r}$ چیست؟

$v=26730/3.6=7425\ m/s$

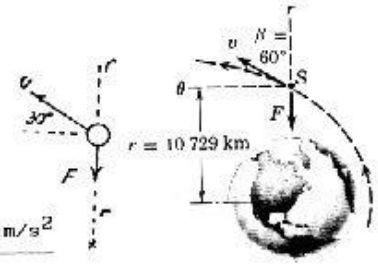
$F=519\ N \quad r=10729\ km=10729000\ m$

$m=150\ kg \quad v_r=\dot{r}=7425\sin 30^\circ=3712.5\ m/s$

$v_\theta=r\dot{\theta}=7425\cos 30^\circ=6430.2\ m/s$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\ddot{r}-(r\dot{\theta})^2/r=\ddot{r}-3.85\ m/s^2$

$\sum F_t=ma_t \quad -519=150(\ddot{r}-3.85) \quad \underline{\ddot{r}=-0.39\ m/s^2}$




نگاره *3.80*

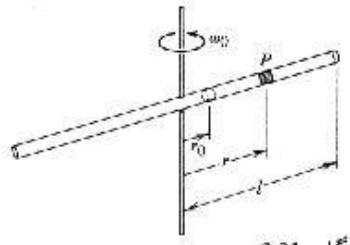
*3.81* - ذره $P$ از $r=r_0$ در $t=0$ به راه می‌افتد. $v_r$ و $v_\theta$ و $r$ در زمانهای دیگر چیست؟ مسیر ذره با $r_0=0.1\ m$ و $l=1\ m$ و $\omega_0=1\ rad/s$ چگونه است؟

$\sum F_r=ma_r \quad 0=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) \quad \ddot{r}=r\dot{\theta}^2=r\omega_0^2 \quad \dot{r}d\dot{r}/dr=r\omega_0^2 \quad \int_0^{\dot{r}}\dot{r}d\dot{r}=\omega_0^2$

$\int_{r_0}^{r}rdr \quad \dot{r}=\omega_0\sqrt{r^2-r_0^2}=v_r$

$dr/dt=\omega_0\sqrt{r^2-r_0^2} \quad \int_{r_0}^{r}dr/\sqrt{r^2-r_0^2}=\omega_0\int_0^t dt$

$\Rightarrow \underline{r=(r_0/2)[e^{-\omega_0 t}+e^{\omega_0 t}]}$




نگاره *3.81*

$v_\theta=r\dot{\theta}=r\omega_0=(r_0\omega_0/2)[e^{-\omega_0 t}+e^{\omega_0 t}]$

$\underline{v_r=(r_0\omega_0/2)[e^{\omega_0 t}-e^{-\omega_0 t}]}$

$v_r=r_0\omega_0\sinh(\omega_0 t)$

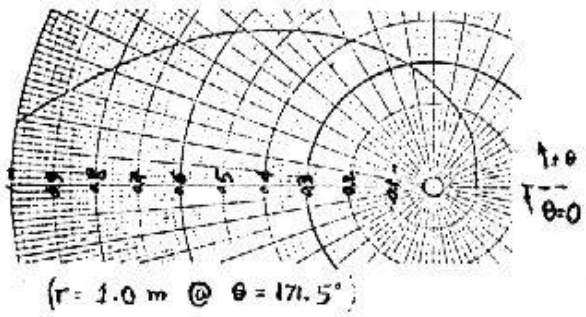
$r=r_0\cosh(\omega_0 t)$

$\underline{v_\theta=r_0\omega_0\cosh(\omega_0 t)}$

$v_r=0.1\sinh t$

$r=0.1\cosh t$

$v_\theta=0.1\cosh t$



*3.82* - در پرسش پیش، گمان کنید که ضریب اصطکاک جنبشی، $\mu_K$ باشد، $r(t)$ چیست؟

$$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad N = m(2\dot{r}\omega_o)$$

$$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad -\mu_k N = m(\ddot{r} - r\omega_o^2)$$

$$-\mu_k(2mr\omega_o) = m(\ddot{r} - r\omega_o^2) \quad \ddot{r} + 2\mu_k\omega_o\dot{r} - \omega_o^2 r = 0$$

$$r = Ce^{st} \Rightarrow s_{1,2} = \omega_o[-\mu_k \pm \sqrt{\mu_k^2+1}] \quad r = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

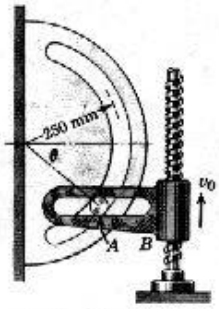
$$r(0) = r_o \ , \ \dot{r}(0) = 0 \Rightarrow r_o = C_1 + C_2 \quad 0 = C_1 s_1 + C_2 s_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -s_2 r_o/(s_1 - s_2) \quad C_2 = s_1 r_o/(s_1 - s_2)$$

$$r(t) = (r_o/2\sqrt{\mu_k^2+1})\left[(\mu_k + \sqrt{\mu_k^2+1})e^{\omega_o(-\mu_k+\sqrt{\mu_k^2+1})t} + \right.$$

$$\left. + (-\mu_k + \sqrt{\mu_k^2+1})e^{\omega_o(-\mu_k-\sqrt{\mu_k^2+1})t}\right]$$

*3.83* - با $v_0 = 2$ m/s و $\theta = 30^\circ$، نیروی شیار بر میخ $A$ چیست؟




نگاره *3.83*

$$v = v_o/\cos 30^\circ = 2/0.866 = 2.31 \text{ m/s}$$

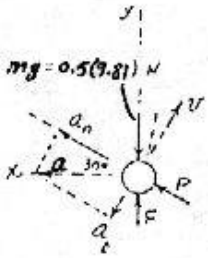
$$a_n = v^2/r = (2.31)^2/0.25 = 21.3 \text{ m/s}^2$$

$$\dot{v}_y = \dot{v}_o = 0 \Rightarrow a = a_x \quad a_t = a\tan 30^\circ$$

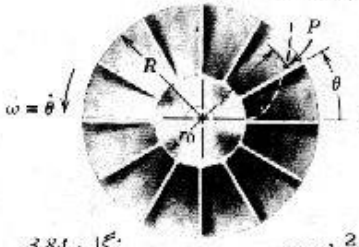
$$a_t = 21.3(1/\sqrt{3}) = 12.32 \text{ m/s}^2$$

$$a = a_x = 21.3/0.5 = 24.64 \text{ m/s}^2$$

$$\sum F_x = ma_x \quad P(0.866) = 0.5(24.64) \quad \underline{P = 14.22 \text{ N}}$$




*3.84* - ذره‌ای از $r = r_0$ به راه افتاده است. نیروی پره بر ذره به هنگام بیرون افتادن چیست؟




نگاره *3.84*

محور مرجع ثابت

$$\sum F_r = ma_r \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

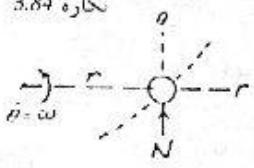
$$\Rightarrow r = r_o\cosh(\omega t) \quad \dot{r} = r_o\omega\sinh(\omega t)$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad N = m(0 + 2\dot{r}\omega) = 2mr_o\omega^2\sinh(\omega t)$$

$$\cosh^2(\omega t) - \sinh^2(\omega t) = 1 \quad \sinh^2(\omega t) = \cosh^2(\omega t) - 1$$

$$\sinh(\omega t) = \sqrt{(r/r_o)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow N = 2mr_o\omega^2\sqrt{(r/r_o)^2 - 1} = 2m\omega^2\sqrt{r^2 - r_o^2}$$



3.85 - هر یک از چهار چرخ خودروی $1350\ kg$ تا $2500\ N$ نیرو می‌پذیرد. ترمز پیشینه در $A$ با تندی $25\ m/s$ و راه پیش رفته تا ایست چیست؟

$$A\text{-}B:\ \sum F_x=ma_x \quad -4(2500)=1350a \Rightarrow a=-7.407\ m/s^2$$

$$v_B^2-v_A^2=2a(x_B-x_A) \quad v_B^2-25^2=2(-7.407)(10)$$

$$v_B=21.84\ m/s$$

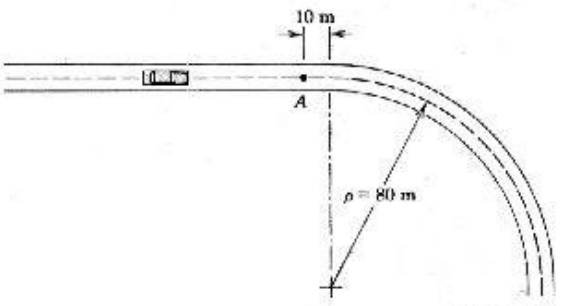
$$B\text{-}:\ F=ma_{tot} \quad a_{tot}=10{,}000/1350=7.407\ m/s^2$$

$$a_{tot}=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=\sqrt{v^4/\rho^2+a_t^2} \qquad a_t=vdv/ds=-\sqrt{a_{tot}^2-v^4/\rho^2}$$

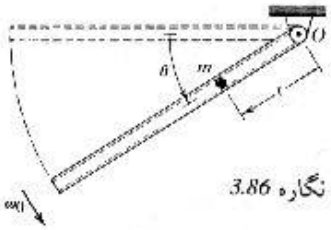
$$\int_{10}^{s} ds=-\rho\int_{v_B}^{0} vdv/\sqrt{\rho^2a_{tot}^2-v^4}$$

$$x=v^2 \quad s-10=-\rho\int_{v_B^2}^{0}(dx/2)/\sqrt{\rho^2a_{tot}^2-x^2}$$

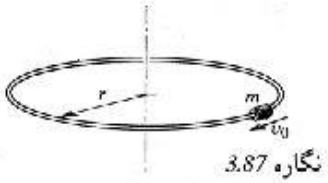
$$s=10+(\rho/2)\sin^{-1}(v_B^2/\rho a_{tot})=47.4\ m$$



نگاره 3.85



نگاره 3.86



نگاره 3.87

3.86 - ذره $m$ در $\theta=0$ در $r=0$ است. $r(0)$ چیست؟

$$\sum F_r=ma_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$$

$$mg\sin\theta=m(\ddot{r}-r\omega_o^2)$$

$$\ddot{r}-r\omega_o^2=g\sin\omega_o t \qquad r_h=Ce^{st} \Rightarrow s_1=-\omega_o \quad s_2=\omega_o$$

$$r_p=D\sin\omega_o t \qquad D=-g/2\omega_o^2$$

$$r=r_h+r_p=C_1e^{-\omega_o t}+C_2e^{\omega_o t}-(g/2\omega_o^2)\sin\omega_o t \qquad r(0)=C_1+C_2=0$$

$$\dot{r}(0)=-\omega_oC_1+\omega_oC_2-g/2\omega_o=0$$

$$r=(-g/4\omega_o^2)e^{-\theta}+(g/4\omega_o^2)e^{\theta}-(g/2\omega_o^2)\sin\theta$$

*3.87* - ماسوره $m$ با تندی $v_o$ رها می‌شود. با ضریب اصطکاک $\mu_k$، کجا می‌ایستد؟

$$\sum F_y=0 \quad N_y=mg \quad \sum F_n=ma_n \quad N_n=mv^2/r$$

$$F=\mu_k N_{tot}=\mu_k\sqrt{(mg)^2+(mv^2/r)^2}=(\mu_k m/r)\sqrt{r^2g^2+v^4}$$

$$\sum F_t=ma_t \quad -(\mu_k m/r)\sqrt{r^2g^2+v^4}=mvdv/ds$$

$$(-\mu_k/r)\int_0^s ds=\int_{v_o}^{0}\frac{vdv}{\sqrt{r^2g^2+v^4}}=\int_{v_o^2}^{0}\frac{(dx/2)}{\sqrt{x^2+r^2g^2}} \qquad x=v^2$$

$$dx=2vdv \quad -\mu_k s/r=(1/2)\ln\left[x+\sqrt{x^2+r^2g^2}\right]_{v_o^2}^{0}$$

$$s=(r/2\mu_k)\ln\left[(v_o^2+\sqrt{r^2g^2+v_o^4})/rg\right]$$

نگاره *3.88*

*3.88* - زنجیر از آرایش نشان داده رها می‌شود. شتاب $a_t$ و کشش $T(\theta)$ پس از رهایی چیست؟

$$gdm=\rho g r d\theta \quad \sum F_t=ma_t$$

$$(T+dT)\cos(d\theta/2)-T\cos(d\theta/2)+\rho g r\cos\theta\cdot d\theta=\rho r a_t d\theta$$

$$dT+\rho g r\cos\theta\, d\theta=\rho r a_t d\theta \quad dT=\rho r(a_t-g\cos\theta)d\theta$$

$$\int_0^T dT=\rho r\int_0^{\theta}(a_t-g\cos\theta)d\theta \quad T=\rho r(a_t\theta-g\sin\theta)$$

$$\theta=\pi/2,\ T=0,\Rightarrow\ 0=\rho r(a_t\pi/2-9)$$

$$\Rightarrow \underline{a_t=2g/\pi} \quad \underline{T=\rho g r(2\theta/\pi-\sin\theta)}$$

*3.89* - با ضریب اصطکاک $\mu_k$، تندی $v_A$ چه باشد تا ذره $m$ درجایی بین $B$ و $C$ بایستد؟

نگاره *3.89*

$$A\text{-}B:\ a=-\mu_k g \Rightarrow v_B^2=v_A^2-2\mu_k g l$$

$$B\text{-}C:\ N=mg \quad \sum F_n=mv^2/\rho \quad N_n=mv^2/r$$

$$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_k N_{tot}=mvdv/ds$$

$$-\mu_k\sqrt{N^2+N_n^2}=mvdv/ds$$

$$-\mu_k\sqrt{(mg)^2+(mv^2/r)^2}=mvdv/ds$$

$$(-\mu_k/r)\int_0^s ds=\int_{v_B}^{0}\frac{v\,dv}{\sqrt{r^2g^2+v_o^4}}=\int_{v_B^2}^{0}\frac{(dx/2)}{\sqrt{x^2+r^2g^2}}$$

$$\Rightarrow 2\mu_k s/r=\ln[(v_B^2+\sqrt{v_B^4+r^2g^2})/rg]$$

$$rge^{2\mu_k s/r}-v_B^2=\sqrt{v_B^4+r^2g^2}$$

$$v_B^2=(rg/2)[e^{2\mu_k/r}-e^{-2\mu_k/r}]$$

$$s=0 \Rightarrow v_B^2=0 \quad s=\pi r \Rightarrow v_B^2=(rg/2)[e^{2\mu_k/\pi}-e^{-2\mu_k/\pi}]$$

$$v_A^2=v_B^2+2\mu_k gl \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{2\mu_k gl}<\leq v_A \leq \sqrt{2\mu_k gl+(rg/2)[e^{2\mu_k/\pi}-e^{-2\mu_k/\pi}]}$$

$$\sqrt{2\mu_k gl}<\leq v_A \leq \sqrt{rg\sinh(2\mu_k\pi)+2\mu_k gl}$$

*3.90* - بازو با *20 rad/s* بر بادامک $r=100-75\cos\theta$ *mm* می‌چرخد. نیروی بادامک بر میخ *A* به جرم *0.5 kg* در $\theta=60^\circ$ با فنری به سختی *4.5 kN/m* و آزاد در $\theta=0$، چیست؟

$$a_r=(2c\cos\theta-b)\omega^2=[0.15(0.5)-0.1](20)^2=-10 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta=2c\omega^2\sin\theta=0.15(20)^2\sqrt{3}/2=52.0 \text{ m/s}^2$$

$$C=k\Delta r=5.4[(100-75/2)-(100-75)]=202 \text{ N}$$

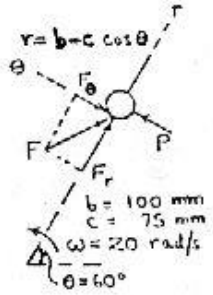
$$\sum F_r=ma_r \quad F_r-202=0.5(-10) \quad F_r=197 \text{ N}$$

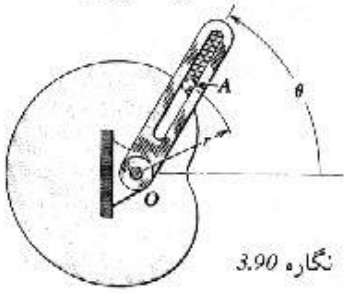
$$F_\theta/F_r=dr/rd\theta \quad F_\theta=(dr/rd\theta)F_r$$

$$F_\theta=(cF_r/r)\sin\theta=$$

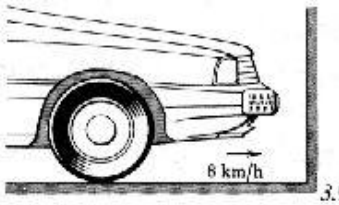
$$=[(75/(100-75/2))(\sqrt{3}/2)(197)=205 \text{ N}$$

$$\sum F_\theta=ma_\theta \quad P-205=0.5(52.0) \quad \underline{P=231 \text{ N}}$$




نگاره *3.90*




نگاره *3.91*

*3.91* - سختی دو فنر پشت سپر چه باشد که پس از *15 cm* فشردگی، خودروی *1500 kg* را نگه دارد؟

$U=\Delta T \quad 2(kx^2/2)=mv^2/2-0$

$k=mv^2/2x^2=$

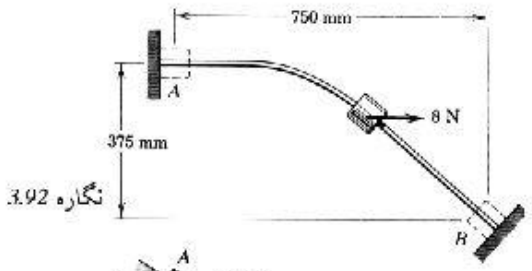
$=(1/2)[1500(2.22^2)/(0.15)^2]$

$=164280 \text{ N/m} = \underline{164.3 \text{ kN/m}}$

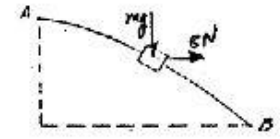
*3.92* - ماسوره‌ای به جرم *0.8 kg* با نیروی افقی *8 N* از *A* به راه می‌افتد. تندیش در *B* چیست؟

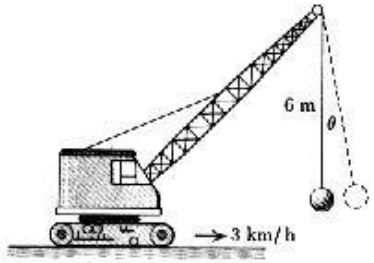
$U=\Delta T \quad 8(0.75)+0.8(9.81)(0.375)=(1/2)(0.8)(v^2-0)$

$v^2=22.36 \quad \underline{v=4.73 \text{ m/s}}$

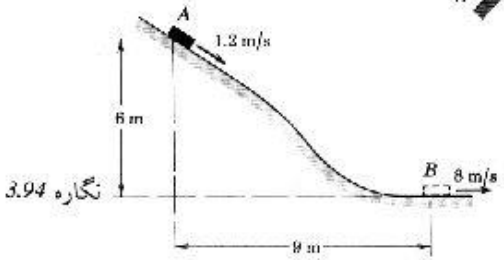



نگاره *3.92*



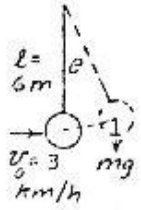




نگاره *3.93*




نگاره *3.94*

*3.93* - اگر خودروی نشان داده، ناگهان بایستد، بیشینه $\theta$ چه می‌شود؟




$U=\Delta T \quad -mgl(1-\cos\theta)=m(0-v_0^2)/2$

$\cos\theta=1-v_0^2/2gl=1-(3/3.6)^2/2x9.81x6=$

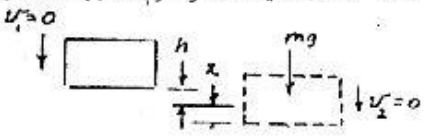
$=1-0.005899=0.9941 \quad \underline{\theta=6.23^\circ}$

*3.94* - بسته‌ای به جرم *30 kg* با تندی نوشته شده، از *A* به *B* می‌رود. کار انجام شده بر بسته چیست؟

$U=\Delta T \quad 30(9.81)(6)+U_f=(1/2)(30)(8^2-1.2^2)$

$U_f=938.4-1765.8=\underline{-827.4 \text{ J}}$

*3.95* - نشان دهید که اگر جرم *m* از بلندی ناچیزی بر زمین افتد، نیروی دو برابر وزنش بر آن می‌نشیند.




$U=\Delta T$

$h=0 \quad v_2=v_1=0 \quad mgx-kx^2/2=0$

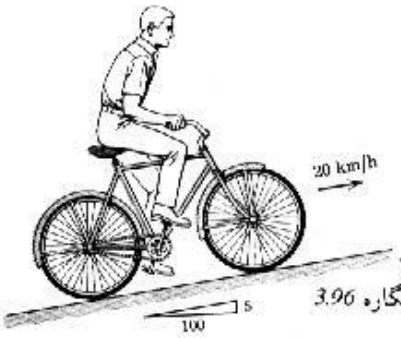
$\Rightarrow x=0 \ , \ x=2mg/k \quad F=kx=2mg$

3.96 - توان دوچرخه سوار $95\ kg$ چیست؟

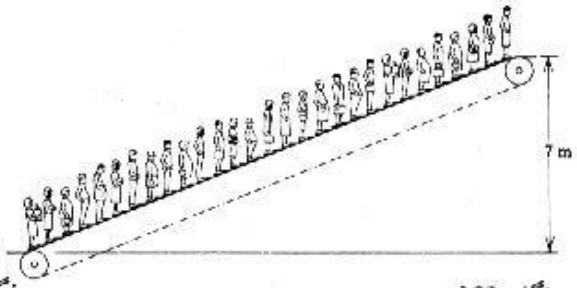
$P=W\dot{y}\quad \dot{y}=v\sin\theta\quad \theta=\tan^{-1}(0.05)=2.86^\circ\quad \sin\theta=0.0499$

$P=F.v=mg\sin\theta.v=95(9.81)(0.0499)(20/3.6)$

$P=258.36\ W$




نگاره 3.96

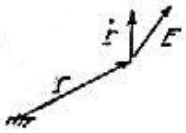



نگاره 3.98

3.97 توان نیروی $\vec{F}=40\hat{i}+20\hat{j}-36\hat{k}\ N$ بر $\vec{r}=8\hat{i}+1.2t^2\hat{j}-0.5(t^3-1)\hat{k}$ از $t=0$ تا $t=4\ s$ چیست؟

$P=\underline{F}.\dot{\underline{r}}\quad P=(40\underline{i}-20\underline{j}-36\underline{k}).(8\underline{i}+2.4t\underline{j}-1.5t^2\underline{k})$

$P_{t=4s}=320-192=864=992\ W\quad P=0.992\ Kw$




3.98 - بازده مکانیکی موتور $3\ kW$ برای راندن پلکانی با ظرفیت $30$ نفر در دقیقه هر یک به جرم میانگین $65\ kg$ چیست؟

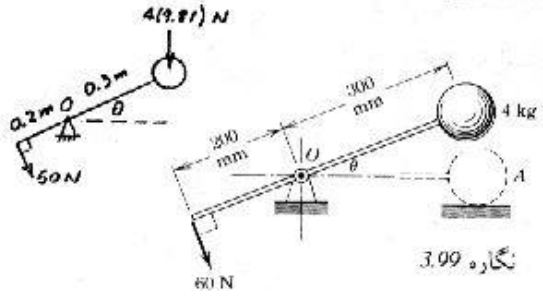
net power $=30(65)(9.81)/60=2229.5\ W$

efficiency $=2.23/3=0.74$

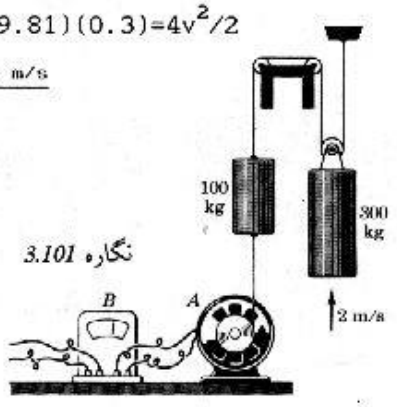
3.99 - دستگاه از $\theta=0$ به راه می‌افتد. تندی گوی در $\theta=90^\circ$ چیست؟

$U=\Delta T\quad 60(0.2)(\pi/2)-4(9.81)(0.3)=4v^2/2$

$v^2=3.539\ m/s^2\quad v=1.881\ m/s$




نگاره 3.99

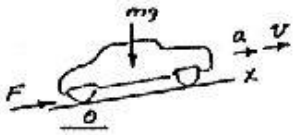



نگاره 3.101

3.100 - یک خودروی $1500\ kg$ از پایین یک شیب $\%10$ به راه می‌افتد و پس از $100\ m$ به تندی $50\ km/h$ می‌رسد. توان موتور چیست؟

$\theta=\tan^{-1}(0.1)\quad \sin\theta=0.0995$

$\sum F_x=ma_x \quad v^2=2ax \quad F-mg\sin\theta=mv^2/2x$




$P=Fv=mgv\sin\theta+mv^3/2x=$

$=1500(9.81)(50000)(0.0995)/3600+$

$+(1500/2x100)(50000/3600)^3=20336+20094=40430$ W

$P=40.4$ Kw

*3.101* - بازده مکانیکی و الکتریکی، با توان الکتریکی *2.2 kW* چیست؟

Power $=300(9.81)(2)-100(9.81)(4)=$

$=1962$ U/s (W) $=1.962$ Kw

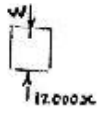
$e=1.962/2.20=0.892$

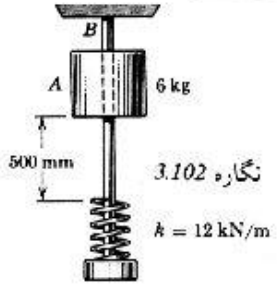
*3.102* - ماسوره از آرایش نشان داده رها می‌شود. تندیش در فشردگی *50 mm* فنر، چیست؟

$U=\Delta T$

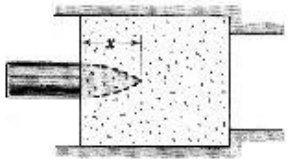
$6(9.81)(0.5+0.05)-0.5(12000)(0.05^2)=0.5(6)v^2$

$v^2=5.791 \quad v=2.41$ m/s

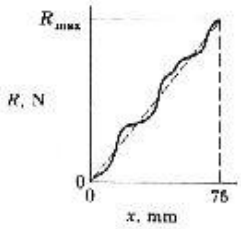



نگاره *3.102*




نگاره *3.103*




*3.103* - گلوله *0.25 kg* با تندی *600 m/s* با مقاومتی به نمودار نشان داده، پس از *75 mm* فرو رفتن در چوب، می‌ایستد. تندی گلوله در *x=25 mm* چیست؟

$x=75$ mm $\quad U=\Delta T \;,\; (1/2)(0.075)R_{max}=(0.25)(600)^2/2$

$\Rightarrow R_{max}=1.2$ MN

$x=25$ mm $\Rightarrow R=(25)(1.2)/75=0.4$ MN

$U=\Delta T \qquad (1/2)(0.025)(0.4)10^6=(1/2)(0.25)(600^2-v^2)$

$v^2=320(10^3)$ $(m/s)^2 \quad v=566$ m/s

*3.104* - تندی شلیک گلوله *14 g* از تفنگی به کالیبر *7.5 mm* با فشار نشان داده، چیست؟

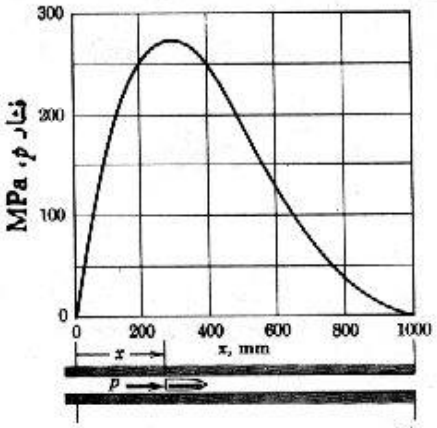
$A=140(10^6)$ N/m

bore area $=\pi(1.5x10^{-3})^2/4=44.18(10^{-6})$ $m^2$

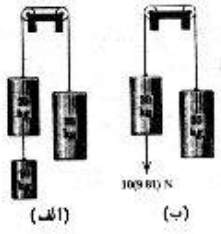
$U=140(10^6)(44.18)(10^{-6})=6185$ J

$U=\Delta T \quad 6185=(0.014)v^2/2$

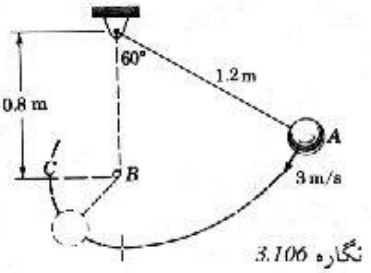
$v^2=0.8836(10^6)\ m^2/s^2 \quad v=940\ m/s$




نگاره 3.104




نگاره 3.105




نگاره 3.106

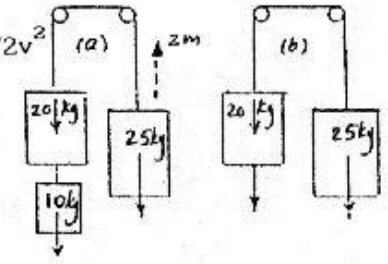
3.105 - تندی استوانه $25\ kg$ را پس از آنکه استوانه $10\ kg$ به اندازه $2\ m$ پایین آید، چیست؟

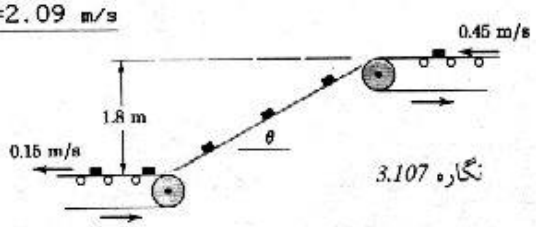
(a) $[(20+10)(2)-25(2)](9.81)=(10+20+25)/2v^2$

$v=1.89\ m/s$

(b) $[(20+10)(2)-25(2)](9.81)=(20+25)/2v^2$

$v=2.09\ m/s$




نگاره 3.107

3.106 - تندی گلوله به هنگام گذر از $C$ چیست؟

$U=\Delta T \quad mg(0.8-1.2\cos 60^\circ)=m(v_C^2-3^2)/2$

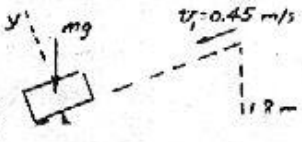
$9.81(0.20)=(v_C^2-9)/2 \quad v_C=3.59\ m/s$

3.107 - با ضریب اصطکاک $0.3$، شیب $\theta$ چه باشد تا بسته‌ها به تندی خواسته شده برسد؟

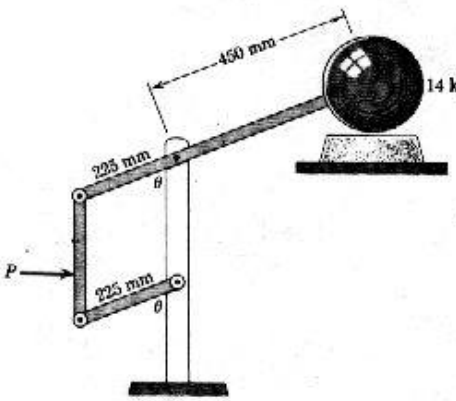
$\sum F_y=0 \quad N-mg\cos\theta=0 \quad N=mg\cos\theta \quad U=\Delta T$

$(mg\sin\theta-0.3mg\cos\theta)(1.8/\sin\theta)$

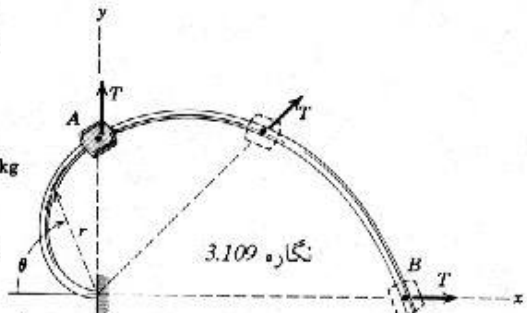
$=(m/2)(0.15^2-0.45^2)$



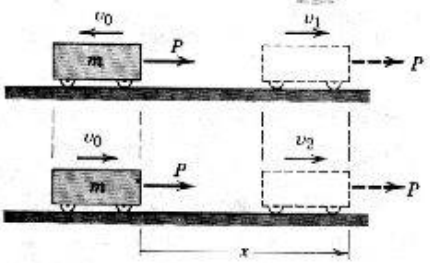
$\tan\theta=0.2985 \quad \underline{\theta=16.6^\circ}$




نگاره 3.108

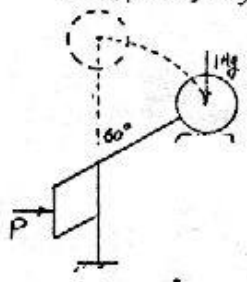



نگاره 3.109




نگاره 3.110

*3.108* - با نیروی $P=700$ N و راه افتادن دستگاه از $\theta=60^\circ$، تندی گلوله در $\theta=0$ چیست؟




$U=\Delta T$

$700(0.225)\sin 60^\circ-14(9.81)(0.45)(1-\cos 60^\circ)=$

$=(1/2)(14)(v^2-0^2)$

$v^2=15.055 \quad \underline{v=3.88 \text{ m/s}}$

*3.109* - ماسوره $0.5$ kg با نیروی $T=10$ N از $A$ به راه می‌افتد. تندیش در $B$ چیست؟

$W=mg(r_{\pi/2}-0)=0.5(9.81)(0.3)(\pi/2)=2.31$ J

$T(r_{\pi}-r_{\pi/2})=10(0.3\pi-0.3\pi/2)=4.71$ J

$U=\Delta T \quad 2.31+4.71=(1/2)0.5(v^2-0^2)$

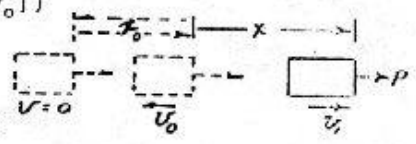
$v^2=28.10 \quad \underline{v=5.30 \text{ m/s}}$

*3.110* - نشان دهید که اگر $m$ با نیروی $P$ به راه افتد، در زمانهای نابرابر، با تندی یکسان از $x$ می‌گذرد. اگر اصطکاک باشد آیا باز هم چنین می‌شود؟

(a) $U=\Delta T \quad -px_o+px_o+px=(1/2)m(v_1^2-[-v_o^2])$

$px=(1/2)m(v_1^2-v_o^2)$

(b) $U=\Delta T \quad px=(1/2)m(v_2^2-v_o^2) \Rightarrow \underline{v_1=v_2}$



3.111 - راننده‌ای می‌گوید با تندی 80 km/h و با ضریب اصطکاک 0.8، پس از 20 m ترمز گرفتن به تندی 40 km/h رسیده است. آیا راست می‌گوید؟

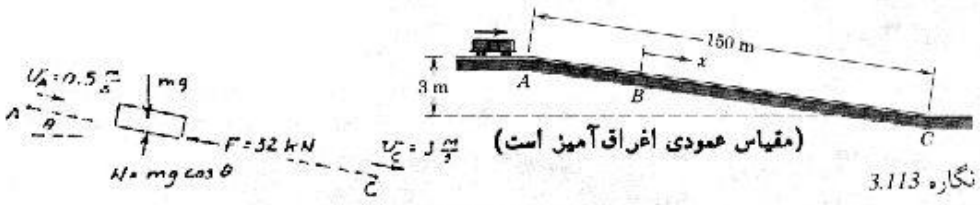
$$U=\Delta T \quad 0.8mg(20)=(1/2)m[v^2-(40/3.6)^2]$$
$$v^2=0.8(9.81)(2)(20)+(40/3.6)^2$$
$$=437.4\ (m/s)^2 \quad v=20.9\ m/s$$
$$\Rightarrow v=20.9(3.6)=\underline{75.3<80\ km/h}$$

3.112 - خودرویی با تندی 60 km/h بر یک شیب 10% با ضریب اصطکاک 0.7 ترمز می‌گیرد. کجا می‌ایستد؟

$$\theta=\tan^{-1}(0.1)=5.71^\circ \quad \cos\theta=0.9950 \quad \sin\theta=0.0995$$
$$N=mg\cos\theta=0.9950(9.81)m=9.76\ m$$
$$U=\Delta T \Rightarrow$$
$$-0.7(9.76m)s+9.81m(0.0995)s=-(m/2)(16.67)^2 \quad 5.86s=138.9$$
$$\underline{s=23.7\ m}$$

3.113 - گاری 68 Mg با تندی 0.5 m/s در A، از B با نیروی 32 kN ترمز می‌گیرد. ترمزها را در کجا رها کند تا تندیش در C، 3 m/s باشد؟

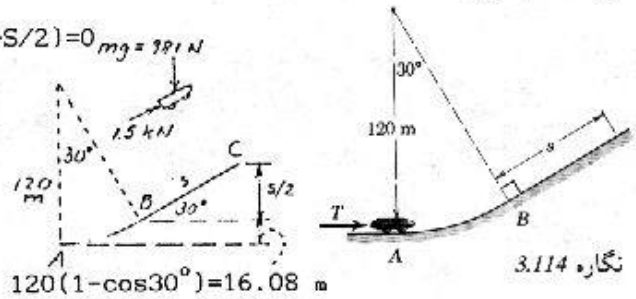
$$\theta=\tan^{-1}(3/150)=1.1458^\circ$$
$$AC=150\ m \quad m=68\ Mg$$
$$U=\Delta T \quad 68(10^3)(9.81)(3)-32(10^3)x=(1/2)68(10^3)(3^2-0.5^2)$$
$$2001-32x=297.5 \quad \underline{x=53.2}$$



نگاره 3.113

3.114 - یک خودروی 100 kg با نیروی T=1.5 kN از A به راه افتاده و در B، موتور را خاموش می‌کند. کجا می‌ایستد؟

$$AB=r\theta=120(\pi/6)=62.8\ m$$
$$U=\Delta T=0 \quad T_C=T_A=0$$
$$1500(62.8)-981(16.08+S/2)=0$$
$$S=2(94248-15771)/981$$
$$=\underline{160.0\ m}$$



$120(1-\cos 30^\circ)=16.08\ m$

نگاره 3.114

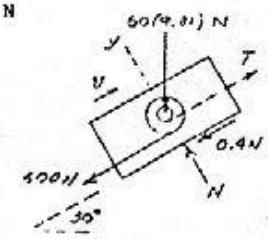
*3.115* - پس از آنکه بسته *60 kg* با نیروی *P=600 N* به اندازه *1.4 m* بر شیبی به ضریب اصطکاک *0.4* بالا رود، تندیش چیست؟ قطر قرقره‌ها، *2* به *1* است.

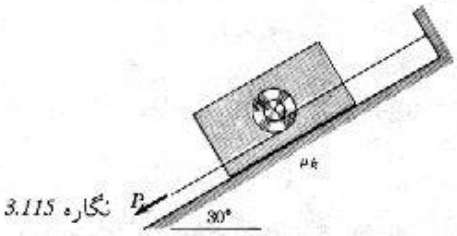
$\sum F_y=0 \quad N-60(9.81)\cos 30^\circ=0 \quad N=509.7$ N

$0.4N=203.9$ N

$U=\Delta T \quad 600(1.4)-60(9.81)\sin 30^\circ(1.4)$

$-203.9(1.4)=(1/2)65v^2 \quad v=2.18$ m/s



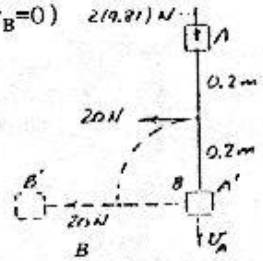

نگاره *3.115*

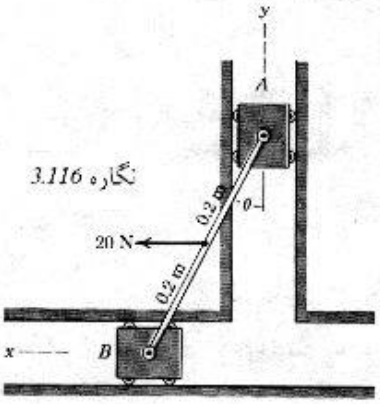
*3.116* - بسته‌های *2 kg* از *θ=0* با نیروی نشان داده به راه می‌افتد. تندی *A* در *θ=90°* چیست؟

$U=\Delta T \quad T_{initial}=0 \quad T_{final}=(1/2)mv_A^2=v_A^2 \quad (v_B=0)$

$U=20(0.2)+2(9.81)(0.4)=11.85$ J

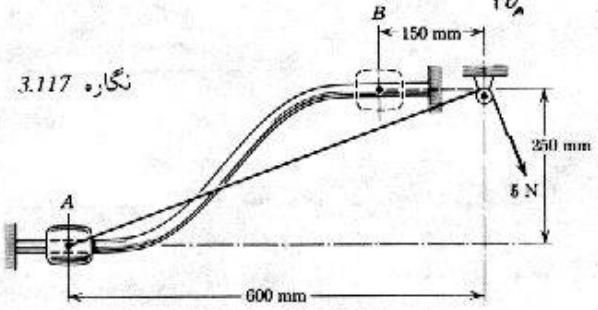
$11.85=v_A^2 \quad v_A=3.44$ m/s




نگاره *3.116*

نگاره *3.117*



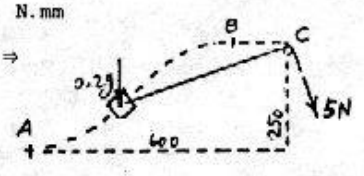

*3.117* -اگر ماسوره‌ای به جرم *0.2 kg* از *A* به راه افتد با چه تندی به *B* می‌رسد؟

$U=-0.2(9.81)(250)+5(487.5)=1947$ N.mm

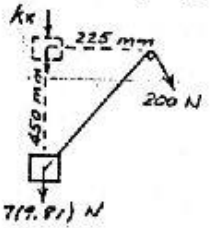
$\overline{AC}=650$ mm $\quad \overline{AC}-\overline{BC}=162.5$ mm $\quad U=\Delta T \Rightarrow$

$1.947=(1/2)(0.2)(v^2-0^2)$

$v=4.41$ m/s



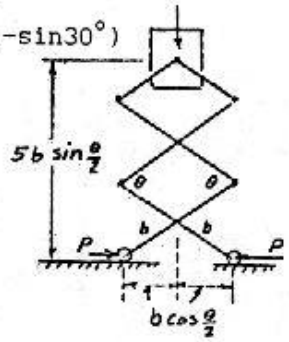
*3.118* - ماسوره $7\ kg$ با نیروی $F=200\ N$ از $A$ به راه می‌افتد. سختی فنر چه باشد تا $75\ mm$ فشرده شود؟

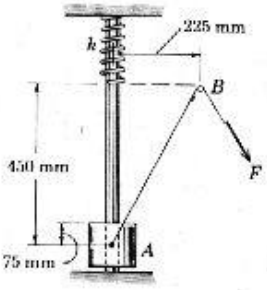



$U=\Delta T \quad U=200[\sqrt{(0.450)^2+(0.225)^2}$
$-0.225]-7(9.81)(0.450)-k(0.075)^2/2=$
$=55.6-30.9-0.00281k$
$\Delta T=0 \Rightarrow 0.00281k=55.6-30.9$
$k=8790\ N/m \quad \underline{k=8.79\ KN/m}$

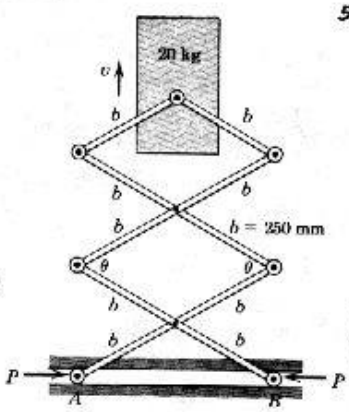
*3.119* - نیروی $P=1100\ N$ از $\theta=60^\circ$، دستگاه را به راه می‌اندازد. تندی بسته در $\theta=180^\circ$ چیست؟

$U=\Delta T \quad U=2pbcos(\theta/2)-W(5b)(1-sin(\theta/2))=$
$=2(1100)(0.25)cos30^\circ-20(9.81)(1.25)(1-sin30^\circ)$
$=355.7\ N.m \Rightarrow \quad 355.7=(1/2)(20)v^2$
$v^2=35.57 \quad \underline{v=5.96\ m/s}$

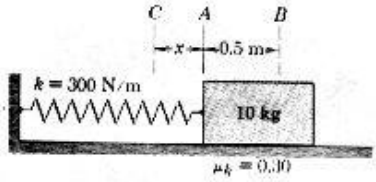



نگاره *3.118*



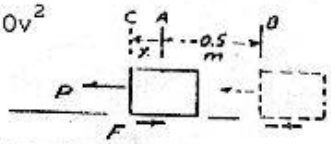

نگاره *3.119*




نگاره *3.120*

*3.120* - بسته نشان‌داده از کشیدگی $0.5\ m$ با ضریب اصطکاک $0.3$ رها می‌شود. *(a)* تندی گذر از تراز گاه $A$ و *(b)* بیشترین دورشدگی $x$ چیست؟

$F=\mu_k N=0.3(10)(9.81)=29.43\ N$
(a) B-A: $U=\Delta T \Rightarrow$
$(1/2)(300)(0.5)^2-29.43(0.5)=(1/2)10v^2$
$v^2=4.557\ (m/s)^2 \quad \underline{v=2.13\ m/s}$
(b) A-C: $U=\Delta T \Rightarrow$
$-(1/2)(300)x^2-29.43x=0-(1/2)(10)(4.557)$
$x^2+0.1962x-0.1519=0$
$x=(-0.1962/2)\pm\sqrt{(0.1962)^2+4(0.1519)}\ /2=$
$=-0.0981\pm0.4019 \quad \underline{x=0.304\ m}$



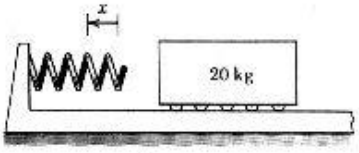
3.121 - تندی بسته چه باشد تا فنری با سختی نشان‌داده را $100\ mm$ بفشرد؟

$$U=\Delta T \quad -1000\int_0^{.1}(20x^2+10x)dx=(1/2)(20)(0-v^2)$$

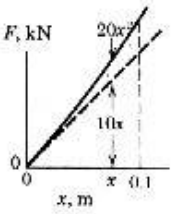
$$[(20/3)x^3+5x^2]_0^{.1}=10v^2$$

$$v^2=1000[0.05+(0.02/3)]=5.666\ (m/s)^2$$

$$v=2.38\ m/s$$




نگاره 3.121



نگاره 3.122

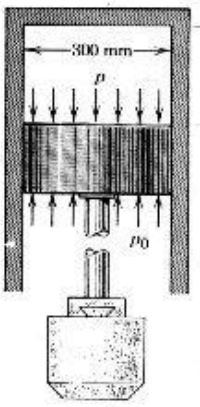
3.122 - خودرو با نیروی $F$ و توان $P$ در فاصله $S$ از تندی $v_1$ به $v_2$ می‌رسد. $v_2$ چیست؟

$$P=Fv \quad F=ma \Rightarrow P=mav \quad a=P/mv \quad vdv=ads$$

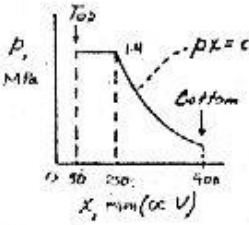
$$\Rightarrow mv^2dv=Pds \quad \int_{v_1}^{v_2}mv^2dv=\int_0^s Pds;\ m(v_2^3-v_1^3)/3=Ps$$

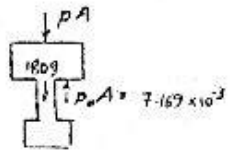
$$v_2=(3Ps/m+v_1^3)^{1/3}$$

3.123 - چکش $180\ kg$ با فشار $P=1.4\ Mpa$ از $x=50$ تا $100\ mm$ پایینتر می‌آید. پس از آن تا $250\ mm$ پایینتر، فشار از دستور $PV=c$ به دست می‌آید. اگر فشار هوای بیرون، $P_0=0.1014\ MPa$ باشد، تندی چکش در پایان مسیر چیست؟




نگاره 3.123




$$A=\pi(300^2)/4=70685.8\ mm^2$$

$$P_1x_1=Px \quad P=P_1x_1/x=1.4(10^6)(0.100)/x=140000/x$$

$$U=180(0.300)(9.81)+1.4(10^6)(0.070686)(\frac{50}{1000})+$$

$$-0.1014\times10^6(0.07068)(\frac{300}{1000})+0.07068\int_{.05}^{.35}(140000/x)dx$$

$=529+4949-2150+19206=22588$ N.m

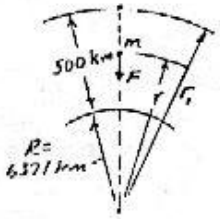
$U=\Delta T \quad 22588=(1/2)(180)(v^2-0) \quad v^2=251$ $(m/s)^2$

$v=15.84$ m/s

*3.124* - موتور موشکی بر فراز قطب شمال در بلندی *500 km* خاموش می‌شود. تندی رو به‌پایین موشک در بلندی *100 km* چیست؟ از $g=0.825$ $m/s^2$ و شعاع زمین $R=6371$ *km* بهره گیرید.

