تعریف و خواص تبدیل لاپلاس

۱-۱ . تبدیل لاپلاس هر یک از توابع زیر را به دست آورید .

الف) $e^{-2t}\cos 3t\ u(t)$ ج) $\dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$

ب) $e^{-4t}\sin 4t\ u(t)$ ج) $\dfrac{4}{(s+2)^2+16}$

ج) $e^{-3t}\cosh 2t\ u(t)$ ج) $\dfrac{s+3}{(s+3)^2-4}$

د) $e^{-4t}\sinh t\ u(t)$ ج) $\dfrac{1}{(s+4)^2-1}$

ر) $te^{-t}\sin 2t\ u(t)$ ج) $\dfrac{4(s+1)}{\left((s+1)^2+4^2\right)}$

راهنمایی : از روابط $\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$ و $\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ استفاده نمایید .

۱-۲. تبدیل لاپلاس توابع زیر را به دست آورید .

الف) $2s(t)+6u(2t)+4e^{-2t}-10e^{-3t}$ ج) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{s}+\dfrac{4}{s+2}-\dfrac{10}{s+3}$

ب) $te^{-t}u(t-1)$ ج) $\dfrac{e^{-(s+1)}}{(s+1)^2}+\dfrac{e^{-(s+1)}}{s+1}$

ج) $\cos 2(t-1)u(t-1)$ ج) $\dfrac{se^{-s}}{s^2+4}$

د) $\sin 4t\big(u(t)-u(t-\pi)\big)$ ج) $\dfrac{4}{s^2+16}(1-e^{-\pi s})$

۱-۳ . تابع متناوب شکل (۱-۳) به صورت زیر تعریف می شود .

$$g(t)=\begin{cases}\sin \pi t & 0<t<1\\ 0 & 1<t<2\end{cases}$$

تبدیل لاپلاس آن را به دست آورید .

ج) $\dfrac{\pi(1+e^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-e^{-2s})}$

۱-۴ مقادیر اولیه و نهایی توابع $f(t)$ یا تبدیل لاپلاس های $F(s)$ زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $F(s)=\dfrac{10s^3+1}{s^2+6s+5}$ ب) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2-4s+6}$

ج) $F(s)=\dfrac{2s^2+7}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+5)}$ د) $F(s)=\dfrac{s^2+3}{s^3+4s^2+6}$

ر) $F(s)=\dfrac{s^2-2s+1}{(s-2)(s^2+2s+4)}$

ج : $F(s)=\dfrac{2s^2+7}{(s+1)(s+2)(s^2+2s+5)}$

ج:الف)صفر و ∞ ب) $f(0)=1$ و $f(\infty)$ وجود ندارد.

ج) صفر و صفر د) ۱ و صفر

ر) $f(0)=1$ و $f(\infty)$ وجود ندارد.

تبدیل لاپلاس معکوس

۱-۵ تبدیل لاپلاس معکوس هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $\dfrac{10s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ ب) $\dfrac{2s^2+4s+1}{(s+1)(s+2)^3}$

ج) $\dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}$ د) $\dfrac{6(s-1)}{s^4-1}$

ر) $\dfrac{se^{-\pi s}}{s^2+1}$ ز) $\dfrac{8}{s(s+1)^3}$

ج :

الف) $-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t}$ ب) $-e^{-t}+(1+3t-\dfrac{t^2}{2})e^{-2t}$

ج) $-e^{-t}(-0.2+0.2\cos 2t+0.4\sin 2t)$ د) $3\sin t-\cos t+3e^{-t}$

ر) $\cos(t-\pi)u(t-\pi)$ ز) $8u(t)\left[1-e^{-t}-te^{-t}-0.5t^2e^{-t}\right]$

۱-۶ $f(t)$ توابع زیر را به دست آورید .

