علم آمار: علم جمع آوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها)، علم آمار می‌باشد.

داده: عددهای داخل هر مسئله آماری را «داده‌های آماری» می‌نامند به عبارت دیگر «اطلاعات عددی» همان داده‌ها هستند.

جدول داده‌های آماری: برای دسترسی سریع‌تر و آسان‌تر به اطلاعات یک مسئله آماری، آن‌ها را در جدولی به نام «جدول داده‌های آماری» مرتب و دسته‌بندی می‌کنیم.

دامنه‌ی تغییرات: فاصله‌ی بین کم‌ترین و بیش‌ترین داده‌های هر مسئله آماری می‌باشد.

مثال: در نمره‌های درس ریاضی یک کلاس دامنه تغییرات از ۰ تا ۲۰ می‌باشد.

دسته: فاصله‌ی مساوی از داده‌های آماری است که در تعداد مختلف ایجاد می‌شود.

مثال: در نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۰ تا ۵، ۵ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۵، ۱۵ تا ۲۰ می‌توانند دسته‌بندی باشند.

فراوانی: تعداد داده‌های موجود در هر دسته «فراوانی» آن دسته نامیده می‌شود که آن را با عدد نمایش می‌دهیم.

خط نشان: تعداد داده‌های موجود در هر دسته می‌باشد که آن را با «چوب خط» نمایش می‌دهیم.

مثال: نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره به شرح زیر می‌باشد. جدول داده‌های آماری آن را در چهار دسته تنظیم کنید.

۸ ۱۴ ۱۹ ۱۲   ۱۱ ۱۲/۵ ۱۳ ۱۴/۵

۲۰ ۲ ۱۷ ۱۰/۵   ۹ ۲۰ ۱۸ ۱۶

پاسخ:

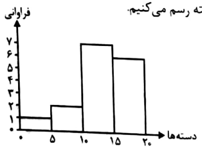
فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
۱	|	$0 \le x < 5$
۲	||	$5 \le x < 10$
۷	~~||||~~ ||	$10 \le x < 15$
۶	~~||||~~ |	$15 \le x < 20$
۱۶	-	جمع

نمودارها: پس از جمع آوری و دسته‌بندی اطلاعات در یک جدول می‌توان آن‌ها را در یک نمودار به نمایش گذاشت تا نتایج حاصل شده روشن‌تر و ساده‌تر ارائه شوند. در انواع نمودارها می‌توان از نمودار «ستونی» برای مقایسه‌ی تعداد داده‌ها، نمودار «خط شکسته» برای نشان دادن تغییرات در مدتی مشخص، نمودار «تصویری» برای مقایسه‌ی داده‌های تقریبی و نمودار «دایره‌ای» برای نشان دادن تعداد یا درصد داده‌ها نسبت به کل داده‌ها استفاده کرد.

نمودار ستونی (بلوکی): از دو محور عمود بر هم تشکیل می‌شود که روی محور افقی «حدود دسته‌ها» و روی محور عمودی «فراوانی» نوشته می‌شود. سپس از حدود هر دسته، مستطیلی تا فراوانی مربوط به آن دسته رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار بلوکی مربوط به مثال قبل را رسم کنید.

پاسخ:

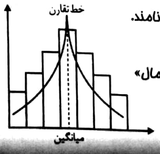


نکتـه

۱- در رسم نمودار بلوکی، اگر بلوک‌ها قرینه‌ی یکدیگر رسم شوند، نمودار را «متقارن» می‌نامند.

۲- در نمودار بلوکی متقارن، میانگین داده‌ها در دسته‌ی وسط قرار میگیرد.

۳- اگر نمودار بلوکی متقارن باشد در اصطلاح می‌گویند داده‌ها به صورت «طبیعی یا نرمال» توزیع شده‌اند.



میانگین: میانگین هر تعداد از داده‌های آماری از حاصل تقسیم جمع آن‌ها بر تعداد آن‌ها به دست می‌آید.

$\boxed{\bar{x}=\frac{s}{n}}$

$\bar{x}$ = میانگین s = مجموع داده‌ها n = تعداد داده‌ها

مثال: نمرات یک دانش آموز در درس علوم ۲۰، ۱۴، ۱۷ و ۱۸ می‌باشد. میانگین نمرات او را به دست آورید.

پاسخ:

$$\bar{x}=\frac{۲۰+۱۴+۱۷+۱۸}{۴}=\frac{۶۹}{۴}=۱۷/۲۵$$

متوسط دسته: میانگین هر دسته در یک جدول آماری را متوسط آن دسته می‌نامند.

متوسط دسته × فراوانی: عددی است که از حاصل ضرب ستون فراوانی در ستون متوسط دسته در هر دسته به دست می‌آید.