$F=Gmm_e/r^2=gR^2m/r^2 \quad U=\Delta T \Rightarrow$

$$\int_{r_1}^{r} F(-dr)=mv^2/2-0 \quad -\int_{r_1}^{r} gR^2m/r^2dr=mv^2/2$$



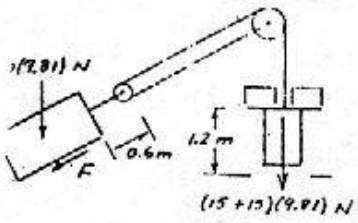

$$-gR^2(-1/r)_{r_1}^{r}=v^2/2$$

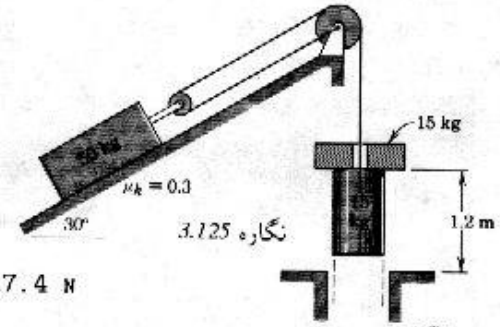
$$gR^2(1/r-1/r_1)=v^2/2, \quad v=R\sqrt{2g(1/r-1/r_1)}$$

$$v=6371\sqrt{\frac{2(9.825)}{1000}\left(\frac{1}{6371+500-100}-\frac{1}{6371+500}\right)} \text{ Km/s}$$

$$v=6371\sqrt{4.2237(10^{-8})}=1.309 \text{ Km/s}$$

*3.125* - دستگاه از آرایش نشان‌داده رها می‌شود. بسته *50 kg* تا کجا بالا می‌رود؟ استوانه *15 kg* پایین می‌رود و طوقه در دهانه سوراخ می‌ماند.




نگاره *3.125*

$F=\mu_kN=0.3(50)(9.81)\cos30^\circ=127.4$ N

U=ΔT First Interval:

$30(9.81)1.2-[50(9.81)0.5+127.4]1.2/2=$

$=30v^2/2+(50/2)(v/2)^2$

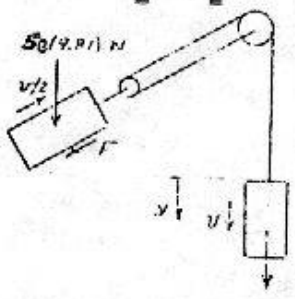
$v^2=6.096$ $(m/s)^2$, $v=2.469$ m/s

Second nterval:

$15(9.81)y-[50(9.81)0.5+127.4](y/2)=$

$=0-15(6.097)/2-(50/2)(6.097/4)$

$y=2.14$ m $\quad s=(1.2+2.14)/2=1.67$ m



3.126 - استوانه از $x=1\ m$ که فنر به سختی $450\ N/m$ آزاد است، رها می‌شود. *(a)* تندی بیشینه $x$ آن چیست؟ *(b)* بیشینه $x$ چیست؟

$F=k(x-1)=450(x-1)$ $U=\Delta T$

$$10(9.81)(x-1)-\int_1^x 450(x-1)dx=10v^2/2$$

$98.1(x-1)-450(x^2/2-x-1/2+1)=5v^2$ $5v^2=-225x^2+548.1x-323.1$

$5(dv/dx)^2=-450x+548.1=0$

$v_{max}$: $x=548.1/450=\underline{1.218\ m}$

$\Rightarrow 5v^2=-225(1.218)^2+548.1(1.218)-323.1=10.693$

$v^2=2.139$ $\underline{v=1.462\ m/s}$

$x_{max} \Rightarrow v=0 \Rightarrow 225x^2-548.1x+323.1=0$

$x^2-2.436x+1.436=0$

$x=1.218\pm\sqrt{5.934-5.744}/2=1.218\pm0.218=\underline{1.436\ m}$

نگاره 3.126

3.127 - بسته $m$ از فشردگی $x_0$ رها می‌شود. توان فنر $P(x)$ چیست و بیشینه آن در کجا رخ می‌دهد؟

$U=\Delta T$ $\int_{x_o}^{x} kxdx=mv^2/2$, $v^2=(k/m)(x_o^2-x^2)$ $P=Fv$

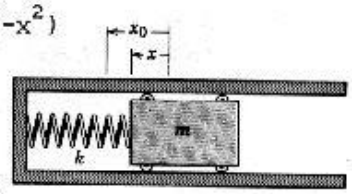
$P^2=F^2v^2=(kx)^2(k/m)(x_o^2-x^2)$ $P=kx\sqrt{(k/m)(x_o^2-x^2)}$

$(dP/dx)^2=(k^3/m)(2x_o^2x-4x^3)=0 \Rightarrow x=0$ $(P=0)$

$x=x_o/\sqrt{2} \Rightarrow$

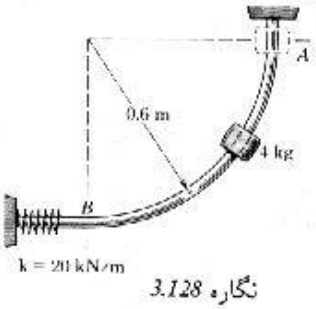
$P_{max}=k(x_o/\sqrt{2})(\sqrt{k/m})\sqrt{x_o^2-x_o^2/2}=(k/2)\sqrt{k/m}\ x_o^2$

, $x=x_o/\sqrt{2}$



نگاره 3.127

3.128 - ماسوره $4\ kg$ از $A$ رها می‌شود. *(a)* تندیش در $B$ چیست؟ *(b)* بیشترین فشردگی فنر چیست؟



نگاره 3.128

(a) $\Delta T+\Delta V_g=0$ $mv^2/2-0-mgh=0$

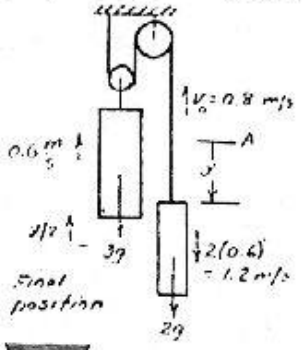
$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.6)}=\underline{3.43\ m/s}$

(b) $\Delta V_g+\Delta V_e=0$ since $\Delta T=0$ $-mgh+kx^2/2=0$

$x^2=2mgh/k=2(4)(9.81)(0.6)/(20x10^3)=$

$=0.235(10^{-2})\ m^2$ $x=0.0485\ m$ $\underline{x=48.5\ mm}$

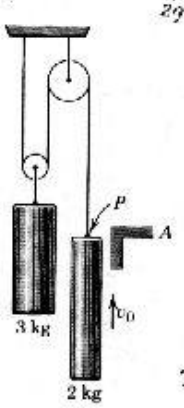
*3.129* - نقطه $P$ با تندی $0.8\ m/s$ از $A$ می‌گذرد. $P$ چه اندازه پایینتر رود تا تندی استوانه $3\ kg$ به $0.6\ m/s$ رو به‌بالا برسد؟



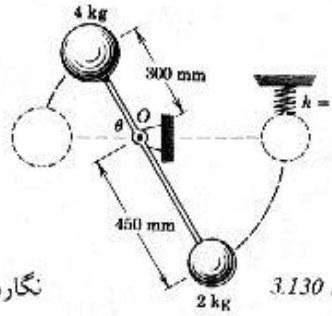

$$U=\Delta T$$

$$2gy-3g(y/2)=(1/2)2(1.2^2-0.8^2)+(1/2)3(0.6^2-0.4^2)$$

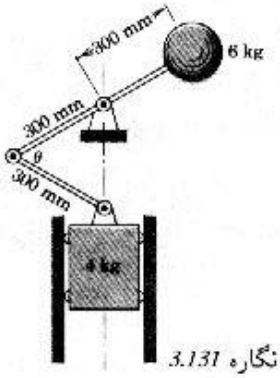
$$y=(2/9.81)(0.8+0.3) \quad \underline{y=0.224\ m}$$




نگاره *3.129*




نگاره *3.130*




نگاره *3.131*

*3.130* - دستگاه از $\theta=60^\circ$ رها می‌شود. *(a)* تندی گلوله $2\ kg$ پیش از برخورد با فنر چیست؟ *(b)* بیشینه فشردگی فنر چیست؟

(a) $\Delta T+\Delta V_g=0$

$$(1/2)(2)v^2+(1/2)(4)(0.3v/0.45)^2+$$
$$+2(0.45)(9.81)\sin60^\circ-4(0.3)(9.81)\sin60^\circ=0$$

$$1.89v^2=2.54 \quad \underline{v=1.16\ m/s}$$

(b) $\Delta T=0 \quad \Delta V_g+\Delta V_e=0$

$$-2.54+(1/2)35000x^2=0 \quad \underline{x=12.04\ mm}$$

*3.131* - دستگاه از $\theta=60^\circ$ رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=6^\circ$ چیست؟

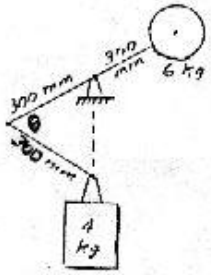
$$\Delta T+\Delta V_g=0$$

$$(\Delta V_g)_{6kg}=6(9.81)(0.3)(1-\sin30^\circ)=8.829\ J$$

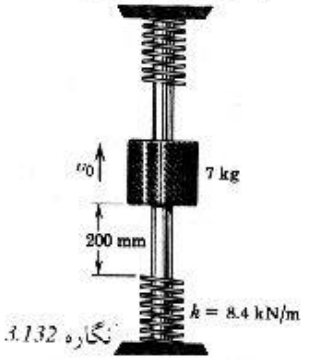
$$(\Delta V_g)_{4kg}=-4(9.81)(2)(0.3)(1-\sin30^\circ)=-11.772\ J$$

$$8.829-11.772+(1/2)6v^2+0=0$$

$$v^2=0.981\ (m/s)^2, \underline{v=0.990\ m/s}$$



*3.132* - ماسوره در آرایش نشان‌داده، تندی $2.5\ m/s$ رو به‌بالا دارد. فشردگی فنر پایین، پس از بازگشت ماسوره چیست؟




نگاره *3.132*

$$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$$

$$\Delta V_e=0 \Rightarrow$$

$$-7(9.81)(0.2+x)+(1/2)8400x^2+$$
$$-(1/2)(7)(2.5)^2=0$$

$$4200x^2-68.67x-35.61=0$$

$$x=[-68.67\pm\sqrt{68.67^2+4(4200)(35.61)}]/8400$$
$$=0.0842\ m\ ,\ -0.1006\ m$$

$$x=100.6\ mm$$

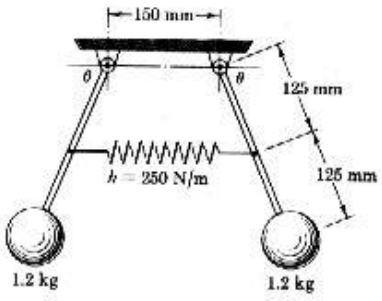
*3.133* - دستگاه از $\theta=30^\circ$ رها می‌شود. تندی گلوله‌ها در $\theta=90^\circ$ که فنر آزاد می‌شود، چیست؟

$$\Delta T=2(1/2)(1.2)(9.81)v^2=11.772v^2$$

$$\Delta V_e=-(1/2)(0.25)[2(0.125)\cos30^\circ]^2=-5.86$$

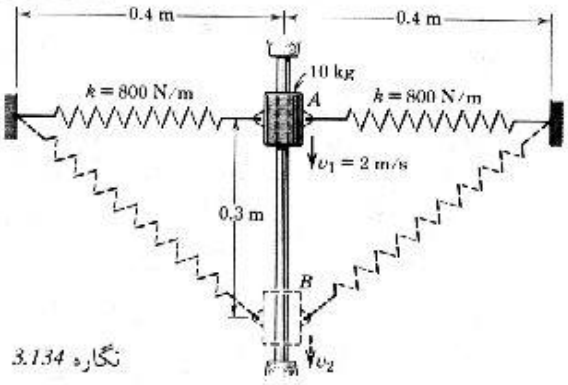
$$\Delta V_g=-2(1.2)(9.81)(0.25)(1-\sin30^\circ)=-2.943$$

$$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \Rightarrow v=864\ m/s$$




نگاره *3.133*

*3.134* - ماسوره از $A$ با فشردگی فنرها به اندازه $0.1\ m$ با تندی $v_1=2\ m/s$ با پایین می‌رود. تندی آن در $B$ چیست؟




نگاره *3.134*

$$k=800\ N/m \quad v_1=2\ m/s$$

$$\delta_1=0.1\ m \quad \delta_2=0.5-0.3=0.2\ m \quad \Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$$

$$(1/2)10(v_2^2-2^2)-10(9.81)(0.3)+$$
$$+(2/2)800(0.2^2-0.1^2)=0$$

$$5v_2^2=20+29.43-24 \quad v_2=2.26\ m/s$$

*3.135* - ماسوره *1.5 kg* با تندی *2 m/s* از *A* می‌گذرد و در *B* به *3 m/s* می‌رسد. اگر طول آزاد فنر، *0.3 m* و طول مسیر، *0.7 m* باشد، کار نیروی اصطکاک و میانگین آن چیست؟

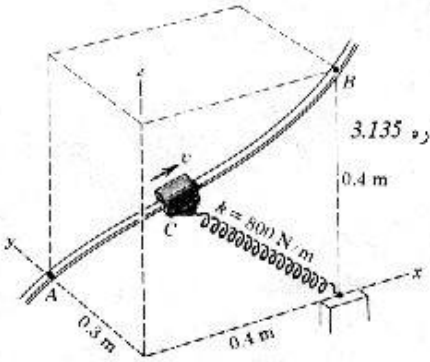
$\Delta T=(1/2)(1.5)(3^2-2^2)=3.75$ J

$\Delta V_e=(1/2)800[(0.4-0.3)^2-(0.5-0.3)^2]=-12$ J

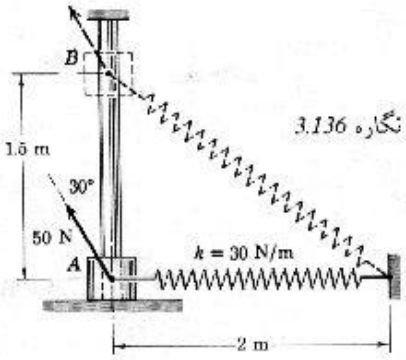
$\Delta V_g=1.5(9.81)(0.4)=5.89$ J $\quad U_f=U=\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T$

$U_f=3.75-12+5.89=-2.36$ J $\quad |U_f|=F_{av}s$

$F_{av}=2.36/0.7=3.38$ N




نگاره *3.135*




نگاره *3.136*

*3.136* - طول آزاد فنر، *1.5 m* است و ماسوره از *A* به راه می‌افتد. تندیش در *B* چیست؟

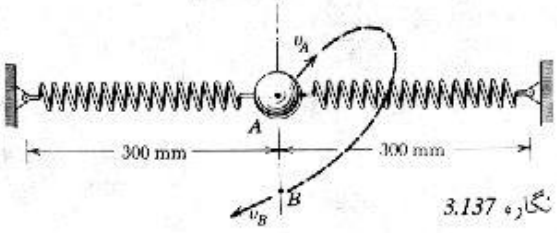
$U=\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T \quad U=50(1.5)\cos 30^\circ=64.95$ J

$\Delta T=(1/2)2v^2=v^2$

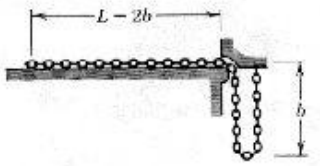
$\Delta V_e=(1/2)30[(\sqrt{2^2+1.5^2}-1.5)^2-(2-1.5)^2]=11.25$ J

$\Delta V_g=2(9.81)1,5=29.43$ J

$\Rightarrow 64.95=v^2+11.25+29.43 \quad v^2=24.27 \quad v=4.93$ m/s




نگاره *3.137*




نگاره *3.138*

*3.137* - دو فنر به سختی *1800 N/m* به گوی *1.5 kg* و آزاد در *A*، بسته شده‌است. به گوی، تندی *2.5 m/s* می‌دهیم و گوی، مسیر خط‌چین نشان‌داده را می‌پیماید و از *B* در *125 mm* پایینتر می‌گذرد. تندی گوی در *B* چیست؟

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

$$\Delta T=(1/2)(1.5)(v_B^2-2.5^2)=0.750v_B^2-4.7 \text{ N.m}$$

$$\Delta V_e=2[(1/2)(1800)(0.025^2)=1.125 \text{ N.m}$$

$$\Delta V_g=-(1.5)(9.81)(0.125)=-1.84 \text{ N.m}$$

$$-1.84+1.25-4.7+0.75v_B^2=0$$

$$v_B^2=7.0533 \quad v_B=2.66 \text{ m/s}$$

*3.138* - زنجیر از آرایش نشان داده رها می‌شود. تندی آخرین ذره افتان چیست؟

$$V_g=-2\rho gb(b/2)=-\rho gb^2 \qquad V_g=-2\rho g(L/2)(L/4)=-\rho gL^2/4$$

$$\Delta V_g=-\rho gL^2/4-(-\rho gb^2)=\rho g(b^2-L^2/4)$$

$$\Delta T+\Delta V_g=0$$

$$\Delta T=(1/2)\rho(L/2)v^2$$

$$\rho Lv^2/4+\rho g(b^2-L^2/4)=0 \qquad v=\sqrt{g(L^2-4b^2)/L}$$

*3.139* - دستگاه از $\theta=0$ با فنرهای آزاد به سختی *3.5 kN/m* رها می‌شود. تندی وزنه در $\theta=30^\circ$ چیست؟

$$\Delta V_g=-5(9.81)(0.15\tan 30^\circ)=-4.25 \text{ N.m}$$

$$x=150/\cos 30^\circ-150=23 \text{ mm}=0.023 \text{ m}$$

$$\Delta V_e=2\{(1/2)(3500)(0.023)^2\}=1.8515 \text{ N.m}$$

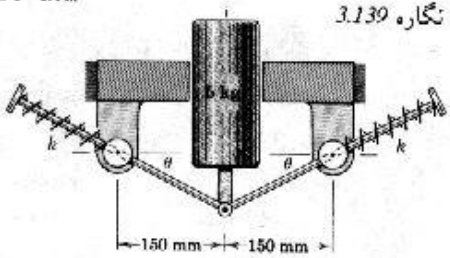
$$\Delta T=(1/2)(5)v^2=2.54v^2$$

$$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$$

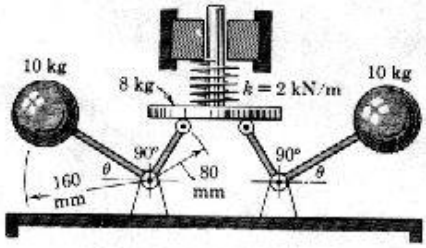
$$2.5v^2-4.25+1.8515=0$$

$$v^2=0.9594 \qquad v=0.98 \text{ m/s}$$

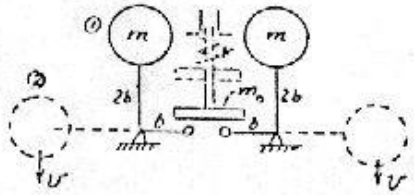
نگاره *3.139*




*3.140* - دستگاه از $\theta=90^\circ$ با فنرهای آزاد، رها می‌شود. تندی گلوله‌ها در $\theta=0$ چیست؟




نگاره *3.140*




$m=10$ kg $\quad m_0=8$ kg $\quad b=0.080$ m

$k=2000$ N/m $\quad E_1=E_2$

$\Rightarrow T_1+V_{e_1}+V_{g_1}=T_2+V_{e_2}+V_{g_2}$ $T_1=0, T_2=2(mv^2/2)=10v^2$

$V_{e_1}=0, V_{e_2}=kb^2/2=(1/2)(2000)(0.080)^2=6.40$ J

$V_{g_1}=2(mg)(2b)=4(10)(9.81)(0.080)=31.39$ J

$V_{g_2}=m_0gb=8(9.81)(0.080)=6.28$ J

$\Rightarrow 0+0+31.39=10v^2+6.40+6.28$

$v^2=1.871$ (m/s)$^2$ $\underline{v=1.368 \text{ m/s}}$

*3.141* - دستگاه از $\theta=60^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=90^\circ$ چیست؟

$\delta=0.375\sqrt{2}-0.375=0.155$ mm

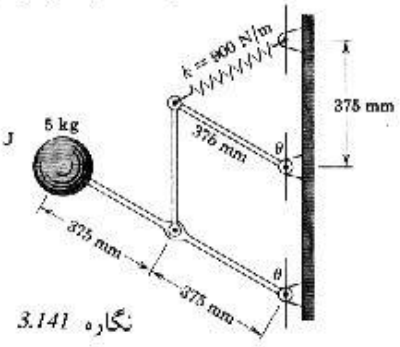
$\Delta V_e=(1/2)(900)(0.155)^2=10.81$ J

$\Delta V_g=-mg\Delta h=-5(9.81)(0.75)\cos 60^\circ=-18.39$ J

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$

$(1/2)(5)v^2-18.39+10.81=0$

$v^2=3.0326$ , $\underline{v=1.74 \text{ m/s}}$



نگاره *3.141*

*3.142* - دستگاه از $\theta=180^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود. کمینه $\theta$ چیست؟

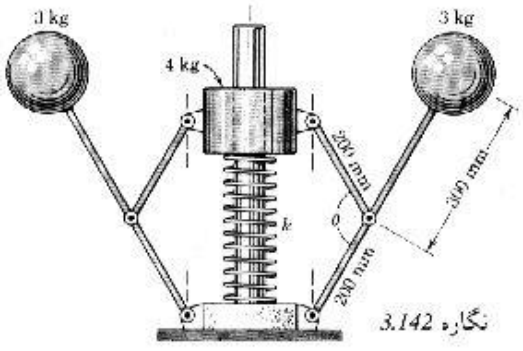
$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$ $\Delta T=0$

$\Delta V_e=(1/2)(900)[0.40(1-\sin(\theta/2))]^2=72(1-\sin(\theta/2))^2$ J

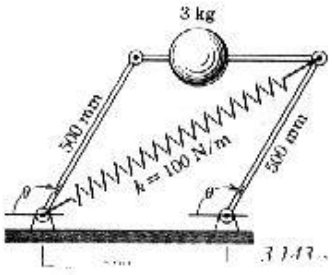
$\Delta V_g=-2(3)(9.81)(0.5)(1-\sin(\theta/2))+$
$-4(9.81)(0.4)(1-\sin(\theta/2))=-45.13(1-\sin(\theta/2))$

$\Rightarrow 72(1-\sin(\theta/2))^2=45.13(1-\sin(\theta/2))$

$\sin(\theta/2)=1-45.13/72=0.3733$ $\underline{\theta=43.8^\circ}$



نگاره *3.142*



*3.143*

3.143 - دستگاه از $\theta=90^\circ$ با فنر آزاد، رها می‌شود، تندی گلوله در $\theta=135^\circ$ چیست؟

$\delta=\overline{AB}-0.5\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{2(0.5)^2-2(0.5)^2\cos\theta}=0.5\sqrt{2}\sqrt{1-\cos135^\circ}$

$\delta=0.217$ m $\quad \Delta V_e=k\delta^2/2=(1/2)(100)(0.217)^2=2.35$ J

$\Delta V_g=-mg\Delta h=-3(9.81)(0.5)(1-\sin135^\circ)=-4.31$ J

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad (1/2)3v^2-4.31+2.35=0$

$v^2=1.307 \quad \underline{v=1.143 \text{ m/s}}$

3.144 - اگر $v_1=90$ km/h باشد، $v_2$ چیست؟

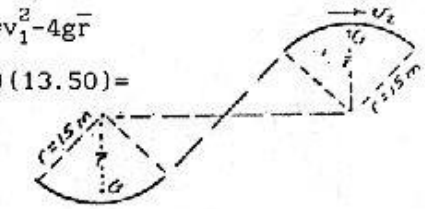
$\bar{r}=2\sqrt{2}r/\pi=2\sqrt{2}(15)/\pi=13.50$ m $\quad \Delta V_g+\Delta T=0$

$(1/2)m(v_2^2-v_1^2)+mg(2\bar{r})=0 \quad v_2^2=v_1^2-4g\bar{r}$

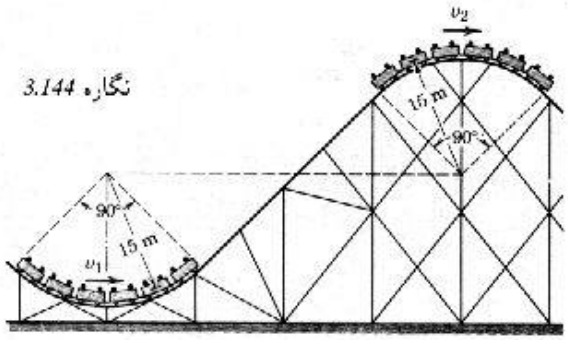
$v_2^2=[90(1000)/3600]^2-499.81)(13.50)=$

$=625-529.9=95.07$ $(\text{m/s})^2$

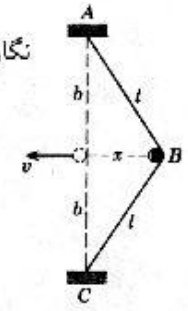
$v_2=9.75$ m/s $\quad \underline{v_2=35.1 \text{ km/h}}$




نگاره 3.144




نگاره 3.145




3.145 - دستگاه از آرایش نشان‌داده، رها می‌شود. اگر طول آزاد کِش، $2b$ باشد، تندی گلوله در $x=0$ چیست؟

$\Delta V_e=0-2(1/2)k(l-b)^2=(-2/2)k(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2$

Tension$=k(l-b) \quad K=T/[(l-b)/b]$

$\Rightarrow K=kb \quad \Delta V_e=(-K/b)(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2$

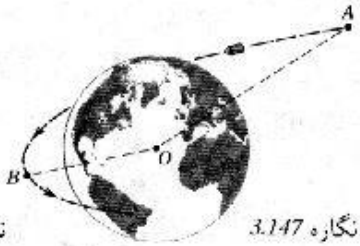
$\Delta V_e+\Delta T=0 \qquad (-K/b)(\sqrt{b^2+x^2}-b)^2+(1/2)mv^2=0, v=\sqrt{2K/mb}(\sqrt{b^2+x^2}-b)$

*3.146* - کمترین تندی پرتاب چه باشد تا گلوله از گرانش زمین بگریزد؟

$$\Delta V_e+\Delta T=0;\ (1/2)m(v^2-v_o^2)-mgR^2/r+mgR^2/R=0 \quad -v_o^2/2+gR$$

$$v_o=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times9.81\times6371\times10^3}=11190\ \text{m/s}=11.19\ \text{km/s}$$

نگاره *3.146*




نگاره *3.147*

نگاره *3.148*

*3.147* - ناویزی در بازگشت به زمین، با تندی *24000 km/h* به *A* در *7000 km* از میانه زمین می‌رسد. تندی ناویز در *B* با بلندی *6500 km* چیست؟

$$\Delta V_e+\Delta T=0 \quad V_g=-mgR^2/r \quad R=6371\ \text{km}$$

$$g=9.825(36000^2/1000=127.3(10)^3\ \text{km/h}^2$$

$$(1/2)m(v_B^2-[24000]^2)+$$

$$+127.3(10)^3(6371)^2m(-1/6500+1/7000)=0$$

$$v_B^2=2[288+56.8]10^6=690(10^6) \quad v_B=26300\ \text{km/h}$$

*3.148* - وابستگی $v_p$ و $v_A$ چیست؟

$$E=T_A+V_{g_A}=T_p+V_{g_p}$$

$$(1/2)mv_A^2-mgR^2/r_A=(1/2)mv_p^2-mgR^2/r_p$$

$$v_A^2=v_p^2-2gR^2(1/r_p-1/r_A),\ v_A=\sqrt{v_p^2-2gR^2(1/r_p-1/r_A)}$$

*3.149* - موشکی در *A* با تندی *13000 km/h* پرتاب می‌شود. پس از *400 km* تندیش در *B* به *12400 km/h* می‌رسد. میانگین مقاومت هوا بر این موشک *22 kg* چیست؟ *R=6371 km*.

$$\Delta T=m(v_B^2-v_A^2)/2=(1/2)(12400^2 13000^2)/3.6^2=-587963\ \text{J}$$

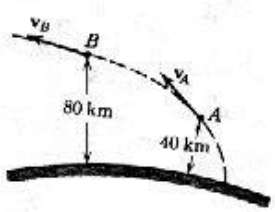
$$\Delta V_g=-mgR^2(1/r_B-1/r_A)=-22\times9.81\times6371^2\times10^3\times$$

$$\times[(1/6451)-(1/6411)]=8472548\ \text{J}$$

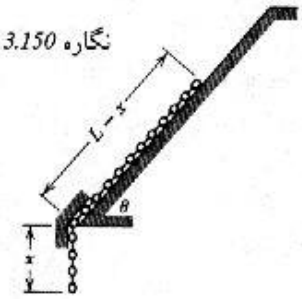
$$U=-P(400\times10^3)=-400\times10^3P\ \text{J}$$

$$U=\Delta T+\Delta V_g\ ;\ -400\times10^3P=-587963+8472548 \quad P=19.7\ \text{N}$$

نگاره 3.149




نگاره 3.150




نگاره 3.151

3.150 - زنجیر از $x=0$ رها می‌شود. $v(x)$ چیست؟

$h_1=(L-x)\sin\theta$

$h=(L-x)\sin\theta+x/2+(x/2)\sin\theta=L\sin\theta+(x/2)(1-\sin\theta)$

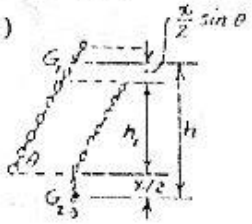
$U=\Delta T+\Delta V_g$

$\Delta V_g=-\rho g x h=-\rho g[Lx\sin\theta+(x^2/2)(1-\sin\theta)]$

$\Delta T=\rho L v^2/2$

$\Rightarrow \quad -\rho g[Lx\sin\theta+(x^2/2)(1-\sin\theta)]+\rho L v^2/2=0$

$v=\sqrt{2gx(\sin\theta+(x/2L)(1-\sin\theta))}$




3.151 - زبانه‌ها را بیرون می‌کشیم. تندی بیشینه $m$ و نیروی گذران به کف و فشردگی فنر چیست؟

$U=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0 \quad \Delta V_g=-mgx, \Delta V_e=kx^2/2, \Delta T=mv^2/2$

$\Rightarrow -mgx+kx^2/2+mv^2/2=0$

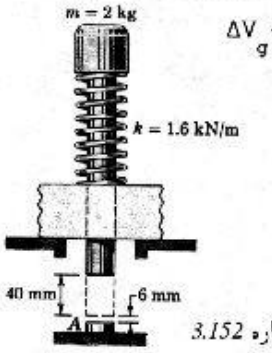
$v_{max}: \ (m/2)d^2v/dx^2=mg-kx=0, x=mg/k$

$\Rightarrow v^2=(2/m)[mg(mg/k)-(k/2)(mg/k)^2]=mg^2/k$

$v=g\sqrt{m/k} \quad \Delta T=0 \quad -mgx+kx^2/2=0, x=\delta=2mg/k$

$R=k\delta=2mg$

3.152 - سنبه را $40\ mm$ از نرازگاهش بالا کشیده و رها می‌کنیم. تندی برخوردش با $A$ چیست؟




نگاره 3.152

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0 \quad \Delta V_g=-Wh=-2\times9.81\times0.046=-0.90252\ J$

$\Delta V_e=k(x_2^2-x_1^2)/2=(1.6\times10^3)(6^2-40^2)/(2\times10^6)=$
$=-1.2512\ J$

$\Delta T=mv^2/2=v^2$

$v^2-0.90252+1.2512=0$

$v^2=2.1537 \quad v=1.47\ m/s$

3.153 - ریسمان از آرایش (a) رها می‌شود. تندی $v$ در آرایش (b) چیست؟

$\Delta V_g+\Delta T=0$

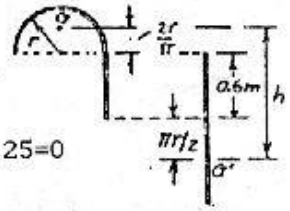
$\Delta V_g=-\rho g\pi rh=-\rho(9.81\pi x0.5x1.704)=-26.25\rho$

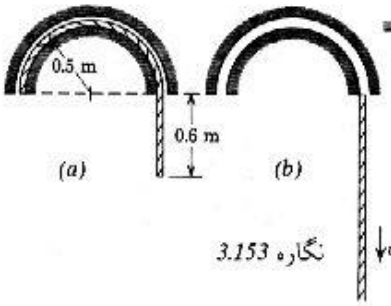
$\Delta T=(1/2)\rho(1.571+0.6)v^2=1.0855\rho v^2$ $r=0.5$ m

$2r/\pi=2(0.5)/\pi$ $\pi r=1.571$ m

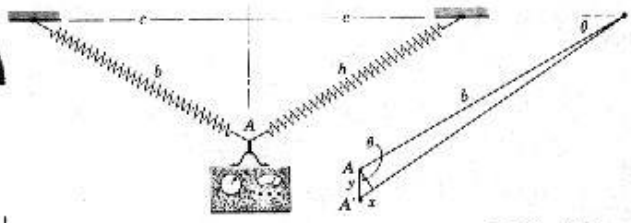
$h=0.318+0.6+0.785=1.704$ m $\Rightarrow 1.0855v^2-26.25=0$

$v^2=24.19$ $(m/s)^2$ $\underline{v=4.92\ m/s}$




نگاره 3.153




نگاره 3.154

3.154 - دستگاه از آرایش نشان‌داده، با فنرهای آزاد رها می‌شود. اگر $x=y\sin\theta$ و $\theta=\cos^{-1}(\frac{c}{h})$ باشد. $\dot{y}(y)$ و $y_{max}$ چیست؟

$\Delta V_g+\Delta V_e+\Delta T=0$ $\Delta T=m\dot{y}^2/2$ $\Delta V_g=-mgy$

$\Delta V_e=2\{kx^2/2\}=k(y\sin\theta)^2=$

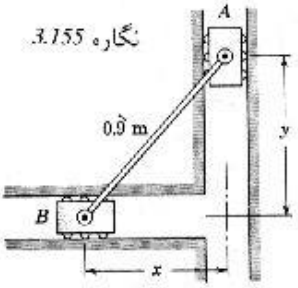
$=ky^2(1-\cos^2\theta)=ky^2(1-c^2/b^2)$

$m\dot{y}^2/2-mgy+ky^2(1-c^2/b^2)=0$

$\dot{y}=\sqrt{2y(g-ky(b^2-c^2)/mb^2)}$

$y_{max}=y$ , $\dot{y}=0 \Rightarrow 2gy-(2ky^2/m)(1-c^2/b^2)=0$

$\underline{y_{max}=(mg/k)[b^2/(b^2-c^2)]}$




نگاره 3.155

3.155 - دستگاه از $x=y$ رها می‌شود. بیشینه تندی $B$ چیست؟

$x^2+y^2=0.9^2$ $x\dot{x}+y\dot{y}=0$

$v_A=-\dot{y}=\dot{x}x/y=xv_B/y$, $\Delta V_g+\Delta T=0$; $m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2$

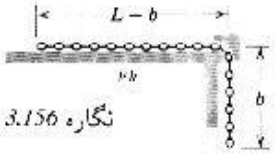
$+mg(y-0.9/\sqrt{2})=0$

$\dot{x}^2(1+x^2/y^2)=2(9.81)(0.9/\sqrt{2}-y)$

$0.9^2\dot{x}^2$ [illegible]

$$\Rightarrow y(1.8/\sqrt{2}-3y)=0, y=0.6/\sqrt{2}\ \text{m}$$

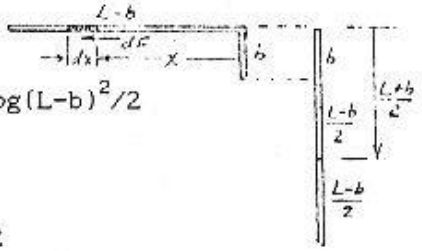
$$\dot{x}^2=19.62\sqrt{2}/30 \quad v_{B_{max}}=\dot{x}=0.962\ \text{m/s}$$




نگاره 3.156

*3.156* - دستگاه از آرایش نشان‌داده به‌راه‌می‌افتد. تندی زنجیر در پایان مسیر چیست؟

$$\rho g b=\mu_k \rho g(L-b),\ b=\mu_k L/(1+\mu_k)$$




$$U=\Delta T+\Delta V_g \quad U=-\int dF.x=-\int_0^{L-b}\mu_k\rho g x dx=-\mu_k\rho g(L-b)^2/2$$

$$\Delta T=\rho L v^2/2 \quad \Delta V_g=-\rho g(L-b)(L+b)/2$$

$$\Rightarrow -\mu_k\rho g(L-b)^2/2=\rho L v^2/2-\rho g(L^2-b^2)/2$$

$$v^2=g(1-b/L)(L+b-\mu_k[L-b])$$

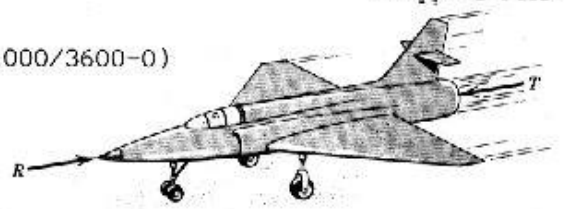
$$v^2=gL/(1+\mu_k) \quad v=\sqrt{gL/(1+\mu_k)}$$

*3.157* - جنگنده $6450\ kg$ با نیروی $T=48\ kN$ در $10$ ثانیه به $250\ km/h$ می‌رسد. میانگین نیروی اصطکاک $R$ چیست؟

$$\int\sum F dt=m\Delta v$$

$$[48(10^3)-R]10=6450(250\text{x}1000/3600-0)$$

$$R=3208\ \text{N} \quad \underline{R=3.21\ \text{KN}}$$




نگاره 3.157

*3.158* - شاتل $90\ Mg$ با تندی $26000\ km/h$ پیش‌می‌رود. پس از روشن‌کردن دو موتور هر یک به نیروی $26\ kN$ کی به $26200\ km/h$ می‌رسد؟

$$\int\sum F dt=m\Delta v$$

$$2(26)10^3 t=90(10^3)(26200-26000)(1000/3600) \quad t=96.15\ \text{sec}$$

$$\underline{t=1\ \text{min}\ 36\ \text{sec}}$$

*3.159* - گلوله $60\ gr$ پس از $3\text{x}10^{-2}$ با تندی $600\ m/s$ به دهانه لوله می‌رسد. نیروی پرتاب گلوله چیست؟

نگاره 3.159

$$Pt=m\Delta v \quad P(3\text{x}10^{-3})=0.060(600)$$

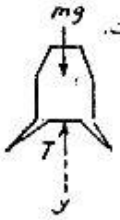
$$P=12\text{x}10^3\ \text{N} \quad \underline{P=12\ \text{KN}}$$

*3.160* - شش موشک هر یک به تکان $100\ kN.s$ یکی پس از دیگری به فاصله $0.25\ s$ روشن شده و $1.5\ s$ روشن می‌ماند. اگر تندی این خودروی $3\ Mg$ پس از $3\ s$ به $150\ m/s$ برسد، میانگین نیروی

اصطکاک $R$ چیست؟

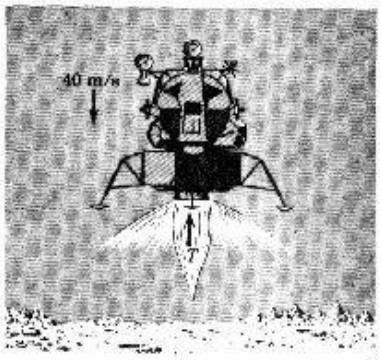
$$\int\sum F\,dt=m\Delta v$$
$$6(100000)-3R=3000(150-0)$$
$$R=50000\ \text{N}=50\ \text{kN}$$

*3.161* - موتور ماه‌نشین $320\ kg$ در $10\ s$ تکان $24\ kN.s$ به آن می‌دهد. اگر تندی ماه‌نشین در بلندی $180\ m$ $40\ m/s$ باشد، کی به تندی فرود $2\ m/s$ می‌رسد. در ماه $g=1.62\ m/s^2$ است.




