

MIT Integration Bee

سوالات ۲۰۲۰ - بخش اول

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات 🧐
 - ساده جهت تثبیت مطالب 🧐
 - متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب 🧐
 - سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص 🧐

۱ مقدمه

رقابت انتگرال که موسوم به Integration Bee است سالانه در برخی دانشگاه‌های معتبر برگزار می‌شود و دانشجویان در مدت مشخص به ۲۰ سوال که عمدتاً مربوط به انتگرال است پاسخ می‌دهند. هرچند از مشتق و انتگرال دوگانه، نظریه اعداد و سری‌ها هم مسئله غیرمستقیم مطرح می‌شود. در این بخش چند سوال از این آزمون ارائه و حل می‌شود.

۲ مسئله

حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف- $\int \ln(x^2 + 1)dx$

ب- $\int \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}dx$

ج- $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}dx$

د- $\int \sin^4 x \cos^4 x (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)dx$

ه- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ اگر بدانیم $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2 - 5x - 3} dx$

و- $\int_0^{2\pi} \cos^{2020} x dx$

۳ روش حل مسئله

الف-  پاسخ: استفاده از روش جزء به جزء

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1)dx &= x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1}dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - \int 2dx + \int \frac{2}{x^2 + 1}dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$



ب- پاسخ: از تغییر متغیر استفاده می‌شود.

$$u = 2x^2 + 2x, \quad \Rightarrow \quad du = 2(2x + 1)dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} dx &= \int \frac{\frac{du}{2}}{u + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u + 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |2x^2 + 2x + 1| + C \end{aligned}$$



ج- پاسخ: یک رابطه بر حسب x تولید می‌شود.

$$y = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} = \sqrt{xy}, \quad \Rightarrow \quad y^2 = xy, \quad \Rightarrow \quad y = x$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} dx = \int y dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$



د- پاسخ: از روابط مثلثاتی کمک گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^4 x (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx &= \int \frac{1}{16} (2 \sin x \cos x)^4 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int \frac{1}{16} \sin^4 2x \cos 2x dx \end{aligned}$$

از تغییر متغیر $u = \sin 2x$ استفاده می‌شود:

$$du = 2 \cos 2x dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{1}{16} \sin^4 2x \cos 2x dx &= \int \frac{1}{16} u^4 \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{32} \int u^4 du \\ &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{5} u^5 \right) + C \\ &= \frac{1}{160} \sin^5 2x + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \sin^4 x \cos^4 x (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) dx = \frac{1}{160} \sin^5 2x + C$$

پاسخ: 😊 -۵

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2-5x-3} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x+\frac{5}{4})^2+\frac{1}{8}} dx \\ &= e^{\frac{1}{8}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x+\frac{5}{4})^2} dx\end{aligned}$$

از تغییر متغیر استفاده می‌شود:

$$u = \sqrt{2}(x + \frac{5}{4}), \quad \Rightarrow \quad du = \sqrt{2}dx$$

انتگرال فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$e^{\frac{1}{8}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{8}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{8}} (\sqrt{\pi})$$

در رابطه فوق از این حقیقت استفاده شد که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2-5x-3} dx = e^{\frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

و- پاسخ: 😡 این انتگرال نیاز به دو نکته دارد. نکته اول مربوط به نمایش کسینوس با جملات نمایی و نکته دوم مربوط به بسط دو جمله‌ای است.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{💡}$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{💡}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^{2020} x dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2020} dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} (e^{ix} + e^{-ix})^{2020} dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} (e^{ix})^{2020-k} (e^{-ix})^k \right) dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} (e^{ix})^{2020-k} (e^{ix})^{-k} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} (e^{ix})^{2020-2k} dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} e^{i(2020-2k)x} dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} (\cos(2020-2k)x + i \sin(2020-2k)x) dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} \int_0^{2\pi} (\cos(2020-2k)x + i \sin(2020-2k)x) dx
 \end{aligned}$$

با توجه به آنکه $2020 - 2k$ یک عدد صحیح است، همواره در بازه $[0, 2\pi]$ انتگرال $\sin(2020 - 2k)x$ یا $\cos(2020 - 2k)x$ برابر با صفر است مگر در حالتی که $2020 - 2k = 0$ یا $k = 1100$ باشد. در این حالت $\cos(2020 - 2k)x = 1$ است و انتگرال آن صفر نمی‌شود.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^{2020} x dx &= \frac{1}{2^{2020}} \sum_{k=0}^{2020} \binom{2020}{k} \int_0^{2\pi} (\cos(2020-2k)x + i \sin(2020-2k)x) dx \\
 &= \frac{1}{2^{2020}} \binom{2020}{1100} \int_0^{2\pi} dx \\
 &= \frac{2\pi}{2^{2020}} \binom{2020}{1100} \\
 &= \frac{\pi}{2^{2019}} \binom{2020}{1100}
 \end{aligned}$$

اجازه بده دنیا بداند چرا اینجا هستی و
با شوق هم این کار را انجام بده!

Wayne Dyer



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com