الف) $F(s)=\dfrac{(s+3)e^{-6s}}{(s+1)(s+2)}$ ب) $F(s)=\dfrac{4-e^{-2s}}{s^2+5s+4}$

ج) $F(s)=\dfrac{se^{-s}}{(s+3)(s^2+4)}$ د) $F(s)=\dfrac{12e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

ر) $F(s)=\dfrac{2s+1}{(s^2+1)(s^2+9)}$ ز) $F(s)=\dfrac{9s^2}{s^2+4s+13}$

ج :

الف) $(2e^{-(t-6)} - e^{-2(t-6)})u(t-6)$

ب) $\frac{4}{3}(e^{-t} - e^{-4t}) - \frac{1}{3}u(t-2)(e^{-(t-2)} - e^{-4(t-2)})u(t)$

ج) $\frac{1}{13}(-3e^{-3(t-1)} + 3\cos 2(t-1) + 2\sin 2(t-1))u(t)$

د) $3\big(1-\cos 2(t-2)\big)u(t-2)$

ر) $\frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{24}\sin 3t$

ز) $4e^{-2t}(-1+t+\cos 3t - 5\sin 3t)$

۱-۷ $f(t)$ توابع زیر را به دست آورید .

الف) $F(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 1}{(s^2+2s+17)(s^2+4s+20)}$

ب) $F(s) = \frac{s^2+4}{(s^2+9)(s^2+6s+3)}$

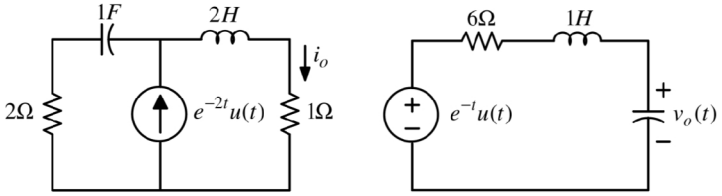
ج :

الف) $-3.138e^{-t}\cos 4t - 2.358e^{-t}\sin 4t + 5.138e^{-2t}\cos 4t + 1.142e^{-2t}\sin 4t$

ب) $(\frac{1}{4}\cos 3t + \frac{1}{12}\sin 4t - \frac{1}{8}e^{-0.551t} + \frac{1}{8}e^{-5.499t})u(t)$

کاربردهای تبدیل لاپلاس :

۱-۸ . ولتاژ خروجی $V_o(t)$ را در شکل (۱-۴ . الف) و جریان خروجی $i_o(t)$ را در شکل (۱-۴.)بیابید.

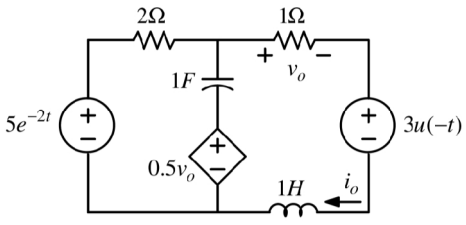


ج :

الف) $2e^{-t} - 2e^{-3t}\cos t - 4e^{-3t}\sin t^V$

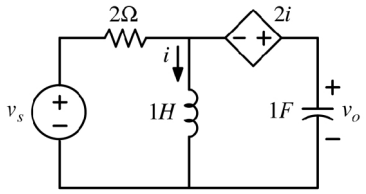
ب) $(2e^{-2t} - e^{-t})u(t)$

۱-۹ . جریان خروجی i_o مدار شکل ۱-۵ را برای $t \succ 0$ بیابید .



ج : $0.7143e^{-2t} - 1.714e^{-0.5t}\cos 1.118t + 2.3e^{-0.5t}\sin 1.118t.$

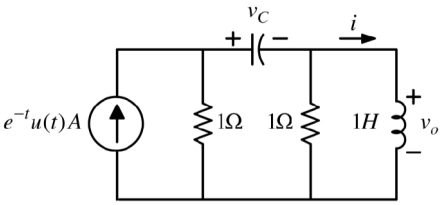
۱-۱۰ . در مدار شکل ۱-۶ در صورتیکه $i(0) = 1^A$ و $V_o(0) = 2^V$ و $V_s = 4e^{-2t}u(t)^V$ باشد. $V_0(t)$ را برای تمام زمان ها $t \succ 0$ به دست آورید .