$$mg=320(1.62)=518\ \text{N}\qquad T=24000/10=2400\ \text{N}$$
$$\int\sum F_y=m\Delta v_y\quad (518-2400)t=320(2-40)\quad t=6.46\ s$$

نگاره *3.160*




نگاره *3.161*

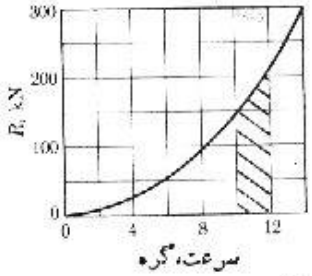
نگاره *3.162*

*3.162* - اگر کشش ریسمان $200\ kN$ باشد، کی، تندی نفت‌کش $150\times10^3\ ton$ به تندی $1$ گره می‌رسد؟

$$\int F\,dt=m\Delta v$$
$$(50000\cos20^\circ)t=\frac{150{,}000\times2240}{32.2}\ \frac{1\times1.152}{1}\ \frac{44}{30}$$
$$46985t=17.63\times10^6\quad t=375\ s\quad t=6.25\ \text{min}$$

*3.163* - یک کشتی $15000\ ton$ با تندی $10$ گره، با نیروی $280\ kN$ رانده می‌شود. اگر اصطکاک آب چنان باشد که می‌بینید، کی به تندی $12$ گره می‌رسد؟

$$\Delta T=m(v^2-v_0^2)/2$$
$$=0.5\times15\times10^6(12^2-10^2)(1.852/3.6)^2$$
$$\Delta W=280\times10^3(12-10)(1.852/3.6)t$$
$$-350\times10^3(1.852/3.6)t$$
$$\Delta T=\Delta W\quad 87335518=108033t\quad t=808\ s$$

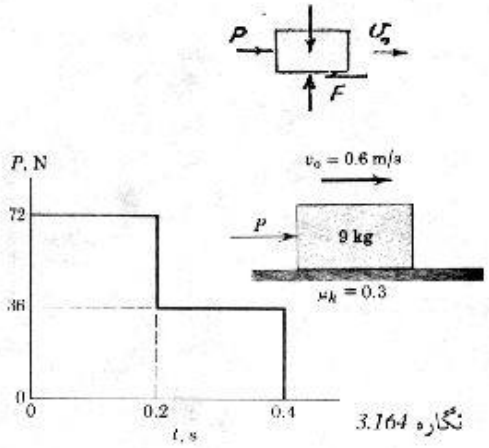



نگاره *3.163*

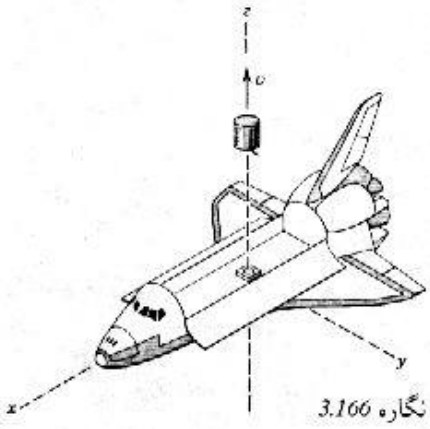
3.164 - تندی بسته، پس از صفر شدن نیروی $P$، از $0.6\ m/s$ به چه می‌رسد؟

$$\int_0^t \sum F\,dt = m\Delta v_y \qquad F_R = -9(9.81)(0.3) = -26.487\ N$$

$$(72+36)(0.2) - 26.487(0.4) = 9(v-0.6) \qquad \underline{v = 1.823\ m/s}$$




نگاره 3.164




نگاره 3.166

3.165 - کشتی $60000\ ton$ در تندی $3$ گره، با نیروی $18\ MN$ ترمز می‌گیرد. کی به $3$ گره می‌رسد؟

$$\int_0^t R\,dt = m\Delta v \qquad Rt = m\Delta v \qquad t = m\Delta v/R$$

$$t = \frac{60000(2240)}{32.2}\,\frac{[3-(-5)](1.152)(44/30)}{4(10^6)} = \underline{14.1\ sec}$$

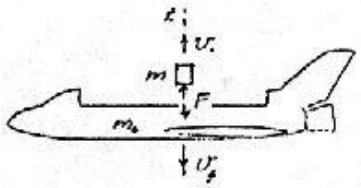
3.166 - شاتل $90\ Mg$ ماهواره $800\ kg$ را در $4$ ثانیه به تندی $0.3\ m/s$ می‌رساند و رها می‌کند. تندی شاتل و میانگین نیروی پرتاب چیست؟

1) $v_1 + v_f = 0.3\ m/s \qquad \int F\,dt = mv_1$

$$-\int F\,dt = m_f(-v_f) \Rightarrow mv_1 = m_o v_f$$

2) $800v_1 = 90000v_f$

$$v_f = 0.3 - 90000v_f/800 \qquad \underline{v_f = 0.00264\ m/s}$$

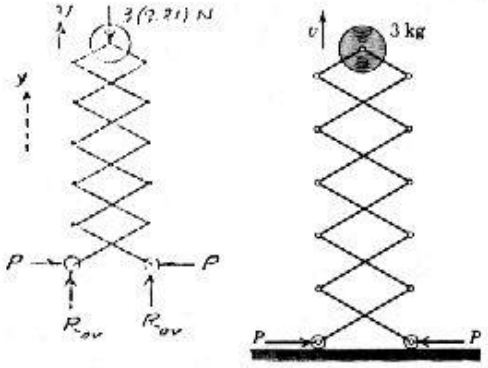



$$\Rightarrow F_{av}\int_0^4 dt = 90000(0.00264) \qquad F_{av} = 90(2.64)/4 = \underline{59.5\ N}$$

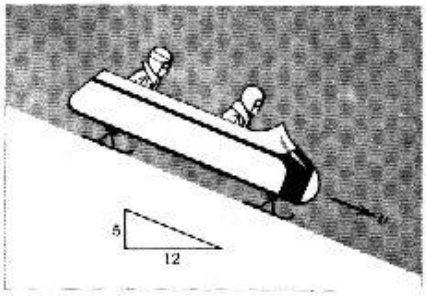
3.167 - اگر تندی گلوله در $2$ ثانیه از $2\ m/s$ به $4\ m/s$ برسد، نیروی میانگین هر یک از دو غلتک چیست؟

$v_1=2$ m/s $v_2=4$ m/s $\Delta t=2$ s $\int_0^2 \sum F_y dt = m\Delta v_y$

$[2R_{av}-3(9.81)]2=3(4-2)$ $R_{av}=16.22$ N



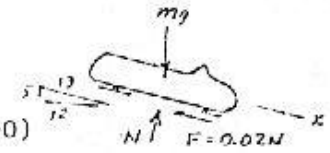

نگاره 3.167




نگاره 3.168

3.168 - اگر نیروی اصطکاک، 2% نیروی عمودی باشد، کی سورتمه به 100 km/h می‌رسد؟

$\sum F_y=0; N=mg(12/13)$ $\int_0^t \sum F_x dt = m\Delta v_x$




$[5mg/13-0.02mg(12/13)]t=m(100x1000/3600-0)$

$(9.81/13)(5-0.02(12))t=27.78$ $t=7.73$ s

3.169 - یک قطار 1600 Mg با نیروی 270 kN و اصطکاک 50 N برای هر Mg در سربالایی 1%، کی از 32 km/h به 48 km/h می‌رسد؟

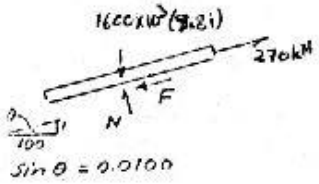
$\int \sum F dt = m\Delta v$

$[270000-50(1600)-1600000(9.81)(0.1)]t=$

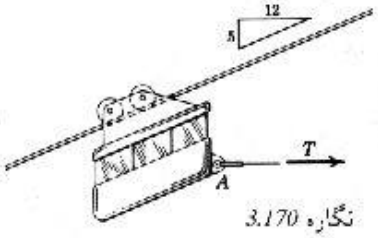
$=1600000(48-32)/3.6$

$33040t=7111111.1$ $t=215.23$ s

$t=3$ min 58 s




3.170 -اتاقک با تندی 4 m/s به‌بالا کشیده‌می‌شود. اگر ریسمان پاره شود، کی به تندی 8 m/s رو به‌پایین می‌رسد؟

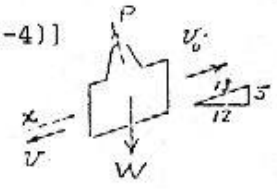



نگاره 3.170

$\int \sum F_x dt = m\Delta v_x$

$m(9.81)(5/13)=m[8-(-4)]$

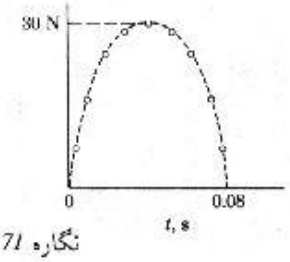
$t=3.18$ s



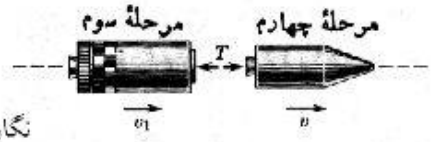
*3.171* - نیروی برخورد چنان است که می‌بینید. تندی بازتاب چیست؟

$$\int_0^t \sum Fdt=m\Delta v \quad a=30\ \text{N} \quad b=0.04\ \text{s}$$

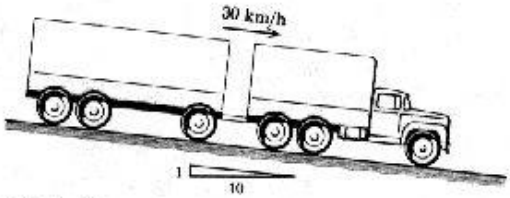
$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(30)(0.04)/2=0.20(v-(-6)) \quad \underline{v=3.42\ \text{m/s}}$$




نگاره *3.171*




نگاره *3.173*




نگاره *3.174*

*3.172* - تکان ذره $m$ با نیروی پیشران $P$ و نیروی اصطکاک $R=kv^2$، برای رسیدن به تندی بیشینه چیست؟

$$I=m(v-0)=mv \quad P=R \Rightarrow P=kv^2 \quad v=\sqrt{P/k} \quad I=m\sqrt{P/k}$$

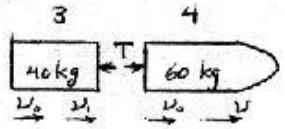
*3.173* - مرحله سوم و چهارم با تندی *15000 km/h* حرکت می‌کند که موشک چهارم آتش شده و در *0.5 s* با تندی *10 m/s* بیشتر، از موشک سوم جدا می‌شود. اگر جرم موشک سوم و چهارم، *40 kg* و *60 kg* باشد، میانگین $T$ چیست؟

$$\int\sum Fdt=\Delta G \quad -T(0.5)=40(v_1-v_o) \quad T(0.5)=60(v-v_o)$$

$$v_1-v_o=-T(0.5/40) \quad v-v_o=T(0.5/60)$$

$$v-v_1=0.5T(1/60+1/40)$$

$$v-v_1=10\ \text{m/s} \Rightarrow T=10(2)/(1/60+1/40)=480\ \text{N}$$




*3.174* - ترمز اسب *10 Mg* و گاری *7.5 Mg* از کمرشکن نشان‌داده، نیروی یکسان پدید می‌آورد. اگر پس از *5* ثانیه ترمزگیری، تندی کمرشکن به صفر برسد، میانگین نیروی بین آن دو چیست؟

$$\theta=\tan^{-1}(0.1)=5.71^\circ \quad \sin\theta=0.0995$$

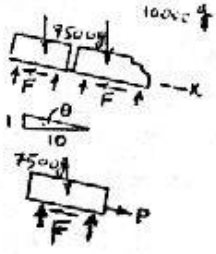
$$\int\sum F_x dt=m\Delta v_x$$

$$[17500(9.81)(0.0995)-2F]5=17500[0-(30/3.6)]$$

$$F=23124.2\ \text{N}$$

$$[P-23124.2+7500(9.81)(0.0995)]5=$$

$$=7500[0-(30/3.6)] \quad \underline{P=3303.5\ \text{N}}$$



*3.175* - اندازه حرکت خطی ذره‌ای با جایگاه $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ *m* $\vec{G}=-3\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ *kg.m/s* است. اندازه حرکت زاویه‌ای آن چیست؟ $\underline{H_o}=\underline{r}\times\underline{G}=(3\underline{i}+4\underline{j}-3\underline{k})(-3\underline{i}-2\underline{j}+3\underline{k})=6\underline{i}+6\underline{k}$ kg.m$^2$/s

$H_o=\sqrt{6^2+6^2}=8.49$ kg.m$^2$/s

*3.176* - بر یک ذره *kg* 4 با تندی *m/s* 10 نیروی نشان‌داده می‌نشیند. تندی ذره در *(a)* $t=0.6$ *s* و *(b)* $t=0.9$ *s* چیست؟

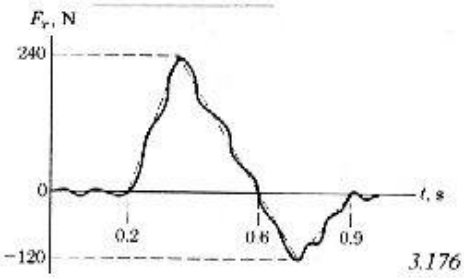
$\int\sum F_x dt=m\Delta v_x$

(a) $(0.6-0.2)(240/2)=4(v_{0.6}-[-10])$

$48=4(v_{0.6}+10)$ $v_{0.6}=2$ m/s

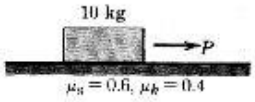
(b) $48-(0.9-0.6)(120/2)=4(v_{0.9}-[-10])$

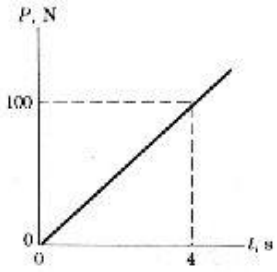
$v_{0.9}=-2.5$ m/s



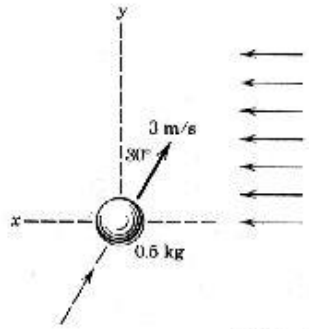

نگاره *3.176*

نگاره *3.177*




نگاره *3.178*

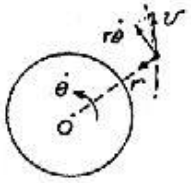



نگاره *3.179*

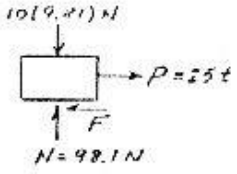
*3.177* - نشان دهید که $r^2\dot{\theta}$ برای ماهواره بی‌موتور، ثابت می‌ماند.

$\sum M_o=\dot{H}_o$ $0=d(mr\dot{\theta}xr)/dt$ $d(r^2\dot{\theta})/dt=0$

$\Rightarrow$ $\underline{r^2\dot{\theta}=\text{const.}}$




*3.178* - تندی بسته با نیروی نشان داده، پس از $t=4$ *s* چیست؟




$F_s=\mu_s N=0.6(98.1)=58.9$ N

$F_k=\mu_k N=0.4(98.1)=39.2$ N $P=F_s$

$25t=58.9 \quad t=2.35\ s \quad \int\sum F dt=m\Delta v$

$$\int_{2.35}^{4}(25t-39.2)dt=10(v-0) \quad 25t^2/2-39.2t\Big]_{2.35}^{4}=10v$$

$10v=66.1 \quad \underline{v=6.61\ m/s}$

*3.179* - اگر نیروی باد، $0.6\ N$ باشد، کی گلوله دوباره به $y$ می‌خورد؟

$\int\sum F_x dt=m\Delta v_x \quad 0.6t=0.5(v_x+3\sin 30^\circ)$

$v_x=1.2t-3/2\ m/s \quad v_x=dx/dt$

$$x=\int_0^t v_x dt=0.6t^2-1.5t \quad t=0 \quad x=0 \quad t=1.5/0.6=\underline{2.5\ s}$$

*3.180* - یک ذره $4\ kg$ با دستور $\vec{r}=3t^2\hat{i}-2t\hat{j}-3t\hat{k}$ در $t=3\ s$، کجاست و اندازه حرکت زاویه‌ای و گشتاور نیروهایش چیست؟

$\underline{r}=3t^2\underline{i}-2t\underline{j}-3t\underline{k} \quad m=4\ kg \quad \underline{v}=\dot{\underline{r}}=6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k}\ m/s$

$\underline{G}=m\underline{v}=4(6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k})\ N.s$

$\underline{H}=\underline{r}\times\underline{G}=(3t^2\underline{i}-2t\underline{j}-3t\underline{k})\times 4(6t\underline{i}-2\underline{j}-3\underline{k})=$

$=12t^2(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m.s$

$\underline{M}=\dot{\underline{H}}=24t(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m \quad t=3\ s \quad \underline{H}=108(-3\underline{j}+2\underline{k})\ N.m.s$

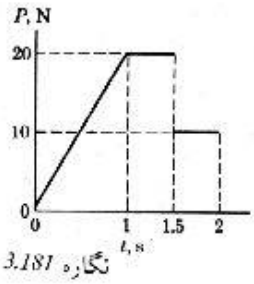
$H=108\sqrt{3^2+2^2}=\underline{389\ N.m.s} \quad M=72\sqrt{3^2+2^2}=\underline{260\ N.m}$

*3.181* - یک ذره $10\ kg$ با تندی $3\ m/s$ پیش می‌رود و نیروی $P$، عمود بر راستای تندیش بر آن می‌نشیند. تندی آن در $t=2\ s$ و زاویه‌اش با $P$ چیست؟

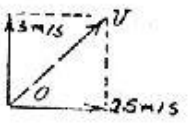
$$\int_0^t\sum F_x dt=m(v_{2x}-v_{1x}) \qquad \int_0^1 20t\,dt+\int_1^{1.5}20\,dt+\int_{1.5}^{2}10\,dt$$

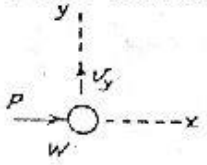
$25=10(v_{2x}-0) \quad v_{2x}=2.5\ m/s$

$v=\sqrt{2.5^2+3^2}=\underline{3.9\ m/s} \quad \theta=\tan^{-1}(3/2.5)=\underline{50.2^\circ}$



نگاره 3.181



3.182 - یک ذره $0.5\ kg$ با نیروی $F_x=4e^{-t}Cos2\pi t$ می‌لرزد. اگر تندی آن در $t=0$ $1.2\ m/s$ باشد، در $t=2\ s$ چیست؟

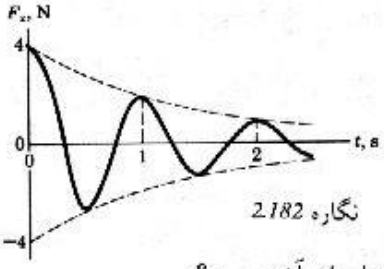
$$\int\sum F_x dt=\int_0^2 4e^{-t}\cos(2\pi t)dt=$$

$$=4e^{-t}(-\cos(2\pi t)+2\pi\sin(2\pi t))/(1+4\pi^2)\Big]_0^2$$

$$=0.0988[1-e^{-2}]=0.0854\ m/s$$

$$\sum F_x=m\Delta v_x;\ 0.0854=0.5[v_x-(-1.2)]$$

$$v_x=-1.03\ m/s$$




نگاره 2.182

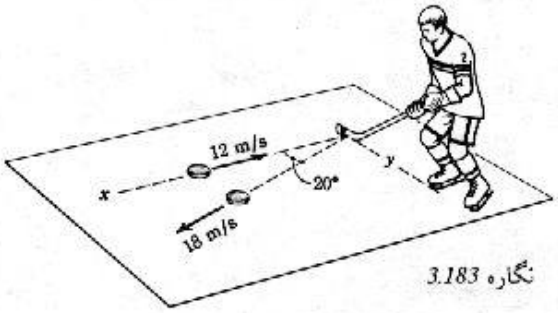
3.183 - اگر چوگان باز در $0.045$، گوی را برگرداند، نیرو و راستای آن چیست؟

$$\int\underline{F}dt=\underline{F}t=m\Delta\underline{v}$$

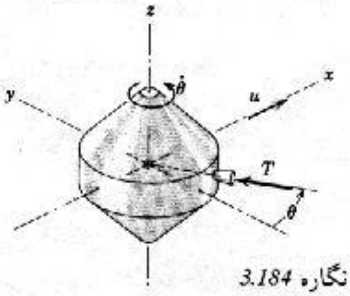
$$\underline{F}=(0.20/0.04)(18\cos20^\circ\underline{i}+18\sin20^\circ\underline{j}-(-12\underline{i}))$$

$$=30(4.819\underline{i}+1.026\underline{j})\ N\quad F=30\sqrt{4.819^2+1.026^2}=147.8\ N$$

$$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(1.026/4.819)=12.62^\circ$$




نگاره 3.183




نگاره 3.184

3.184 - $T=600\ N$ از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ روشن می‌ماند. با $u=30000\ km/h$ و $\dot\theta=\frac{\pi}{10}\ rad/s$، تندی ناویز $260\ kg$ در سوی $x$ چه می‌شود؟

$$T_y=600\cos\theta;\ \dot\theta=\pi/10\ rad/s\ \Rightarrow\ dt=(10/\pi)d\theta$$

$$\int\sum F_y dt=m\Delta v_y\quad\int_0^{\pi/2}600\cos\theta(10/\pi d\theta)=260(v_y-0)$$

$$600/\pi\sin\theta\Big]_0^{\pi/2}=260v_y\quad v_y=6000/260\pi=7.35\ m/s$$

3.185 - خودرویی به جرم $m$ با نیروی $F$ و اصطکاک $R=R_0+kv$ کی به تندی $v$ می‌رسد؟

$R=R_0+kv \quad \sum Fdt=mdv,\ (F-R_0-kv)dt=mdv$

$$\int_0^t dt=\int_0^v mdv/(F-R_0-kv) \quad t=-(m/k)\ln(F-R_0-kv)\Big]_0^v$$

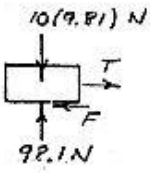
$$t=(m/k)\ln(F-R_0)/(F-R_0-kv)$$

*3.186* - بسته با نیروی $T$ به‌راه‌می‌افتد. تندی بیشینه و زمان ایستادن آن چیست؟

$T=F=\mu W=0.5(98.1)=49.05$ N $\quad t_1=49.05(4)/100=1.96$ s

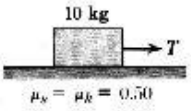
$$\int\sum Fdt=m\Delta v \quad (100-49.05)(4-1.96)/2=10(v-0)$$

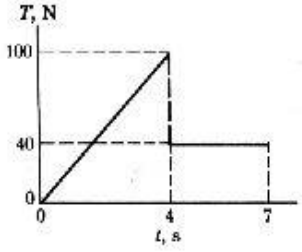
$v_{max}=5.19$ m/s



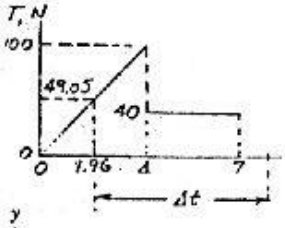

$\Delta V=0 \Rightarrow (100+49.05)(4-1.96)/2+40(7-4)-49.05\Delta T=0$

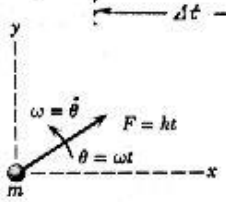
$\Delta T=5.54$ s




نگاره *3.186*




نگاره *3.187*

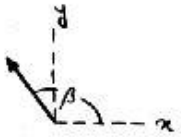
*3.187* - اندازه تندی ذره، پس از نیم‌بار چرخش میدان نیرو، و زاویه آن با $x$ چیست؟

$$\int_0^t \sum F_x dt=m\Delta v_x \quad \int_0^{\pi/\omega} kt\cos\omega t dt=m(v_x-0)$$

$$(k/\omega^2)[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t]_0^{\pi/\omega}=mv_y$$

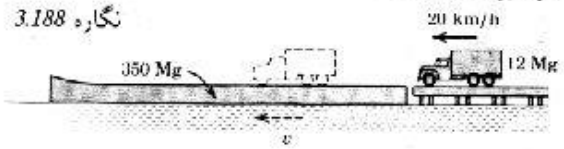
$v_y=k\pi/m\omega^2 \quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=(k/m\omega^2)\sqrt{4+\pi^2}$

$\beta=\tan^{-1}(v_y/v_x)=\tan^{-1}(-\pi/2)=122.5^\circ$




*3.188* - تندی شناور، پس از ترمز کامیون بر آن چیست؟

نگاره *3.188*




$\Delta G=0$

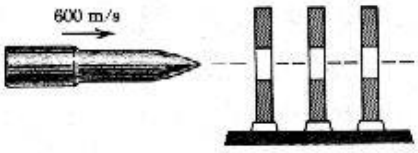
$12(20)+0=(350+12)v$

$v=0.663$ km/h

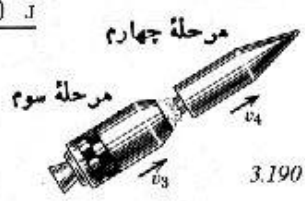
*3.189* - گلوله *140 gr* سه حلقه را برمی‌چیند. تندی آنها و افت انرژی چیست؟

$$\Delta G=0 \quad (0.140)(600)-[0.140+3\times0.100]v=0$$
$$v=190.9 \text{ m/s}$$

$$|\Delta E|=(1/2)(0.140)600^2-(1/2)(0.140+0.300)190.9^2=$$
$$=25.2(10)^3-8.018(10^3)=17.18(10^3) \text{ J}$$




نگاره *3.189*



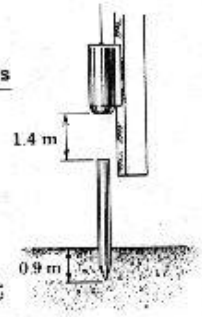

نگاره *3.190*

*3.190* - مرحله سوم *400 kg* و چهارم *200 kg* با تندی *18000 km/h* پیش می‌رود. پس از جدایی، تندی موشک چهارم، به *18060 km/h* می‌رسد. تندی مرحله سوم چیست؟

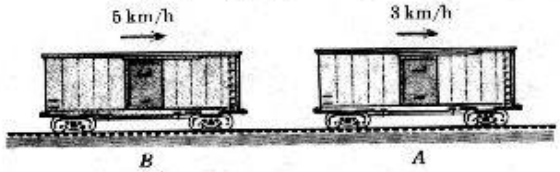
$$\Delta G=0 \quad 600(18000)-[400v_3+200(1800)]=0$$
$$\Rightarrow v_3=17970 \text{ km/h}$$

*3.191* - کوبه *450 kg* از بلندی *1.4 m* بر میخ *240 kg* می‌افتد. تندی آنها پس از برخورد چیست؟

$$v_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(1.4)}=5.24 \text{ m/s}$$
$$\Delta G=0 \quad 450(5.24)+0=(450+240)v \quad v=3.42 \text{ m/s}$$




نگاره *3.191*




نگاره *3.192*

*3.192* - واگن *B* *60 Mg* به واگن *A* *80Mg* می‌خورد و به آن می‌چسبد. *(a)* تندی آنها و *(b)* افت انرژی چیست؟

$$\Delta G=0 \quad 80000(3/3.6)+60000(5/3.6)=140000v$$
$$v=1.07 \text{ m/s}=3.86 \text{ km/h}$$

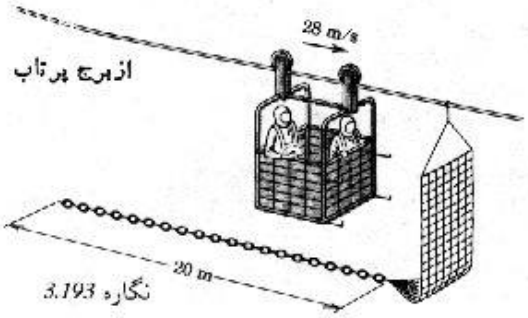
$$|\Delta E|=(1/2)m_Av_A^2+(1/2)m_Bv_B^2-(1/2)(m_A+m_B)v^2=$$
$$=(1000/2)[80(3/3.6)^2+60(5/3.6)^2-140(3.86/3.6)^2$$
$$=5172 \text{ J loss}$$

*3.193* - گاری *320 kg* به توری ایستاده با زنجیر *18 kg/m* و ضریب اصطکاک *0.7* می‌رسد. تندی آنها پس از برخورد و زمان ایستادنشان چیست؟

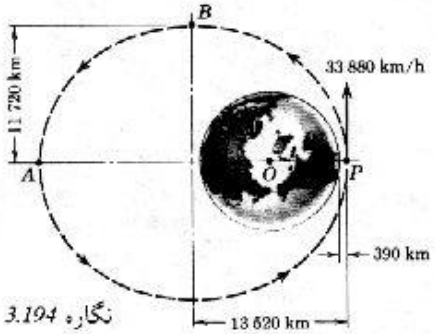
$$\Delta G=0 \quad 370(28)-(320+20\times18)v=0 \quad v=13.18 \text{ m/s}$$

$$\int\sum F dt = m\Delta v \quad (20x18)9.81(0.7)t=(320+20x18)(13.18)$$

$$t=3.62 \text{ s}$$




نگاره 3.193




نگاره 3.194

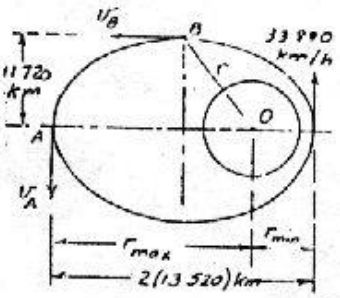
3.194 - تندی ماهواره در $B$ چیست؟

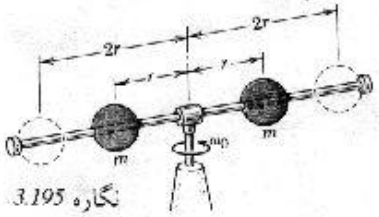
$$\sum M_o=\dot{H}_o=0 \Rightarrow H_o=cte \quad r_{min}=6371+390=6761 \text{ km}$$

$$r_{max}=2(13520)-6761=20279 \text{ km}$$

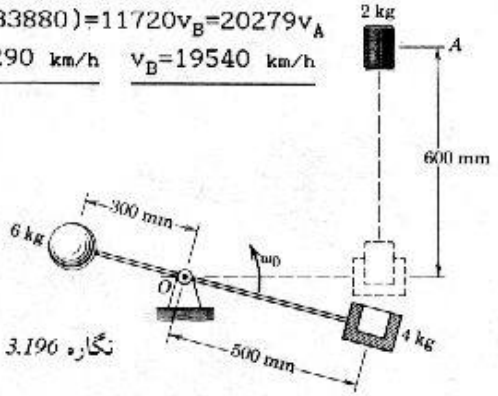
$$6761(33880)=11720v_B=20279v_A$$

$$v_A=11290 \text{ km/h} \quad v_B=19540 \text{ km/h}$$




نگاره 3.195




نگاره 3.196

3.195 - گلوله‌های آزاد در $r$ با $\omega_0$ می‌چرخند. تندی چرخشی آنها در $2r$ و افت انرژی آنها چیست؟

$$\Delta H=0 \quad 2mr\omega_o(r)-2m(2r)\omega(2r)=0 \quad \omega=\omega_o/4$$

$$\Delta T=2(m(r\omega_o)^2/2)-2(m(2r\omega_o/4)^2/2)=mr^2\omega_o^2(3/4)$$

$$n=\Delta T/T=(3/4)mr^2\omega_o^2/mr^2\omega_o^2=3/4$$

3.196 - وزنه 2 kg هنگامی که بازو با تندی 2 rad/s افقی می‌شود، به آن می‌خورد. تندی چرخشی آن پس از برخورد چیست؟ $\Delta H_o=0$

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.6)}=3.43 \text{ m/s}$$

$$H_{o_1}=-4(0.5)^2(2)-6(0.3)^2(2)+2(3.43)(0.5)=$$

$$=-2-1.08+3.43=0.351 \text{ N.m.s}$$

$$H_{o_f}=[(4+2)(0.5)^2+6(0.3)^2]\omega=2.04\omega$$

$0.351=2.04\omega \quad \omega=0.1721$ rad/s CW

*3.197* - گلوله *0.8 kg* پس از رهایی از *B* در خشاب *1.8 kg* فرومی‌رود. تندی آنها و فشردگی فنر و انرژی ازبین‌رفته چیست؟

$\sqrt{2gh}=\sqrt{2(32.2)6}=19.66$ ft/sec $\quad \Delta G=0$

$2(19.66)/g-(12+4)v/g=0 \quad v=6.55$ ft/sec $\quad \Delta T+\Delta V_e=0$

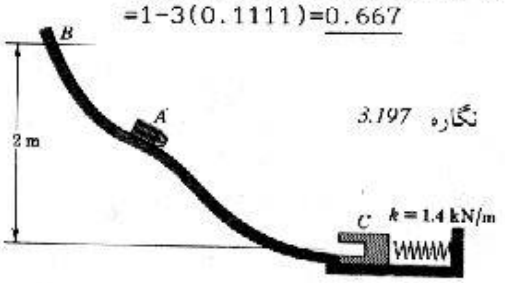
$(1/2)(6/32.2)(0-6.55^2)+(1/2)80(x^2-0)=0$

$x^2=0.100$ ft$^2 \quad x=0.316$ ft $\quad n=\Delta T/T$

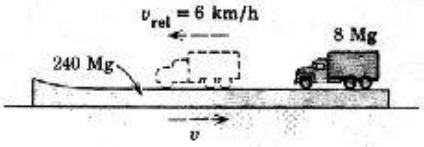
$n=[(1/2)(2/g)(19.66)^2-(1/2)(6/g)(6.55)^2]/$

$[(1/2)(2/g)(19.66)^2]=1-(6/2)(6.55/19.66)^2=$

$=1-3(0.1111)=0.667$

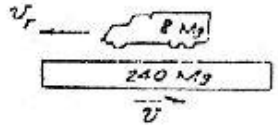



نگاره *3.197*




نگاره *3.198*

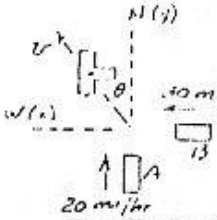
*3.198* - تندی کشتی چیست؟




$v_T=v_{rel}-v=6-v$ km/h $\quad \Delta G=0 \quad G_{initial}=G_{final}=0$

$8(6-v)=240v \quad v=0.194$ km/h

*3.199* - خودروی *A(1600 kg)* به خودروی *B(1500 kg)* می‌خورد و در آن گیر می‌کند. تندی آنها پس از برخورد چیست؟

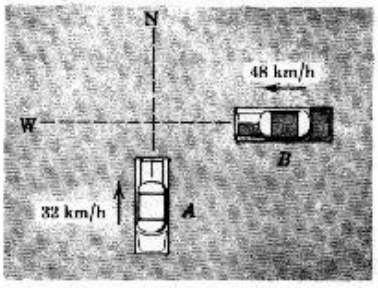



$\Delta G=0 \quad 3200(30)/g=(3200+3400)v_x/g \quad v_x=14.55$ mi/hr

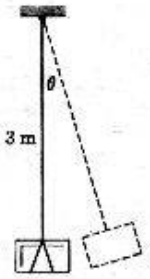
$\Delta G_y=0; 3400(120)/g=(3200+3400)v_y/g \quad v_y=10.30$ mi/hr

$v=\sqrt{(14.55)^2+(10.30)^2}=17.82$ mi/hr

$\beta=\tan^{-1}(v_x/v_y)=\tan^{-1}(14.55/10.30)=54.7^\circ$




نگاره *3.199*




نگاره *3.200*

3.200 - گلوله $60\ gr$ به‌درون بسته شن $30\ kg$ رفته و آن را $15^\circ$ می‌راند. تندی گلوله و میرایی انرژی چیست؟

$h=r(1-\cos\theta)=3(1-\cos 15^\circ)=0.1022\ m \quad \Delta T+\Delta V_g=0$

$mv'^2/2-mgh=0 \quad v'=\sqrt{2gh}$

$v'=\sqrt{2(9.81)0.1022}=1.416\ m/s \quad \Delta G=0$

$\Rightarrow 0.060v=(30+0.060)(1.416) \quad v=710\ m/s$

$\Delta T/T=(T-T')/T=1-T'/T=1-0.001996=0.998 = \underline{99.8\%}$

3.201 - کشتی $500\ ton$ باری $900\ ton$ را به تندی $6$ گره می‌کشد. اگر ریسمان با تندی $0.5\ m/s$ کوتاه شود، کاهش تندی کشتی چیست؟

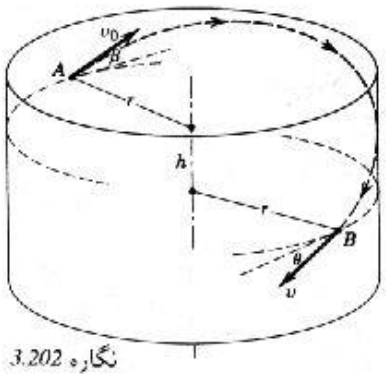
$v_B=v+0.5 \quad \Delta G=0$

$(500+900)6(1.852/3.6)0=500v+900(v+0.5)$

$v=2.77\ m/s \quad v=2.77/1.852=\underline{5.38\ Knots}$

نگاره 3.201

3.202 - $0$ چیست؟




نگاره 3.202

$\Delta H_z=0$

$mv_o\cos\beta(r)=mv\cos\theta(r), v\cos\beta=v\cos\theta$

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad (1/2)mv^2-(1/2)mv_o^2-mgh=0$

$\cos\theta=v_o\cos\beta/\sqrt{v_o^2+2gh}$

$\theta=\cos^{-1}(\cos\beta/\sqrt{1+2gh/v_o^2})$

3.203 - در پرسش 3.202 ذره تا چه اندازه بالاتر از $A$ می‌رود و تندیش در آنجا چیست؟

$\Delta H_z=0 \quad mvr=m(v_o\cos\beta)r \Rightarrow \underline{v=v_o\cos\beta}$

$\Delta T+\Delta V_g=0;\ (1/2)m(v^2-v_o^2)+mgb=0$

$b=(v_o^2-v^2)/2g=v_o^2(1-\cos^2\beta)/2g$

$\Rightarrow \underline{b=v_o^2\sin^2\beta/2g}$

3.204 - (a) اگر $40\%$ از انرژی $A$ از بین رود، تندی داده به $B$ چیست؟ (b) پس از آنکه $B$ به $A$ برخورد به آن می‌چسبد. تندی آنها چیست؟ جرمها را یکسان بپندارید.

نگاره 3.204

(a) $\Delta G=0 \quad m(1.2)+0=mv_A+mv_B$

$v_A+v_B=1.2 \quad \Delta T=0.4T$

$(1/2)m(1.2^2)-[mv_A^2/2+mv_B^2/2]=0.4[(1/2)m(1.2^2)]$

$v_A^2+v_B^2=0.864 \quad (1.2-v_B^2)+v_B^2=0.864 \quad 2v_B^2-1.2v_B+0.576=0$

$v_B=0.25[2.4\pm\sqrt{2.4^2-8(0.576)}]=0.6\pm0.268$

1) $v_B=0.868$ m/s $\quad v_A=1.2-0.868=0.332$ m/s

2) $v_B=0.332$ m/s $\quad v_A=1.2-0.332=0.868$ m/s

$v_B>v_A \Rightarrow \underline{v_B=0.868 \text{ m/s}}$

(b) $\Delta G=0 \quad m(1.2)+0=2mv_c \quad \underline{v_c=0.6 \text{ m/s}}$

3.205 - آونگ از $\theta=0$ رها می‌شود. تندی $B$ در $\theta=90^\circ$ چیست؟

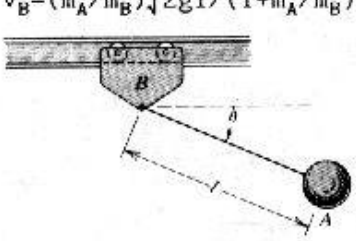
$\sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \quad m_A(l\dot\theta-v_B)-m_Bv_B=0 \Rightarrow l\dot\theta=v_B(m_A+m_B)/m_A$

$\Delta T+\Delta V_g=0;\ (1/2)m_A(l\dot\theta-v_B)^2+(1/2)m_Bv_B^2-m_Agl=0$

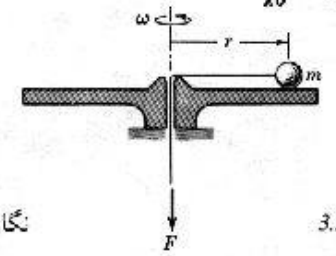
$(1/2)m_A[v_B^2((m_A+m_B)/m_A)^2-2v_B^2((m_A+m_B)/m_A)+v_B^2]+(1/2)\ldots$

$m_Bv_B^2=m_Agl \quad v_B^2=2m_A^2gl/[m_B(m_A+m_B)]$

$v_B=(m_A/m_B)\sqrt{2gl/(1+m_A/m_B)}$




نگاره 3.205




نگاره 3.206

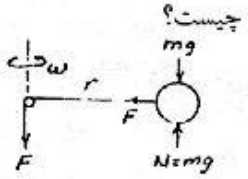
3.206 - با کاهش $r$ افزایش می‌یابد و $\omega$ تغییر می‌کند. آهنگ تغییر $\omega$ و کار $F$ در جابه‌جایی $dr$ چیست؟

$H=d(mr^2\omega)/dt=0 \quad m(2r\omega dr+r^2d\omega)=0$

$\underline{d\omega/dt=-2\omega/r} \quad \sum F_n=ma_n \quad F=mr^2\omega \quad dU=dT$

$-Fdr=d(mr^2\omega^2/2) \Rightarrow -mr\omega^2dr=m(r\omega^2dr+r^2\omega d\omega)=$

$=m(r\omega^2dr+r^2\omega[-2\omega/rdr])=-mr\omega^2dr$




3.207 - ناوچه 60 ton در تندی 18 گره، یک اژدر 140 kg را با تندی 6 m/s پرتاب می‌کند. کاهش تندی ناوچه چیست؟

18 knots$=18(1.852/3.6)=9.26$ m/s $\quad \Delta G=0$

$(G_x)_{initial}=[(60)(1000)+140](9.26)==556900$ N.s

$(v_t)_x=9.26-\Delta v+6\cos30^\circ=14.46-\Delta v$ m/s

$(G_x)_{final}=60000(9.26-\Delta v)+$

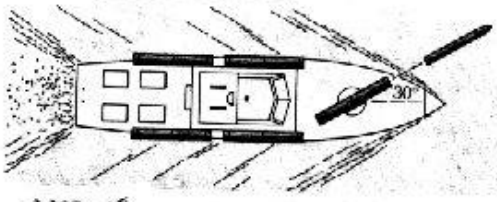
$+140(14.46-\Delta v)=557624-600140\Delta v$

$\Rightarrow 556900-557624+60140\Delta v=0$

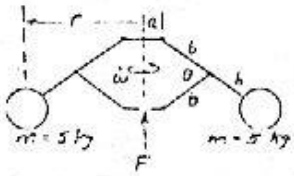
$\Delta v=0.0121$ m/s

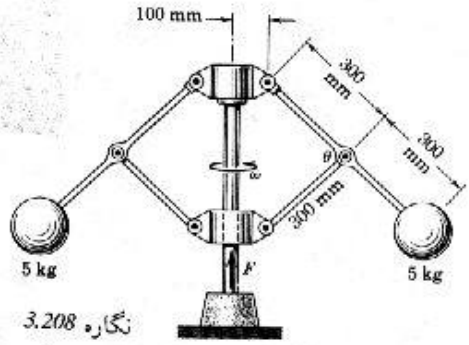
$\Delta G_x'=0 \quad -60(1000)\Delta v+140(6\cos 30^\circ-\Delta v)/g=0$

$v'=0.01214$ m/s




نگاره 3.207




نگاره 3.208

3.208 - دستگاه باتندی $40$ rev/min در $\theta=90^\circ$ می‌چرخد. اگر $F$ افزایش یابد و $\theta$ به $60^\circ$ برسد، کار $F$ و تغییر تندی چرخشی چیست؟

$\omega_o=40(2\pi)/60=4.19$ rad/s $\quad a=0.1$ m $\quad b=0.3$ m

$\theta=90^\circ \quad r_o=0.1+2(0.3)\cos 45^\circ=0.524$ m

$\theta=60^\circ \quad r=0.1+2(0.3)\cos 30^\circ=0.620$ m

$\Delta H=0;\ 2mr_o^2\omega_o-2mr^2\omega=0$

$\omega=(r_o/r)^2\omega_o=(0.524/0.620)^2(4.19)=$

$=3.00$ rad/s $\quad 3.00\times 60/2\pi=28.6$ rev/min

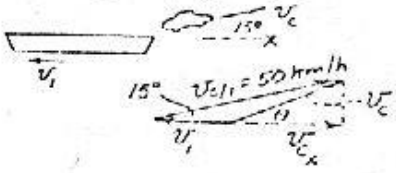
$U=\Delta T+\Delta V_g=2(m/2)(r^2\omega^2-r_o^2\omega_o^2)+2mg\Delta h$

$\Delta h=2b(\sin 45^\circ-\sin 30^\circ)=2(0.3)(0.7071-0.5)=0.1243$ m

$U=5([0.620\times 3.00]^2-[0.524\times 4.19]^2+$

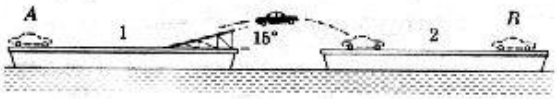
$+2(5)(9.81)(0.1243)=-6.850+12.190=5.34$ J

3.209 - خودروی $1500$ kg از $A$ به‌راه‌می‌افتد و با تندی $50$ km/h از دید کشتی $1$ به کشتی $2$ می‌پرد. تندی کشتی $2$ پس از ایست خودرو در $B$ چیست؟




$\underline{v}_c=\underline{v}_1+\underline{v}_{c/1}$

$(v_c)_x=50\cos 15^\circ-v_1=48.296-v_1$ km/h



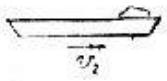

نگاره 3.209

$\Delta G_x=0;\ 500x10^3 v_1=1500(48.296-v_1)$

$v_1=0.144$ km/h $\quad v_1=40.1$ mm/s

$\Delta G_x=0 \quad 1500(48.152)=501500v_2$

$v_2=0.144$ km/h $\quad v_2=40.0$ mm/s

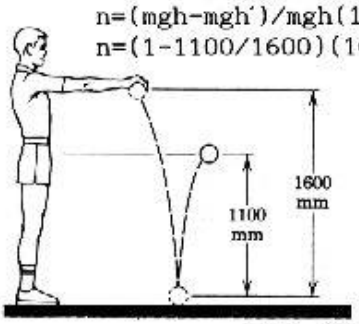


3.210 - جهندگی و درصد کاهش انرژی چیست؟

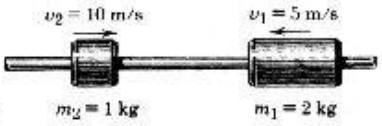
$v=\sqrt{2gh} \quad v'=\sqrt{2gh'} \quad e=v'/v=\sqrt{h/h'}=\sqrt{1100/1600}=0.829$

$n=(mgh-mgh')/mgh(100\%)=(1-h'/h)100\%$

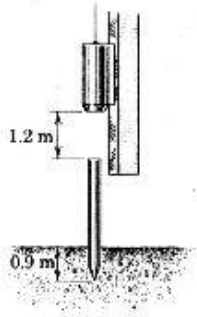
$n=(1-1100/1600)(100\%)=31.2\%$




نگاره 2.210




نگاره 3.211




نگاره 3.212

3.211 - تندی ماسوره‌ها پس از برخورد با جهندگی 0.5 چیست؟

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad 2(5)+1(-10)=2v_1'+v_2' \quad (1)$

$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)$

$0.5=(v_2'-v_1')/[5-(-10)]=(v_2'-v_1')/15 \quad (2)$

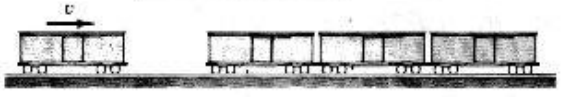
$\Rightarrow v_1'=-2.5$ m/s $\quad v_2'=5$ m/s

3.212 - کوبه 250 kg از آرایش نشان‌داده بر میخ 400 kg می‌افتد. اگر تندی کوبه پس از برخورد صفر شود، جهندگی و تندی میخ چیست؟

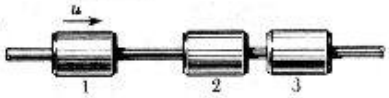
$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(32.2)(4)}=16.05$ ft/sec

$\Delta G=0 \quad 500(16.05)+0=0+800v'$

$v'=10.30$ ft/sec $\quad e=v'/v=10.03/16.05=0.625$




نگاره 3.213




نگاره 3.214

3.213 - تندی واگنها را پس از برخورد و چسبیدن، (a) بدون لقی بین واگنها و (b) با لقی، بیابید.