میانگین جدول آماری: برای محاسبه میانگین یک مسئله آماری به کمک جدول داده‌های آن از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\text{میانگین}=\frac{\text{مجموع ستون (متوسط دسته × فراوانی)}}{\text{مجموع ستون (فراوانی)}}}$$

مثال: در مثال درس اول (نمره‌های درس ریاضی یک کلاس ۱۶ نفره) جدول آماری را رسم کرده و میانگین نمره‌های کلاس را به دست آورید.

پاسخ:

متوسط × فراوانی	متوسط دسته	فراوانی	خط نشان	حدود دسته‌ها
۲/۵	۲/۵	۱	|	$۰\le x<۵$
۱۵	۷/۵	۲	||	$۵\le x<۱۰$
۸۷/۵	۱۲/۵	۷	~~||||~~ ||	$۱۰\le x<۱۵$
۱۰۵	۱۷/۵	۶	~~||||~~ |	$۱۵\le x<۲۰$
۲۱۰	ــــ	۱۶	ــــ	جمع

$$\text{میانگین}=\frac{۲۱۰}{۱۶}\simeq ۱۳/۱۲$$

مسئله‌های میانگین

مثال: میانگین نمرات ۸ درس یک دانش آموز ۱۷ می‌باشد. اگر دو درس دیگر با نمرات ۱۹ و ۲۰ به آن‌ها اضافه شود میانگین جدید را به دست آورید.

پاسخ:

مجموع = میانگین × تعداد → مجموع = ۱۷×۸ = ۱۳۶

مجموع جدید = ۱۳۶ + ۱۹ + ۲۰ = ۱۷۵
تعداد جدید = ۸ + ۲ = ۱۰
⇒ میانگین جدید $=\frac{۱۷۵}{۱۰}=۱۷/۵$

مثال: میانگین نمرات ۱۰ درس یک دانش آموز ۱۶/۵ می‌باشد. اگر از دو درس او، ۱/۵ و ۲ نمره کم کنیم میانگین جدید را به دست آورید.

پاسخ:

مجموع = ۱۰×۱۶/۵ = ۱۶۵

مجموع جدید = ۱۶۵ − (۱/۵ + ۲) = ۱۶۱/۵
تعداد جدید = ۱۰ (تغییر نکرده است)
⇒ میانگین جدید $=\frac{۱۶۱/۵}{۱۰}=۱۶/۱۵$

مثال: میانگین تولیدات یک کارخانه در ۶ ماه اول سال ۱۴۰۰ قطعه می‌باشد. اگر تولیدات کارخانه در هر ماه ۱۰۰ قطعه بیش‌تر شود میانگین جدید را به دست آورید.

پاسخ:

مجموع = ۶×۱۴۰۰ = ۸۴۰۰ افزایش تولید = ۶×۱۰۰ = ۶۰۰

مجموع جدید = ۸۴۰۰ + ۶۰۰ = ۹۰۰۰
تعداد جدید = ۶ (تغییر نکرده است)
⇒ میانگین جدید $=\frac{۹۰۰۰}{۶}=۱۵۰۰$

در ریاضی احتمال اتفاق افتادن هر پیشامد با نسبت تعداد اتفاق افتادن آن پیشامد به تعداد کل اتفاقات مساوی است.

$$\text{احتمال رخ دادن یک اتفاق (پیشامد)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که «پشت» بیاید چه قدر است؟

پاسخ:

۱ = حالت مطلوب (پشت)

۲ = همه‌ی حالت‌ها (پشت و رو)

$\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۱}{۲}$

مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال این که «زوج» بیاید چه قدر است؟

پاسخ:

۳ = حالت مطلوب (۲,۴,۶)

۶ = همه‌ی حالت‌ها (۱,۲,۳,۴,۵,۶)

$\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

مثال: عددهای طبیعی یک رقمی را روی کارت‌ها نوشته و یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال این که «عدد اول» بیاید چه قدر است؟

پاسخ:

۴ = حالت مطلوب (۲,۳,۵,۷)

۹ = همه‌ی حالت‌ها (۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹)

$\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۴}{۹}$

مثال: در یک کیسه ۶ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج کرده‌ایم. احتمال این که «قرمز» بیاید چه قدر است؟

پاسخ:

۵ = حالت مطلوب (۵ قرمز)

۱۵ = همه‌ی حالت‌ها (۶+۵+۴=۱۵)

$\Rightarrow$ احتمال $= \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}$

نکته ۱ اگر پیشامدی به طور قطع رخ دهد، احتمال آن مساوی یک می‌باشد.

مثال: احتمال این که از داخل کیسه‌ای حاوی ۵ مهره‌ی سبز، مهره‌ی سبز خارج شود.