ج :

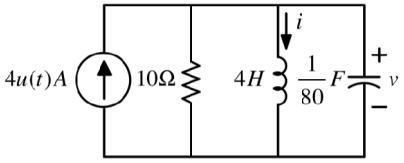
$-(2 + 4.33e^{-\frac{t}{2}} + 1.33e^{-2t})u(t)^V$

۱-۱۱.در مدار شکل ۱-۷ در صورتیکه $V_c(0^-) = 2^V$ و $i_l(0^-) = 1^A$ باشد ولتاژخروجی $V_o(t)$ را به دست آورید .



ج :

۱-۱۲.در مدار RLC موازی شکل۱-۸ ولتاژ $V(t)$و $i(t)$ را بیابید . ولتاژ اولیه خازن $V_o = 5^V$ و $i_l(0^-) = -2^A$ است .



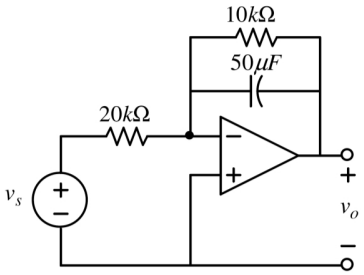
ج :

$V(t) = (5e^{-4t}\cos 2t + 230e^{-4t}\sin 2t)u(t)$

$i(t) = (6 - 6e^{-4t}\cos 2t - 11.37e^{-4t}\sin 2t)u(t)^A$

۱-۱۳ . در مدار آپ امپی شکل ۱-۹ ولتاژ خروجی $V_o(t)$ را برای $t \succ 0$ بیابید .

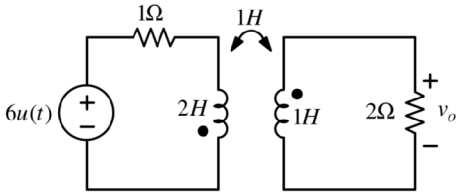
$V_s = 3e^{-5t}u(t)$



ج : $(e^{-5t}-e^{-t})u(t)$

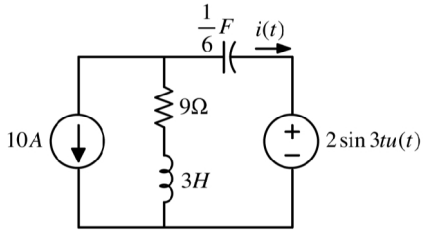
۱-۱۴ . برای مدار شکل ۱-۱۰ ولتاژ خروجی $V_0(t)$ را برای $t \succ 0$ بیابید .

ج : $2.91(e^{-4.581t}-e^{-0.438t})u(t)$



۱-۱۵ .جریان $i(t)$ را در شکل (۱-۱۶) به کمک تبدیل لاپلاس بیابید .

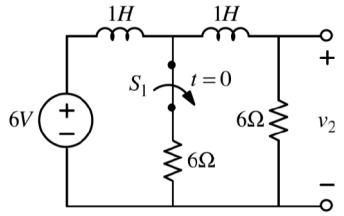
راهنمایی : ابتدا شرایط اولیه مدار را به دست آورید .



ج :

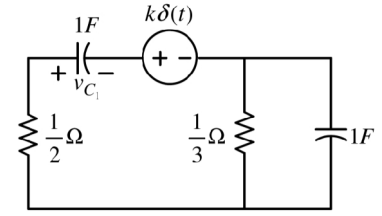
$$i(t)=(0.2e^{-t}-0.308e^{-2t}+0.108\cos 3t-0.139\sin 3t)u(t)$$

۱-۱۶ در مدار شکل (۱-۱۷)کلید S_1 برای مدت طولانی بسته بوده است و در لحظه $t=0$ باز می شود ولتاژ $V_2(t)$ را به دست آورید .



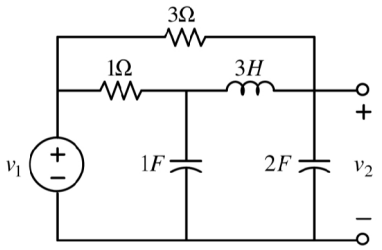
ج : $V_2(t)=(6+3e^{-t})u(t)$

۱-۱۷ . در مدار شکل (۱-۱۸)مقدار اولیه $Vc_1(0^+)$ را بیابید .