$G_1=G_2 \quad mv=(4m)v' \quad v'=v/4$

$T=(1/2)mv^2 \quad T'=(1/2)(4m)(v/4)^2=(1/8)mv^2$

$(T-T')/T=(mv^2/2-mv^2/8)/(mv^2/2)=3/4$

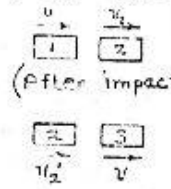
*3.214* - تندی ماسوره 3 با جهندگی $e$ چیست؟

$\Delta G=0 \quad mu=m(u'+v_2) \quad e=(v_2-u')/u$

$v_2=u(1+e)/2$

$\Delta G=0 \quad mu(1+e)/2=m(v_2'+v)$

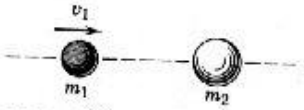
$e=(v-v_2')/[u(1+e)/2] \quad \underline{v=u(1+e)^2/4}$



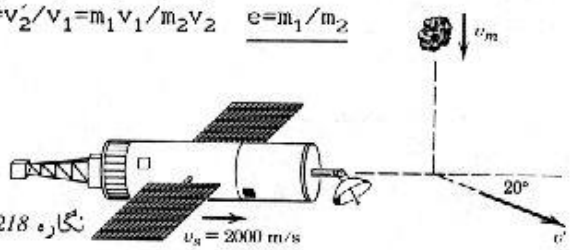

*3.215* - با جهندگی $e$، اندازه $m_1/m_2$ چه باشد تا $m_1$ بایستد؟

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad v_2'=(m_1/m_2)v_1$

$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)=v_2'/v_1=m_1v_1/m_2v_2 \quad \underline{e=m_1/m_2}$




نگاره 3.215




نگاره 3.218

*3.216* - در پرسش پیش، $m_1/m_2$ چه باشد تا تندی $m_2$ در پایان، $1.5v_1$ گردد؟

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'=m_1v_1'+m_2(1.5v_1)$

$v_1'=(m_1-1.5m_2)v_1/m_1$

$e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)=[1.5v_1-(m_1-1.5m_2)v_1/m_1]/v_1$

$\underline{m_1/m_2=1.5/(e-0.5)}$

*3.217* - در پرسش 2.215، تندی بیشینه گلوله 2 چه می‌تواند باشد؟

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \quad e=(v_2'-v_1')/(v_1-v_2)$

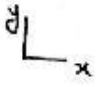
$\Rightarrow v_2'=(m_1/m_2)(1+e)v_1/(1+m_1/m_2)$

$\underline{e=1}$ , $\underline{m_1/m_2\to\infty}$ $\Rightarrow \underline{v_2'\to 2v_1}$

*3.218* - شهابسنگ 100 kg به ناویز 1000 kg می‌خورد و به آن می‌چسبد. اگر تندی آنها $v'$ شود، تندی شهابسنگ چیست؟

$m_s\underline{v}_s+m_m\underline{v}_m=(m_s+m_m)\underline{v}' \Rightarrow 1000(2000\underline{i})+100(-v_m\underline{j})=$

$=(1000+100)[v'(\cos 20^\circ\underline{i}-\sin 20^\circ\underline{j})]$

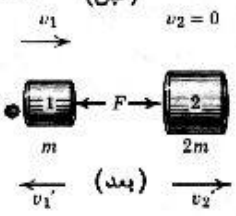



$\Rightarrow (1000)(2000)=1100\cos 20^\circ v' \quad v'=1935$ m/s

$\Rightarrow -100v_m=-1100(1935)\sin 20^\circ \quad \underline{v_m=7280 \text{ m/s}}$

*3.219* - نیروی برخورد چنان است که می‌بینید. تندی $v'$ را با *(a)* $t_r=t_d$ و *(b)* $t_r=0.5t_d$ و *(c)* $t_r=0$ بیابید.

$e=\int F_r dt / \int F_d dt = t_r/t_d$ (a): $e=1$ (b): $e=0.5$ (c): $e=0$




$\Delta G=0 \quad mv_1+0=-mv_1'+2mv_2', v_1+v_1'=2v_2'$

(a) $1=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(v_1-v_2')=2v_2'$

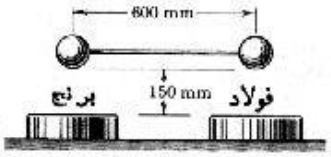
$3v_2'=2v_1 \quad \underline{v_2'=2v_1/3}$

(b) $0.5=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(0.5v_1-v_2')=2v_2'$

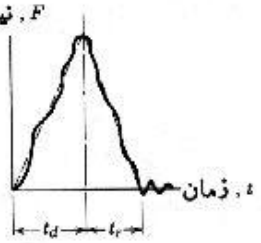
$3v_2'=1.5v_1 \quad \underline{v_2'=v_1/2}$

(c) $0=(v_1'+v_2')/v_1 \Rightarrow v_1+(0-v_2')=2v_2'$

$3v_2'=v_1, \underline{v_2'=v_1/3}$




نگاره 3.219




نگاره 3.220

*3.220* - اگر جهندگی فولاد، *0.6* و از آن برنج، *0.4* باشد، تندی چرخشی میله پس از افتادن و برخورد چیست؟

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.15)}=1.716$ m/s

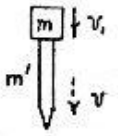
$0.6=v_s/1.716 \quad v_s=1.029$ m/s

$0.4=v_s/1.716 \quad v_b=0.686$ m/s

$\omega=(1.029-0.686)/0.60$

$\underline{\omega=0.572 \text{ rad/s CCW}}$

*3.221* - کوبه پرسش *3.212* باید پس از برخورد همه انرژی‌اش را به میخ *300 kg* بدهد. اگر کوبه از بلندی *4 m* بیفتد، جرمش چیست و تندی میخ چه می‌شود؟




$\Delta G=0, mv_1+0=300v+0 \quad e=(v-0)/(v_1-0)$, so

$0.3=m/300, \underline{m=90 \text{ kg}}$

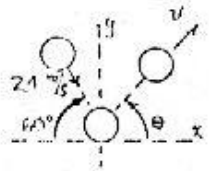
$v_1=\sqrt{2(9.81)(4)}=8.86$ m/s

$v=cv_1=0.3(8.86)=\underline{2.26 \text{ m/s}}$

$\Delta E=mgh-m'v^2/2=$

$=90(9.81)(4)-(1/2)(300)(2.66)^2=\underline{2470 \text{ J}}$

*3.222* - با *e=0.8* و $v_a=24$ *m/s* اندازه $v$ و $\theta$ چیست؟

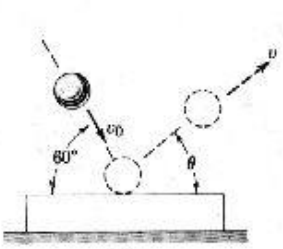



$\sum F_x=0 \quad v\cos\theta=24(0.5)=12$ m/s

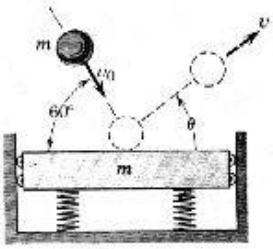
$e=v\sin\theta/24\cos 30^\circ=0.8$

$\tan\theta=16.63/12=1.386 \quad \underline{\theta=54.2^\circ}$

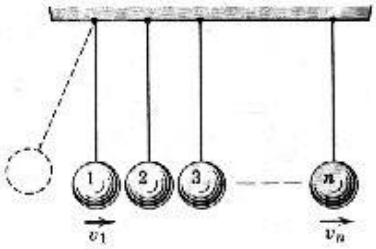
$v=12/\cos 54.2^\circ=\underline{20.5\ m/s}$




نگاره 3.222




نگاره 3.223




نگاره 3.224

3.223 - پرسش پیش را برای دستگاه زیر دوباره پاسخ دهید.

Ball: $m_1v_{1t}=m_1v'_{1t}$ $v'_{1t}=v_{1t}=24\cos 60^\circ=12\ m/s$

plate: $m_2v_{2t}=m_2v'_{2t}$ $v'_{2t}=v_{2t}=0$

$m_1v_{1n}+m_2v_{2n}=m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n}$ $-24\sin 60^\circ=v'_{1n}+v'_{2n}$

$e=(v'_{2n}-v'_{1n})/(v_{1n}-v_{2n})$

$0.8=(v'_{2n}-v'_{1n})/(-24\sin 60^\circ-0)$

$v'_{1n}=-2.08\ m/s$ $\underline{v'_{2n}=-18.71\ m/s}$

$v'_1=\sqrt{v'^2_{1t}+v'^2_{1n}}=\underline{12.20\ m/s}$ $\theta=\tan^{-1}(v'_{1n}/v'_{1t})=\underline{-9.83^\circ}$

3.224 - تندی گلوله $n$ام چیست؟

$\Delta G=0$ $mv_1=-mv'_1+mv'_2$ $v'_2=v_1+v'_1$

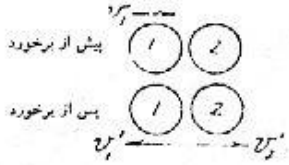
$e=(v'_2+v'_1)/v_1$, $v'_1=ev_1-v'_2$

$v'_2=v_1+ev_1-v'_2$ $v'_2=(1+e)v_1/2$

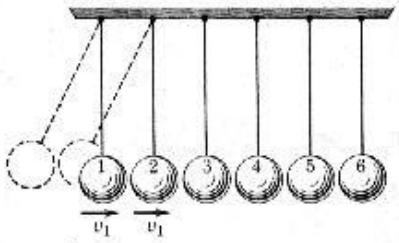
$v'_3=(1+e)v'_2/2=[(1+e)/2]^2v_1$

$v'_4=(1+e)v'_3/2=[(1+e)/2]^3v_1$

$\Rightarrow \underline{v_n=[(1+e)/2]^{n-1}v_1}$




3.225 - چرا با $e=1$ به جای آنکه یک گلوله با تندی $2v_1$ بیرون بزند، دو گلوله با تندی $v_1$ بیرون می‌زند؟




نگاره 3.225

$2(1mv_1)=1(2m)v_1$ $e=1$

$T=2(mv_1^2/2)=mv_1^2$

$T'_a=2(mv_1^2/2)=mv_1^2$

$T'_b=1(m(2v_1)^2/2)=2mv_1^2$

3.226 - فشردگی فنرها به سختی $1.2\ kN/m$ پس از برخورد چیست؟

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(2)}=6.26\ m/s$ $\quad \Delta G=0\ ;\quad 2(6.26)+0=(2+18)v'$,

$v'=0.626\ m/s$

$\delta_e=W/2k=18(9.81)/(2)(1200)=0.074\ m$

$\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0$

$\Delta T=0-(1/2)(20)(0.626)^2=-3.92\ N.m$

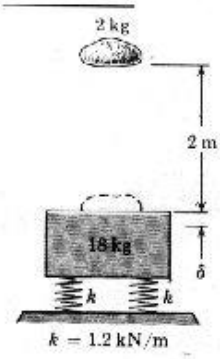
$\Delta V_g=-20(9.81)\delta=-196.2\delta\ N.m$

$\Delta v_e=2[(1/2)(1200)[(0.074+\delta)^2-0.074^2]$

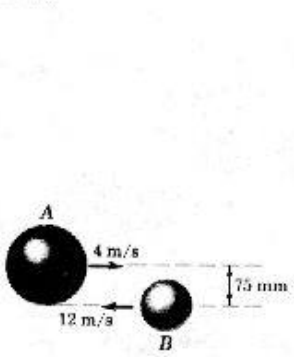
$1200\delta^2-19.2\delta-3.92=0$

$\delta=[19.2\pm137.24]/2400$

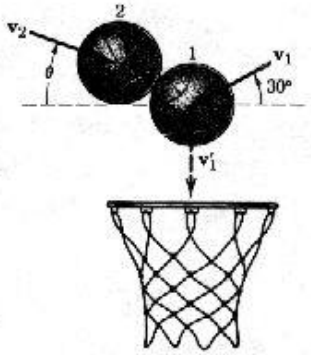
$\delta=65.2\ mm \quad \delta=-49.2\ mm$




نگاره 3.226




نگاره 3.227




نگاره 3.228

3.227 - گلوله $A$ به جرم $23\ kg$ و شعاع $75\ mm$ به گلوله $B$ به جرم $4\ kg$ و شعاع $50\ mm$ می‌خورد، تندی آنها پس از برخورد چیست؟

$\Delta G_n=0$

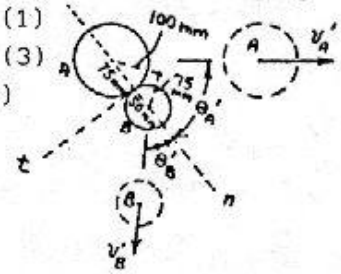
$23v'_A\cos\theta'_A+4v'_B\cos\theta'_B=23(4)(4/5)-4(12)(4/5)\ (1)$

$A: 4(3/5)=v'_n\sin\theta'_A\ (2) \quad B: 12(3/5)=v'_B\sin\theta'_B\ (3)$

$0.4=(v'_B\cos\theta'_B-v'_A\cos\theta'_A)/[12(4/5)+4(4/5)]\ (4)$

(1)-(4): $\Rightarrow$ $v'_A=2.46\ m/s\ ,\theta_A=77.2^\circ$

$v'_B=9.16\ m/s\ ,\theta_B=51.8^\circ$




3.228 - با چهندگی $0.8$ و تندیهای برابر $v_1$ و $v_2$ اندازه $\theta$ چه باشد که توپ $1$ از سبد بگذرد؟

$m(-v_1\cos60^\circ)+m(v_2\cos\alpha)=m_1v'_{1n}+m_2v'_{2n}$

$e=0.8=(v'_{2n}-v'_{1n})/(-v_1\cos60^\circ-v_2\cos\alpha)$

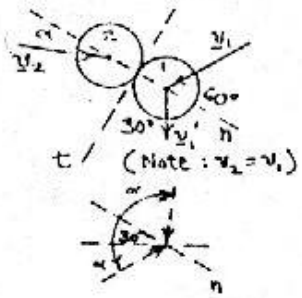
$v'_{1n}=v_1[0.9\cos\alpha-0.05]$

$v'_{1t}=v_{1t}=v_1\sin60^\circ=(\sqrt{3}/2)v_1$

$\tan30^\circ=v'_{1n}/v'_{1t}=v_1[0.9\cos\alpha-0.05]/(\sqrt{3}/2)v_1$

$\cos\alpha=0.611 \quad \alpha=\pm52.3^\circ \quad \theta=30^\circ+52.3^\circ=\underline{82.3^\circ}$

$\theta=30^\circ-52.3^\circ=\underline{-22.3^\circ}$




*3.229* - با جهندگی *0.6*، تندی گلوله‌ها پس از برخورد و درصد میرایی انرژی چیست؟

$\Delta G_y=0 \Rightarrow [m(6\cos30^\circ)-m(4)]-[m(-v'_1\sin\theta'_1)+mv'_2]=0$

$v'_2-v'_1\sin\theta'_1=1.196 \quad \Delta v_x=0 \Rightarrow v'_1\cos\theta'_1=6(1/2) \quad v'_{2x}=0$

$e=0.60=(v'_2+v'_1\sin\theta'_1)/(4+6\cos30^\circ) \quad v'_2+v'_1\sin\theta'_1=5.518$

$2v'_2=1.196+5.518 \quad \underline{v'_2=3.36} \qquad v'_1\sin\theta'_1=2.16$

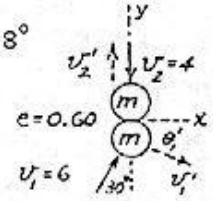
$v'_1\cos\theta'_1=3 \quad \theta'_1=\tan^{-1}(0.7203)=35.8^\circ$

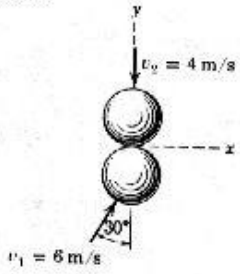
$v'_1=3/\cos35.8^\circ=\underline{3.70}$

$T_i=m(6^2+4^2)/2=m(52)/2$

$T_f=m(3.70^2+3.36^2)/2=m(24.9)/2$

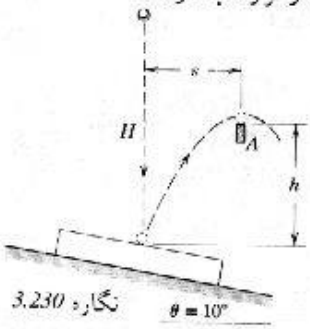
$\text{Loss}\%=(52-24.9)/52=0.52 \quad \text{or } \underline{52\%}$




نگاره *3.229*

*3.230* - اندازه *h* و *s* چه باشد تا با *e=0.7* و *JH=900 mm* گلوله از فراز *A* بگذرد؟




نگاره *3.230*

$F_x=0 \quad \Delta G_x=0 \quad v\sin\theta=v'\cos\beta \quad (a)$

$e=v'\sin\beta/(v\cos\theta)$

$\tan\beta=e\tan\theta=0.7(5.67)=3.77$

$\beta=75.9^\circ \quad \alpha=65.9^\circ$

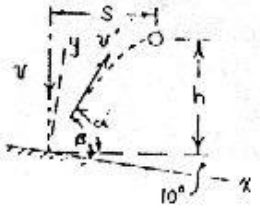
$v=\sqrt{2gH}=\sqrt{2(9.81)(0.9)}=4.20$ m/s

$v'=0.7(4.20)(0.985)/0.970=2.99$ m/s

$h=v'^2\sin^2\alpha/2g=$

$=(2.99)^2\sin^2 65.9/(2\times9.81)=0.379$ m

$\underline{h=379 \text{ mm}}$

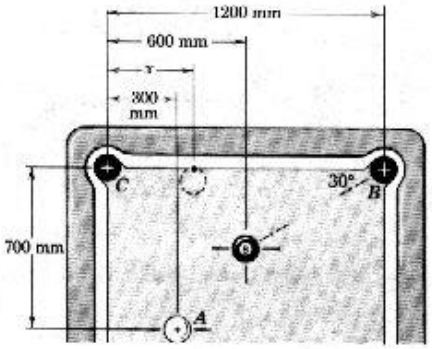



$s=v'^2\sin2\alpha/2g$

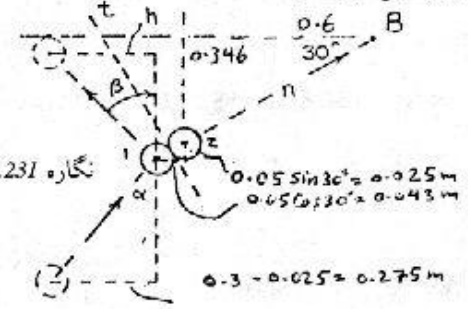
$=(2.99)^2\sin(2\times65.9^\circ)/(2\times9.81)=$

$=0.339$ m $\quad \underline{s=339 \text{ mm}}$

3.231 - گوی $A$ باید با جهندگی $0.9$ گوی $8$ را به سوراخ $B$ بیندازد. جایی که گوی $A$ پس از زدن $8$ به دیواره می‌خورد کجاست؟




نگاره 3.231




$\alpha=\tan^{-1}(0.275/0.346)=38^\circ \quad \theta_1=\alpha+30^\circ=68.0^\circ$

$m_1(v_1)_n+m_2(v_2)_n=m_1(v_1')_n+m_2(v_2')_n$ شعاع گوی‌ها $50\ mm$ و جرمها برابر است.

$v_1\sin 68.0^\circ=(v_1')_n+(v_2')_n$

$e=[(v_2')_n-(v_1')_n]/[(v_1)_n-(v_2)_n]$

$0.9=[(v_2')_n-(v_1')_n]/[v_1\sin 68.0^\circ-0]$

$(v_1')_n=0.0464v_1 \quad (v_1')_t=(v_1)_t=v_1\cos 68.0^\circ=0.375v_1$

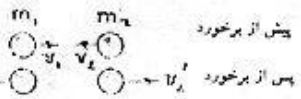
$\tan\theta_1'=(v_1')_n/(v_1')_t=0.0464v_1/0.375v_1, \theta_1'=7.05^\circ$

$\beta=30-\theta_1'=22.95^\circ \quad \tan\beta=h/(0.346-0.025+0.025)=0.423$

$h=0.146 \ , \ x=0.6-0.043-0.146=\underline{0.411\ m}$

3.232 - نشان دهید که میرایی انرژی دو گوی $m_1$ و $m_2$ با تندی $v_1$ و $v_2$ چنین است:

$$\Delta E=\frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1+v_2)^2$$




$v_1'=v_1(v_2'/v_2), v_2'=v_2(v_1'/v_1) \quad m_1v_1=m_2v_2 \quad m_1v_1'=m_2v_2'$

$e=(v_1'+v_2')/(v_1+v_2) \quad v_1'(1+v_2/v_1)=e(v_1+v_2)$

$\Rightarrow v_1'=ev_1 \quad v_2'=ev_2$

$\Delta E=(1/2)m_1v_1^2+(1/2)m_2v_2^2-(1/2)m_1v_1'^2+(1/2)m_2v_2'^2=$

$=(1/2)\{m_1v_1^2(1-e^2)+m_2v_2^2(1-e^2)\}=(1-e^2)(m_1v_1^2+m_2v_2^2)/2$

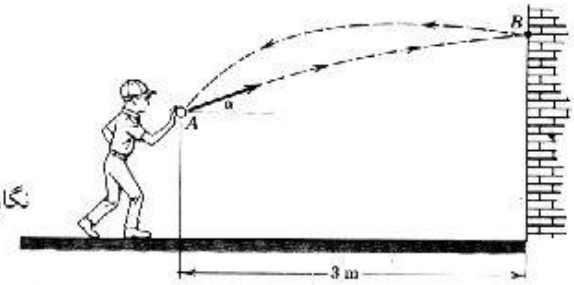
$m_1v_1+[m_2v_1]=m_2v_2+[m_2v_1], v_1=m_2(v_1+v_2)/(m_1+m_2)$ ,

$m_2v_2+[m_1v_2]=m_1v_1+[m_1v_2], v_2=m_1(v_1+v_2)/(m_1+m_2)$

$\underline{\Delta E=\{(1-e^2)/2\}\{m_1m_2/(m_1+m_2)\}(v_1+v_2)^2}$

3.233 - زاویه پرتاب توپ با تندی $15\ m/s$ چه باشد تا پس از برخورد با دیوار به جهندگی $0.5$ به

دست پسرک برگردد؟



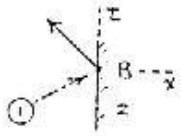

نگاره 3.233

$v_{xA}=50\cos\alpha \quad v_{yA}=50\sin\alpha$

$t_{AB}=10/v_{xA}=10/50\cos\alpha=1/5\cos\alpha$

$v_{xB}=v_{xA}=50\cos\alpha \quad v_{yB}=v_{yA}-gt=50\sin\alpha-g/5\cos\alpha$

$y_B=y_A+y_A t-gt^2/2=0+(50\sin\alpha)(1/5\cos\alpha)$




$(-g/2)(1/25\cos^2\alpha)=10\tan\alpha-g/50\cos^2\alpha$

B: $v'_{yB}=v_{yB}=50\sin\alpha-g/5\cos\alpha$

$e=(v'_{2x}-v'_{1x})/(v_{1x}-v_{2x})=(0-v'_{1x})/(50\cos\alpha-0)=0.5$

$v'_{1x}=-25\cos\alpha \quad t_{BA}=10/(25\cos\alpha)=2/(5\cos\alpha)$

$y_A=y_B+y_B t-gt^2/2 \Rightarrow$

$0=[10\tan\alpha-g/(50\cos^2\alpha)]+$

$+(50\sin\alpha-g/5\cos\alpha)(2/5\cos\alpha)-(g/2)(2/5\cos\alpha)^2$

$30\tan\alpha-(9g/50)(1/\cos^2\alpha)=0 \quad 1/\cos^2\alpha=1+\tan^2\alpha$

$5.776\tan^2\alpha-30\tan\alpha+5.796=0 \quad \tan\alpha=0.201 \quad \underline{\alpha=11.4^\circ}$

3.234 - اگر مدار زمین، دایره‌ای به شعاع $150(10^6)$ km باشد، تندی زمین چیست؟

$$v=\sqrt{Gm_s/r}=\sqrt{(6.673\times10^{-11})(333000)(5.976\times10^{24})/(150\times10^6)}$$

$\underline{v=29.75 \text{ km/s}}$

3.236 - ماهواره در بلندی 300 km بر فراز قطبها می‌گردد. فاصله سایه ماهواره بر استوا در دو گذر پیاپی چیست؟

نگاره 3.236

$r=a=6371+300=6671 \text{ km}=6.671(10^6) \text{ m}$

$\tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g}=2\pi(6.671\times10^6)^{3/2}/[6.371\times10^6\sqrt{9.825}]=$

$=5421 \text{ s}$

$v_e=R_e\omega_e=(6378)(7.292\times10^{-5})=0.4651 \text{ km/s}$

$d=v_e\tau=(0.4651)(5421)=\underline{2520 \text{ km}}$

3.237 - $v_B$ چه باشد تا ماهواره در $C$ به زمین برسد؟

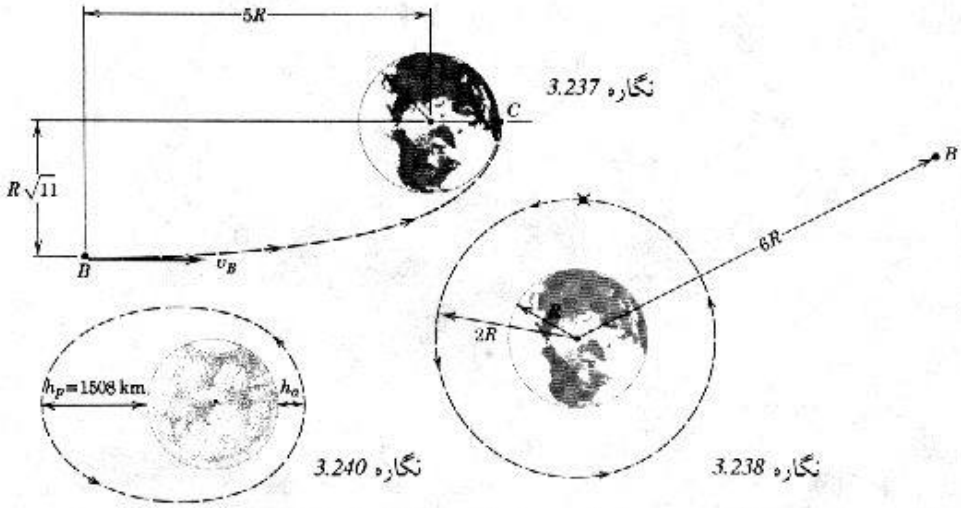
$r_{min}=a(1-e)$ $R=6R(1-e)$ $e=5/6$

$\Rightarrow b=a\sqrt{1-e^2}=6R\sqrt{1-(5/6)^2}=R\sqrt{11}$

B: $r=\sqrt{(5R)^2+(R\sqrt{11})^2}=6R$

$v_B^2=2gR^2(1/r-1/2a)=2gR^2(1/6R-1/12R)$

$v_B=0.4082\sqrt{gR}=0.4082\sqrt{(9.825)(6371\times10^6)}=\underline{3230\ m/s}$




نگاره 3.237

نگاره 3.238

نگاره 3.240

3.238 - کمترین افزایش تندی ماهواره چه باشد که به $B$ برسد؟

$r_{min}=2R$ $r_{max}=6R$ $a=(r_{min}+r_{max})/2=(2R+6R)/2=4R$

$v_P=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}}=R\sqrt{g/4R}\sqrt{6R/2R}=(\sqrt{3}/2)R\sqrt{g/R}$

$v_c=R\sqrt{g/a}=R\sqrt{g/2R}$

$\Delta v=v_p-v_c=(\sqrt{3}/2)R\sqrt{g/R}-R\sqrt{g/2R}=R\sqrt{g/R}(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$

$=6.371(10^6)\sqrt{9.825/(6.371\times10^6)}(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2=\underline{1257\ m/s}$

3.239 - موشکی در بلند $H$ به گرد زمین می‌گردد. چه تندیی می‌خواهد تا از گرانش زمین بگریزد؟

$a=\infty$ $r=R+H$ $v^2=2gR^2[1/(R+H)-1/\infty]$ $v=R\sqrt{2g/(R+H)}$

3.240 - $h_a$ چه باشد تا دماهنگ ماهواره‌ای به گرد مریخ، 24 ساعت و 37 دقیقه و 23 ثانیه گردد؟

$2R=6788$ km $g=3.73$ m/s$^2$ $h_p=1508$ km $\tau=24$ h 37min

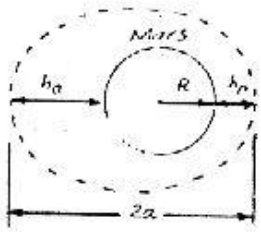
23s$=88643$ s $\tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g}$ $a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}$

$a=[(88643)(6788\times10^3/2)\sqrt{3.73}/2\pi]^{2/3}$

$=(924.8\times10^8)^{2/3}$

$a^3=8552\times10^{18}\ m^3 \quad a=2045\times10^6\ m=20.45\times10^3\ km$

$h_a=2a-2R-h_p=2(20.45\times10^3)-6788-1508=32600\ km$




*3.241* - پرونمرکزی و دماهنگ مداری با نشیب *240 km* و فراز *400 km* چیست؟

$r_{min}=6371+240=6611\ km \quad r_{max}=6371+400=6771\ km$

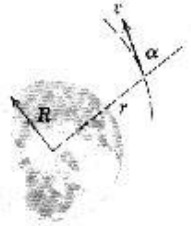
$r_{min}/r_{max}=(1-e)/(1+e) \Rightarrow (1+e)6611=(1-e)6771$

$e=0.01196 \quad a=(r_{min}+r_{max})/2=6691\ km$

$\tau=2\pi(6691\times10^3)^{3/2}/[(6371\times10^3)\sqrt{9.824}]=5446\ s$

$\Rightarrow \tau=1\ h\ 30\ min\ 46\ s$

*3.242* - شعاع خمیدگی مدار در آرایش نشان‌داده چیست؟

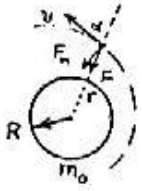



نگاره *3.242*

$F=Gmm_o/r^2=gR^2m/r^2 \quad \sum F_n=ma_n$

$gR^2m/r^2\sin\alpha=mv^2/\rho$

$\rho=r^2v^2/(gR^2\sin\alpha)$




*3.243* - ماهواره‌ای در مداری قطبی با $e=0.7$ و نشیب *500 km* بر قطب شمال با چه تندی از استوا می‌گذرد؟

$r_{min}=a(1-e)=R+H=6371+500=6871\ km \quad e=0.7$

$\theta=\pi/2, 1/r=1/[a(1-e^2)]=1/[(R+H)(1+e)]$

$v^2=2gR\{1/[(R+H)(1+e)]-(1-e)/2(R+H)\}$

$v^2=[gR^2/(R+H)][(1+e^2)/(1+e)]=659(10^6)\ (km/h)^2$

$v=25680\ km/h$

*3.244* - ناویزی به گرد ماه در مدار با نشیب *100 km* و فراز *300 km* چه پیشینه تندی دارد؟

$R=1738\ km \quad g=1.62\ m/s^2 \Rightarrow r_{max}=1738+300=2038\ km$

$r_{min}=1738+100=1838\ km$

$a=(r_{min}+r_{max})/2=(2038+1838)/2=1938\ km$

$v_p=R\sqrt{g/a}\sqrt{r_{max}/r_{min}} \Rightarrow$

$v_p=1738\sqrt{1.62/1938}\sqrt{3600^2/1000}\sqrt{2038/1838}$

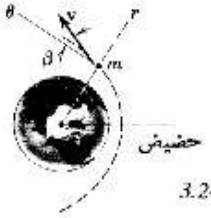
$=6024\ km/h$

*3.245* - ماهواره $100\ kg$ در مداری دایره‌ای با بلندی $200\ km$ به گرد زمین می‌گردد. اگر $T=5\ N$ در ده بار گردش، بتواند $300$ ثانیه کار کند، نیروی $D$ برای بی‌تکان نگه‌داشتن گلوله آزاد درونی ماهواره چیست؟

$$Dt=\sum Tt_{burn} \quad t=10\tau \quad \tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g}$$

$$\tau=2\pi(6.571\times10^{6})^{3/2}/[6.371\times10^{6}\sqrt{9.825}]=5300\ s$$
$$t=10\tau=53{,}000\ s$$
$$D=(\sum Tt_{burn})/t=5(300)/53{,}000=0.028\ N$$

نگاره 3.245



حضیض
نگاره 3.246

*3.246* - وابستگی $\beta$ و $\theta$ چیست؟

$$\tan\beta=\dot{r}/(r\dot{\theta}) \quad r=a(1-e^{2})/(1+e\cos\theta)$$

$$\dot{r}=[a(1-e^{2})e\dot{\theta}\sin\theta]/(1+e\cos\theta)^{2}$$
$$\Rightarrow \tan\beta=e\sin\theta/(1+e\cos\theta)$$

*3.247* - اگر جرم ماهواره پرسش *3.27*، برابر $500\ kg$ باشد، انرژی داده‌شده به آن برای رسیدن به مدار چیست؟

$$E=\Delta T+\Delta V_{g};\ \Delta T=m(v_{p}^{2}-R^{2}\omega^{2})/2 \quad v_{p}=7261\ m/s$$

$$R\omega=6371(10^{3})(0.729\times10^{-4})=464.6\ m/s$$

$$\Delta T=(1/2)(500)(7261^{2}-465^{2})=13127(10^{6})\ J$$

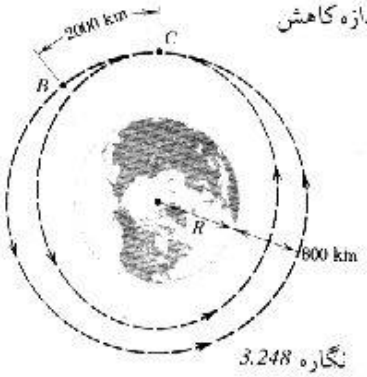
$$V_{g}=-mgR^{2}/r \Rightarrow \Delta V_{g}=-mgR^{2}(1/r_{p}-1/R)=$$

$$=-500(9.824)(6371\times10^{3})^{2}(1/8371-1/6371)(10^{-3})=$$

$$=7477(10^{6})\ J$$

$$\Rightarrow E=13126(10^{6})+7477(10^{6})=20603(10^{6})\ J$$
$$E=20.6\ GJ$$

*3.248* - ماهواره $C$ از $B$ پس افتاده است. تندیش را چه اندازه کاهش دهد تا مدارش بیضی شود و در گردش بعد به $B$ برسد؟



نگاره 3.248

$$v=R\sqrt{g/a}=6376000\sqrt{9.81/7176000}$$
$$=7454.9\ m/s$$
$$t=[2\pi r-2000000]/v=5780\ s$$
$$\tau=2\pi a^{3/2}/R\sqrt{g} \quad a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}$$
$$a=[5780(6376000)\sqrt{9.81}/2\pi]^{2/3}$$
$$=6955764.7\ m$$

At apogee $v_c=\sqrt{2gR^2(1/r-1/2a)}=7332.1$ m/s
$\Delta v=v-v_c=7454.9-7332.1=\underline{122.8}$ m/s

3.249 - در پرسش پیش، اگر ماهواره $C$ بخواهد پس از دو بار گردش به $B$ برسد، کاهش تندیش چیست؟

$v=7454.9$ m/s $t=(4\pi r-2000000)/v=11828$ s

$a=(\tau R\sqrt{g}/2\pi)^{2/3}=[(11828/2)(6376000)\sqrt{9.81}/2\pi]^{2/3}=$
$=7067295.5$ m

At Apogee: $v_c=\sqrt{2gR^2(1/r-1/2a)}=7397.1$ m/s
$\Delta v=v-v_c=7454.9-7397.1=\underline{57.8}$ m/s

3.250 - شعاع خمیدگی مدار در نشیبی به بلندی $H$ چیست؟

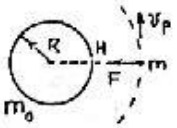
$\sum F_n=ma_n: F=mv^2/\rho \quad F=Gmm_o/(R+H)^2=gR^2m/(R+H)^2$

$\Rightarrow gR^2/(R+H)^2=v^2/\rho$

at perigee: $v^2=(gR^2/a)(1+e)/(1-e)$

$R+H=r_{min}=a(1-e)$, so $v^2=gR^2(1+e)/(R+H)$

$gR^2/(R+H)^2=[gR^2/(R+H)][(1+e)/\rho]$
$\Rightarrow \underline{\rho=(R+H)(1+e)}$




3.251 - ماهواره‌ای در مداری دایروی به بلندی $320$ km می‌گردد. اگر موشک آن، تندیش را $300$ m/s بیفزاید، بلندفراز مدار نوین آن چه می‌شود؟

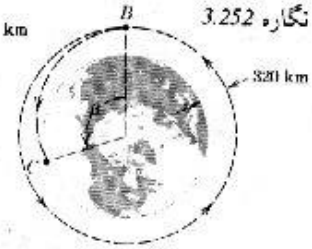
$R=6371$ km $r_{min}=6371+320=6691$ km

$v_{cir}=R\sqrt{g/a}=6371000\sqrt{9.81/6691000}=7714$ m/s

elliptical orbit:
$v_P=7714+300=8014$ m/s

$8014^2=2\times9.81\times6371^2\times10^6(1/6691000-1/2a)$
$2a=r_{max}+r_{min}=14534883 \quad r_{max}=7843883$ m
$H=7843883-6371000=1472883$ m $=1472$ km

نگاره 3.252




3.252 - دو موتور شاتل $80$ Mg با نیروی $27$ kN در زمان $150$ s از $B$ ترمز می‌گیرد، زاویه $\beta$ چیست؟

$v=R\sqrt{g/r}$

$v=6376000\sqrt{9.81/(6696000)}=7717.5$ m/s

$a_t=F/m=27000/80000=0.3375$ m/s$^2$

$v_o=v-a_t t=7717.5-0.3375(150)=7666.9$ m/s

$v^2=2gR^2[1/r-1/2a]$ $a=2.1403(10^7)$ m

$v_A=R\sqrt{g/a}\sqrt{(1-e)/(1+e)}$ $e=0.02599$

$r=a(1-e^2)/(1+e\cos\theta)$

$(3959)(5280)=$

$=(2.1403\times10^7)(1-0.02599^2)/(1+0.02599\cos\theta)$

$\theta=26.7^\circ$ $\beta=180-\theta=153.3^\circ$

3.253 - کاهش تندی در $A$ چه باشد تا ماهواره بر استوا بنشیند.

