مسائل حل شده در انتگرال :

۱) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

حل : $\boxed{x^2+2x+3=u} \longrightarrow (2x+2)\,dx=du \Rightarrow 2(x+1)\,dx=du$

$$\Rightarrow \boxed{(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\,du} \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C = u^{\frac{1}{2}}+C = \boxed{\sqrt{x^2+2x+3}+C}$$

۲) $\int x\sqrt{1+3x}\,dx \longrightarrow \boxed{1+3x=u} \Rightarrow 3\,dx = du \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$

$\hookrightarrow 3x = u-1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{u-1}{3}}$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{u-1}{3}\right)\sqrt{u}\,\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{9}\int (u-1)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C \longrightarrow$$ ساده کردن و جایگذاری

۳) $\int x^{۲} \sqrt{x+۱} \, dx \longrightarrow$ مانند قبل حل کنید

۴) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۲-۳x}}$

حل: $\boxed{۲-۳x=u} \Rightarrow -۳\,dx = du \Rightarrow \boxed{dx = -\frac{۱}{۳}du}$

$\hookrightarrow ۲-u = ۳x \rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۳}(۲-u)}$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{۱}{۳}(۲-u)\left(-\frac{۱}{۳}du\right)}{\sqrt{u}} = -\frac{۱}{۹}\int \frac{۲-u}{u^{\frac{۱}{۲}}}\,du = -\frac{۱}{۹}\int\left(\frac{۲}{u^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{u}{u^{\frac{۱}{۲}}}\right)du$$

$$= -\frac{۲}{۹}\int u^{-\frac{۱}{۲}}du + \frac{۱}{۹}\int u^{\frac{۱}{۲}}du = -\frac{۲}{۹}\,\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}} + \frac{۱}{۹}\,\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + c$$

جایگذاری و ساده کردن

ه) $\int z(z-1)^{\frac{۱}{۳}}dz$

حل: $\boxed{z-1=u} \Rightarrow \boxed{dz=du}$

$\hookrightarrow \boxed{z=u+1}$

$$\Rightarrow \int (u+1)\,u^{\frac{۱}{۳}}du = \int \left(u^{\frac{۴}{۳}}+u^{\frac{۱}{۳}}\right)du = \frac{۳}{۷}u^{\frac{۷}{۳}} + \frac{۳}{۴}u^{\frac{۴}{۳}} + c$$

$$= \frac{۳}{۷}(z-1)^{\frac{۷}{۳}} + \frac{۳}{۴}(z-1)^{\frac{۴}{۳}} + c$$

۶) $\int t(1+t)^{\frac{1}{2}}\,dt \longrightarrow$ مانند قبل حل کنید

۷) $\displaystyle\int \frac{(x^{۲}+۱-۲x)^{\frac{۱}{۵}}}{۱-x}\,dx$

حل: $\begin{cases} x^{۲}+۱-۲x=(x-۱)^{۲} \\ ۱-x=-(x-۱) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int \frac{(x-۱)^{\frac{۲}{۵}}}{-(x-۱)}\,dx \longrightarrow \boxed{x-۱=u} \Rightarrow \boxed{dx=du}$$

$$\Rightarrow \int -\frac{u^{\frac{۲}{۵}}}{u}\,du = -\int u^{-\frac{۳}{۵}}\,du = -\frac{u^{-\frac{۳}{۵}+۱}}{-\frac{۳}{۵}+۱}+C = -\frac{u^{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۲}{۵}}+C$$

$$= -\frac{۵}{۲}(x-۱)^{\frac{۲}{۵}}+C$$

۸) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

حل: $\boxed{1+x^2=u} \rightarrow 2x\,dx = du \rightarrow \boxed{x\,dx = \frac{1}{2}\,du}$

جانشانی

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\sqrt{u+\sqrt{u^3}}} = \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{\sqrt{u(1+\sqrt{u})}} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}\,\sqrt{1+\sqrt{u}}}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{1+\sqrt{u}=t} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = dt} \xRightarrow{\text{جانشانی}} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

صفحه بعد

$$\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C \xrightarrow{\text{جای گذاری } t} 2\left(1+\sqrt{u}\right)^{\frac{1}{2}} + C \xrightarrow[u]{\text{جای گذاری}} 2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

توجه کنید در این انتگرال دوبار از جانشانی استفاده کردیم

در عبارات زیر چه اشتباهی رخ داده است؟

1) $\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

2) $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^{3}}\,dx = -\frac{2}{x^{2}}\Big]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

حل : تمرین

حد زیر را حساب کنید

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3}}{n^{4}}$$

(یادآوری: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3}}{n^{4}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^{3}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} = \Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ \boxed{b=1} \end{cases} \\ f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^{3} \rightarrow \boxed{f(x) = x^{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{3}}{n^{4}} = \int_{0}^{1} x^{3}\,dx = \frac{x^{4}}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