ج : $Vc_1(0^+) = -2K$

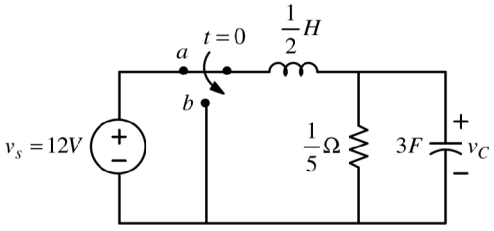
۱-۱۸ در مدار شکل (۱-۱۹) با انتخاب $V_1(t)$به عنوان ورودی و $V_2(t)$به عنوان خروجی مدار معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسید .



ج:

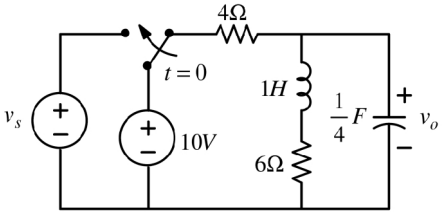
$$18V_2'''(t) + 33V_2''(t) + 20V_2'(t) + 4V_2(t) = 3V_1''(t) + 3V_1'(t) + 4V_1(t)$$

۱-۱۹ در مدار شکل (۱-۲۰) کلید برای مدت طولانی در نقطه a بوده است و در لحظه $t = 0$ به نقطه bمنتقل می شود. ولتاژ $V_C(t)$ را برای $t \succ 0$ به دست آورید.



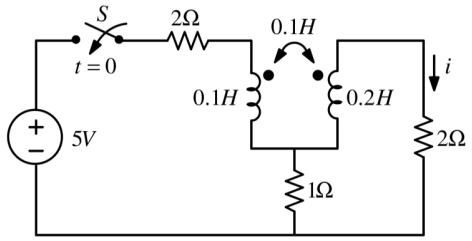
ج : $V_C(t) = (36e^{-\frac{2}{3}t} - 24e^{-t})u(t)$

۱-۲۰ ولتاژ خروجی $V_o(t)$ شکل(۱-۲۱) را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید . $V_s(t) = 6e^{-3t}u(t)$



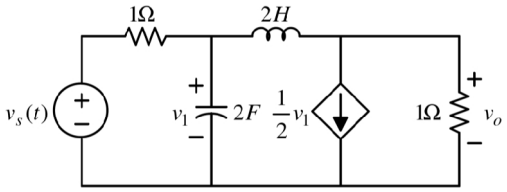
ج : $V_o(t) = (\frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t})u(t)$

۱-۲۱ مدار شکل (۱-۲۲) دارای شرایط اولیه صفر است و کلید S در لحظه $t = 0$بسته می شود جریان $i(t)$ را در مدار به دست آورید .



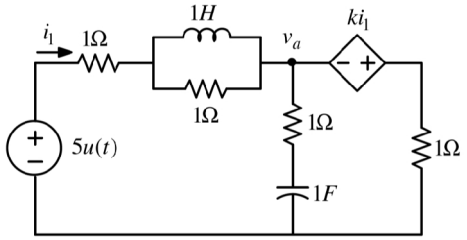
ج : $i(t) = (\frac{8}{5} - 0.995e^{-55.6t} + 0.371e^{-14.4t})u(t)$

۱-۲۲ در مدار شکل (۱-۲۳) با فرض آنکه $V_s(t) = \sin tu(t)$ ، $V_1(0^-) = -2^V$ و $i(0^-) = 1^A$ باشد ولتاژ خروجی $V_2(t)$ را به دست آورید.