$1/r=(1+e\cos\theta)/a(1-e^2)$

$\theta=90^\circ \Rightarrow r=R$ , $\theta=180^\circ \Rightarrow r=R+H$

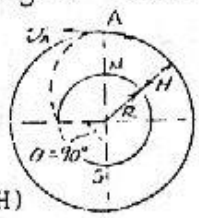
$\Rightarrow 1/R=1/a(1-e^2)$ $1/(R+H)=(1-e)/a(1-e^2)=1/a(1+e)$

$1-e=R/(R+H)$ & $a(1+e)=R+H$

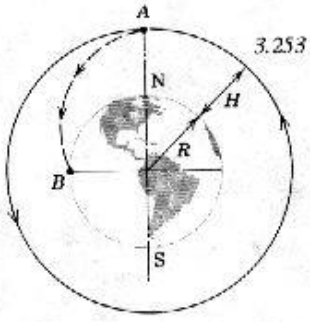
$v_A=R\sqrt{g(1-e)/a(1+e)}=R\sqrt{g}\sqrt{R/(R+H)}\sqrt{1/(R+H)}=R\sqrt{gR}/(R+H)$

circular orbit: $v=R\sqrt{g/(R+H)}$

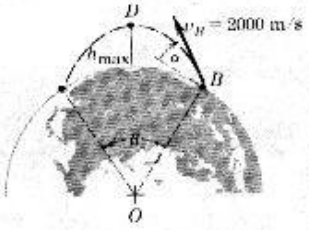
$\Rightarrow \Delta v_A=R\sqrt{g/(R+H)}-R\sqrt{gR}/(R+H)=R\sqrt{g/(R+H)}[1-\sqrt{R/(R+H)}]$



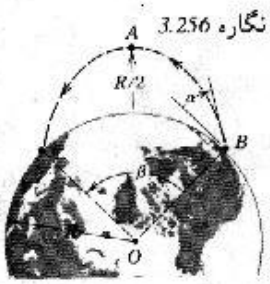

نگاره 3.253




نگاره 3.254



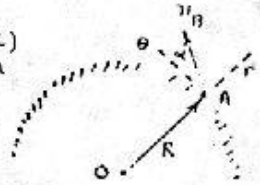

نگاره 3.256




3.254 - پرتابه تا چه بلندی پرواز می‌کند؟

$v_\theta=V\cos\alpha=2000\cos30^0=1732$ m/s

$V_r=V\sin\alpha=2000\cos30^0=1000$ m/s $v^2=2gR^2(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a})$




B: $a=3.2906\times10^6$ m $T_B=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}m(2000)^2=2\times10^6$ m

$V_B=\frac{-mgR^2}{r}=\frac{-m(9.825)(6.371\times10^6)^2}{6.371\times10^6}=-6.2595\times10^7$ m

$E=T_B+V_B=-6.0595\times10^7$ [illegible] $=-1.1025\times10^{10}$

$$e=\sqrt{1+(2Eh^2)/(mg^2R^4)}=0.9525$$

$$r_{max}=a(1+e)=3.2906(10^6)(1+0.9525)=6.4249\times10^6 \text{ m}$$

$$h_{max}-r_{max}-R=53900=\underline{53.9 \text{ km}}$$

3.255 - در پرسش پیش، زاویه $\beta$ چیست؟

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta=\frac{a(1-e^2)-r}{re}=$$

$$=\frac{3.2906(10^6)(1-0.9525^2)-6.371(10^6)}{6.391(10^6)(0.9525)}=-0.9996$$

$$\theta=178.3^\circ,\ 181.7^\circ \Rightarrow \beta=181.7-178.3=\underline{3.3^\circ}$$

3.256 - تندی پرتاب در $B$ چه باشد که $\beta=90^\circ$ گردد؟

$$r_{max}=\frac{3R}{2}=a(1+e) \qquad r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

$$B:\ R=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(135^\circ)} \Rightarrow e=0.6306 \quad a=0.9199R$$

$$v_B^2=2gR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)$$

$$A:\ v_B^2=2(9.825)(6.371\times10^6)\times\left(\frac{1}{6.371\times10^6}+\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(0.9199)(6.37)(10^6)}\right) \Rightarrow \underline{v_B=7560 \text{ m/s}}$$

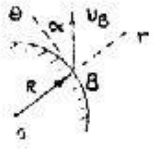
3.257 - زاویه پرتاب در پرسش پیش چیست؟

$$v_A=R\sqrt{g/a}\sqrt{(1-e)/(1+e)}=$$

$$=R\sqrt{(9.825)/(0.9199R)}\sqrt{(1-0.6306)/(1+0.6306)}=$$

$$=1.555\sqrt{R}$$

$$h=r_Av_A=\frac{3}{2}R(1.555\sqrt{R})=2.3332R^{3/2}$$




$$h=r_Bv_{B\theta}=Rv_{B\theta}=2.3332R^{3/2}$$

$$v_{B\theta}=2.3332R^{1/2}=2.3332(6.371\times10^6)^{1/2}=5.889 \text{ m/s}$$

$$v_{B\theta}=v_B\cos\alpha \qquad \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{v_{B\theta}}{\quad}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5889}{\quad}\right)=\quad^\circ$$

*3.258* - در $B$ به ماهواره، تندی شعاعی $500\ m/s$ می‌دهیم. نیم‌قطر بزرگ مدار نوین آن چیست و چه زاویه‌ای با $l$ می‌سازد؟

$$v=R\sqrt{g/a} \quad v_\theta=6.371(10^6)\sqrt{9.825/6.871\times10^6}=7618\ m/s$$

$$v_r=500\ m/s \quad v=\sqrt{v_\theta^2+v_r^2}=7635\ m/s \quad v^2=2gR^2\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right]$$

$$B:\ a=6900.7\ km \quad T_B=\frac{1}{2}mv_B^2=2.9145(10^7)m$$

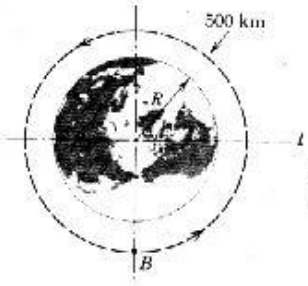
$$V_B=mgR^2/r_B=-5.8040(10^7)m \quad E=T_A+V_A=-2.8895(10^7)m$$

$$h=rv_\theta=6.871(10^6)(7618)=5.2346\times10^{10}\ m^2/s$$

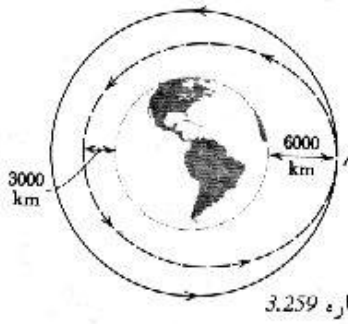
$$e=\sqrt{1+(2Eh^2)/(mg^2R^4)}=0.06563$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \cos\theta=\frac{a(1-e^2)-r}{re}$$

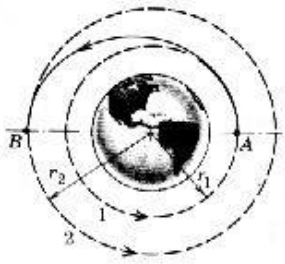
$$\Rightarrow \theta=90+2.6(10^{-7})^\circ \quad \alpha=2.6(10^{-7})^\circ$$




نگاره *3.258*




نگاره *3.259*




نگاره *3.261*

*3.259* - می‌خواهیم ماهواره $800\ kg$ از مدار دایره به بیضی بیفتد. موتور وارون $2000\ N$ چه اندازه روشن بماند؟

$$Ft=m\Delta v$$

$$v_1=R\sqrt{g/a}=6371(10^3)\sqrt{9.825/(1237(10^3))}=5678\ m/s$$

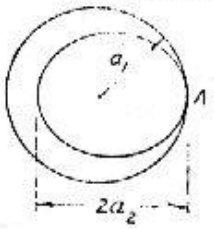
$$A:\ v_A=R\sqrt{g/a_2}\sqrt{r_{min}/r_{max}}$$

$$r_{mn}=6371+3000=9371\ km \quad r_{max}=6371+6000=12371\ km$$

$$a_1=R+6000=6371+600 \quad a_2=10871\ km$$

$$v_A=5271\ m/s \Rightarrow \Delta v=5678-5271=406\ m/s$$

$$\Rightarrow 2000t=800(406) \Rightarrow t=162\ s$$




*3.260* - دماهنگ ماه برای زمین ایستا چیست؟

$$\tau_f=2\pi a^{3/2}/[gR^3]^{1/2}=2\pi a^{3/2}/[Gm_o]^{1/2} \quad \tau_{nf}=(2\pi a^{3/2})/(\sqrt{G(m_o+m)})$$

$$\tau_f=658.67\ h$$

$$\tau_{nf}=654.68\ h$$

3.261 - تغییر تندی ماهواره در $A$ با $r_1=6371+500\ km$ و $B$ با $r_2=6371+1000\ km$ چه باشد تا ماهواره از مدار پایین به مدار بالاتر برود؟

1) $v_1=R\sqrt{g/r_1}$ 2) $v_2=R\sqrt{g/r_2}$

transfer ellipse at A: $v_1'=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_2/r_1}$

transfer ellipse at B: $v_2'=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_1/r_2}$

$$a=\frac{r_1+r_2}{2}$$

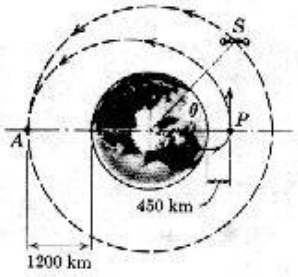
$$A:\ \Delta v_A=v_1'-v_1=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_2/r_1}-R\sqrt{g/r_1}=R\sqrt{g/r_1}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}}-1\right)$$

$$B:\ \Delta v_B=v_2-v_2'=R\sqrt{g/r_2}-R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_1/r_2}=R\sqrt{g/r_2}\left(1-\sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

$$\Delta v_A=6371\sqrt{\frac{9.825(10^3)}{6871}}\left(\sqrt{\frac{2(7371)}{6871+7371}}-1\right)=132.6\ m/s$$

$$\Delta v_B=6371\sqrt{\frac{9.825(10^3)}{7371}}\left(1-\sqrt{\frac{2(6871)}{6871+7371}}\right)=130.3\ m/s$$

3.262 - زاویه $\theta$ بین $P$ و $S$ چه باشد تا موشک $P$ به جرم $800\ kg$ بتواند در $A$ به $S$ با جرم $1200\ kg$ بپیوندد؟ برای آنکه آنها هم‌تندی شوند، موتور $P$ با نیروی $900\ N$ چه اندازه باید روشن شود؟




نگاره 3.262

$$\tau/2=\Pi a^{3/2}/(R\sqrt{g})$$

$$=\Pi[7196\times10^3]^{3/2}/(6371(10^3)\sqrt{9.825})=3037\ s$$

$$a=\frac{1}{2}(2[6.371]+1200+450)=7196\ km$$

$$period=(3037)(2)\left(\frac{7571}{7196}\right)^{3/2}=6554\ s$$

$$\Rightarrow\ \frac{180^\circ-\theta}{360^\circ}=\frac{3037}{6554}\quad \theta=13.2^\circ$$

$$v_s=\frac{2\Pi(7571\times10^3)}{6554}=7258\ m/s$$

$$(v_p)_A=v_{apogee}=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_{min}/r_{max}}=6371(10^3)\sqrt{\frac{9.825}{7196(10^3)}}\sqrt{\frac{6821}{7571}}$$

$$=7066\ m/s$$

$$\int F dt=m\Delta v\ ;\ 900t=800(7258-7066)\quad t=170\ s$$

3.263 - با تندی 3200 m/s، موشک با چه زاویه $\beta$ به زمین می‌خورد؟

$r=\sqrt{2gR}\quad \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2R}{5R}\right)=21.8^\circ\quad v^2=2gR^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right)$

B: $3200^2=2(9.825)6.371\times10^6\left[1/\left(\sqrt{29}6.371(10^6)\right)-\frac{1}{2a}\right]$

$a=3.066\times10^7\ \text{m}\quad T_B=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}m(3200)^2=5.120\times10^6\ \text{m}$

$V_B=-\frac{mgR^2}{r_B}=-m\frac{(9.825)(6.371\times10^6)^2}{\sqrt{29}(6.371\times10^6)}=-1.162\times10^7\ \text{m}$

$E=T_B+V_B=-6.504\times10^6\ \text{m}\quad v_B=3200\sin\alpha=1188.5\ \text{m/s}$

$h=rv_\theta=\sqrt{29}(6.371\times10^6)(1188.5)=4.077\times10^{10}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$

$e=\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{mg^2R^4}}=\sqrt{1+\frac{2(-6504\ \text{m})(4.077\times10^{10})^2}{m(9.825)^2(6.371\times10^6)^4}}=0.9295$

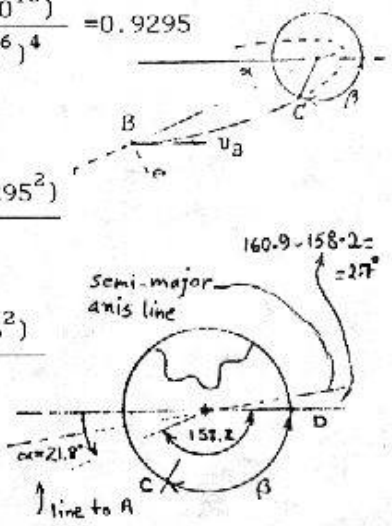
$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

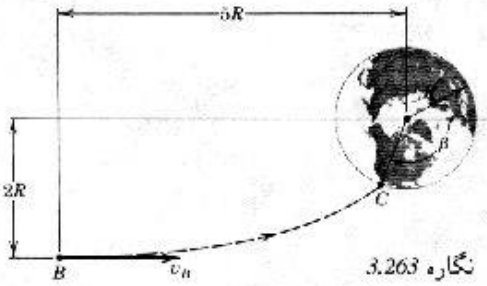
B: $\sqrt{29}(6.371\times10^6)=\frac{(3.066\times10^7)(1-0.9295^2)}{1+0.9295\cos\theta}$

$\theta=160.9^\circ$

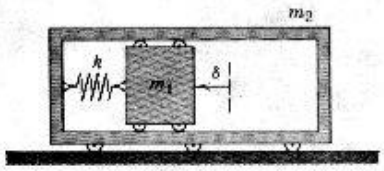
C: $(6.371\times10^6)=\frac{(3.066\times10^7)(1-0.9295^2)}{1+e\cos\theta}$

$\theta=111.8^\circ\quad \beta=111.8-2.7=109.1^\circ$




نگاره 3.263




نگاره 3.264

3.264 - m را تا جایی که فنر را به اندازه δ فشرده می‌کند، شتاب $m_1$ از دید $m_2$ چیست؟

$$a_{1/2}=a_{x1}-a_{x2}=\frac{k\delta}{m_1}-(-\frac{k\delta}{m_2})$$

$$\Rightarrow a_{1/2}=a_{rel}=k\delta(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})$$

3.265 - دستور تکان را برای پرسش 3.29 هم از دید بیننده سوار بر واگن و هم از دید بیننده زمینی، بنویسید.

$$\text{rel. to car: } \int_0^t Pdt=m(\dot{x}-0) \quad pt=m\dot{x}$$

$$\text{fixed observer: } \int_0^t Pdt=m(\dot{x}-v_0) \quad pt=m(\dot{x}-v_0)$$

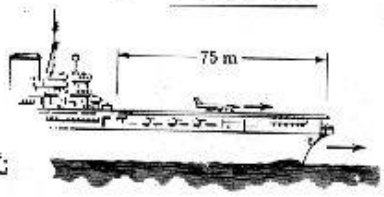
$$X=x+x_0 \ , \ \dot{x}-v_o=\dot{x} \Rightarrow pt=m\dot{x}$$

3.266 - هواپیمای $3\ Mg$ با موتور $22\ kN$ و به یاری منجنیق، پس از $75\ m$ با تندی $240\ km/h$ از ناو برمی‌خیزد. نیروی پیشران منجنیق چیست؟

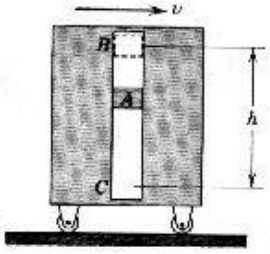
$$\text{rel. to carrier } U_{rel}=\Delta T_{rel}$$

$$(22+P)(10^3)75=\frac{1}{2}(3)(10^3)[(240/3.6)^2-0]$$

$$22+P=88.9 \text{ KN} \quad P=66.9 \text{ KN}$$



نگاره 3.266

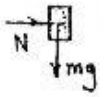


نگاره 3.267

3.267 - لغزنده $A$ از $B$ رها می‌شود. تندی آن در $C$ چیست اگر، (a) جعبه با تندی $v=v_0$ حرکت می‌کند؟ (b) تندی جعبه، $v_0$ و شتابش $a_0$ باشد؟

(a) $v_o=cte \quad N=0 \quad U=\Delta T \quad mgh=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$$v_2=(v_o^2+2gh)^{1/2}$$




(b) $a_o=cte \quad N=ma_o \quad U=\Delta T \quad mgh+Nd=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$$d=v_o t_{drop}+\frac{1}{2}a_o t_{drop}^2=v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{1}{2}a(\sqrt{\frac{2h}{g}})^2$$

$$\Rightarrow v_2=(v_o^2+2gh+2a_o v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}+2a_o^2h/g)^{1/2}$$

*3.268* - ناویز *B* *20 km* جلوتر از ناویز *A* است و با تندی *2 km/s* از دید *A* پیش می‌رود. اگر بخواهیم فاصله آنها *1000 km* باشد، نیروی وارون *F* چه باشد و چه زمانی بر *B* بنشیند؟

$$S_{B/A}=(S_{B/A})_o+(v_{B/A})_o t+\frac{1}{2}a_{B/A}t^2$$

$$1000=20+2t+\frac{1}{2}a_{B/A}t^2 \qquad v_{B/A}=(v_{B/A})_o+a_{B/A}t$$

$$0=2+a_{B/A}\,t \Rightarrow \underline{t=980\ s}$$

$$a_{B/A}=-2.0+1(10^{-3})\ km/s=-2.0+1\ m/s$$

$$\text{costant velocity frome A: } \Rightarrow Ft=m\Delta v$$

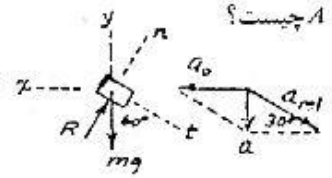
$$|F|=\frac{m\Delta v}{t}=\frac{(200)(2000)}{980}=\underline{408\ N}$$

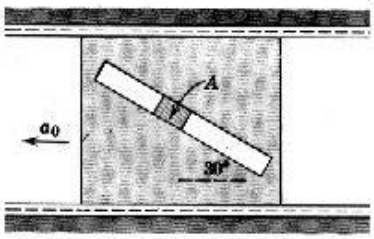
*3.269* - شتاب $a_0$ چه باشد تا شتاب لغزنده *A* به جرم *2 kg* رو به پایین باشد؟ نیروی واکنش شیار بر *A* چیست؟

$$a_o=a_{rel}\cos 30^\circ \qquad a_x=0 \Rightarrow \sum F_x=0$$

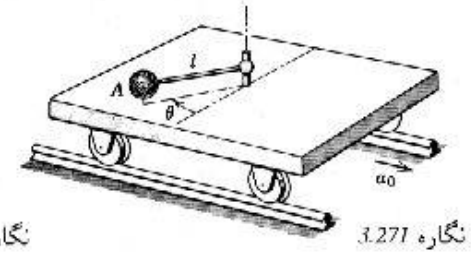
$$-R\sin 30^\circ=0 \quad \underline{R=0} \quad \sum F_y=ma_y \quad mg=ma \quad a=g$$

$$a_o=a\sqrt{3}=g\sqrt{3}=9.81\sqrt{3}=16.99\ \frac{m}{s^2}$$




نگاره *3.269*

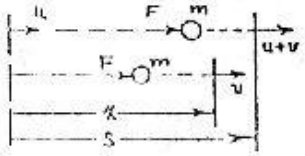



نگاره *3.271*

*3.270* - اگر در پرسش *3.266*، ناو با تندی *u* حرکت بکند یا نکند، انرژی جنبشی هواپیما به هنگام برخاست، برابر $\frac{1}{2}mv^2$ یا $\frac{1}{2}m(v+u)^2$ است، چرا؟

$$dV=dT \qquad Fds=m\ddot{s}\cdot ds=m\ddot{s}\cdot ds$$

$$\int_0^s Fds=\int_0^x Fds+\int_s^x Fds=\int_u^{u+v} m\ddot{s}ds$$




$$Fx+F(s-x)=\frac{1}{2}mv^2+muv \qquad Fx=\frac{1}{2}mv^2 \qquad F(s-x)=muv$$

*3.271* - در $\theta=0$ همه چیز ایستاده است که گاری با شتاب $a_0=1.2\ m/s^2$ به راه می‌افتد. کشش $T(\theta)$ در میله $l=0.6\ m$ با گلوله *2 kg* چیست؟

$\sum \underline{F}=m(\underline{a}_B+\underline{a}_{rel})$ $a_B=a_o$

(t-dir): $\sum F_t=0 \Rightarrow a_t=l\ddot{\theta}-a_o\cos\theta=0$ $\ddot{\theta}=\frac{a_o}{l}\cos\theta$

(n-dir): $\sum F_n=ma_n$ $T=m(l\dot{\theta}^2+a_o\sin\theta)$

$$\int_0^{\dot{\theta}}\ddot{\theta}d\dot{\theta}=\int_0^{\theta}\ddot{\theta}d\theta \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=\int_0^{\theta}\frac{a_o}{l}\cos\theta d\theta=\frac{a_o}{l}\sin\theta$$

$\Rightarrow T=m(2a_o\sin\theta+a_o\sin\theta)$ $\underline{T=3ma_o\sin\theta}$

$\theta=\pi/2$ $T=3(2)(1.2)(1)=7.2$ N

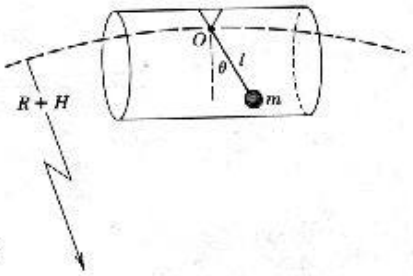
3.272 - آونگی در ماهواره‌ای در بلندی $H$ آویزان است. اگر آن را به اندازه $\theta_0$ کج و رها کنیم چه می‌شود؟

$$\sum F_t=ma_t \quad -\frac{Gm_em}{(R+H)^2}\sin\theta=m(l\ddot{\theta}-a_o\sin\theta)$$

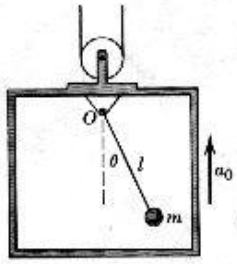
$$\ddot{\theta}=\frac{1}{l}[a_o\sin\theta-\frac{Gm_em}{(R+H)^2}\sin\theta]=\frac{1}{l}[a_o-\frac{Gm_em}{(R+H)^2}]\sin\theta$$

$$a_o=\frac{v^2}{(R+H)}=\frac{Gm_e/(R+H)}{(R+H)}=\frac{Gm_em}{(R+H)^2} \quad \underline{\ddot{\theta}=0}$$

and the pendulum dose not swing relative to the spacecroft (for $l<<(R+H)$).




نگاره 3.272




نگاره 3.273

3.273 - آونگ از $\theta_0$ رها می‌شود، کشش میله آن چیست؟

$$\sum F_t=ma_t \quad -mg\sin\theta=m(l\ddot{\theta}+a_o\sin\theta)$$

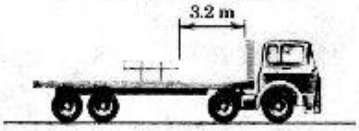
$$\ddot{\theta}=-(\frac{a_o+g}{l})\sin\theta \quad \int_0^{\dot{\theta}}\ddot{\theta}d\dot{\theta}=-\int_{\theta_0}^{\theta}(\frac{a_o+g}{l})\sin\theta d\theta$$

$$\dot{\theta}^2=2(\frac{a_o+g}{l})(\cos\theta-\cos\theta_o) \quad \sum F_n=ma_n$$

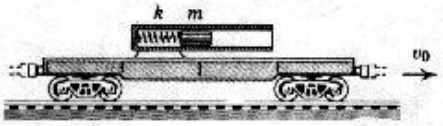
$$T-mg\cos\theta=m(l\ddot{\theta}^2+a_o\cos\theta)$$
$$T=m[g(3\cos\theta-2\cos\theta_o)+a_o(3\cos\theta-2\cos\theta_o)]=$$
$$=m(g+a_o)(3\cos\theta-2\cos\theta_o)$$
$$\theta=0 \Rightarrow \underline{T_o=m(g+a_o)(3-2\cos\theta_o)}$$
$$\theta_o=\pi/2 \Rightarrow \underline{T_o=3m(g+a_o)}$$

*3.274* - کامیون با تندی *15 m/s* پیش می‌رود و ترمز می‌گیرد. اگر ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده، *0.9* و ضریب اصطکاک بین بسته و کف کامیون $\mu_S=0.8$ و $\mu_K=0.7$ باشد، بسته کجا می‌ایستد یا با چه تندیی از دید کامیون به آن می‌خورد؟

$$a_r=-0.9g \quad t_{stor}=\frac{15\ m/s}{0.9(9.81\ m/s^2)}=1.699\ s$$
$$a_c=-0.7g \quad a_{c/T}=a_c-a_r=-0.7g-(-0.9g)=0.2g$$
$$t=t_{stop} \Rightarrow$$
$$x_{c/T}=(x_{c/r})_o+(v_{c/T})_o t_{stop}+\frac{1}{2}a_{c/T}\ t_{stop}^2=$$
$$=0+0+\frac{1}{2}(0.2g)(1.699)^2=2.83\ m$$
$$v_{c/T}=(v_{c/r})_o+a_{c/T}t_{stop}=0+(0.2g)(1.699)=3.33\ m/s$$
$$\Rightarrow v_c^2=v_{c_D}^2+2a_c(x-x_o)=(3.33)^2+2(-0.7g)(3.2-2.83)$$
$$\underline{v_c=2.46\ m/s}$$



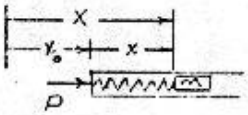

نگاره *3.274*




نگاره *3.275*

*3.275* - گلوله $m$ از روی واگنی با تندی $v_0$ با فنری به فشردگی $\delta$ پرتاب می‌شود. دستور کار و انرژی را برای بیننده زمینی و بیننده واگنی بنویسید و آنها را سازگار کنید.

$$U_r=\Delta v_e+\Delta T_r \quad 0=\Delta v_e+\frac{1}{2}m\ddot{x}^2$$
$$U=\Delta v_e+\Delta T \quad \int P dx_o=\Delta v_e+\frac{1}{2}\ m(\dot{x}^2-\dot{x}_o^2)$$



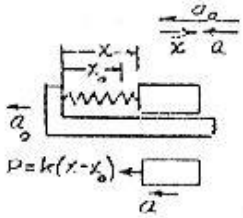

$$\int P dx_o=\int m\ddot{x}dx_o=\int m\ddot{x}v_o dt=mv_o\int_0^{\dot{x}} d(\dot{x})=mv_o\dot{x}$$
$$\frac{1}{2}\ m(\dot{x}^2-\dot{x}_o^2)=\frac{1}{2}\ m([\dot{x}+\dot{x}_o]^2-\dot{x}_o^2)=mv_o\dot{x}+\frac{1}{2}\ m\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow mv_o\bar{x}=\Delta v_e+mv_o\bar{x}+\frac{1}{2}m\bar{x}^2 \quad 0=\Delta v_e+\frac{1}{2}m\bar{x}^2$$

3.276 - طول آزاد فنر، $x_0$ است. اگر چارچوب با شتاب $a_0$ به راه افتد، بیشترین تندی $m$ از دید چارچوب چیست؟

$$a=a_o-\bar{\bar{x}} \quad \sum F=ma \quad k(x-x_o)=m(a_o-\bar{\bar{x}}) \quad \bar{\bar{x}}d\bar{x}=\bar{x}dx$$

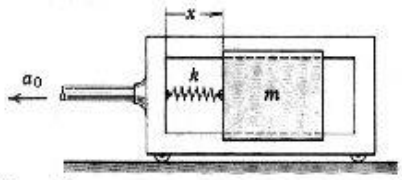
$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x}[a_o-\frac{k}{m}(x-x_o)]dx \quad \frac{1}{2}\bar{x}^2=(a_o-\frac{k}{m}x_o)(x-x_o)-\frac{k}{2m}(x^2-x_o^2)$$



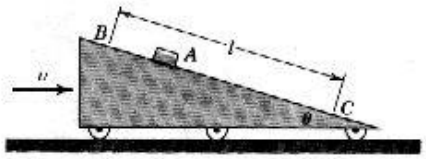

$$\frac{d(\bar{x}^2/2)}{dx}=a_o+\frac{k}{m}x_o-\frac{k}{m}x=0 \Rightarrow x=x_o+\frac{ma_o}{k}$$

$$(v_{rel})^2_{max}=\dot{x}^2=2(a_o+\frac{k}{m}x_o)(\frac{ma_o}{k})-\frac{k}{2m}(\frac{2ma_ox_o}{k}+\frac{m^2a_o^2}{k^2})=$$

$$=\frac{2ma_o^2}{k}+2x_oa_o-2x_oa_o-\frac{ma_o^2}{k}=\frac{ma_o^2}{k} \quad (v_{rel})_{max}=a_o\sqrt{m/k}$$



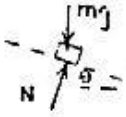

نگاره 3.276




نگاره 3.277

3.277 - ماسوره $A$ از $B$ رها می‌شود و به پایین می‌لغزد. تندی آن در $C$ از دید بیننده‌ای سوار بر گاری و از دید بیننده زمین چیست؟

$$U_{rel}=\Delta T_{rel} \quad mgl\sin\theta=\frac{1}{2}mv_{rel}^2-0 \quad v_{rel}^2=2gl\sin\theta$$




$$U=\Delta T \quad mgl\sin\theta+(N\sin\theta)d=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_o^2$$

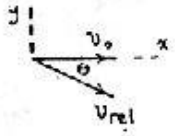
where d is the horizontal distance traveled by the block. Time to slide from B to C:

$$l=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}g\sin\theta\ t^2 \quad t=(\frac{2l}{g\sin\theta})^{1/2} \Rightarrow d=v_ot=v_o\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta}}$$

$$N=mg\cos\theta \quad v_A^2=v_B^2+2gl\sin\theta+2v_o\cos\theta\sqrt{2gl\sin\theta}$$

check :

$$\underline{v}_A=\underline{v}_o+\underline{v}_{rel}=v_o\underline{i}+\sqrt{2gl\sin\theta}(\cos\theta\underline{i}-\sin\theta\underline{j})=$$




$$=(v_o+\sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta)\underline{i}-\sqrt{2gl\sin^3\theta}\ \underline{j}$$

$$v_A^2=(v_o+\sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta)^2+(2gl\sin^3\theta)$$

3.278 - پرسش پیش را با افزودن شتاب $a_0$ به گاری پاسخ گویید. تندی گاری به هنگام رهایی ناسوره، $v_0$ است.

$U_{rel}=\Delta T_{rel}$

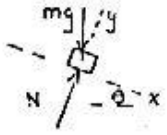
dose not hold in an accelcration reference frame.

$U=\Delta T$ : $mgl\sin\theta+(N\sin\theta)d=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_o^2$

$\sum F_y=ma_y$ : $N-mg\cos\theta=ma_o\sin\theta$ $\quad N=mg\cos\theta+ma_o\sin\theta$

$\sum F_x=ma_x$ : $mg\sin\theta=ma_x=m(a_o\cos\theta+a_{rel})$

$a_{rel}=g\sin\theta-a_o\cos\theta$




Time to slide from B to C :

$l=\frac{1}{2}a_{rel}t^2$ $\quad t=\left(\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)^{1/2}$

Then horizontal distance travelet by block is:

$d=v_o t+\frac{1}{2}a_o t^2$ $\quad d=v_o\left(\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)^{1/2}+\frac{a_o l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}$

$\Rightarrow v_A^2=v_B^2+2gl\sin\theta+2\sin\theta(g\cos\theta+$

$+a_o\sin\theta)\left(v_o\sqrt{\frac{2l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}}+\frac{a_o l}{g\sin\theta-a_o\cos\theta}\right)$

3.279 - ذره‌ای در $B$ بر زمین می‌افتد. شتاب گرانش $g_{rel}$ چیست؟

$g_{rel}^2=g^2+a_B^2-2ga_B\cos\gamma=g^2\left(1+\left[\frac{a_B}{g}\right]^2-2\frac{a_B}{g}\cos\gamma\right)$

$g_{rel}=g\left[1+\frac{a_B}{g}\left(\frac{a_B}{g}-2\cos\gamma\right)\right]^{1/2}$ $\quad (1+x)^n=1+nx+\ldots$

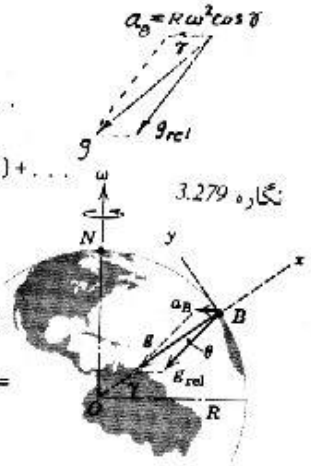
$\Rightarrow g_{rel}=g\left[1+\frac{a_B}{g}\left(\frac{a_B}{2g}-\cos\gamma\right)+\ldots\right]=g+a_B\left(\frac{a_B}{2g}-\cos\gamma\right)+\ldots$

$g_{rel}=g-R\omega^2\cos^2\gamma\left(1-\frac{R\omega^2}{2g}\right)+\ldots$

$R\omega^2=6.371(10^6)(0.7292\times10^{-4})^2=0.03388\ m/s^2$

$g_{rel}=9.825-0.03388\left(1-\frac{0.03388}{2\times9.825}\right)\cos^2\gamma+\ldots=$

$=9.825-0.03382\cos^2\gamma\ m/s^2$




نگاره 3.279

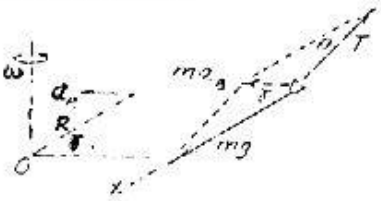



3.280 - نخ شاقول آویزان در $r=30^\circ$ چه زاویه‌ای از سوی عمودی می‌گیرد؟

$a_B=R\omega^2\cos\gamma$ $\quad \sum\underline{F}=m(\underline{a}_B+\underline{a}_{rel})$ $\quad \underline{a}_{rel}=0$ $\quad \frac{T}{\sin\gamma}=\frac{ma_0}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{mR\omega^2\sin2\gamma}{2T} \qquad \sum F_x=ma_x \Rightarrow -T\cos\theta+mg=mR\omega^2\cos^2\gamma$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{R\omega^2}{2g}\,\frac{\sin2\gamma}{1-(R\omega^2/g)\cos^2\gamma}$$

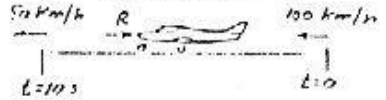


$$R\omega^2=0.03388\ \text{m/s}^2 \qquad \gamma=30^\circ$$

$$\tan\theta=\frac{0.03388}{2(9.825)}\,\frac{0.866}{1-(0.03388/9.825)(3/4)}=0.001497$$

$$\Rightarrow \theta=5'$$

*3.281* - یک هواپیمای *1200 kg* با *100 km/h* فرود می‌آید و پس از *10 s* به *50 km/h* می‌رسد. میانگین نیروی ترمز چیست؟

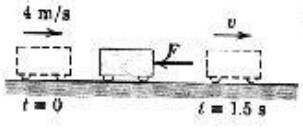


$$\int_0^t R\,dt=m\Delta v \qquad R_{av}=R=\frac{m\Delta v}{t}=\frac{1200(100-50)}{10}\,\frac{1000}{3600} \Rightarrow R=1667\ \text{N}$$

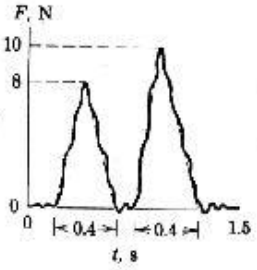
*3.282* - بر گاری رونده، نیروی $F$ می‌نشیند. تندی آن در $t=1.5s$ چیست؟

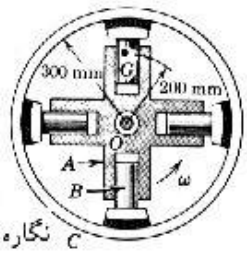
$$\int\sum F_x\,dt=m\Delta v_x \qquad -\frac{1}{2}(0.4)(8)-\frac{1}{2}(0.4)(10)=2(v-4)$$

$$v=2.2\ \text{m/s}$$



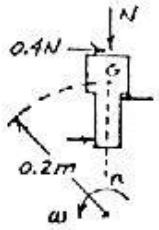

نگاره *3.282*




نگاره *3.283*

*3.283* - چلیپای میانی با $\omega$ می‌چرخد. استوانه‌های اصطکاکی *2 kg* با گرانیگاه $G$ و ضریب اصطکاک *0.4*، چرخ بیرونی را می‌چرخاند. گشتاور بیشینه گذرنده به چرخ بیرونی در چرخش *3000 rev/min* چیست؟

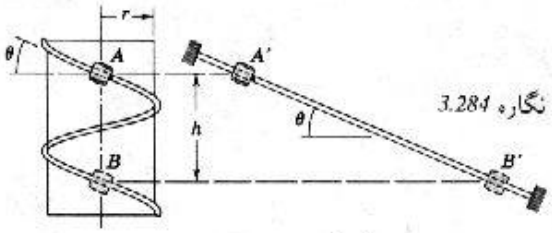



$$\omega=\frac{3000(2\pi)}{60}=314.2\ \text{rad/s}$$

$$\sum F_n=ma_n \qquad N=2(0.2)(314.2)^2=39.5(10^3)\ \text{N}$$

$$M=4\mu_k Nr=4(0.4)(39.5)(10^3)(0.3)=18.96\ \text{kN.m}$$

3.284 - ماسوره از $A$ و $A'$ رها می‌شود. تندی ماسوره در $B$ و $B'$ چیست؟ اگر اصطکاک هم باشد تندی کدام بیشتر است؟




نگاره 3.284

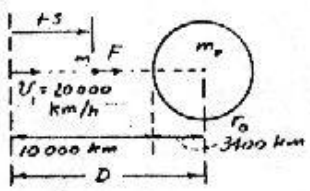
(الف) (ب)

$$U=\Delta T \quad mgh=\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$\Rightarrow v_B=v_B'=\sqrt{2gh}$$

3.285 - ناویزی با تندی $20000\ km/h$ در فاصله $10000\ km$ از مریخ، یک‌راست به سوی آن می‌رود. قطر مریخ $6800\ km$ و شتاب گرانش آن $3.72\ m/s^2$ است. تندی برخورد ناویز با مریخ چیست؟

$$\sum F=ma \quad G\frac{mm_o}{(D-s)^2}=ma \quad s=D-r_o \quad a=g_o=3.73\ m/s^2$$




$$\Rightarrow G\frac{m_o}{r_o^2}=g_o \quad a=g_o\frac{r_o^2}{(D-s)^2} \quad \int_{v_1}^{v} vdv=\int_0^s ads$$

$$\frac{1}{2}(v^2-v_1^2)=\int_0^{D-r_o} g_o\frac{r_o^2}{(D-s)^2}ds=g_o r_o^2\left(\frac{1}{D-s}-\frac{1}{D}\right)$$

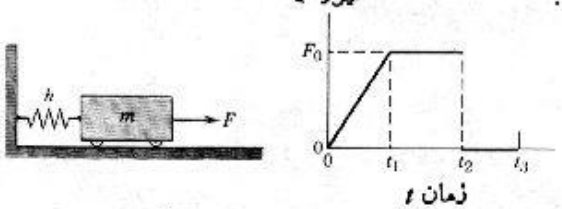
$$\Rightarrow v^2=v_1^2+2g_o r_o^2\frac{s}{(D-s)D} \quad \text{for } s=10000\ km,$$

$$v^2=(20000)^2+2(3.73)\frac{(3600)^2}{1000}(3400)^2\frac{10000}{3400(13400)}=$$

$$=400(10^6)+245(10^6)=645(10^6)\ (km/h)^2$$

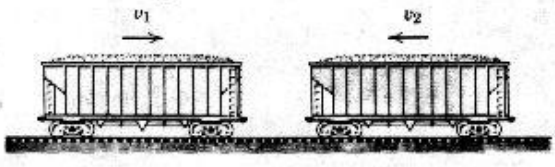
$$\Rightarrow v=25400\ km/h$$

3.286 - تندی گاری در $t=t_3$ چیست؟




$$a=-\frac{k}{m}x+\frac{F(t)}{m}$$

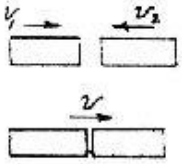
نگاره 3.286




نگاره 3.287

3.287 - افت انرژی پس از برخورد به انرژی نخستین چیست؟

$v_1>v_2 \quad \Delta G=0 \quad mv_1-mv_2=(m+m)v \quad v=\frac{1}{2}(v_1-v_2)$



$T_{Before}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2)$

$T_{after}=\frac{1}{2}(m+m)v^2=m(\frac{v_1-v_2}{2})^2=\frac{m}{4}(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2)$

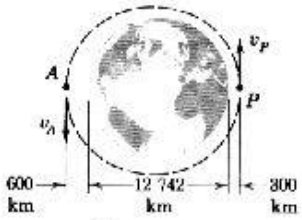
$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{(m/2)[(v_1^2+v_2^2)-(1/2)(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2)]}{(m/2)(v_1^2+v_2^2)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}=\frac{1}{2}+\frac{v_1v_2}{v_1^2+v_2^2}$$

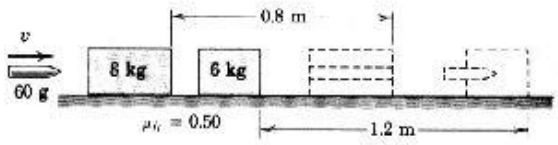
3.288 - $v_A$ را با $v_P=28137 \ km/h$ چیست؟

$\Delta H=0$ about center of earth

$mv_Pr_P=mv_Ar_A \quad v_A=v_P\frac{r_P}{r_A} \quad v_A=28137\frac{6371+300}{6371+600}=26926 \ km/h$




نگاره 3.288




نگاره 3.290

3.289 - دنباله‌دار هالی در 1910 و 1986 دیده شد. اگر نشیب مدار آن، نیم برابر فاصله زمین از خورشید باشد، فرازش چیست؟

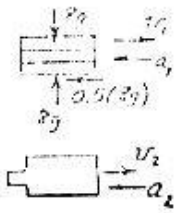
$\tau=2\pi(a^{3/2}/(R\sqrt{g})) \quad a=\left(\tau R\sqrt{g}/(2\pi)\right)^{3/2}$

$$a=\left(76(365)(24)(3600)(\frac{1,392,000,000}{2})\sqrt{274}/(2\pi)\right)^{2/3}$$

$a=2.68(10^{12}) \ m=2.68(10^9) \ km$

$r_{max}=2a-r_{min}=2(2.68\times10^{12})-149.6\times10^6/2=5.37\times10^9 \ km$

3.290 - اگر گلوله، بسته‌ها را به آرایش خط‌چین درآورد، تندیش چیست؟




$F=ma \quad a_1=0.5g$

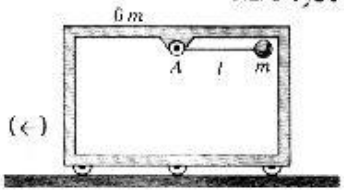
$v_1=\sqrt{2a_1s_1}=\sqrt{2(0.5\times9.81)\times0.8}=2.80 \ m/s$

$a_2=0.5g \quad v_2=\sqrt{2a_2s_2}=\sqrt{2(0.5\times9.81)\times1.2}=3.43 \ m/s$

$\Delta G=0 \quad 0.060v+0=8(2.80)+(6+0.06)3.43 \quad v=720 \ m/s$

*3.291* - آونگ رها می‌شود. تندی $m$ از دید دیواره در پایینترین نقطه چیست؟

نگاره *3.291*




$$0=6mv_A+mv_B \quad U=\Delta T \quad mgl=\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}(6m)v_A^2$$

$$\Rightarrow \quad v_A=\sqrt{gl/21}\ (\rightarrow)$$

$$v_B=-6\sqrt{gl/21}\ (\leftarrow) \qquad v_{rel}=v_{B/A}=v_B-v_A=-\sqrt{\frac{7}{3}gl}\ (\leftarrow)$$

*3.292* - خودروی $A$ به جرم $1800\ kg$ به سوی خودروی ایستاده $B$ به جرم $900\ kg$ می‌رود و $15\ m$ مانده به آن با ضریب اصطکاک $0.9$ ترمز می‌گیرد و پس از برخورد، $15\ m$ دیگر نیز می‌لغزد. خودروی $B$ نیز پس از برخورد، $30\ m$ می‌لغزد و در پایان به آرایش نشان‌داده می‌رسد. آیا خودروی $A$ پیش از ترمزگرفتن، از $90\ km/h$ بیشتر بوده‌است؟

$$U=\Delta T \quad -\mu_k mgd=0-\frac{1}{2}mv'^2 \quad v'=\sqrt{2\mu_k gd}$$

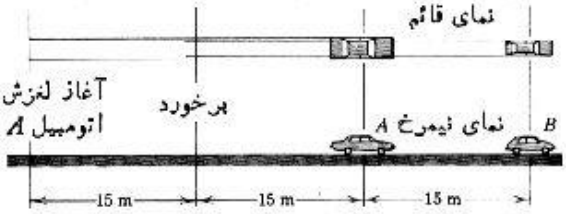
$$A:\ v'_A=\sqrt{2(0.9)(9.81)(15)}=16.27\ m/s$$

$$B:\ v'_B=\sqrt{2(0.9)(9.81)(30)}=23.02\ m/s$$

$$m_Av_A+m_Bv_B=m_Av'_A+m_Bv'_B$$

$$1800v_A+0=1800(16.27)+900(23.02)) \quad v_A=27.78\ m/s$$

نگاره *3.292*

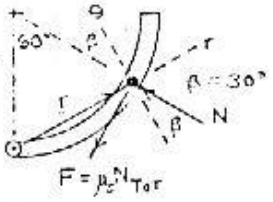



$$U=\Delta T \quad -\mu_k mgd=\frac{1}{2}m(v_A^2-v_{AO}^2)$$

$$-0.9(9.81)(15)=\frac{1}{2}(27.78^2-v_{AO}^2)$$

$$v_{AO}=32.2\ m/s \quad =115.91\ km/h$$

*3.293* - ذره $P$ به جرم $0.5\ kg$ با ضریب اصطکاک $0.8$ در لوله‌ای است که با شتاب $2\ rad/s^2$ از $t=0$ به راه می‌افتد. ذره کی می‌لغزد؟




$$N_z=mg \perp N_{TOT}=\sqrt{N^2+N_z^2}=\sqrt{N^2+(mg)^2}$$

$$\sum F_r=mg_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)-N\sin 30-\mu_s\sqrt{N^2+[0.5\times 9.81]^2}\cos 30=$$