تابع f و عدد a را طوری پیدا کنید که برای هر $x>0$:

$$4+\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,dt = 2\sqrt{x}$$

حل: از دو طرف رابطه مشتق می‌گیریم، داریم:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xRightarrow{x>0} \boxed{f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}} \Rightarrow f(t)=\frac{t}{\sqrt{t}} \rightarrow \frac{f(t)}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow 4+\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x} \Rightarrow 4+\left[2\sqrt{t}\right]_a^x = 2\sqrt{x} \Rightarrow 4+2\sqrt{x}-2\sqrt{a}=2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 4-2\sqrt{a}=0 \Rightarrow 4=2\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\, dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا داخل قدر مطلق را در بازه $[-1, 2]$ تعیین علامت می‌کنیم

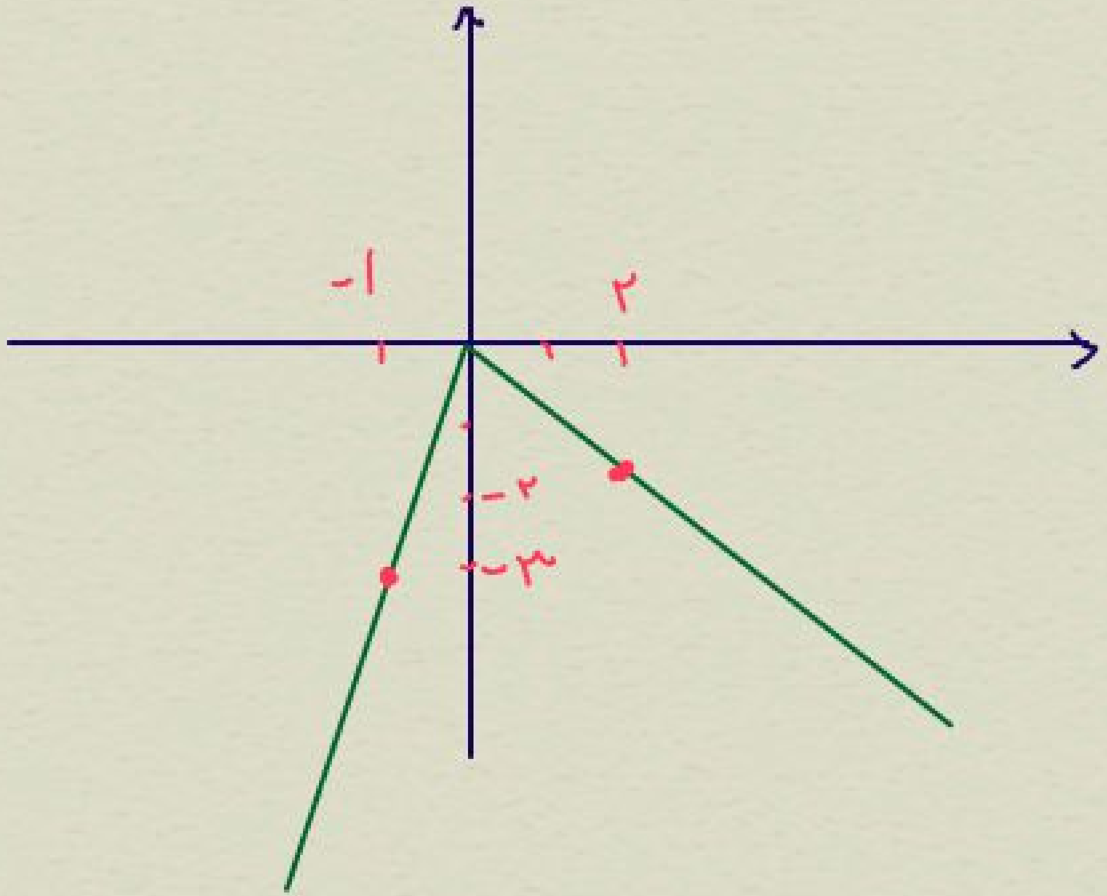
$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \\ \hline x & - & 0 & + \end{array}$$

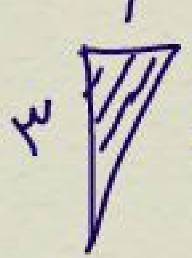
پس قرار می‌دهیم $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\, dx = \int_{-1}^{0} (x + 2x)\, dx + \int_{0}^{2} (x - 2x)\, dx = \int_{-1}^{0} 3x\, dx + \int_{0}^{2} -x\, dx$$

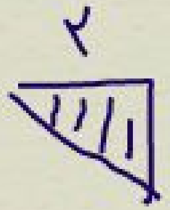
$$= 3\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = -\frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{-7}{2}$$

توضیح سوال قبل :





$$= \frac{1}{2}(1\times 3) = \frac{3}{2}$$



$$= \frac{1}{2}(2\times 2) = \frac{4}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$$

و همانطور که دیدید مقدار انتگرال معین قرینه این عدد شد.

موفق باشید