ج : $V_2(t) = (-\frac{10}{73}\cos t - \frac{22}{73}\sin t + e^{-\frac{t}{2}}(2.03\cos\sqrt{\frac{3}{8}}t - 1.44\sin\sqrt{\frac{3}{8}}t)u(t)$

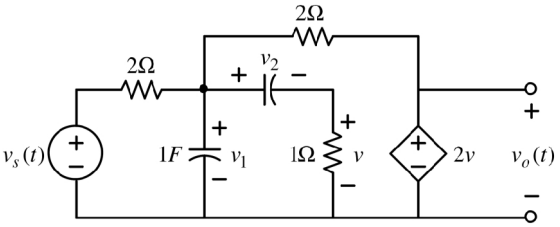
۱-۲۳ .در مدار شکل (۱-۲۴) در صورتیکه شبکه در لحظه $t = 0$ بدون شرایط اولیه باشد ولتاژ V_aرا بیابید .($K = -3$ است)



ج : $V_a = 4 + e^{-0.75t}(-1.5\cos 0.25t + 0.5\sin 0.25t)$

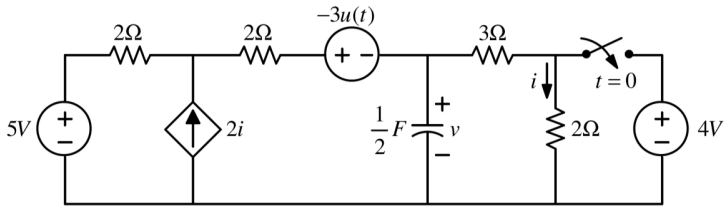
۱-۲۴ . پاسخ ضربه $V_o(t)$ مدار شکل (۱-۲۵) را به کمک تبدیل لاپلاس به دست آورید .

:



ج : $V_o(t) = (2e^{-t} - e^{-0.5t})u(t)$

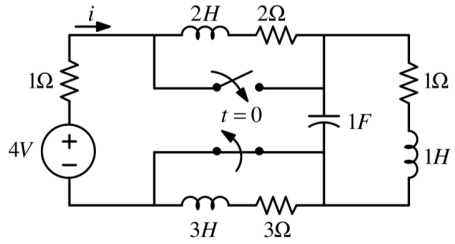
۱-۲۵ در مدار شکل (۱-۲۶) کلید در لحظه $t = 0$ بسته می شود $V(0^+)$ و $\frac{dv}{dt}(0^+)$را به دست آورید.



ج : $V(0^+) = 5^V$

$$\frac{dv}{dt}(0^+) = 29\frac{v}{s}$$

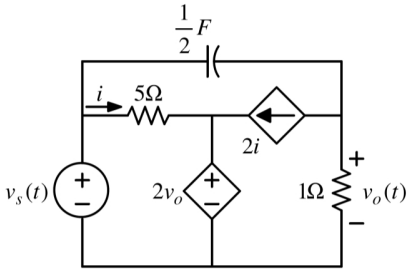
۱-۲۶ در مدار شکل (۱-۲۷) مقادیر $\frac{di}{dt}(0^+)$ و $\frac{d^2i}{d^2t}(0^+)$ را تعیین کنید.



ج : $\frac{di}{dt}(0^+) = 1\frac{A}{S}$

$$\frac{di^2}{d^2t}(0^+) = -1\frac{A}{S^2}$$

۱-۲۷ در مدار شکل (۱-۲۸) پاسخ ضربه و پاسخ جریان i و ولتاژ $V_o(t)$ را به کمک تبدیل لاپلاس بیابید.



ج :

پاسخ ضربه

$$V_o(t) = s(t) - \frac{14}{5}e^{\frac{-18}{5}t}u(t)$$

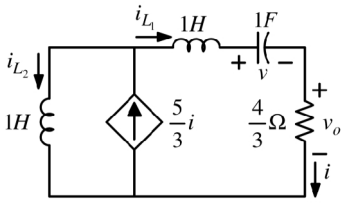
$$i(t) = \frac{1}{5}s(t) - \frac{38}{25}e^{\frac{-18}{5}t}u(t)$$

پاسخ پله $V_o(t) = (\frac{2}{9} + \frac{7}{9}e^{\frac{-18}{5}t})u(t)$

$$i(t) = (\frac{-1}{9} + \frac{14}{25}e^{\frac{-18}{5}t})u(t)$$

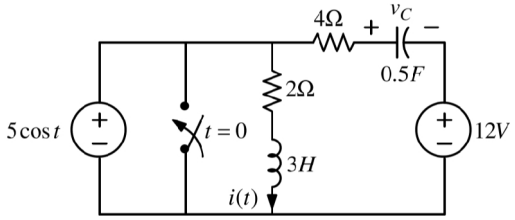
۱-۲۸ در مدار شکل (۱-۲۹) پاسخ ورودی صفر متغیر $V_o(t)$ را برای زمان $t \succ 0$ به دست آورید .