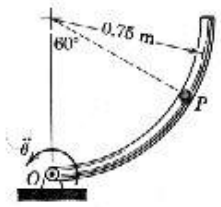
$$=-(0.5)(0.75)(2)^2t^2 \quad \sum F_\theta=ma_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$N\cos 30^\circ-\mu_s\sqrt{N^2+(0.5\times 9.81)^2}\sin 30^\circ=(0.5)(0.75)(2)$$

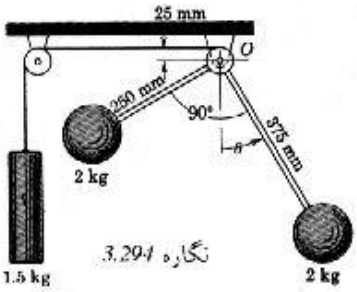
$$\Rightarrow N=3.71\ N \quad t=2.02\ s$$

*3.294* - دستگاه از $\theta=0$ رها می‌شود. تندی استوانه در $\theta=30^\circ$ چیست؟

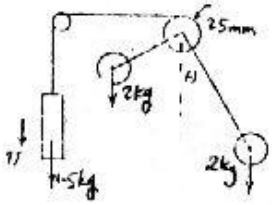
$$U=3(1+\theta)+4(10\sin\theta)-4(15-15\cos\theta)$$




نگاره 3.293




نگاره 3.294

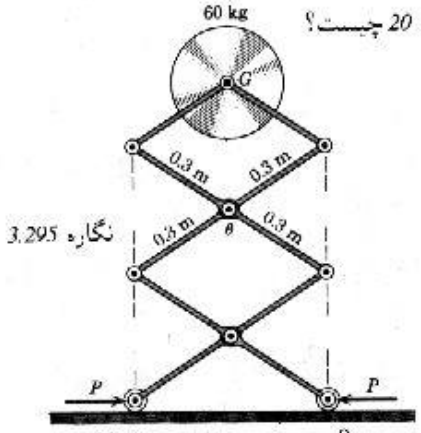



$$U = 0.250\sin 30 + (0.375\cos 30 - 0.375) + (\pi/12)(0.025)$$
$$U = 0.125 - 0.050 + 0.007 = 0.082 \text{ N.m}$$

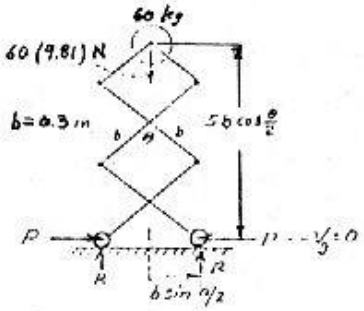
$$\Delta T = \frac{1}{2}\left[2(0.375)v^2 + 2(0.250)v^2 + 1.5v^2\right] = 1.375\ v^2$$

$$U = \Delta T \Rightarrow 0.082 = 1.375v^2$$
$$v = 59.63 \text{ mm/s}$$

3.295 - دستگاه با نیروی $P$ از $\theta = 120^\circ$ به راه می‌افتد. اگر استوانه با $3\ m/s$ از $\theta = 60^\circ$ بگذرد، $P$ چیست؟ واکنش زیر هر غلتک در شتاب استوانه $20\ m/s^2$ چیست؟




نگاره 3.295




$$U = \Delta v_g + \Delta T \quad \theta_1 = 120^\circ \quad v_1 = 0 \quad \theta_2 = 60^\circ \quad v_2 = 3 \text{ m/s}$$

$$U = 2pb\left(\sin\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_2}{2}\right) = 0.6p(\sin 60 - \sin 30) = 0.2196p \text{ J}$$

$$\Delta v_g = mg\Delta h = mg(5b)\left(\cos\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2}\right) =$$
$$= 60(9.81)(1.5)(\cos 60 - \cos 30) = 323.2 \text{ J}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}60(3)^2 - 0 = 270 \text{ J} \Rightarrow 0.2196p = 323.2 + 270$$

$$p = \frac{323.2 + 270}{0.2196} = 2701 \text{ N} \qquad p = 2.70 \text{ kN}$$

$$\sum F = ma \quad 2R - 60(9.81) = 60(20) \qquad R = 894 \text{ N}$$

3.296 - ماسوره $C$ با ضریب اصطکاک 0.6 و تندی $3\ m/s$ از $A$ می‌گذرد. شتاب کندشونده $a_t$ در $A$ برای هر دو ماسوره چیست؟

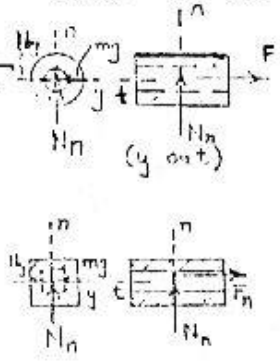
(a) $\sum F_y=0 \quad N_y=mg \quad \sum F_n=ma_n=mv^2/\rho \quad N_n=mv^2/\rho$

$$N_{TOT}=\sqrt{N_y^2+N_n^2}=m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}=\mu_k N_{TOT}=\mu_k m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}$$

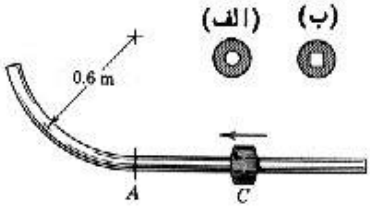
$$\sum F_t=ma_t \quad -\mu_k m\sqrt{g^2+v^4/\rho^2}=ma_t \quad \underline{a_t=-10.75\ m/s^2}$$

$$N_y=mg \quad N_n=mv^2/\rho \quad F_y=\mu_k N_y=\mu_k mg \quad F_n=\mu_k N_n=\mu_k mv^2/\rho$$

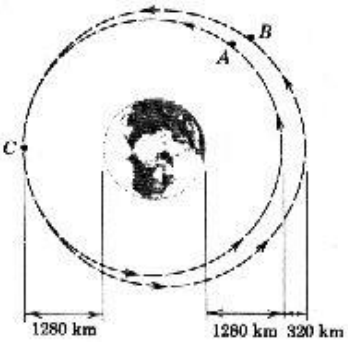
$$a_t=-\frac{F_y+F_n}{m}=-\mu_k g-\mu_k v^2/\rho=\underline{-14.9\ m/s^2}$$



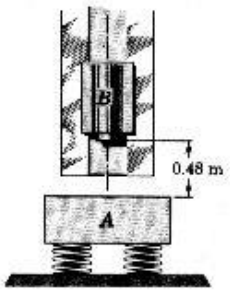



نگاره 3.296




نگاره 3.297




نگاره 3.298

3.297 - ماهواره $A$ و $B$ در $C$ به هم می‌پیوندند. بلندی فراز مدار پایانی چیست؟

$$v_A=R\sqrt{g/r}=6376000\sqrt{9.81/(6376000+1280000)}=7217.4\ m/s$$

$$v_B=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_{max}/r_{min}}$$

$$=6376000\ \sqrt{\frac{9.81}{[(2(6376000)+2(1280000)+320000)]/2}}\times$$

$$\sqrt{7976000/7656000}=7290.9\ m/s$$

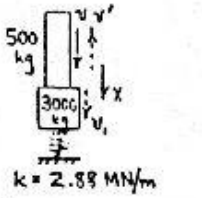
$$m_A v_A+m_B v_B=(m_A+m_B)v_c \quad m_A=m_B,$$

$$v_c=\frac{1}{2}(v_A+v_B)=7254.2\ m/s \qquad v_p=R\sqrt{g/a}\ \sqrt{r_{max}/r_{min}}$$

$$v_p=v_c \ : \ r_{max}=\frac{r_{min}}{(2gR^2)/(v_p^2 r_{min})-1}=7814082.2\ m$$

$$h_{max}=r_{max}-R=7814082.2-6376000=\underline{1438082\ m=1438\ km}$$

*3.298* - سندان $A$ به جرم $3\ Mg$ بر چهار فنر به سختی $2.88\ MN/m$ سوار است. چکش $500\ kg$ بر سندان می‌افتد و آن را $20\ mm$ پایین می‌راند. جهندگی $e$ چیست و چکش تا چه بلندی بازمی‌گردد؟




$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(0.98)}=3.07\ m/s$$

$$\Delta T+\Delta V_e+\Delta V_g=0$$

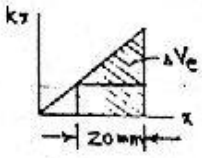
$$\left(0-\frac{1}{2}3000v_1^2\right)+\frac{1}{2}2.88\times10^6(0.020)^2+3000(9.81)(0.020)+$$
$$-3000(9.81)(0.020)=0 \quad v_1=0.620\ m/s$$

$$\Delta G_x=0 \quad 500(3.07)+0=3000(0.620)-500v'$$

$$v'=0.649\ m/s \quad v'=\sqrt{2gh}$$

$$h=(0.649)/(2\times9.81)=0.0215\ m \text{ or } \underline{h=21.5\ mm}$$

$$e=(0.620+0.649)/3.07=0.414$$




*3.299* - فشردگی فنر چه باشد تا گوی به سوراخ $E$ بیفتد؟

D-E: $y=y_o+v_{y_o}t-\frac{1}{2}gt^2-\rho=\frac{1}{2}gt^2 \quad t=\sqrt{2\rho/g}$

$x=x_o+v_{x_o}+t \quad d=v_D\sqrt{2\rho/g} \quad v_D=d\sqrt{g/2\rho}$

A-D: $U=\Delta T \quad \frac{1}{2}k\delta^2-\mu_k mg\rho-mg\rho=\frac{1}{2}m\left(d^2\frac{g}{2\rho}\right)-0$

$$\delta=\sqrt{mg/k}\sqrt{(d^2/2\rho+2\rho(1+\mu_k)}$$

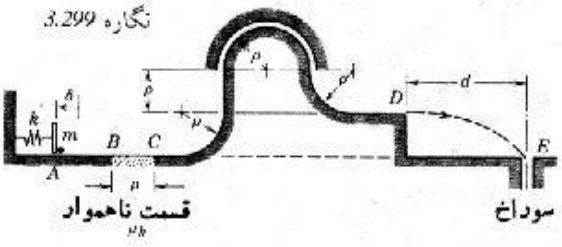
But speed at top of hill must be $\geq 0$ :

$U=\Delta T \quad \frac{1}{2}k\delta^2-\mu_k mg\rho-3mg\rho=\frac{1}{2}mv^2-0\geq0$

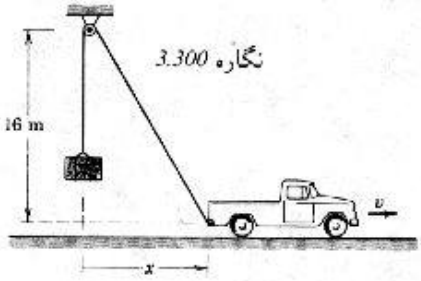
$$\Rightarrow \delta\geq\sqrt{\frac{2mg\rho}{k}(3+\mu_k)}$$

$$(mg/k)(d^2/(2\rho)+2\rho[1+\mu_k])\geq\frac{2mg\rho}{k}(3+\mu_k) \quad d\geq2\sqrt{2}\ \rho$$

نگاره *3.299*




نگاره *3.300*

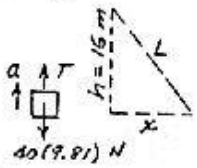



*3.300* - خودرو در $x=12\ m$ با تندی $5\ m/s$ پیش می‌رود. کشش ریسمان بسته به وزنه $400\ kg$

چیست؟ $a=\ddot{L}$ $L^2=x^2+h^2$ $2L\dot{L}=2x\dot{x}$ $L\dot{L}=x\dot{x}$ $L\ddot{L}+\dot{L}=x\ddot{x}+\dot{x}^2$ $\ddot{x}=0$

$$a=\ddot{L}=(\ddot{x}^2-\dot{L}^2)/L=(\ddot{x}^2-(x^2/L^2)\dot{x}^2)/L=\frac{L^2-x^2}{L^3}\dot{x}^2=\frac{h^2v^2}{L^3}$$

$x=12$ m $h=16$ m $L=20$ m $\dot{x}=v=5$ m/s

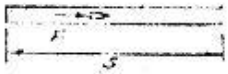



$$a=\frac{16^2(5^2)}{20^3}=0.80\ \text{m/s}^2$$

$$\sum F=ma \quad T-40(9.81)=40(0.80) \quad T=424\ \text{N}$$

*3.301* - انرژی جنبشی گلوله‌ای که با تندی $v$ از تفنگ ایستاده و تفنگی بر خودرویی با تندی $u$، برابر $mv^2/2$ و $m(v+u)^2/2$ است. پاره $muv$ در انرژی جنبشی دوم چیست؟

$$\int Fds=F_{av}s=\frac{1}{2}mv^2 \qquad \int_0^{s+\delta} Fds=F_{av}(s+\delta)=\frac{1}{2}mv^2+F_{av}\delta$$



$\delta=ut$ $F_{av}=ma_{av}\Rightarrow F_{av}\delta=ma_{av}$ $ut=muv$

*3.302* - ماهواره $700\ kg$ باید از $B$ موشکی را به اندازه $t=90\ s$ روشن شود تا به مدار $BC$ بیفتد. موشک در میانه از کار می‌افتد و مداری با فراز $1125\ km$ به دست می‌آید. زمان کار موشک چه بوده است؟

$$\Delta v_A=R\sqrt{g/r_1}\left(\sqrt{2r_2/(r_1+r_2)}-1\right)$$

$$(\Delta v_A)_n=6376000\sqrt{\frac{9.81}{6376000+275000}}\times$$

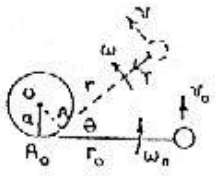
$$\left(\sqrt{\frac{2(6376000+35900000)}{(6376000+275000)+6376000+35900000}}-1\right)=966.2\ \text{m/s}$$

$$(\Delta v_A)_a=6376000\sqrt{\frac{9.81}{(6376000+275000)}}\times$$

$$\left(\sqrt{\frac{2(1000)(6376+35900)}{1000(6376+275)+1000(6376+35900)}}-1\right)=2436\ \text{m/s}$$

$$\frac{(\Delta v_A)_a}{(\Delta v_A)_n}=\frac{t'}{t} \qquad t'=\frac{(\Delta v_A)_a}{(\Delta v_A)_n}t=\frac{755}{7997}(90)=8.50\ \text{s}$$

*3.303* - $\omega$ و کشش $T$ در $r$ چیست؟



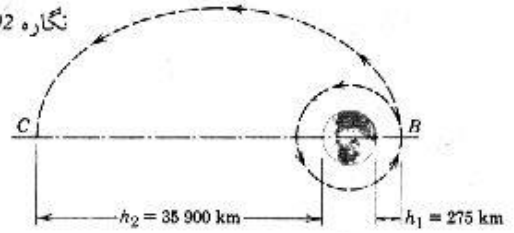

$$\frac{1}{2}m(r_0\omega_0)^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2 \qquad \omega=\frac{r_0}{r}\omega_0=\frac{r_0}{r_0-a\theta}\omega_0 \qquad \omega=\omega_0/(1-\frac{a}{r_0}\theta)$$

$$\sum M_0=\dot{H}_0 \qquad -T_a=\frac{d}{dt}(mvr)=mv\dot{r} \qquad v=\text{costant}$$

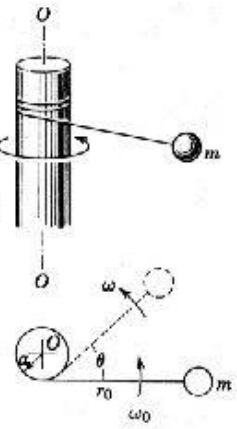
$$\dot{r}=\frac{d}{dt}(r_o-a\theta)=-a\dot{\theta}=-a\omega \Rightarrow -Ta=mv(-a\omega)$$

$$T=mv\omega \quad \underline{T=mr_o\omega_o\omega} \qquad v=v_o=r_o\omega_o$$

نگاره 3.302




نگاره 3.303




3.304 - نیروی برا ($F_D$) و اصطکاک ($F_R$) برای خودروی $1000\ kg$ با تندی تغییر می‌کند. (a) توان خودرو برای تندی ثابت $45\ km/h$ و $90\ km/h$ چیست؟ (b) زمان $t$ و مسیر $s$ برای رسیدن از تندی $90\ km/h$ به $5\ km/h$ چیست؟

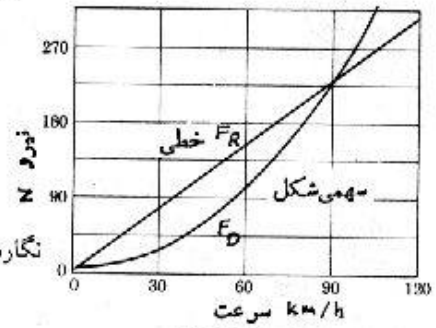
$$\begin{cases} F_R=-k_1v \quad k_1=225(3.6)/90=9 \ \text{N.s/m} \\ F_D=-k_2^2v^2 \quad k_2=225(3.6^2)/90^2=0.36 \ \text{N.s}^2/\text{m}^2 \end{cases}$$

(a)

$$P_{45}=Fv=9\times45/3.6+.36(45/3.6)^2=112.5+56.25=168.75 \ \text{W}$$

$$P_{90}=Fv=9\times90/3.6+0.36(90/3.6)^2=225+225=450 \ \text{W}$$

نگاره 3.304




(b) $k_1v-k_2v^2=m\dfrac{dv}{dt}$

$$\int_0^t dt=-m\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v(k_1+k_2v)}t$$

$$=-\frac{m}{k_1}\ln\left(\frac{v_2(k_1+k_2v_1)}{v_1(k_1+k_2v_2)}\right)$$

$$t=-\frac{1000}{9}\ln\left(\frac{1.39(9+0.36\times25)}{25(9+0.36\times1.39)}\right)=\underline{250 \ \text{s}}$$

$$k_1v-k_2v^2=mv\frac{dv}{ds} \qquad \int_0^s ds=-m\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{(k_1+k_2v)}$$

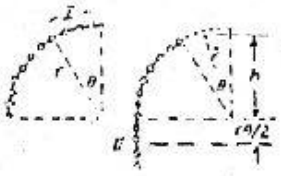
$$S=-\frac{m}{k_2}\ln(k_1+k_2v)\Big|_{v_1}^{v_2} \qquad S=-\frac{m}{k_2}\ln\left(\frac{(k_1+k_2v_2)}{(k_1+k_2v_1)}\right)=\underline{1775 \ \text{m}}$$

3.305 - زنجیر با چگالی $\rho$ از $\theta=0$ رها می‌شود. (a) شتاب مماسی $a_t(\theta)$ چیست؟ (b) کشش $T$ در زنجیر در $\beta=\pi/2$ تا $\beta=\pi$ چیست؟ (c) $v(\theta)$ چیست؟

$\Delta v_g$ =difference in potential energy between I, II

$\Delta v_g = -\rho g r\theta(h+r\theta/2)$

$$h=\bar{r}\cos\frac{\theta}{2}=r\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\cos\theta/2=\frac{r}{\theta}\sin\theta$$



$$\Rightarrow \Delta v_g=-\rho g r^2(\sin\theta+\theta^2/2)$$

$$\Delta T+\Delta v_g=0\ ;\ \frac{1}{2}\rho\frac{\pi r}{2}v^2=\rho g r^2(\sin\theta+\theta^2/2)$$

$$v=r\dot{\theta}=2\sqrt{(gr/\pi)(\sin\theta+\theta^2/2)}$$

$$\frac{d}{dt}[v^2]=2v\dot{v}=2r\dot{\theta}a_t=(4gr/\pi)(\dot{\theta}\cos\theta+\theta\dot{\theta})$$

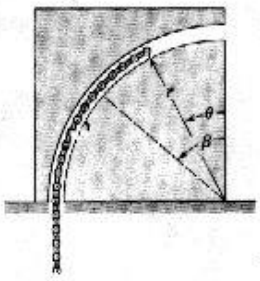
$$a_t=(2g/\pi)(\cos\theta+\theta)\qquad \sum F_t=ma_t$$

$$\Rightarrow (T+dT)\cos(d\beta/2)-T\cos(d\beta/2)+\rho g r d\beta\sin\beta=\rho r d\beta a_t$$

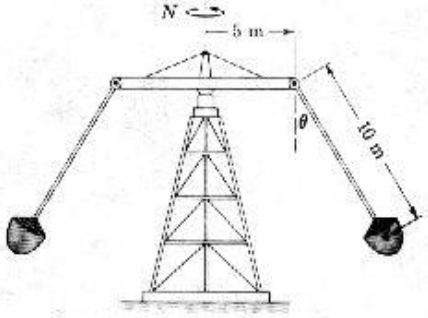
$$dT=\rho g r[\frac{2}{\pi}(\cos\theta+\theta)-\sin\beta]d\beta$$

$$\int_0^T dT=\rho g r\int_0^\beta[\frac{2}{\pi}(\cos\theta+\theta)-\sin\beta]d\beta$$

$$dw=\rho g r d\beta\ ,\ T=\rho g r[\frac{2}{\pi}(\cos\theta+\theta)(\beta-\theta)+\cos\beta-\cos\theta]$$

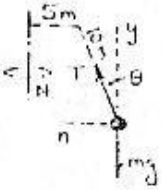


نگاره 3.305



نگاره 3.306

3.306 - زاویه $\theta$ برای $0\le N\le 12$ (N) چگونه است؟



$$\sum F_y=0\quad T\cos\theta-mg=0\quad (1)$$

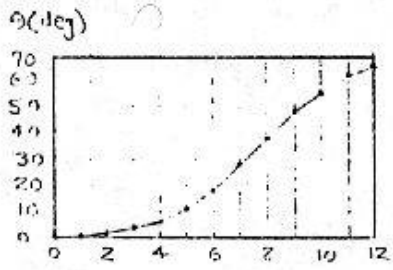
$$\sum F_n=ma_n\quad T\sin\theta=mr\omega^2=m(5+10\sin\theta)\omega^2\quad (2)$$

$$\omega=N(\pi/30)\quad (3)$$

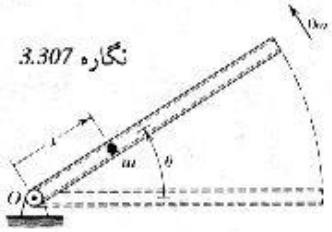
(1): $T=\frac{mg}{\cos\theta}$, (2): $\frac{mg\sin}{\cos\theta}=m[5\omega^2+10\sin\theta\ \omega^2]$

(3): $g\tan\theta-[10(N\pi/30)^2]\sin\theta-5(N\pi/30)^2=0$

Use newton's method to obtain $\theta$ over the specified range of N.




نگاره 3.307




*3.307* - گلوله $m$ از $r=0$ و $\theta=0$ با چرخش $\omega_0=0.5$ rad/s $l=1$ m به راه می‌افتد. $r$ و $\theta$ به هنگام بیرون افتادن چیست؟

$r=\frac{g}{4\omega_0^2}(-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta)$ $r=l=1$ m $\omega_0=0.5$ rad/s

$1=9.81(-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta)$ $f(\theta)=-e^{-\theta}+e^{\theta}-2\sin\theta-\frac{1}{9.81}=0$

$f'(\theta)=e^{-\theta}+e^{\theta}-2\cos\theta$ $f(\theta)=0 \Rightarrow \theta=0.5347$ rad $=30.6^\circ$

$\theta=\omega_0 t$ $t=\frac{0.5347}{0.5}=1.069$ s

*3.308* - دستگاه از $\theta=60^\circ$ با فنر آزاد رها می‌شود. $v(\theta)$ چگونه است؟ *(a)* تندی بیشینه چیست و در چه $\theta$ رخ می‌دهد؟ *(b)* بیشینه $\theta$ چیست؟

$\overline{AB}^2=2(0.375)^2+2(0.375)^2\cos\theta$ $\overline{AB}=0.375\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$\overline{AB}-0.375=\delta$ $\Delta V_e=\frac{1}{2}k\delta^2=\frac{1.1}{2}1[0.375(\sqrt{2(1-\cos\theta)}-1)]^2$

$=77.34(3-2\cos\theta-2\sqrt{2(1-\cos\theta)})$

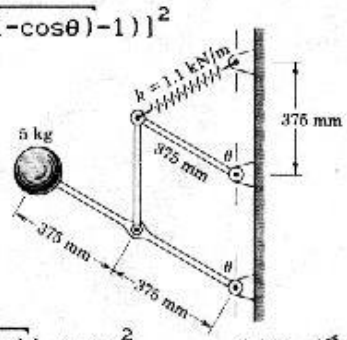
$=-18.39+36.78\cos\theta$

$\Delta V_g=-5(9.81)(0.75)(\cos60^\circ-\cos\theta)$

$\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0$

$\frac{1}{2}(5)U^2=$

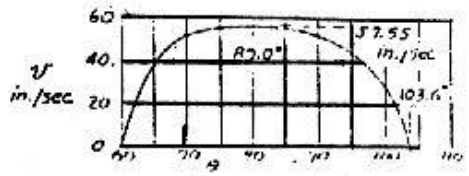
$=18.39-36.78\cos\theta-232.2+154.7\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ (m/s)$^2$




نگاره 3.308

$\theta>60^\circ \Rightarrow$ (a): $U_{max}=1.515$ m/s $\theta=82^\circ$

(b): $\theta_{max}=108.6^\circ$

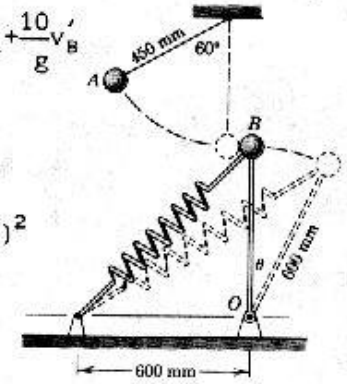



*3.309* - گلوله $A$ به جرم $kg$ 9 از $60^\circ$ رها می‌شود و به گلوله $B$ به جرم $kg$ 4.5 می‌خورد. با جهندگی 0.75 و فنر $kN/m$ 1.5 بیشینه $\theta$ چیست؟

I: $U=\Delta T \quad 20(18/12)(1-\cos 60^\circ)=\frac{1}{2}\frac{20}{32.2}v_A^2-0$

$v_A=6.95$ ft/sec

نگاره *3.309*




II: $m_A v_A+m_B v_B=m_A v_A'+m_B v_B' \quad \frac{20}{g}(6.95)+0=\frac{20}{g}v_A'+\frac{10}{g}v_B'$

$v_B'-v_A'=e(v_A-v_B) : v_B'-v_A'=0.75(6.95-0)$

$\Rightarrow v_B'=8.108$ ft/sec

III: $U=\Delta T$

$10(2)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}k(x_1^2-x_2^2)=0-\frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(8.108)^2$

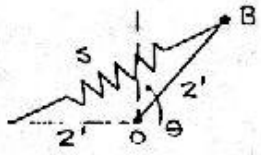
$s^2=2^2+2^2-2(2)(2)\cos(\theta+90^\circ)=8+8\sin\theta$

$x_2=s-2\sqrt{2} \quad x_2=(8+8\sin\theta)^{1/2}-2\sqrt{2}$

$x_2^2=8(2+\sin\theta-2\sqrt{1+\sin\theta})$

$\Rightarrow 20(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}(100)(8)(2+\sin\theta-2\sqrt{1+\sin\theta})=$

$=\frac{1}{2}\frac{10}{32.2}(8.108)^2$




$\Rightarrow -769.8-20\cos\theta-400\sin\theta+800\sqrt{1+\sin\theta}=0$

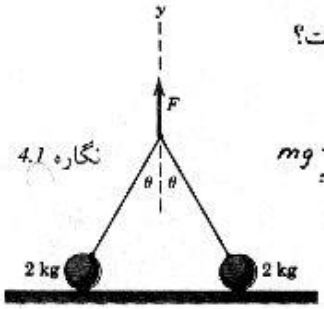
$\theta=21.7^\circ$

# فـرگـرد چهـار

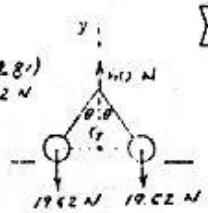
## دینـامـیـک ذره‌ها

## Kinemaics of Systems of Particles

4.1 - اگر $F=60\ N$ باشد، شتاب آغازین گلوله‌ها در سوی $y$ چیست؟



نگاره 4.1

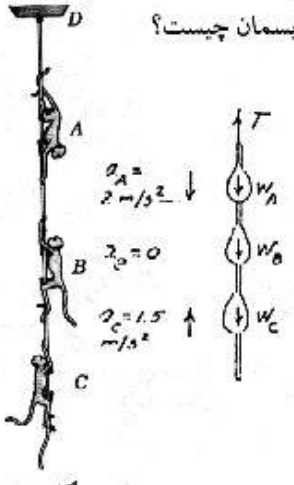



$$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad 60-2(19.62)=4\bar{a}_y$$

$$mg=2(9.81)=19.62\ N$$

$$a_y=\bar{a}_y=5.19\ in./sec^2$$

4.2 - میمونهای $A$ و $B$ و $C$، $10$ و $15$ و $8\ kg$ جرم دارند. اگر $A$ با شتاب $2\ m/s^2$ پایین آید و $C$ با شتاب $1.5\ m/s^2$ بالا رود و $B$ نیز با سرعت ثابت $0.8\ m/s$ بالا رود، کشش ریسمان چیست؟



نگاره 4.2

$$W_A=10(9.81)=98.1\ N$$

$$W_B=15(9.81)=147.2\ N$$

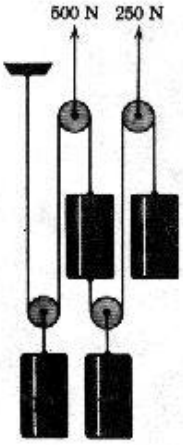
$$W_C=8(9.81)=78.5\ N$$

$$\sum F=\sum m_i a_i$$

$$T-(9.81+147.2+78.5)=10(-2)+15(0)+8(1.5)$$

$$T-323.7=-8 \quad \underline{T=316\ N}$$

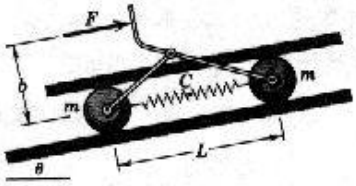
4.3 - شتاب گرانیگاه دستگاه نشان‌داده چیست؟



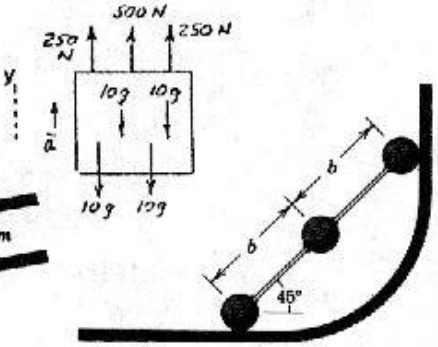

نگاره 4.3

$\sum F_y = m\bar{a}_y \quad 500+250++250-40(9.81)=40\bar{a} \quad 40\bar{a}=1000-392$

$\bar{a}=15.19\ m/s^2$

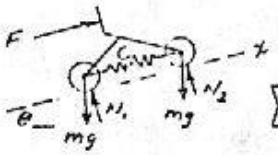



نگاره 4.4




نگاره 4.5

4.4 - شتاب نقطه $C$، مرکز فنر چیست؟




$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad a_c=\bar{a}_x \quad F-2mg\sin\theta=2ma_c \quad \underline{a_c=F/2m-g\sin\theta}$

4.5 - گوی‌های چسبیده به میله، از آرایش نشان‌داده رها می‌شود. تندی گویها، هنگامی که میله بر روی سطح افقی می‌لغزد، چیست؟

$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad \Delta T=3(mv^2/2)-0=3mv^2/2$

$\Delta V_g=0-mgb/\sqrt{2}-mg(2b)/\sqrt{2}=-3bmg/\sqrt{2}$

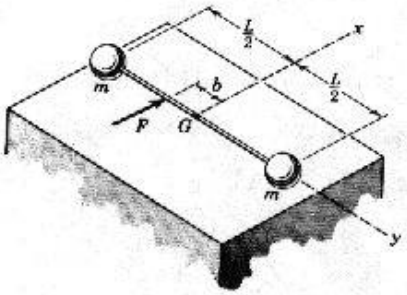
$\Rightarrow 3mv^2/2-3bmg/\sqrt{2}=0 \quad v^2=bg\sqrt{2} \quad v=\sqrt{bg\sqrt{2}}$

4.7 - میله سبک با دو گلوله سنگین، به ناگهان با نیروی نشان‌داده $F$ به راه می‌افتد. الف) شتاب گرانیگاه $G$، و ب) شتاب زاویه‌ای میله به گرد $G$، چیست؟

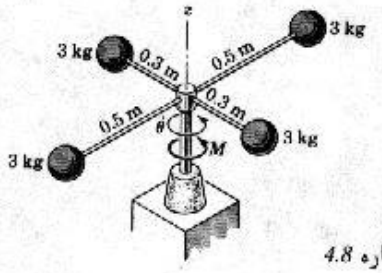
(a): $\sum F_x = m\bar{a}_x \quad F=2m\bar{a} \quad \underline{\bar{a}=F/2m}$

(b): $H_G=2m(L/2)^2\dot{\theta} \quad \dot{H}_G=mL^2\ddot{\theta}/2$

$\sum M_G=\dot{H}_G \quad Fb=mL^2\ddot{\theta}/2 \quad \underline{\ddot{\theta}=2Fb/mL^2}$




نگاره 4.7




نگاره 4.8

*4.8* - چلیپای نشان‌داده، با تندی *20 rad/s* به گرد z در چرخش بود که ناگهان، گشتاور $M=30\ N$ در سوی وارون بر آن نشست. چه زمانی تندی زاویه‌ای چلیپا به *20 rad/s* در سوی *M* خواهد رسید؟

$$\int_0^t M_z dt = H_{z_2} - H_{z_1} \qquad H_z = \sum m_i r_i (r_i \dot{\theta})$$

$$H_z = 2(3)(0.3)^2\dot{\theta} + 2(3)(0.5)^2\dot{\theta} = 2.04\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow 30t = 2.04(20-(-20)) = 81.6 \qquad \underline{t = 2.72\ s}$$

*4.9* - واگنهای نشان‌داده، پس از برخورد، به یکدیگر جفت می‌شود. جرم واگنهای *A* و *B* و *C*، *65* و *50* و *75 Mg* است. تندی آنها پس از جفت‌شدن چیست و چه اندازه انرژی از بین می‌رود؟

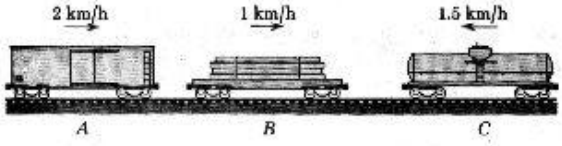
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \Delta G_x = 0$$

$$1000[65(2)+50(1)-75(1.5)] = 1000(65+50+75)v$$

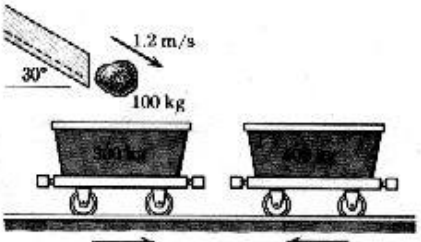
$$\underline{v = 0.355\ km/h}$$

$$(T_i - T_t)/T_i \times 100 = 100(1 - T_t/T_i) =$$

$$= 100(1 - 47.96/957.5) = \underline{95.0\%}$$




نگاره *4.9*




نگاره *4.10* 0.6 m/s 0.3 m/s

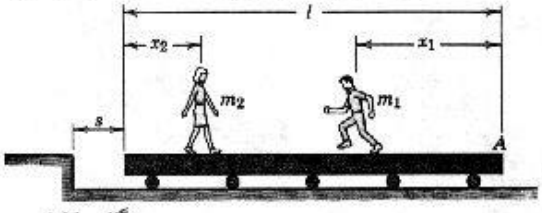
*4.10* - گاریهای نشان‌داده، پس از برخورد، به هم جفت می‌شود. به هنگام برخورد، سنگی به درون گاری دست چپ می‌افتد. تندی واگنها را پس از افتادن سنگ و جفت‌شدن آنها، بیابید. آیا اگر واگنها پیش از افتادن سنگ، جفت شود، تندی پایانی آنها چیز دیگری خواهد شد؟

$$\Delta G_x = 0 \Rightarrow$$

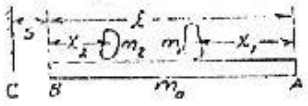
$$[300(0.6)+100(1.2\cos 30)-400(0.3) = (300+400+100)v$$

$$163.923 = 800v \qquad \underline{v = 0.205\ m/s}$$

*4.11* - پیش از راه افتادن مرد و زن، $s=0$ بوده است. هنگامی که آنها به هم می‌رسند، اندازه *s* چگونه از روی $x_1$ پیدا می‌شود؟




نگاره *4.11*



$\sum m_i X_i = \text{const.}$

$m_1 l + m_2(0) + m_o l/2 = m_1(s+l-x_1) + m_2(s+x_2) + m_o(l/2+s)$

$\Rightarrow s = (m_1X_1 - m_2X_2)/(m_o+m_1+m_2)$

$X_2 = l - X_1 \Rightarrow \underline{s = ((m_1+m_2)X_1 - m_2 l)/(m_o+m_1+m_2)}$

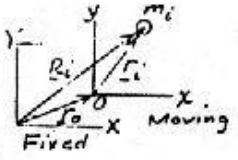
*4.12* - اگر در پرسش پیشین، مرد با تندی $x_1$ بدود و زن با تندی $x_2$ راه رود، $s$ چگونه پیدا می‌شود؟

$\Delta G = 0 \quad 0 = m_o\dot{s} + m_2(\dot{X}_2+\dot{s}) - m_1(\dot{X}_1-\dot{s})$

$\dot{s}(m_o+m_1+m_2) = m_1\dot{X}_1 - m_2\dot{X}_2 \quad \dot{s} = (m_1\dot{X}_1 - m_2\dot{X}_2)/(m_o+m_1+m_2)$

*4.13* - نشان دهید که اندازه حرکت دستگاهی به جرم $m$ در چارچوب لخت، از دستور زیر به دست می‌آید. که در آن، $\vec{G}_{rel}$ اندازه حرکت دستگاه در چارچوبی است که با تندی $\vec{v}_0$ حرکت می‌کند.

$\vec{G} = \vec{G}_{rel} + m\vec{v}_0$




$\dot{\underline{r}}_o = v_o \quad \underline{G} = \sum m_i \dot{\underline{R}}_i \quad \dot{\underline{R}}_i = \dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o \Rightarrow$

$\underline{G} = \sum m_i(\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o) = \sum m_i\dot{\underline{r}}_i + \dot{\underline{r}}_o\sum m_i \Rightarrow \underline{G = G_r + m\underline{v}_o}$

*4.14* - نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای به گرد نقطه ثابت $O$ و گرانیگاه $G$ با دستور زیر به هم می‌پیوندد.

$$\bar{H}_0 = \bar{H}_G + \bar{r}\times\bar{G}$$

که در آن، $\bar{r}$ برداری از $O$ تا $G$، و $\bar{G}$ اندازه حرکت خطی دستگاه است.

$\underline{H}_o = \underline{H}_G + \underline{r}\times\underline{G} \quad \underline{G} = m\underline{v}$

*4.15* - نشان دهید که اندازه حرکتهای زاویه‌ای به گرد نقطه ثابت $O$ و هر نقطه دلخواه $P$ با دستور زیر به یکدیگر می‌پیوندد.

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_P + \vec{r}_P\times\vec{G}$$

که در آن $\vec{r}_P$ برداری از $0$ تا $G$، و $\vec{G}$ اندازه حرکت خطی دستگاه است.

$\underline{H}_o = \sum \underline{r}_i \times m_i\dot{\underline{r}}_i = \sum(\underline{\rho}'_i + \underline{r}_p)\times m_i\dot{\underline{r}}_i = \sum \underline{\rho}'_i \times m_i\dot{\underline{r}}_i + \underline{r}_p \times d(\sum m_i\underline{r}_i)/dt$

$\underline{H}_p = \sum \underline{\rho}'_i \times m_i\dot{\underline{r}}_i \quad d(\sum m_i\underline{r}_i)/dt = d(m\bar{r})/dt = m\bar{v} = \underline{G}$

$\Rightarrow \underline{H_o = H_p + r_p\times G}$

*4.16* - نشان دهید که برآیند گشتاور نیروهای بیرونی به گرد هر نقطه $P$ از دستور زیر به‌دست می‌آید.

$$\Sigma\vec{M}_P = \vec{H}_P + \vec{v}_P\times\vec{G}$$

که در آن، $\vec{H}_P$ اندازه حرکت زاویه‌ای به گرد $P$ از سرعتهای ناب، و $\vec{v}_P$ سرعت $P$ و $\vec{G}$ اندازه حرکت خطی

دستگاه است. سه شرط، برای آنکه این دستور به آرایش ساده $\Sigma\vec{M}_p=\vec{H}_p$ درآید چیست؟

$$\underline{H}_p=\underline{H}_G+\bar{\rho}\times m\bar{\underline{v}} \Rightarrow \dot{\underline{H}}_p=\dot{\underline{H}}_G+\dot{\bar{\rho}}\times m\bar{\underline{v}}+\bar{\rho}\times m\bar{\underline{a}} \quad \bar{\underline{a}}=\dot{\bar{\underline{v}}}$$

$$\dot{\underline{H}}_G=\sum\underline{M}_p-\bar{\rho}\times m\bar{\underline{a}} \Rightarrow \dot{\underline{H}}_p=\sum\underline{M}_p+\dot{\bar{\rho}}\times m\bar{\underline{v}} \quad \bar{\rho}=\underline{r}-\underline{r}_p$$

$$\dot{\bar{\rho}}=\bar{\underline{v}}-\underline{v}_p \quad \dot{\underline{H}}_G=\sum\underline{M}_p+(\bar{\underline{v}}-\underline{v}_p)\times m\bar{\underline{v}} \quad \sum\underline{M}_p=\dot{\underline{H}}_p+\underline{v}_p\times\underline{G}$$

$$\underline{G}=m\bar{\underline{v}} \quad \underline{v}\times\underline{v}=\underline{0} \quad \sum\underline{M}_p=\dot{\underline{H}}_p$$

(a) $\underline{v}_p=\underline{0}$ (b) $\bar{\underline{v}}=\underline{0}$ (c) $\bar{\underline{v}}\,|\,|\,\underline{v}_p$

*4.17* - دو گلوله به میله نشان‌داده چسبانده‌ایم و آن را از یک ریسمان آویخته‌ایم. اگر نیروی $F=60\ N$ به ناگهان بر میله بنشیند، شتاب گرانیگاه و شتاب زاویه‌ای میله چیست؟

$$\sum F_x=ma_x \quad 60=(2+1)\bar{a} \quad \underline{\bar{a}=20\ m/s^2}$$

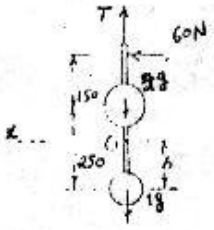
$$\sum M_G=0 \quad 2(9.81)(0.250-b)=1(9.81)b \quad b=0.17\ m$$

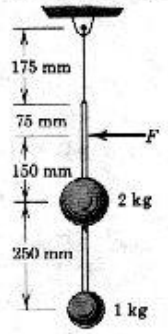
$$H_G=\sum mr^2\dot{\theta}=(2(0.08)^2+1(0.17)^2)\dot{\theta}=$$

$$=0.0417\dot{\theta}\ N.m.s$$

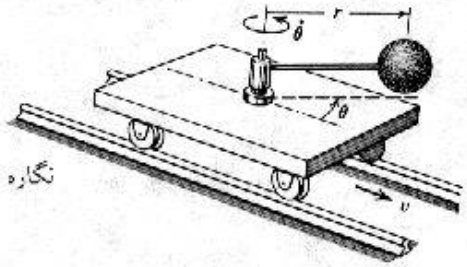
$$\sum M_G=\dot{H}_G \quad 60(0.15+0.08)=0.0417\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}=13.8/0.0417=\underline{331\ rad/s^2}$$




نگاره *4.17*



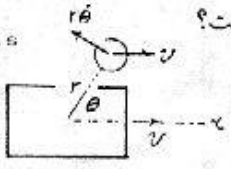

نگاره *4.18*

*4.18* - گاری نشان‌داده، *20* کیلوگرم و گلوله چسبیده به سر میله، *5* کیلوگرم جرم دارد. $r=0.4\ m$ و میله با آهنگ ثابت *4 rad/s* می‌چرخد. اگر در $\theta=0^\circ$ تندی گاری *0.6 m/s* باشد، تندیش پس از $\theta=60^\circ$ چیست؟

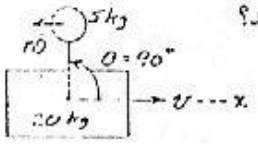
$$\sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \quad (G_x)_{\theta=0}=(20+5)(0.6)=15.0\ N.s$$

$$(G_x)_{\theta=60}=(20+5)v-5(1.6)\sin 60^\circ=25v-6.93\ N.s$$

$$r\dot{\theta}=0.4(4)=1.6\ m/s \quad 15.0=25v-6.93\ ,$$
$$v=21.9/25=\underline{0.88\ m/s}$$



*4.19* - در پرسش پیشین، بیشترین اندازه $v$ چیست و در چه $\theta$ رخ می‌دهد؟




$$G_{\theta=0}=G_{\theta=90^\circ} \quad 15=20v+5v-5(1.6)$$

$$v=23/25=\underline{0.920 \text{ m/s}} \quad \theta=90^\circ$$

*4.20* - تندی قطار نشان‌داده را هنگام رسیدن به راه هموار پایینی پیدا کنید.