$V_c(0^-) = 1^V \ , \ i_{L_2}(0^-) = 3^A \ , \ i_{L_1}(0^-) = 2^A$



ج : $V_o(t) = (8e^{-3t} - 4e^{-t})u(t)$

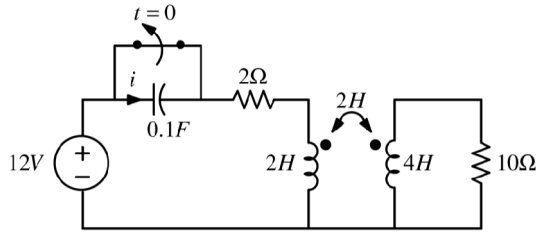
۱-۲۹ در مدار شکل (۱-۳۰) کلید برای زمان زیادی باز می شود در صورتی که کلید در لحظه $t = 0$بسته شود به کمک تبدیل لاپلاس $i(t)$ و $V_C(t)$را به دست آورید .



ج : $i(t) = 5e^{\frac{-2}{3}t}u(t)$

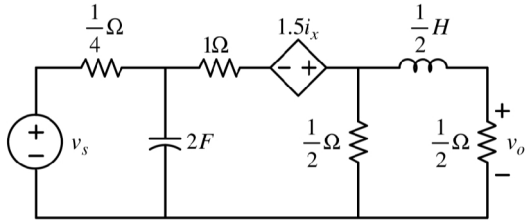
$V_C(t) = (-12 + 10e^{-0/5t})u(t)$

۱-۳۰ در مدار شکل (۱-۳۱) کلید در لحظه $t = 0$ باز می شود جریان گذرنده از خازن را به دست آورید .



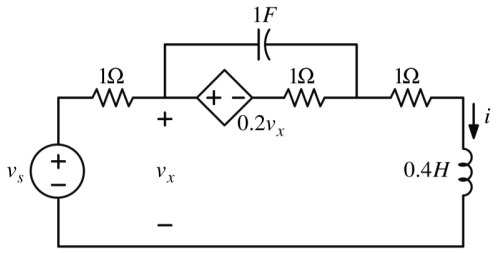
ج : $i(t) = -1.5e^{-5t}u(t) + 7.5e^{-t}\cos 2tu(t)$

۱-۳۱ در مدار شکل (۱-۳۲) پاسخ پله مدار را به دست آورید .خروجی مدار V_o است .



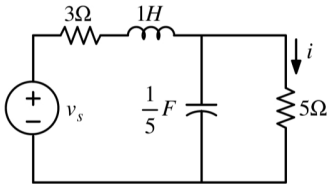
ج : $V_o(t) = (\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-2t})u(t)$

۱-۳۲ در مدار شکل (۱-۳۳) جریان سلف را به عنوان خروجی مدار در نظر بگیرید و پاسخ پله مدار را بیابید .



ج : $i(t) = (\frac{2}{7} + 0.44e^{-1.59} - 0.73e^{-4.41t})u(t)$

۱-۳۳ . در مدار شکل (۱-۳۴ . الف) جریان i را به دست آورید. شکل منبع ولتاژ در شکل (۱-۳۴ . ب) نشان داده شده است .



ج : $i(t) = \frac{5}{4}(1 - e^{-2t}\cos 2t - e^{-2t}\sin 2t)u(t)$

$$-\frac{5}{4}(1 - e^{-2(t-1)}\cos 2(t-1) - e^{-2(t-1)}\sin 2(t-1))u(t-1)$$