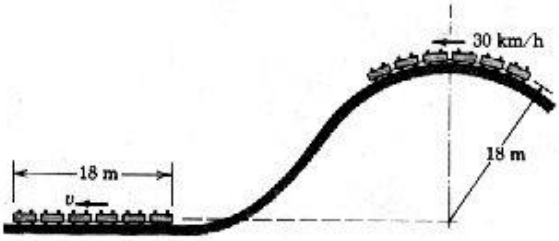
$$\theta=s/2r=18/2(18)=0.5 \text{ rad}=28.65^\circ$$

$$\bar{r}=r\sin\theta/\theta=2(18)\sin 28.65^\circ=17.26 \text{ m}$$

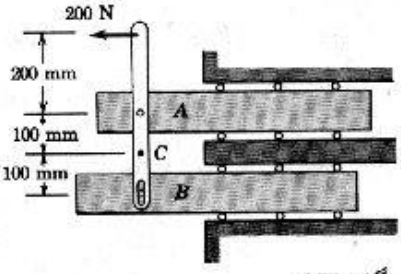
$$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad m(v^2-(30/3.6)^2)-mg(17.26)=0$$

$$v^2=69.4+338.6=408 \text{ (m/s)}^2 \quad v=20.2 \text{ m/s}$$

$$v=20.2(3.6)=\underline{72.7 \text{ km/h}}$$




نگاره *4.20*




نگاره *4.23*

*4.21* - اندازه حرکت زاویه‌ای یک دستگاه 6 ذره‌ای به گرد نقطه ثابت $O$، در $t=4\ s$ چنین است:

$$\vec{H}_4=3.65\hat{i}+4.27\hat{j}-5.36\hat{k} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

این اندازه حرکت، در $t=4.1\ s$ چنین خواهد شد:

$$\vec{H}_{4.1}=3.67\hat{i}+4.3\hat{j}-5.2\hat{k} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

اندازه میانگین برآیند گشتاور نیروهای نشسته براین ذره‌ها را در این گام زمانی بیابید.

$$\sum \underline{M}_o=\dot{\underline{H}}_o \quad \underline{M}_{oav.}=\Delta\underline{H}_o/\Delta t$$

$$\underline{M}_{o_{av.}}=$$

$$=[(3.67-3.65)\underline{i}+(4.30-4.27)\underline{j}+(-5.30+5.36)\underline{k}]/0.1$$

$$=(2\underline{i}+3\underline{j}+6\underline{k})10^{-1} \text{ N.m} \quad \underline{M}_{o_{av.}}=\underline{0.7 \text{ N.m}}$$

*4.22* - جرم ذره‌های $A$ و $B$ و $C$، 2 و 3 و 4 kg است. در یک آن، بردار جایگاه و تندی آنها، چنین است:

$$\vec{r}_A=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_B=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k} \text{ m} \quad \vec{r}_C=\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k} \text{ m}$$

$$\vec{v}_A=\dot{\vec{r}}_A=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k} \text{ m/s} \quad \vec{v}_B=\dot{\vec{r}}_B=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k} \text{ m/s} \quad \vec{v}_C=\dot{\vec{r}}_C=2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k} \text{ m/s}$$

اندازه حرکت زاویه‌ای این دستگاه سه ذره‌ای به گرد مبدا چیست؟

$\underline{r}_A=2\underline{i}+\underline{j}-2\underline{k}$ m  $\underline{v}_A=3\underline{i}+2\underline{j}-2\underline{k}$ m/s  $\underline{r}_B=2\underline{i}+2\underline{j}-\underline{k}$ m

$\underline{v}_B=2\underline{i}+3\underline{j}+\underline{k}$ m/s  $\underline{r}_C=\underline{i}-2\underline{j}-2\underline{k}$ m  $\underline{v}_C=-2\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}$ m/s

$\underline{H}_o=\sum \underline{r}_i\times m\underline{v}_i$  $\underline{r}_A\times m_A\underline{v}_A=4\underline{i}-4\underline{j}+2\underline{k}$ kg.m$^2$/s

$\underline{r}_B\times m_B\underline{v}_B=15\underline{i}-12\underline{j}+6\underline{k}$ kg.m$^2$/s

$\underline{r}_C\times m_C\underline{v}_C=-24\underline{i}+12\underline{j}-24\underline{k}$ kg.m$^2$/s

$\Rightarrow \underline{H}_o=(4+15-24)\underline{i}+(-4-12+12)\underline{j}+$

$+(2+6-24)\underline{k}=-5\underline{i}-4\underline{j}-16\underline{k}$ kgm$^2$/s

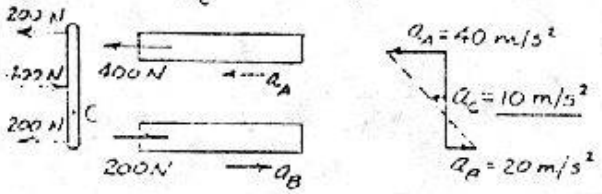
---

*4.23* - تخته‌های $A$ و $B$ هر کدام $10\ kg$ جرم دارد. شتاب نقطه $C$، پس از نشستن نیروی $200\ N$ چیست؟ اصطکاک در کار نیست.

$\sum F=ma_c$  $200=2(10)a_c$  $a_c=10$ m/s$^2$

$\sum F=ma$  $400=10a_A$  $a_A=40$ m/s$^2$  $200=10a_B$  $a_B=20$ m/s$^2$

$a_A=40$ m/s$^2$  $a_c=10$ m/s$^2$  $a_B=20$ m/s$^2$




*4.24* - گاری $7.5\ Mg$ که بر ارابه ایستاده $25\ Mg$ سوار است، از ایست رها می‌شود، هنگامی که گاری به اندازه $s=12\ m$ پایین می‌آید، تندیش پیش از برخورد به دیوار $B$ چیست؟

$\Delta T+\Delta V_g=0$  $\Delta T=mv^2/2-0=25000v^2/2$  $\Delta V_g=0$

$\Delta T=mv^2/2-0=$

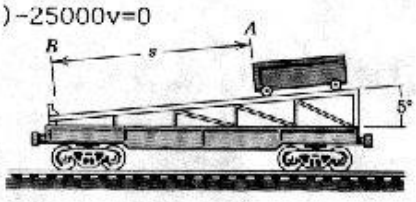
$=(7500/2)[(\dot{s}\cos5^\circ-v)^2+(\dot{s}\sin5^\circ)^2]-0$

$\Delta V_g=-W\Delta h=-7500(9.81)(40\sin5^\circ)$

$\Rightarrow 16250v^2+3750\dot{s}^2-7470\dot{s}v=76949.81$

$\sum F_x=0$  $\Delta G_x=0$  $7500(9.81)(\dot{s}\cos5^\circ-v)-25000v=0$

$\dot{s}=4.35v$ m/s




نگاره *4.24*

$$[16250+70959.4-32494.5]v^2=76949.81$$

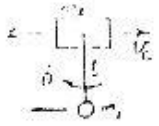
$$v^2=1.4064\ (m/s)^2 \quad \underline{v=1.186\ m/s}$$

*4.25* - میله $m_1$ و گاری $m_2$ را از آرایش $\theta\neq 0$ رها می‌کنیم. تندی میله نسبت به گاری و تندی گاری را در $\theta=0$ بیابید.

$$\Delta E=0 \quad \Delta V_g=-m_1 g l(1-\cos\theta)$$

$$\Delta T=m_1(l\dot\theta-v_c^2)/2+m_2v_c^2/2-m_1gl(1-\cos\theta)=0 \quad (1)$$

$$v_b=l\dot\theta-v_c \quad \sum F_x=0 \Rightarrow \Delta G_x=0 \quad m_2v_c-m_1(l\dot\theta-v_c)=0$$

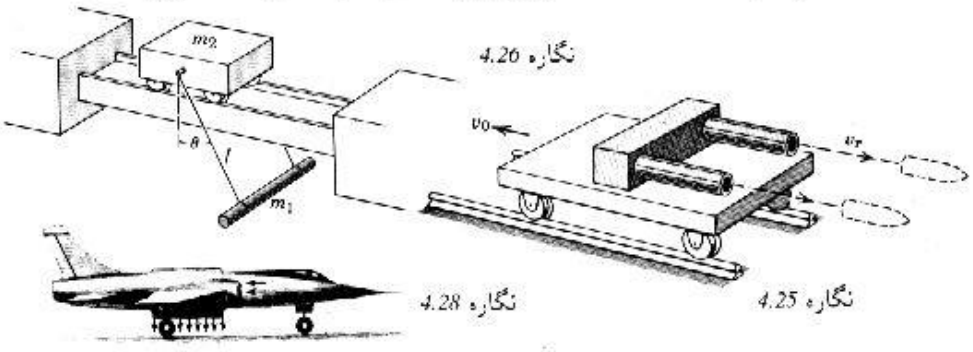


$$m_1(m_2v_c/m_1)^2/2+m_2v_c^2/2=m_1gl(1-\cos\theta)$$

$$v_c^2=2gl(1-\cos\theta)/[(m_2/m_1)^2+(m_2/m_1)]$$

$$v_c=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)/[(m_2/m_1)(1+m_2/m_1)]}$$

$$v_{b/c}=l\dot\theta=v_c(1+m_2/m_1) \quad v_{b/c}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)(1+m_1/m_2)}$$




نگاره 4.26



نگاره 4.28

نگاره 4.25

*4.26* - دو گلوله *10* کیلوگرمی با تندی *1200 m/s* نسبت به گاری *Mg 1* در سوی وارون حرکت گاری، شلیک می‌شود. تندی گاری که پیش از شلیک، *1.2 m/s* بود، پس از شلیک چه می‌شود اگر الف) گلوله‌ها همزمان، ب) یکی پس از دیگری شلیک شود.

$$\Delta G_x=0$$

a): simultanous firing

$$1.2[(1000+2(10)]=1000v'-2(10)(1200-v')$$

$$\underline{v'=24.7\ m/s}$$

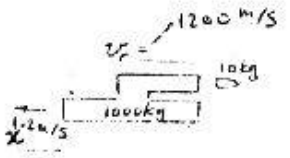
b): sequential firing let $v_1$=vel. of vehicle after 1st projectile is fired

$$(1000+20)(1.2)=1010v_1-10(1200-v_1)$$

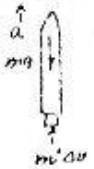
$$1224=1010v_1-12000+10v_1 \quad v_1=12.96\ m/s$$

$$(1000+10)12.96=1000v'-10(1200-v')$$

$$13089.6=1000v'-12000-10v' \quad \underline{v'=24.8\ m/s}$$



*4.27* - جرم آغازین موشک ساترن 5 نزدیک به $2.7\times10^3$ *Mg* بود. هنگام پرتاب، سوخت با آهنگ *13 Mg/s* و با تندی برونریز *2400 m/s* می‌سوخت. شتاب آغازین موشک چه بوده است؟ فشار بیرون از موشک را فشار هوا بگیرید.




$\sum F=ma \quad \sum F=m'\Delta v-mg \Rightarrow$

$13000(2400-0)-2.7(10^6)(9.81)=2.7(10^6)a$

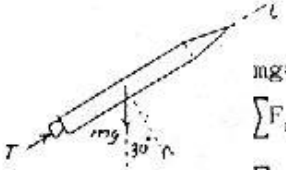
$a=1.746\ m/s^2$

*4.28* - هواپیمای عمود پرواز نشان داده، *7Mg* جرم دارد. هر یک از دو موتور هواپیما، هوا با چگالی $1.217\ kg/m^3$ را با آهنگ *60 kg/s* می‌مکد و آن را با تندی *600 m/s* پس می‌زند. هر موتور، *1 kg/s* سوخت می‌خورد. شتاب آغازین رو به‌بالای هواپیما چیست؟

$m'\Delta v_y=2(60+1)(600-0)=73200\ N$

$\sum F_y=ma_y \quad 73.2-7(9.81)=7a \quad a=0.647\ m/s^2$

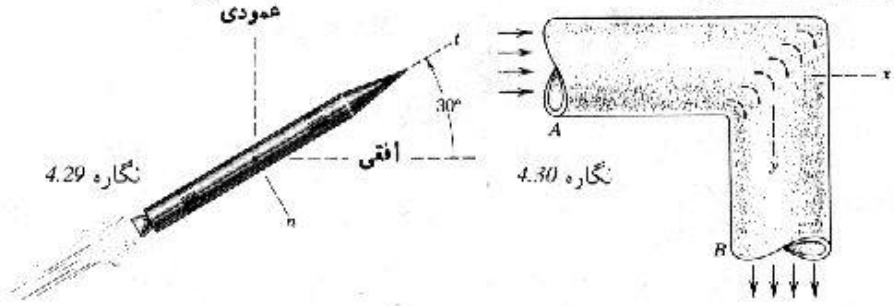
*4.29* - موشک نشان‌داده، *3 Mg* جرم دارد و بیرون از جو، جایی که $g=0.6\ m/s^2$ است، پیش می‌رود. سوخت با آهنگ *130 kg/s* می‌سوزد و با تندی *600 m/s* نسبت به موشک، بیرون می‌زند. سایه‌های *n* و *t* از شتاب موشک چیست؟




$mg=3000(9.60)=28800\ N \quad T=m'\Delta v=130(600)=78000\ N$

$\sum F_n=ma_n \quad 28800\cos30^\circ=3000a_n \quad a_n=8.31\ m/s^2$

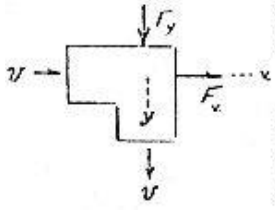
$\sum F_t=ma_t \quad 78000-28800\sin30^\circ=3000a_t \quad a_t=21.2\ m/s^2$




نگاره *4.29*

نگاره *4.30*

*4.30* - لوله نشان‌داده، *3.6 m* قطر دارد و پره‌های درونی آن، گذر هوا را هموار می‌کند. هنگامی که هوا با چگالی $1.206\ kg/m^3$ و با تندی *250 km/h* از این زانویی می‌گذرد، چه نیرویی در سوی *x* و *y* بر زانویی می‌نشاند؟




$\sum F=m'\Delta v \quad m'=\rho Av=$

$=1.206\pi(3.6)^2(250/3.6)/4=852.42\ kg/s$

$F_x=852.42(0-69.44)=-59192.04\ N$

$F_y=852.42(69.44-0)=59192.04\ N$

*4.31* - کامیون نشان‌داده، یک برف‌روب چرخان دارد و با تندی *20km/h* پیش می‌رود. برف‌روب در هر دقیقه *60 Mg* برف را با تندی *12 m/s* فوت می‌کند. نیروی کششی *P* و نیروی پهلویی *R* بین چرخها و جاده چیست؟

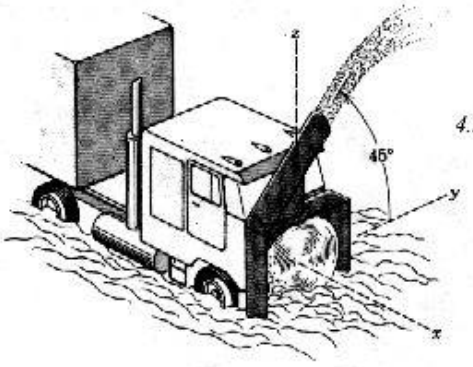
$\sum F_x = m' \Delta v_x \quad P = 60000(20/3.6 - 0)/60 = 5556 \text{ N} \quad \underline{P = 5.56 \text{ KN}}$

$\sum F_y = m' \Delta v_y \quad R = 60000(12\cos 45^\circ - 0) = 8485 \text{ N} \quad \underline{R = 8.49 \text{ KN}}$

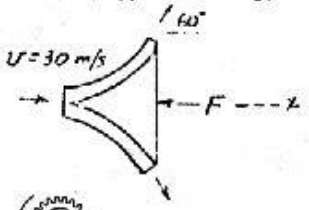
*4.32* - آب با چگالی $1000\ kg/m^3$ و با تندی *30 m/s* و آهنگ $0.05\ m^3/s$ به پره نشان‌داده می‌خورد. نیروی *F* برای نگهداری پره چیست؟

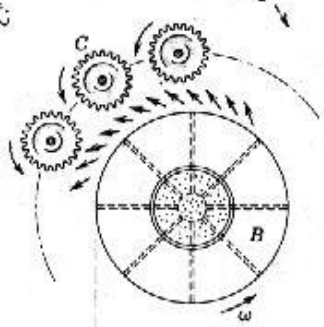
$m' = \rho Q = 1000(0.05) = 50 \text{ kg/s}$

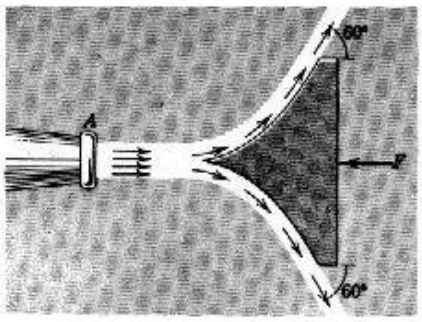
$\sum F_x = m' \Delta v_x \quad -F = 50(30\cos 60^\circ - 30) \quad \underline{F = 750 \text{ N}}$



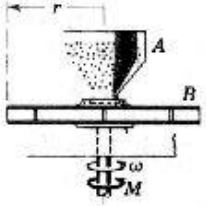

نگاره *4.31*




نگاره *4.32*




نگاره *4.33*

*4.33* - ساچمه‌ها از مخزن *A* به مرکز پروانه چرخان *B* می‌ریزد. پروانه با چرخش خود، افشانه‌ای از ساچمه می‌سازد که به چرخدنده‌های چرخان *C* می‌خورد. اگر در هر ثانیه، *m* کیلوگرم ساچمه پرتاب شود و تندی چرخش پروانه، *ω* باشد، گشتاور *M* برای چرخاندن پروانه چیست؟

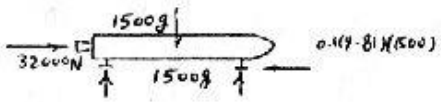
$\sum M = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) = m(r\omega)r - 0 \quad \underline{M = mr^2\omega}$

*4.34* - یک موشک *1500* کیلوگرمی با چهار موتور خود که هر یک، رانش *8 kN* می‌سازد، پیش‌می‌رود. نیروی اصطکاک هوا، *10* درصد نیروی وزن آن است. گازهای برونریز، با تندی *480 m/s* از شیپوره‌ها بیرون می‌زند. شتاب آغازین و آهنگ مصرف سوخت چیست؟

$4x8000=32000$ N

$\Sigma F=ma \quad 32000-0.1(9.81)(1500)=1500a \quad \underline{a=20.4\ m/s^2}$

$F=m'\Delta v \quad 8000=m'(480-0) \quad \underline{m'=16.67\ kg/s}$

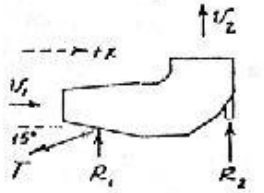



*4.35* - لوله خمیده‌ای که می‌بینید، صداگیر هواپیمای جت است. موتور هواپیما، هوا را با آهنگ *43 kg/s* می‌مکد و سوخت را با آهنگ *0.8 kg/s* می‌سوزاند. گاز برونریز با تندی *720 m/s* بیرون می‌زند. کشش ریسمان *A* چیست؟

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad -T\cos 15^\circ=(43+0.8)(0-720)$

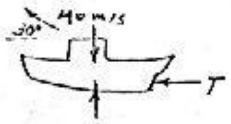
$T=32600$ N $\quad \underline{T=32.6\ KN}$

نگاره *4.35*




*4.36* - کشتی آتش‌نشانی، آب دریا با چگالی *1030 kg/m³* را با تندی *40 m/s* و آهنگ *0.08 m³/s* رو به‌عقب می‌پاشد. نیروی پیشران کشتی چه باشد تا از جا تکان نخورد؟

نگاره *4.36*




$m'=(0.08\ m^3/s)(1030\ kg/m^3)=82.4\ kg/s$

$\sum F=m'\Delta v \quad T=82.4(40\cos 30^\circ-0) \quad \underline{T=2.85\ kN}$

*4.37* - هواپیمای نشان‌داده، *4.6 Mg* جرم دارد و در برابر نیروی اصطکاک *32 kN* با تندی *1000 km/h* پیش می‌رود. هوا با آهنگ *106 kg/s* به درون موتورها می‌رود و پس از سوزاندن سوخت با آهنگ *0.98 kg/s* با تندی *680 m/s*، از پشت هواپیما به بیرون می‌زند. زاویه حمله $\alpha$ چه باشد تا ارتفاع هواپیما پایا بماند؟

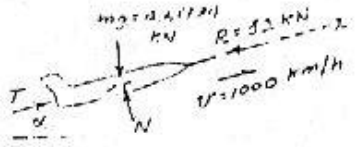
$mg=4.6(9.81)$ KN

$T=m'_a(u-v)+m'_f u=106(680-1000/3.6)+0.98(680)=43302$ N

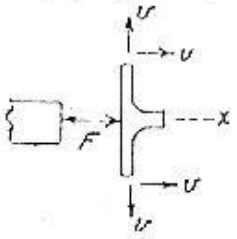
$\sum F_x=ma_x=0 \quad 43.3-32-4.6(9.81)\sin\alpha=0$

$\sin\alpha=0.2505 \quad \underline{\alpha=14.50^\circ}$

نگاره *4.37*

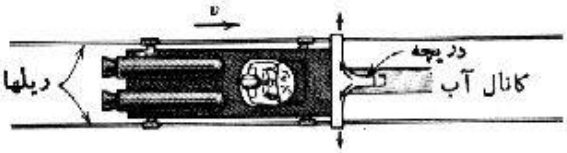


*4.38* - ارابه موشکی نشان‌داده با تندی *300 m/s* پیش می‌رود. برای ترمز گرفتن، دریچه‌ای را به درون آب می‌فرستد تا آب با چگالی $1000\ kg/m^3$ از دریچه $10^{-2}\ m^2$ به درون راهگاه بیاید و به دو سوی ارابه بپاشد. نیروی ترمز در آغاز چیست؟



$v=300\ m/s \quad m'=\rho Av=1000(10^{-2})(300)=3000\ kg/s$

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad F=3000(300-0)=90(10^4)\ N \quad \underline{F=900\ kN}$



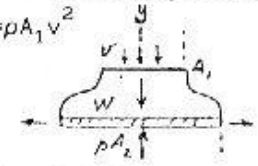

نگاره *4.38*

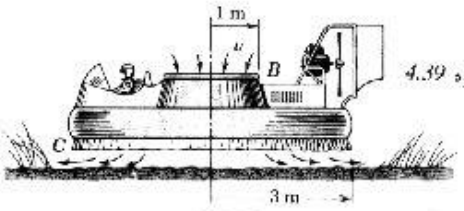
*4.39* - جرم هاورکرافت نشان‌داده، *2.2 Mg* است. این خودرو، هوا را از دریچه *B* می‌مکد و از دامن *C* بیرون می‌دهد. تندی هوای درونریز، *45 m/s* و قطر دامن، *6 m* و چگالی هوا، $1.206 kg/m^3$ است. فشار هوا در زیر دامن *C* چیست؟

$\sum F_y=m'\Delta v_y \ ; \ m'=\rho A_1 v \quad \Delta v_y=0-(-v)=v \quad PA_2-w=\rho A_1 v^2$

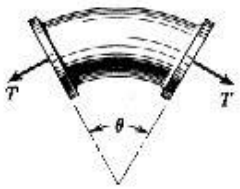
$P(6^2)(\pi/4)-2200(9.81)=1.206(45^2)(\pi)(2^2/4)$

$\underline{P=1.034\ kPa}$

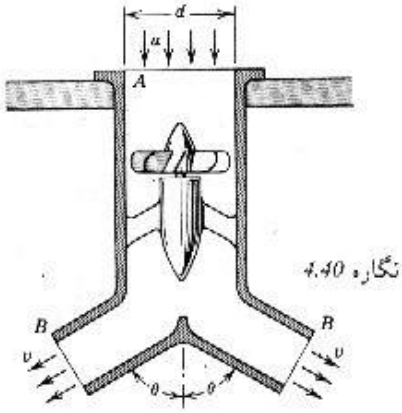



نگاره *4.39*

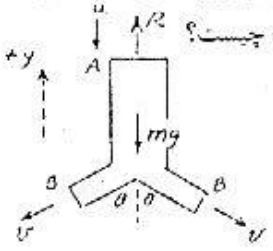



نگاره *4.42*




نگاره *4.40*

*4.40* - دمنده نشان‌داده، هوا با چگالی $\rho$ را با تندی *u* از دریچه *A* می‌مکد و از دریچه‌های *B* با تندی *v* می‌دهد. فشار هوا در بیرون دریچه‌ها، فشار جو است. نیروی تکیه‌گاه دمنده چیست؟

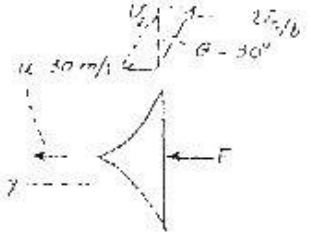



$m'=\rho Av \quad \Delta v_y=-v\cos\theta-(-u)=u-v\cos\theta \quad \sum F_y=m'\Delta v_y$

$m'=\rho u(\pi d^2/4) \quad R-mg=\rho u(\pi d^2/4)(u-v\cos\theta)$

$\underline{R=mg+\rho u(\pi d^2/4)(u-v\cos\theta)}$

۴.۴۱ در پرسش ۴.۳۲، نیروی $F$ چه باشد تا پره با تندی $30\ m/s$ به چپ حرکت کند؟ توان این کار چه اندازه است؟



$$v_{B/A}=30+30=60\ m/s \qquad \sum F_x=m'\Delta v_x$$

$$m'=(30+30)(0.05)(1000)/30=100\ kg/s$$

$$F=100(0-(-30))=3000\ N=3\ kN$$

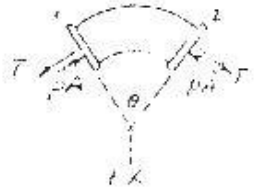
$$P=Fu=3000(30)=9(10^4)\ W \qquad \underline{P=90\ kW}$$

۴.۴۲ زانویی نشان‌داده، با دو نیروی کششی $T$ (از لوله‌های نشان نداده) نگهداری می‌شود. اگر مایعی به جگالی $\rho$ و فشار استاتیکی $P$ با تندی $v$ از این لوله به سطح بگذرد، نشان دهید که $T$ به $\theta$ بستگی ندارد.

$$\Delta v=2v\sin(\theta/2) \quad \text{where } v=v_1=v_2 \qquad \sum F_x=m'\Delta v_x$$

$$2T\sin(\theta/2)-2PA\sin(\theta/2)=\rho Av(2v\sin(\theta/2))$$

$$T=PA-\rho Av^2 \qquad \underline{T=A(P+\rho v^2)}$$



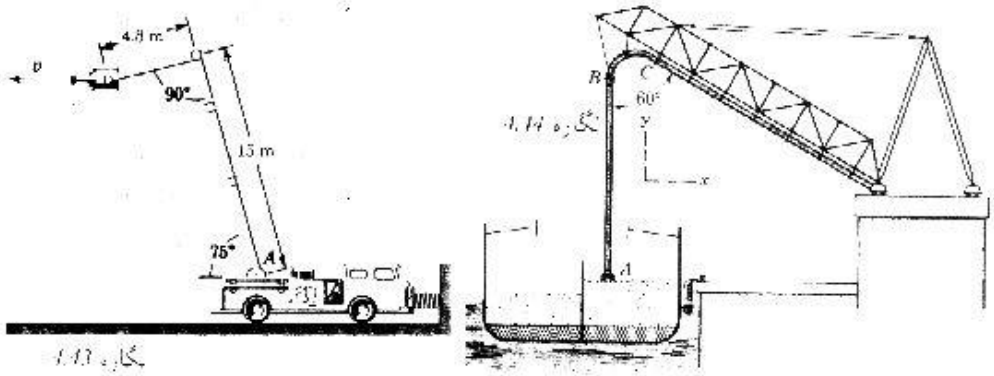
۴.۴۳ آزمایش یک خودروی آتش‌نشانی را می‌بینید. هنگامی که آب با تندی $v$ از شیپوره‌ای به قطر $30\ mm$ بیرون می‌زند، خودرو فنری به سختی $k=15\ kN/m$ را $150\ mm$ می‌فشرد. اندازه $v$ چیست؟ اگر بیوند $A$ چه گشاوری باید نگهداری شود؟

$$Kx=m'\Delta v_m=\rho Av-1000v\pi(0.030)^2/4=0.7069v$$

$$15000(0.150)=0.7069v(v-0) \qquad v^2=3183 \qquad \underline{v=56.4\ m/s}$$

$$\sum M_A=m'vd \qquad M=15(150)(15\sin 75^\circ+4.8\cos 75^\circ)=$$

$$=2250(13.25)=29800\ N.m \qquad \underline{M=29.8\ kN.m}$$



۴.۴۳ نگاره

۴.۴۴ چگونگی تخلیه گندم از کشتی به بارو مکنده را می‌بینید. برآمد نیرو بر زانویی در سوی $x$ و $y$ چیست؟ هوا در لوله‌ای به قطر $350\ mm$ با آهنگ $16\ Mg/h$ با مکش $230\ mm$ جیوه ($P=-30.7\ kPa$)

می‌گذرد و در هر ساعت 135 Mg گندم را با تندی 40 m/s با خود می‌برد.

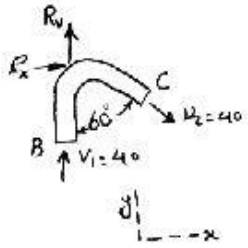
$\dot{m}_{air}=16000/3600=4.44$ kg/s

$\dot{m}_{Wh}=135000/3600=37.5$ kg/s

$\sum F=\dot{m}\Delta v \quad R_x=(4.44+37.5)(40\sin 60^\circ-0)=1452.8$ N

$R_y=(4.44+37.5)(-40\cos 60-40)=2516.4$ N

$PA=30700\pi(0.35)^2/4=2953.4$ N



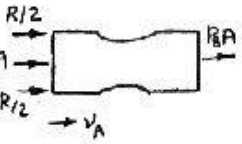

*4.45* - دمنده نشان‌داده، هوا با چگالی $\rho_A$ و فشار $P_A$ را از $A$ می‌مکد و از $B$ با چگالی $\rho_B$ و فشار $P_B$ و تندی $v$ بیرون می‌دهد. برآیند نیروهای افقی در نگهدارنده $A$ چیست؟

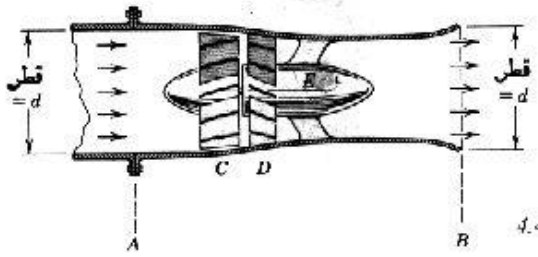
$\rho_A A v_A=\rho_B A v \quad v_A=v\rho_B/\rho_A \quad \dot{m}=\rho A v=\rho_B A v$

$\sum F=\dot{m}\Delta v \quad R+P_A A-P_B A=\rho_B A v(v-v_A)=\rho_B A v^2(1-\rho_B/\rho_A)$

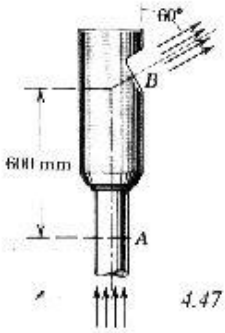
$A=\pi d^2/4 \quad R=\rho_B(\pi d^2/4)v^2(1-\rho_B/\rho_A)+(P_B-P_A)(\pi d^2/4)$

$R=\pi d^2/4(\rho_B(1-\rho_B/\rho_A)v^2+(P_B-P_A))$




نگاره 4.45




نگاره 4.47

*4.46* - یک جت چندپره‌ای چون نگاره *4.59*، مانند توربین نگاره *4.60* کار می‌کند. بیشترین توان $P$ برای هر زاویه تیغه چیست؟ تندی بهینه پره‌ها، بر حسب تندی جت برای توان بیشینه چیست؟ پرسش نمونه *4.6* را با بیشمار گرفتن تعداد پره‌ها به گونه‌ای که آهنگ ترک سیال برابر آهنگ آن به هنگام گذر از پره‌ها باشد پاسخ‌یابی کنید.

$\Delta v_x=-(v-u)(1-\cos\theta) \quad \dot{m}=\rho A v \quad \sum F_x=\dot{m}\Delta v_x$

$-F_{av}=\rho A v[-(v-u)(1-\cos\theta)]$

$P=F_{av}u=\rho A v u(v-u)(1-\cos\theta)$

$dp/du=\rho A(1-\cos\theta)(v^2-2vu)=0$

$u=v/2 \quad P=\rho A v^3(1-\cos\theta)/4$

*4.47* - هوا با آهنگ 6 kg/s و فشار 1400 kPa از $A$ به درون لوله می‌رود و با فشار جو، از $B$ بیرون می‌زند. تندی هوا در $A$، 45 m/s و در $B$، 360 m/s است. نیروی کششی $T$ و نیروی برشی $V$ و لنگر خمشی $M$ در

لوله راه در نقطه $A$ بیابید. سطح لوله در $A$ $7500\ mm^2$ است.

$\dot{m}=6\ kg/s$

$P_A=1400000(0.0075)=10500\ N$ $\quad \sum F_x=\dot{m}\Delta v_x$

$Q=6(360\cos 30^\circ-0)$ $\quad Q=1871\ N$

$\sum F_y=\dot{m}\Delta v_y$ $\quad 10500-T=6(360\sin 30^\circ-45)-150)$

$T=9690\ N$

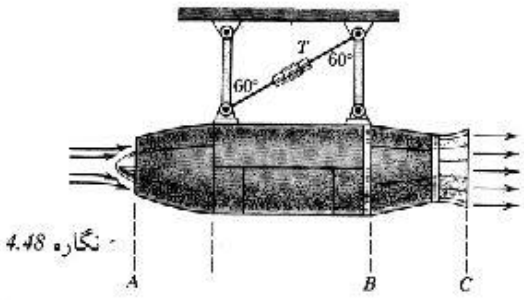
$\sum M_A=\dot{m}(v_2d_2-v_1d_1)$ $\quad M=6[(360)(0.6)\cos 30-0]$

$M=1122\ N.m$

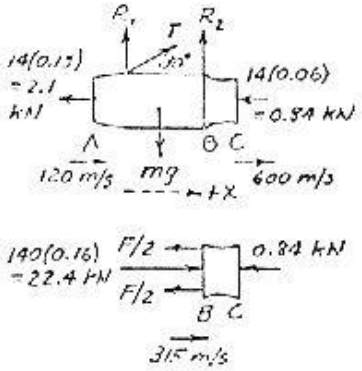
*4.48* - یک دستگاه آزمایش موتور جت را می‌بینید. هوا با آهنگ *30 kg/s* به درون موتور می‌رود و سوخت را با آهنگ *0.6 kg/s* می‌سوزاند. مساحت و فشار استاتیکی و تندی هوای گذرنده در نقطه‌های $A$ و $B$ و $C$ چنین است:

| مقطع $C$ | مقطع $B$ | مقطع $A$ | |
|---|---|---|---|
| 0.06 | 0.16 | 0.15 | مساحت $m^2$ |
| 14 | 140 | -14 | فشار $kPa$ |
| 600 | 315 | 120 | تندی هوا $m/s$ |

نیروی کششی $T$ و نیرو در نگه‌دارنده‌های موتور چیست؟




نگاره 4.48




$\sum F_x=\dot{m}\Delta v_x$

$-2.1-0.84+T\cos 30^\circ=[30.6(600)-30(120)]10^{-3}$

$T=20.4\ kN$

$\sum F_x=\dot{m}\Delta v_x$ $\quad 22.4-0.84-F=30.6(600-315)$ $\quad F=12.84\ kN$

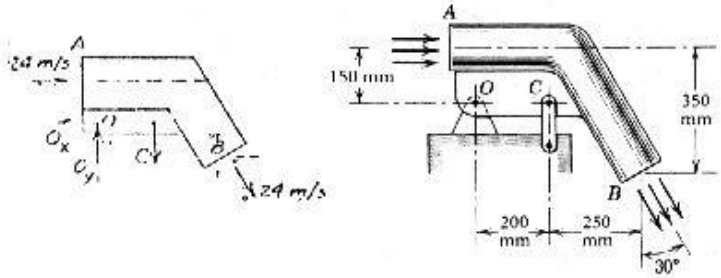
*4.49* - زانویی $AB$ با لولای $O$ و $C$ نگهداری می‌شود. آب تازه با چگالی $1000\ kg/m^3$ و تندی $24\ m/s$ از $A$ به درون زانویی می‌رود و با همان تندی، از $B$ بیرون می‌رود. اگر آهنگ جریان $0.2\ m^3/s$ باشد چه نیرویی بر میله $C$ می‌نشیند.

$\rho=1000\ kg/m^3 \quad Q=0.20\ m^3/s$

$m'=\rho Q=1000(0.20)=200\ kg/s \quad \sum M_o=m'(v_2d_2-v_1d_1)$

$0.200C=200(0.450\times24\cos30^\circ-0.200\times24\sin30^\circ-0.150\times24)$

$0.200C=200(3350) \quad C=3350\ N \quad \underline{C=3.35\ kN}$



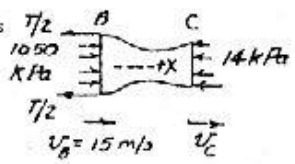

نگاره *4.49*

*4.50* - هوا با تندی $15\ m/s$ از $A$ به درون شیپوره نشان‌داده، می‌رود. چگالی هوا و فشار استاتیکی در $B$ $13.5\ kg/m^3$ و $1050\ kPa$، و در $C$، $1.217\ kg/m^3$ و $14\ kPa$ است. چه نیرویی بر پیچهای نگهدارنده $B$ می‌نشیند.

$A_c=\pi(0.1)^2/4=0.00785\ m^2 \quad A_B=4A_c=0.0314\ m^2$

$m'=\rho Av \quad m'_B=13.5(0.0314)(15)=6.36\ kg/s$

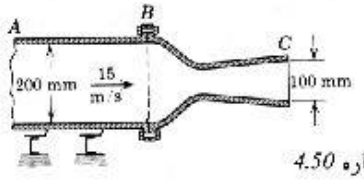
$m'_B=m'_c=\rho_c A_c v_c \quad 6.36=1.217(0.00785)v_c \quad v_c=666\ m/s$



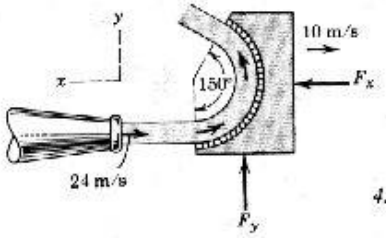

$\sum F_x=m'\Delta v_x$

$-T+1050(0.0314)-14(0.00785)=6.36(666-15)/10^3$

$\underline{T=28.7\ kN}$

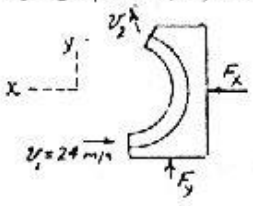



نگاره *4.50*




نگاره *4.51*

*4.51* - پره نشان‌داده با تندی $10\ m/s$ از برابر افشانه آب، می‌گریزد. نیروی $F_x$ و $F_y$ برای انجام این حرکت چیست؟

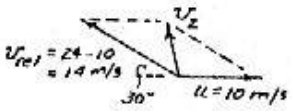



$v_{2x}=14\cos30^\circ-10=2.12\ m/s \quad v_{2y}=14\sin30^\circ=7\ m/s$

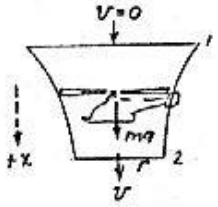
$m'=\rho Av_{rel}=1000\pi(0.025)^2(14)/4=6.87\ kg/s$

$\sum F_x=m'\Delta v_x \quad F_x=6.87(2.12-[-24])=\underline{179.5\ N}$

$$\sum F_y = m' \Delta v_y \quad F_y = 6.87(7-0) = 48.1 \text{ N}$$



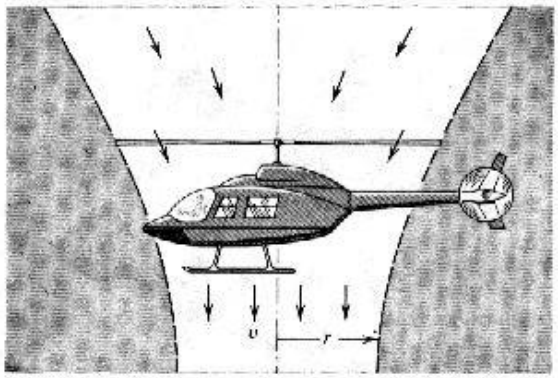

*4.52* - چرخبال نشان‌داده به جرم $m$ با خرکتی که به هوا می‌دهد، در هوا می‌ایستد. تندی هوای $v$ را در جایی از زیر ملخ که شعاع جریان هوا، $r$ و فشار هوا، $1\ atm$ است، بیابید. توان موتور چیست؟ از اصطکاک هوا و تغییر چگالی و افزایش دما چشم بپوشید.



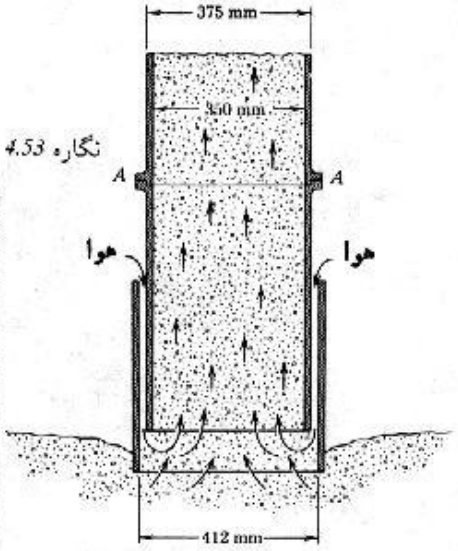

$$\sum F_x = m' \Delta v_x \quad mg = \rho \pi r^2 v(v-0) \quad v = (1/r)\sqrt{mg/\pi\rho}$$

$$P = m'(v_2^2 - v_1^2)/2 = m' v^2/2 = mgv/2 = (mg/2r)\sqrt{mg/\pi\rho}$$

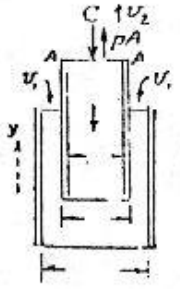
نگاره *4.52*




نگاره *4.53*




*4.53* - نوک لوله مکش برای تخلیه گندم پرسش *4.44* را می‌بینید. فشار مکش، *230 mmHg(P=-30.7 kPa)* و فشار در کف لوله بیرونی، *P=0* است. چگالی هوای گذرنده از لای دو لوله $1.206\ kg/m^3$ است و با آهنگ *16 Mg/h* در هر ساعت *135 Mg* گندم را با تندی *40 m/s* بالا می‌کشد. اگر جرم لوله در زیر مقطع *A* *30 kg* باشد، چه نیرویی در آن مقطع پدید می‌آید؟




$$v_2 = 40 \text{ m/s}$$

$$A_{air)in} = \pi(0.412^2 - 0.375^2)/4 = 0.023 \text{ m}^2$$

$$A_{air)out} = \pi(0.350)^2/4 = 0.096 \text{ m}^2$$

$$PA = -(-30700)(0.096) = 2947.2 \text{ N}$$

$$m'_{air} = 16000/3600 = 4.44 \text{ kg/s}$$

$\dot{m}_{Wh}=135000/3600=37.5$ kg/s

$v_1=\dot{m}_{air}/\rho A=4.44/(1.206\times0.023)=160.07$ m/s

$\sum F_y=\dot{m}\,\Delta v_y$

$-C-30(9.81)+2947.2=4.44[40-(-160.07)]+37.5(40)=$

$=2388.31$ $\quad C=264.6$ N

*4.54* - هواپیما با برگرداندن گازهای خروجی موتور، ترمز می‌گیرد. تندی هواپیما را *250 km/h* و آهنگ مکش هوا را *40 kg/s* و آهنگ مصرف سوخت را *0.6 kg/s* و تندی بیرون زدن گاز از موتور را *600 m/s* بگیرید و بگویید نیروی ترمز، چه کسری از نیروی رانش است؟

$v=250/3.6=69.4$ m/s

with reversers:

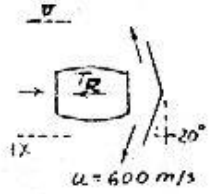
$T_R=\dot{m}_g' u\sin20^\circ+\dot{m}_a' v$

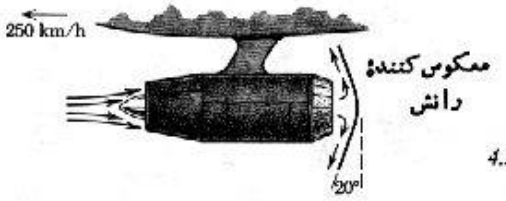
$T_R=(40+0.6)(600)(0.3420)+40(69.4)=11100$ N

without reverses:

$T=\dot{m}_g' u-\dot{m}_a' v$ $\quad T=(40+0.6)(600)-40(69.4)=21600$ N

$n=T_R/T=11100/21600=0.515$

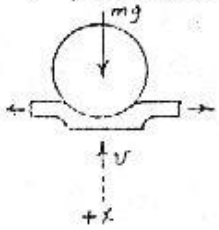



نگاره *4.54*

نگاره *4.55*

*4.55* - آب‌فشان نشان‌داده، آب را با چگالی $\rho$ و تندی $u$ از قطر $d$ بیرون می‌راند و توپی به جرم $m$ را نگه می‌دارد. بلندی $h$ چیست؟




$u^2-v^2=2gh$ $\quad v=\sqrt{u^2-2gh}$

$\sum F_x=\dot{m}\,\Delta v_x$ $\quad mg=\rho u(\pi d^2/4)(0-(-\sqrt{u^2-2gh}))$

$h=u^2/2g-8g(m/\rho\pi u d^2)^2$

*4.56* - فشار آب در مقطع $B$ از شیر آب آتش‌نشانی نگاره *4.56*، *800 kpa* و چگالی آب، *1000 kg/m³* و مساحت $6.8(10^{-4})$ است. آب با آهنگ *0.28 m³/s* از دو لوله، هر یک به اندازه *3800 mm²* بیرون می‌ریزد. نیروی کششی $T$ و نیروی برشی $V$ و لنگر خمشی $M$ در پایه $B$ چیست؟

$v=V/A=(0.28/2)/0.0038=36.84$ m/s

for each outlet

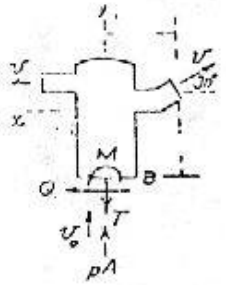
$m' = 0.14(1000) = 140$ kg/s

$v_0 = 0.28/0.068 = 4.12$ m/s $\quad \sum F_y = m' \Delta v_y$

$-T + 800000(0.068) = 140[(0-4.12) + (36.84\sin 30^\circ - 4.12)]$

$T = 52974$ N $\quad \sum F_x = m' \Delta v_x$

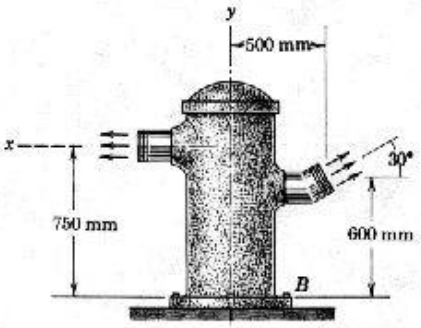
$V = 140(36.84-0) + 140(-36.84\cos 30^\circ - 0) = 691$ N



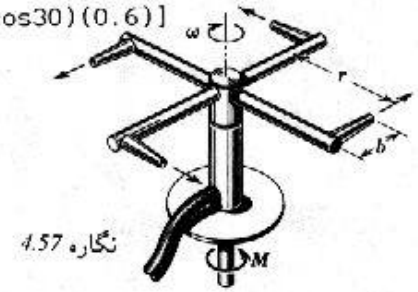

$\sum M_B = \sum m' vd$

$M = [140(36.84)(0.74)] - [140(36.84)\cos 30)(0.6)] + [140(36.84\sin 30)(0.5)]$

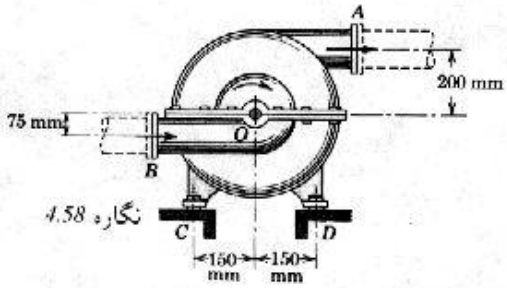
$M = 3868 - 2680 + 1289 = 2477$ N.m




نگاره 4.56

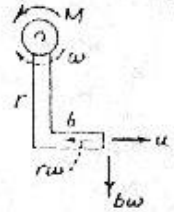



نگاره 4.57




نگاره 4.58

*4.57* - آب‌پاش نشان‌داده، آب را با آهنگ حجمی $Q$ می‌پاشد و با تندی پایای $\omega$ می‌چرخد. دهانه هر شیپوره را $A$ بگیرید و گشتاور $M$ را که بر پایه می‌نشیند به‌دست‌آورید. آیا سرعتی هست که در آن، $M$ صفر گردد؟

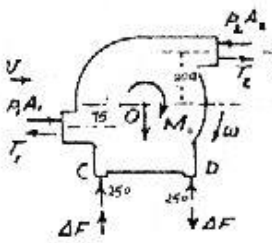



$\sum M = m' (v_2 d_2 - v_1 d_1) \quad u = v_{water/nozzel} = Q/4A$

$m' = \rho Q \quad -M = \rho Q(r^2\omega + b^2\omega - Qr/4A - 0)$

$M = \rho Q(Qr/4A - (r^2+b^2)\omega) \quad M=0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = Qr/(4A(r^2+b^2))$

*4.58* - تلمبه گریزازمرکز نشان‌داده، در هر دقیقه $20\ m^3$ آب تازه را با تندی $18\ m/s$ از $B$ می‌مکد و از $A$ بیرون می‌دهد. پروانه تلمبه با توان $40\ kW$ و تندی $900\ rev/min$ می‌چرخد. هنگامی که تلمبه کار نمی‌کند، نیروی واکنش در $C$ و در $D$، $250\ N$ است. این نیروها به هنگام کار، چیست؟ نیروی کششی در




$A$ و در $B$ با نیروی پدید آمده از فشار استاتیکی آب، برابر است.

$P=M\omega \quad M=40\times10^3/(900\times\pi/30)=424.4$ N.m

$\sum M_o=0 \quad -m'(v_2d_2+v_1d_1)+424.4+\Delta F(0.15+0.15)=0$

$(20\times1000/60)(18\times0.2+18\times0.075)-424.4+0.3\Delta F=0$

$\Delta F=4086$ N $\quad C=\Delta F+250=4336$ N

$D=\Delta F-250=3836$ N

*4.59* - پره $A$ از دستگاه نشان‌داده، ایستاده است و پروانه $B$ با شعاع *375 mm* می‌چرخد، فرآورده‌های سوخت، از میان پره‌های $A$ می‌گذرد و با زاویه $20°$ به پروانه $B$ می‌خورد. اگر گاز با آهنگ *15 kg/s* از پروانه بگذرد، توان توربین چیست؟

$v_G/315=\sin110°/\sin45° \quad v_G=434$ m/s

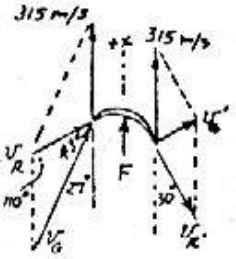
$v_R/315=\sin27°/\sin43° \quad v_R=210$ m/s

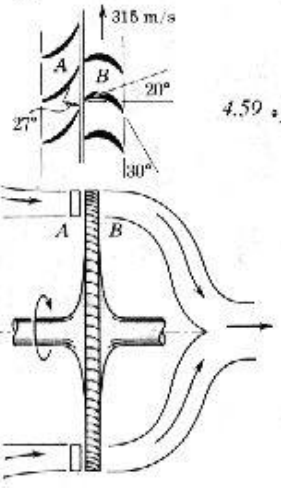
Exit: $v'_R=v_R \quad v'_{Gx}=315-210\cos30°=133.4$ m/s

$|\Delta v_x|=434\cos27°-133.4=253$ m/s $\quad \sum F_x=m'\Delta v_x$

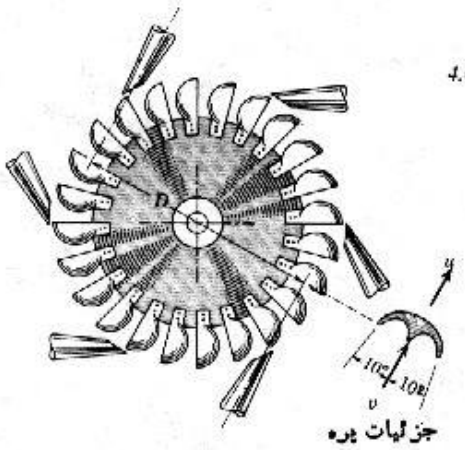
$\sum F_{\text{all blades}}=15(253)=3800$ N $\quad F=3.8$ kN

$P=\sum Fv \quad P=3800(315)=1.197$ MW




نگاره *4.59*




جزئیات پره

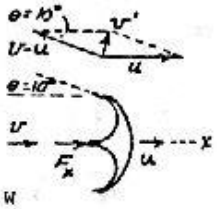
نگاره *4.60*

*4.60* - در نگاره *4.60*، یکی توربین آبی را می‌بیند. آب با فشار استاتیکی *300 m* از شیپورها بیرون می‌زند و چرخ توربین را با *270 rev/min* می‌چرخاند و توان *22000 kW* پدید می‌آورد. بازده مولد برق، *0.9* و بازده تبدیل انرژی جنبشی آب به انرژی مکانیکی، *0.85* است. اگر تندی لبه پروانه، *0.47* تندی آب باشد، اندازه $d$ قطر شیپوره و $D$ قطر پروانه را به‌دست‌آورید.

$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2(9.81)(300)}=76.7$ m/s  $u=0.47v=36.1$ m/s

$\Delta v_x=[u-(v-u)\cos\theta]-v=(v-u)(1+\cos\theta)$

$\Delta v_x=-80.7$ m/s




$\sum F_x=m'\Delta v_x$  $F_x=1000(76.7A)(-80.7)=6.19(10^6)A$ N

A=Jet area $m^2$

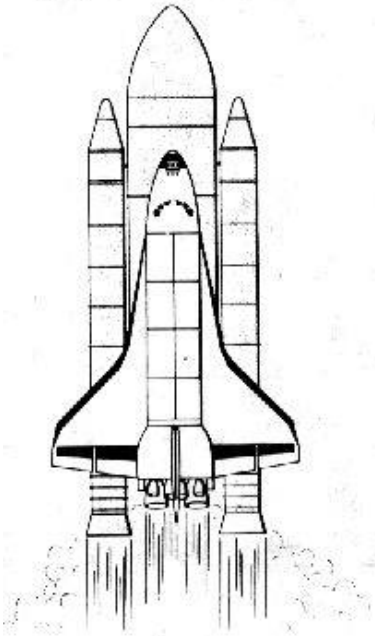
Theory: $P=6F_v u=6(6.19)(10^6)A(36.1)=1.34A(10^7)$ W

$\text{Actual/Theory}=22(10^6)/1.340A(10^9)=0.90(0.85)$

$A=0.0215\ m^2 \Rightarrow \pi d^2/4=0.0215$  $\underline{d=0.165.3\ mm}$  $u=D\omega/2$

$D=2u/\omega=2(36.1)/(270x2\pi/60)=\underline{2.55\ m}$

*4.61* - شاتل فضایی، به‌هنگام برخاست، $2.04\times10^3 Mg$ جرم دارد. هر یک از دو موشک کناری، $11.8\times10^3$ kN نیروی رانش، و هر یک از سه موتور موشک میانی، *2000 kN* نیرو می‌سازد. تکان ویژه (نسبت تندی گاز برونریز به شتاب گرانش) برای هر موتور از موشک میانی، *455 s* است. اندازه شتاب عمودی شاتل، هنگامی که همه موشکها کار می‌کند چیست؟ آهنگ مصرف سوخت هر موتور موشک میانی چیست؟



نگاره *4.61*

$W=2.04(10^6)9.81=20.01$ MN

$P_1=11.8$ MN

$P_2=2$ MN

$I=u/g$

$u=455(9.81)=4463.55$ m/s

$\sum F_y=ma_y$

$3(11.8)+2(2)-20.01=$

$=2.04a$  $\underline{a=9.505\ m/s^2}$

$P_1=\omega' u/g$

$11.8(10^6)=\omega'(4463.55)$

$\underline{\omega'=2643\ kg/s}$

4.62 - کامیون خیابان‌شو، 10 Mg جرم دارد. کامیون با شتاب $0.6\ m/s^2$ به راه می‌افتد و در هر ثانیه، 40 kg آب را با تندی 20 m/s از شیپوره پشتی، بر زمین می‌پاشد. اندازه نیروی پیشران، بین جاده و چرخها، هنگامی که الف) شیر باز است و ب) شیر بسته است، چیست؟

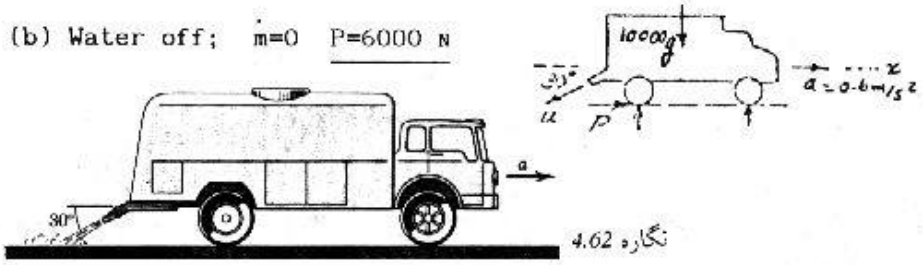
$\sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u \quad u=20\ m/s \quad \dot{m}=-40\ kg/s$

$m=10000\ kg$

(a) Water on;

$P=10000(0.6)-40(20)\cos 30^\circ=6000-692.82=5307.2\ N$

(b) Water off; $\dot{m}=0$ $P=6000\ N$




نگاره 4.62

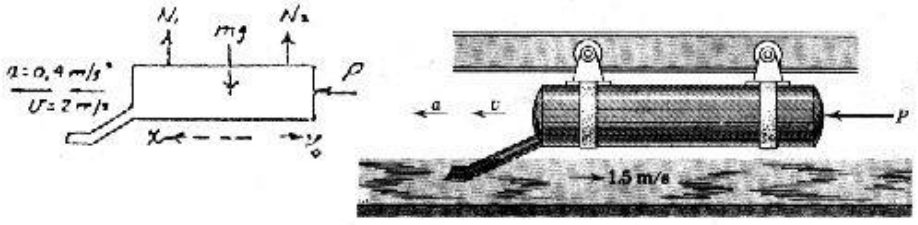
4.63 - جرم مخزن خالی نشان‌داده، 50 kg است و با نیروی $P$ به چپ رانده می‌شود. آب از نهری با تندی 1.5 m/s، از دریچه‌ای به اندازه $2000\ mm^2$ با آهنگی برابر باتندی دریچه نسبت به آب، به درون مخزن می‌ریزد. هنگامی که تندی و شتاب مخزن، 2 m/s و 0.4 m/s است و 80 kg آب به درون آن ریخته است، نیروی $P$ چیست؟

$m=50+80=130\ kg$

$\dot{m}=\rho Au=\rho A(v+v_o)=1000(2000)10^{-6}(2+1.5)=7.0\ kg/s$

$u=v+v_o=3.5\ m/s \quad \sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u$

$P=130(0-.4)+7.0(3.5)=52+24.5=76.5\ N$




نگاره 4.63

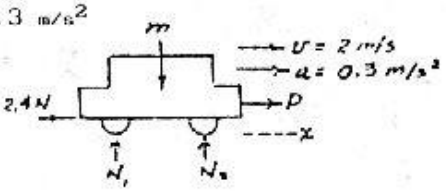
4.64 - ریسمان سنگینی به جرم 1.2 kg/m به طول 100 m از درون گاری 40 کیلوگرمی، باز می‌شود. اگر هنگامی که 30 m از ریسمان، درون گاری است، کشش ریسمان، 24 N باشد و گاری با تندی 2 m/s پیش رود، نیروی $P$ چه باشد تا به گاری، شتاب $0.3\ m/s^2$ بدهد؟

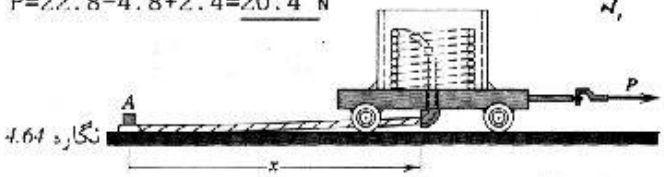
$m=40+30(1.2)=76$ Kg $v=2$ m/s $a=0.3$ m/s$^2$

$\dot{m}=-\rho v=-1.2(2)=-2.4$ kg/s

$\sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u$ $P-2.4=76(0.3)-2.4(2)$

$P=22.8-4.8+2.4=\underline{20.4}$ N

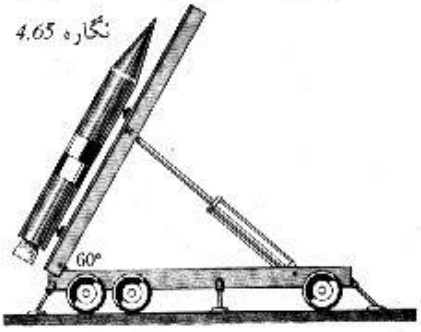


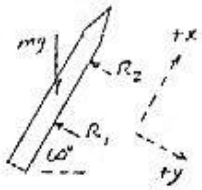



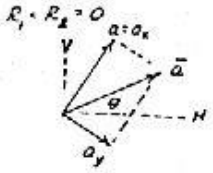

نگاره 4.64

**4.65** - موشک نشان‌داده، به جرم 8.5 Mg با آهنگ 200 kg/s سوخت می‌سوزاند و گازهای برونریز، با تندی 760 m/s از آن بیرون می‌زند. شتاب آغازین موشک و شیب بردار شتاب گرانیگاه آن را پس از جداشدن از سکو بیابید.

نگاره 4.65




$\sum F_x=m\dot{v}+\dot{m}u$ $-mg\sin60^\circ=ma-\dot{m}u$

$-8.5(10^3)(9.81)\sin60^\circ+200(760)=8.5(10^3)a$

$a=\underline{9.39}$ m/s$^2$

$\sum F_y=ma_y$ $mg\cos60^\circ=ma_y$ $a_y=9.81\cos60^\circ=4.905$ m/s$^2$

$\bar{a}_v=a_x\cos30^\circ-a_y\sin30^\circ=9.39(0.866)-4.905(0.5)=5.68$ m/s$^2$

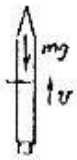
$\bar{a}_H=a_x\sin30^\circ+a_y\cos30^\circ=9.39(0.5)+4.905(0.866)=8.94$ m/s$^2$

$\theta=\tan^{-1}(5.68/8.94)=\tan^{-1}(0.635)=\underline{32.4^\circ}$

**4.66** - قطره باران به هنگام افتادن، نم هوا را می‌گیرد و جرمش بیشتر می‌شود. اگر تندی قطره، $v$ و اصطکاک هوا، $R$ باشد، معادله حرکت آن چیست؟

$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u$ $\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u=d(mv)/dt$ $\sum F=mg-R$

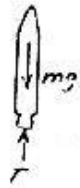
*4.67* - موشک کوچکی به جرم $m_0$ روبه‌بالا پرتاب می‌شود. بگویید جرم موشک چگونه با زمان تغییر کند تا شتاب آن ثابت بماند؟ گازهای با تندی $u$ از شیپوره موشک بیرون می‌زند و اندازه $g$ تغییر چندانی نمی‌کند.




$$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \;;\; -mg \;\; ma+\dot{m}u \;\; -m(a+g)=\dot{m}u \;\; u/dt=-m(a+g)$$

$$\int_{mo}^{m} dm/m=-(a+g)/u\int_{o}^{t} dt \quad \ln(m/m_o)=-\frac{a+g}{u}\,t \quad \underline{m=m_o e^{-(a+g)t/u}}$$

*4.68* - موشکی به جرم *6000 kg*، گاز برونریز را با تندی *800 m/s* پس می‌زند، اگر مصرف سوخت به گونه‌ای باشد که رانش اندازه حرکت، وزن کاهش یابنده را متعادل سازد، آهنگ مصرف سوخت و مصرف سوخت پس از *10 s* را بیابید.




$$T=mg \quad T=m\dot{u}=-u\dot{m}=-udm/dt \quad -udm/dt=mg \quad \int_{m_o}^{m} dm/m=-\int_{o}^{t} gdt/u$$

$$\ln(m/m_o)=-gt/u \quad m=m_o e^{-gt/u}$$

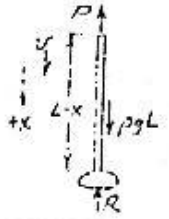
$$\dot{m}=-dm/dt=-m_o(-g/u)e^{-gt/u}=(m_o g/u)e^{-gt/u}$$

$$\dot{m}=\underline{73.6e^{-0.0123t}}\ kg/s$$

$$m=m_o-m_f \text{ so } m_o-m_f=m_o e^{-gt/u} \quad m_f=m_o(1-e^{-gt/u})=$$

$$=6000(1-e^{-0.0123\times 10})=\underline{592\ kg}$$

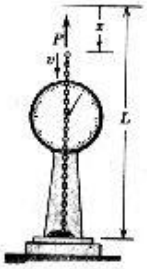
*4.69* - چنانکه می‌بینید، نوک زنجیری به طول $L$ و جرم یکه $\rho$ با نیروی $P$ و با تندی یکنواخت $v$ بر یک ترازو می‌ریزد. نیروی نشسته بر ترازو را بر حسب $x$ بیابید.



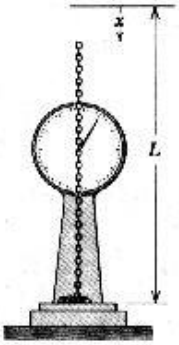

$$\dot{x}=v=\text{const.} \quad P=\rho g(L-x)$$

$$\rho gL-R-\rho g(L-x)=d(\rho[L-x]v)/dt$$

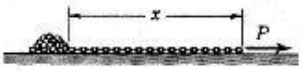
$$\rho gx-R=-\rho v\dot{x}=-\rho v^2 \quad \underline{R=\rho gx+\rho v^2}$$



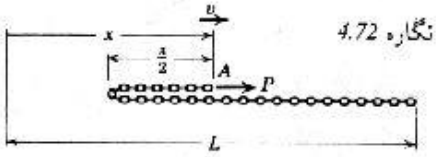

نگاره *4.69*




نگاره *4.70*




نگاره *4.71*




نگاره *4.72*

4.70 - ته زنجیری به طول $L$ و جرم یکه $\rho$ را چنان می‌گیریم که نوک زنجیر آویخته، به سکوی ترازوی نشان‌داده برسد. سپس آن را رها می‌کنیم. اندازه نیروی نشسته بر ترازو بر حسب $x$ چیست؟

$$G_x=\rho(L-x)\sqrt{2gx}=\rho\sqrt{2g}(Lx^{1/2}-3x^{3/2}/2) \quad \sum F_x=\dot{G}_x$$

$$\rho gL-F=\rho\sqrt{2g}(Lx^{-1/2}-3x^{1/2}/2)\dot{x}=$$

$$=\rho\sqrt{2g}((L/2)\sqrt{2g}-(3x/2)\sqrt{2g})=\rho gL-3\rho gx$$

$$\Rightarrow \underline{F=3\rho gx} \quad R=m'\Delta v=\rho\dot{x}(\dot{x})=\rho\dot{x}^2=\rho(2gx)=2\rho gx$$

$$\sum F_x=0 \quad 2\rho gx+\rho gx-F=0 \quad \underline{F=3\rho gx}$$

4.71 - سر یک توده زنجیر به جرم یکه $\rho$ را با نیروی ثابت $P$ می‌کشیم. اگر ضریب اصطکاک بین زنجیر و زمین، $\mu$ باشد، شتاب زنجیر بر حسب $x$ و $x$ چیست؟

$$\sum F_x=\dot{G}_x;\ P-\mu_k\rho gx=d(\rho x\dot{x})/dt=\rho(\dot{x}^2+x\ddot{x})$$

$$a=\ddot{x}=P/\rho x-\mu_k g-\dot{x}^2/x$$

$$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \quad P-\mu_k\rho gx=\rho x\ddot{x}+\rho\dot{x}\dot{x} \quad u=\dot{x}$$

$$\underline{a=\ddot{x}=P/\rho x-\mu_k g-\dot{x}^2/x}$$

4.72 - زنجیری به طول $L=8\ m$ و جرم $48\ kg$ را بر روی زمین همواری خوابانده‌ایم. نیروی $P$، زنجیر را بر روی خودش برمی‌گرداند. الف) $P$ چه باشد تا نقطه $A$ با تندی ثابت $1.5\ m/s$ برگردد. ب) اگر در $P=20\ N$ و $x=4\ m$ باشد، شتاب نقطه $A$ چیست؟

$$\rho=48/8=6\ kg/m$$

$$\dot{m}=\rho d(x/z)/dt=\rho\dot{x}/2=\rho v/2=6(1.5)/2=4.5\ kg/s$$

$$u=v=1.5\ m/s \quad \sum F=m\dot{v}+\dot{m}u$$

(a) $\dot{v}=0 \quad P=0+4.5(1.5)=\underline{6.75\ N}$

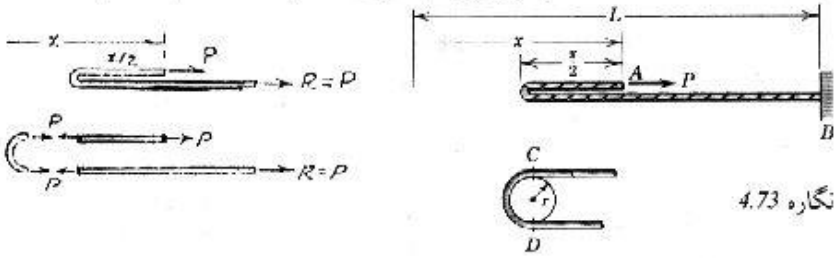
(b) $m=\rho x/2=6(4/2)=12\ kg \quad 20=12\dot{v}+4.5(1.5)$

$$\underline{a=\dot{v}=1.104\ m/s^2}$$

*4.73* - ریسمانی به طول $L$ و چگالی طول $\rho$ را بر زمین همواری خوابانده‌ایم و ته آن را به دیوار بسته‌ایم. نیروی $P$ بر سر $A$ چه باشد تا نوک $A$ با تندی ثابت، روی ریسمان برگردد؟ نقطه تاخوردگی را نیمدایره‌ای به شعاع ناچیز بگیرید.

$$dU=dT \quad Pdx=d(\rho x v^2/4)=(\rho v^2/4)dx \quad \underline{P=\rho v^2/4} \quad \sum F_x=\dot{G}_x$$

$$P+R=d(\rho x v/2)/dt \quad R=\rho v^2/2-\rho v^2/4=\rho v^2/4$$




نگاره *4.73*

*4.74* - اگر دستور *(4.20)* را برای بخش متحرک ریسمان پرسش نمونه *4.10* به کار بریم، چرا اندازه $P$ نادرست به‌دست می‌آید. گمان کنید که $\Sigma F=P-\rho gx$ و $m=\rho x$ و $\dot{m}=\rho v$ و $\dot{v}=0$ و $u=v$ است.

$$\sum F=P-\rho gx \quad m=\rho x \quad \dot{m}=\rho v \quad \dot{v}=0 \quad u=v$$

$$\sum F=m\dot{v}+\dot{m}u \quad P-\rho gx=\rho x(0)+\rho v(v)$$

$$P=\rho v^2+\rho gx \quad P=\rho gx+\rho v^2/2 \quad F=\rho v^2/2$$

*4.75* - جرم واگن خالی نشان‌داده، *25 Mg* است و با تندی *1.2 m/s* از زیر قیف زغال‌سنگ می‌گذرد و با آهنگ *4 Mg/s* پر می‌شود. واگن چه اندازه پیش رود تا *32 Mg* زغال‌سنگ در آن بریزد.

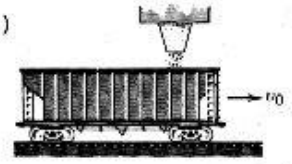
$$m_o = 25000 \text{ kg} \quad \dot{m}=4000 \text{ kg/s}$$

$$\sum F_x=d(mv)/dt \quad 0=d[(m_o+\dot{m}t)v]/dt \quad (m_o+\dot{m}t)a+\dot{m}v=0$$

$$a=dv/dt=-\dot{m}v/(m_o+\dot{m}t), \quad \int_{v_o}^{v} dv/v=-\int_0^t \dot{m}dt/(m_o+\dot{m}t)$$

$$\ln(v/v_o)=-\ln[(m_o+\dot{m}t)/m_o]; \quad v=dx/dt=m_o v_o/(m_o+\dot{m}t)$$

$$\int_0^x dx=m_o v_o\int_0^t dt/(m_o+\dot{m}t)$$




نگاره *4.75*

$$x=(m_o v_o/\dot{m})\ln(m_o+\dot{m}t)]_0^t=(m_o v_o/\dot{m})\ln[(m_o+\dot{m}t)/m_o]$$

$$t=32/4=8 \text{ s}$$

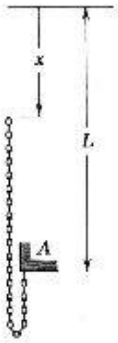
$$x=[25000(1.2)/(4000)]\ln[(25000+4000(8))/25000]=$$
$$=7.5\ln 2.28=6.18\ \text{m}$$

*4.76* - سر زنجیرنشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود. نیروی کشش زنجیر در آویز گاه چیست؟ از $x=0$ تا $x=2L$ چه اندازه انرژی از بین می‌رود؟

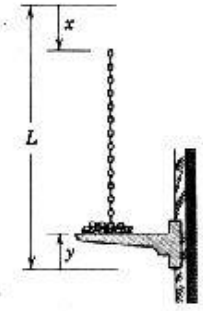
$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL-T=d(\rho[L-x/2]\dot{x}+0)/dt=\rho(L-x/2)\ddot{x}-\rho\dot{x}^2/2$$

$$\ddot{x}=g \quad \dot{x}^2=2gx \quad \rho gL-T=\rho gL-\rho gx/2-\rho gx \quad T=3\rho gx/2$$

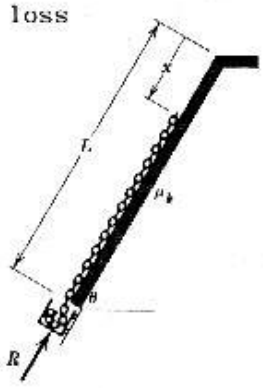
$$\Delta E=|\Delta V_g|=\rho gL(L/2+L/2)=\rho gL^2 \text{ energy loss}$$




نگاره 4.76

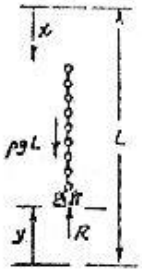



نگاره 4.77




نگاره 4.78

*4.77* - نوک زنجیر، از $x=0$ رها می‌شود و در همان هنگام، سکو از $y=0$ با شتاب $a$ بالا می‌آید. پس از $t$ ثانیه، نیروی زنجیر بر سکو چیست؟

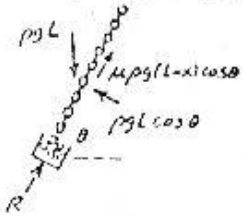



$$\ddot{x}=g \quad \ddot{y}=a \quad G_x\rho(L-x-y)\ddot{x}-\rho(x+y)\ddot{y} \quad \dot{x}=gt$$

$$\dot{y}=at \quad x=gt^2/2 \quad y=at^2/2 \quad \sum F_x=\dot{G}_x$$

$$\rho gL-R=\rho[(-\dot{x}-\dot{y})\dot{x}+(L-x-y)\ddot{x}]-\rho[(\dot{x}+\dot{y})\dot{y}+(x+y)\ddot{y}]$$
$$\rho gL-R=-3\rho(a+g)^2t^2/2+\rho gL \quad R=(3/2)\rho(a+g)^2t^2$$

*4.78* - زنجیر نشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین زنجیر و شیب، $\mu$ باشد، چه اندازه نیروی بیشتر باید به کاسه زیرین بنشانیم تا آن را نگه دارد؟

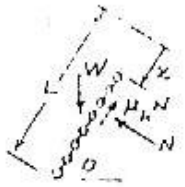



$$\sum F_x=ma_y \quad W\sin\theta-\mu_k N=m\ddot{x}$$

$$\rho g(L-x)\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta=\rho(L-x)\ddot{x}$$

$$\ddot{x}=g\sin\theta-\mu_k g\cos\theta \quad \dot{x}^2=2x\ddot{x}$$

$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta-R$$



$=d(\rho[L-x]\dot{x})/dt=\rho(L-x)\ddot{x}-\rho\dot{x}^2=\rho\dot{x}^2(L-3x)$

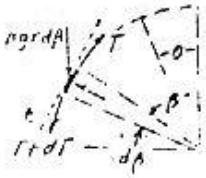
$R=\rho gL\sin\theta-\mu_k\rho g(L-x)\cos\theta-\rho g(\sin\theta-\mu_k\cos\theta)(L-3x)$

$R=\rho gx(3\sin\theta-2\mu_k\cos\theta)$ $\mu_k<\tan\theta$

*4.79* - زنجیر نشان‌داده، به طول $\pi r/2$ و چگالی طولی $\rho$ از $\theta=0$ رها می‌شود. شتاب مماسی مشترک ذره‌های زنجیر، بر حسب $\theta$ چیست؟ چه اندازه انرژی، از $\theta=0$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ از بین می‌رود.

$\sum F_t=ma_t$

$(T+dT)\cos(d\beta/2)-T\cos(d\beta/2)+\rho gr d\beta\sin\beta=\rho r d\beta a_t$

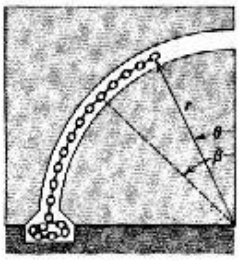


$dT=\rho r(a_t-g\sin\beta)d\beta$ $\int_0^0 dT=\rho r\int_\theta^{\pi/2}(a_t-g\sin\beta)d\beta$

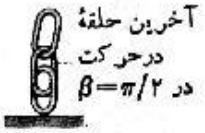
$0=\rho r[a_t\{\pi/2-\theta\}+g\{\cos(\pi/2)-\cos\theta\}]$

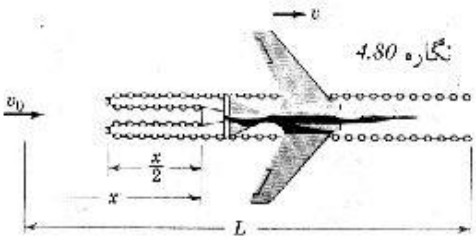
$a_t=g\cos\theta/(\pi/2-\theta)$ $\Delta E|=|\Delta V_g|=mg\Delta h=(\rho g\pi r\bar{r}/2)\cos45^\circ=$

$=\rho g(\pi r/2)(2r/\pi)=\rho gr^2$



نگاره *4.79*




نگاره *4.80*

*4.80* - هواپیمایی که با تندی $v_0$ فرود می‌آید، با چنگکی که از آن آویخته است، دو زنجیر، هر یک به طول $L$ و چگالی خطی $\rho$ را می‌گیرد. از اصطکاک چشم بپوشید و اندازه تندی هواپیما را هنگامی که همه زنجیر را به حرکت درمی‌آورد برآورد کنید.

$\sum F=0=m\dot{v}+\dot{m}u=$

$=(m+2\rho x/2)\dot{v}+[2d(\rho x/2)/dt]v-(m+\rho x)dv/dt=\rho v dx/dt$

$dv/v=-\rho dx/(m+\rho x)$ $\int_{v_0}^{v} dv/v=-\int_0^x \rho dx/(m+\rho x)$

$\ln(v/v_0)=-\ln[(m+\rho x)/m]$ $v=\dfrac{v_0}{1+\rho x/m}$ $x=2L$

$v=\dfrac{v_0}{1+2\rho L/m}$ $v=dx/dt$ $\int_0^x(1+\rho x/m)dx=\int_0^t v_0 dt$

$$x+\rho x^2/2m=v_0 t \quad x^2+(2m/\rho)x-2mv_0 t/\rho$$

$$x=-m/\rho\pm\sqrt{4m^2/\rho^2+8mv_0 t/\rho} \quad x=m/\rho[\sqrt{1+2v_0 t\rho/m}\ -1]$$

*4.81* - استوانه نشان‌داده به جرم $m_0$ پر از ریسمان است. استوانه از $x=0$ رها می‌شود. هنگام فرود، ریسمان با نیروی اصطکاک $F$ از استوانه بیرون می‌آید. شتاب استوانه و نیروی آویزگاه را بر حسب $x$ و $v$ بیابید.

$$U=\Delta T+\Delta V_g \quad U=-Fx$$

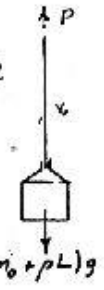
$$\Delta T=(m_0+\rho[L-x])v^2/2 \quad \Delta V_g=-[\{m_0+\rho(L-x)\}x+\rho x^2/2]g$$

$$-Fx=(m_0+\rho[L-x])v^2/2-[m_0+\rho[L-x/2]]gx$$

$$-Fv=(m_0+\rho[L-x])va-\rho v^3/2-(m_0+\rho[L-x/2])gv+\rho gvx/2$$

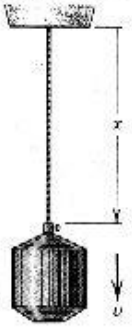
$$[m_0+\rho(L-x)]a=[m_0+\rho(L-x)]g+\rho v^2/2-F$$

$$\Rightarrow \underline{a=g+(\rho v^2/2-F)/(m_0+\rho(L-x))}$$

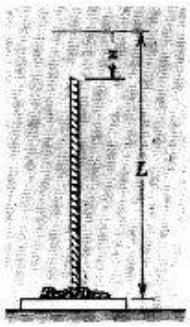



$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad (m_0+\rho L)g-P=d(m_0+\rho(L-x))v/dt$$

$$=[m_0+\rho(L-x)]a-\rho v^2 \quad \underline{P=\rho gx+\rho v^2/2+F}$$




نگاره *4.81*




نگاره *4.82*

*4.82* - ریسمان نشان‌داده، از $x=0$ رها می‌شود و بر زمین می‌ریزد. نیروی ریسمان بر زمین چیست؟ یافته خود را با پرسش *4.77*، هنگامی که سکو تکان نمی‌خورد، روبرو کنید.

$$\sum F_x=\dot{G}_x \quad \rho gL-R=d(\rho(L-x)\dot{x}+0)/dt$$

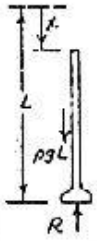
$$\Delta T+\Delta V_g=0 \quad \rho(L-x)\dot{x}^2/2=\rho gx(L-x/2)$$

$$\dot{x}^2=x(2L-x)g/(L-x) \quad \dot{x}(L-x)=x(2L-x)g/\dot{x}$$

$$\rho gL-R=d(x(2L-x)\rho g/\dot{x})/dt=$$

$$=2\rho g(L-x)-\rho gx(2L-x)\ddot{x}/\dot{x}^2\ddot{x}=(1+x(L-x/2)/(L-x)^2)g$$

$$\rho gL-R=2\rho g(L-x)-\rho gx(2L-x)[1+x(L-x/2)/(L-x)^2]g/\dot{x}^2$$



$R=\rho gx(4L-3x)/2(L-x)$ $R_{a=0}$ $x<2L/3$

*4.83* - سر زنجیر نشان‌داده، از سوراخ، پایین می‌افتد و زنجیر به پایین می‌ریزد. تندی زنجیر افتان چه تابعی از $x$ است؟ شتاب زنجیر و اندازه افت انرژی را بیابید. طول زنجیر را $L$ و چگالی طولی آن را $\rho$ بگیرید. $\sum F=\dot{m}v+\dot{m}u$ $\sum F=\rho gx$ $m=\rho x$ $\dot{m}=\rho v$ $u=v=\dot{x}$ $\rho gx=\rho x\dot{v}+\rho v\dot{x}$

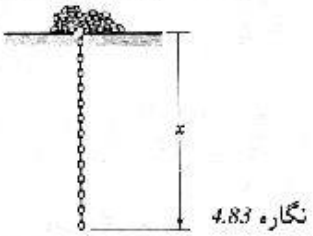
$gxdt=xdv+vdx$ $gxdt=d(xv)$ $gx^2vdt=xvd(xv)$

$$gx^2dx=d(xv)^2/2 \quad g\int_0^x x^2dx=\int_0^{(xv)^2} d[xv]^2/2 \quad gx^3/3-(xv)^2/2$$

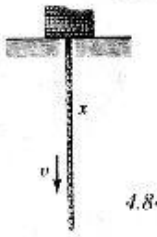
$v=\sqrt{2gx/3}$ $a=\dot{v}=\sqrt{2g/3}\ x^{-1/2}\dot{x}/2$

$\dot{x}=\sqrt{2g/3}\ \sqrt{2gx/3}/(2\sqrt{x})$

$a=g/3$ $\Delta E=-\Delta V_g-\Delta T=\rho gL^2/2-(\rho L/2)v_{x=L}^2=\rho gL^2/6$

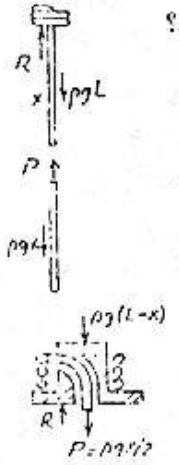



نگاره *4.83*




نگاره *4.84*

*4.84* - زنجیر پرسش پیشین را با چنبره‌ای از ریسمان جانشین کنید. و تندی افتان آن را بیابید و نیروی واکنش سکوی زیر ریسمان را برآورد کنید. چرا در $x=2L/3$ این نیرو صفر می‌شود؟




$\Delta V_g+\Delta T=0$ $-\rho gx(x/2)+\rho xv^2/2=0$ $v=\sqrt{gx}$ $a=\dot{v}=g/2$

$\sum F_x=\dot{G}_x$ $\rho gL-R=d(\rho v)/dt=3\rho gx/2$ $R=\rho gL-3\rho gx/2$

$R=\rho g(L-3x/2)$

$\sum F_x=m(0)+\dot{m}u$ $R=0$ $x=2L/g$ $\sum F_x=ma_x$

$\rho gx-P=\rho gx/2$ $P=\rho gx/2$ $L-x$

$\sum F_x=m'\Delta v_x$ $\rho gx/2+\rho g(L-x)-R=\rho v(v)=\rho(gx)$

$R=\rho g(x/2+L-x-x)=\rho g(L-3x/2)$

$R=0$ when $x=2L/3$ $x>2L/3$