نکته ۲ اگر پیشامدی به هیچ وجه رخ ندهد، احتمال آن مساوی صفر می‌باشد.

مثال: احتمال این که با پرتاب یک سکه هم «رو» بیاید و هم «پشت».

نکته ۳ در ریاضی احتمال رخ دادن هر پیشامد، یک، صفر یا عددی بین صفر و یک می‌باشد.

مثال: $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۱۰}, \frac{۲۲}{۲۳}, \dots$

مجموع احتمال‌های ممکن در یک مسئله: در هر مسئله، مجموع احتمال‌های ممکن مساوی «یک» می‌باشد.

مثال: یک سکه را پرتاب می‌کنیم. همه‌ی احتمال‌های ممکن را محاسبه و مجموع آن‌ها را بنویسید.

پاسخ:

احتمال «رو» $= \frac{۱}{۲}$

احتمال «پشت» $= \frac{۱}{۲}$

$\Rightarrow$ مجموع احتمال‌ها $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

حالت‌های ممکن در یک پیشامد: برای محاسبه‌ی هر نوع احتمال در یک مسئله، نیاز به تعداد کل حالت‌های ممکن داریم. برای به دست آوردن کل حالت‌های ممکن می‌توان از جدول نظام‌دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال ۱: دو سکه را با هم پرتاب کرده‌ایم. حالت‌های ممکن را بنویسید.

پاسخ: با استفاده از جدول کل حالت‌ها ۴ حالت می‌باشد

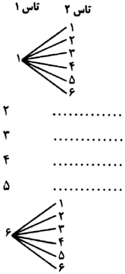
(پ ر) (پ پ) (ر پ) (ر ر)

سکه‌ی ۲	سکه‌ی ۱
رو	رو
رو	پشت
پشت	رو
پشت	پشت

مثال ۲: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. حالت‌های ممکن را بنویسید.

پاسخ: با هر شماره از تاس ۱ ممکن است ۶ شماره از تاس ۲ بیاید.

بنابراین ۳۶ احتمال مختلف وجود دارد.



مثال ۳: از داخل کیسه‌ای حاوی ۳ مهره‌ی سیاه و سفید و سبز به ترتیب مهره‌ها را به تصادف خارج کرده‌ایم. حالت‌های ممکن پیش آمده را بنویسید.

پاسخ: با توجه به جدول مقابل ۶ حالت ممکن است پیش آید.

مهره‌ی سوم	مهره‌ی دوم	مهره‌ی اول
سبز	سفید	سیاه
سفید	سبز	سیاه
سبز	سیاه	سفید
سیاه	سبز	سفید
سفید	سیاه	سبز
سیاه	سفید	سبز

به کمک رسم نمودار درختی حساب کنید در یک آزمون که سه سوال دو گزینه‌ای (درست یا نادرست) دارد:

مثال ۴:

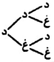
الف) احتمال این که هر سه سوال به طور تصادفی درست جواب داده شود.

ب) هیچ سوالی درست جواب داده نشود.

پ) تعداد سوالات صحیح پاسخ داده شده بیش‌تر باشد.

پاسخ:

الف) حالت (د د د) یک مورد است $P(A) = \frac{1}{8}$



ب) حالت (غ غ غ) یک مورد است $P(B)=\frac{۱}{۸}$

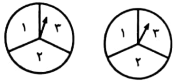
پ) {(د د غ) (د غ د) (غ د د) (د د د)} = C پس $P(C)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

مثال: دو چرخنده‌ی زیر را چرخانده‌ایم.

الف) همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال آن که هر دو چرخنده روی شماره‌ی ۲ بایستند چه قدر است؟

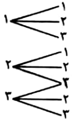
پ) احتمال این که یکی روی ۱ و دیگری روی ۳ بایستد چه قدر است؟



چرخنده‌ی دوم　　چرخنده‌ی اول

پاسخ:

الف) با توجه به نمودار مقابل ۹ حالت ممکن است اتفاق بیفتد.



ب) در یک حالت این اتفاق می‌افتد بنابراین $\frac{۱}{۹}=$ احتمال هر دو روی ۲

پ) دو حالت (۱,۳) (۳,۱) بنابراین $\frac{۲}{۹}=$ احتمال یکی ۱ و یکی ۳

اصل ضرب: برای به دست آوردن تعداد کل حالت‌های ممکن برای یک پیشامد ترکیبی کافی است **تعداد حالت‌های ممکن در هر پیشامد را در هم ضرب کنیم.**

مثال: تعداد حالت‌های ممکن برای پرتاب دو سکه　$۲\times۲=۴$

مثال: تعداد حالت‌های ممکن برای پرتاب دو تاس　$۶\times۶=۳۶$

مثال: تعداد حال‌های ممکن برای خارج کردن ۳ مهره　$۳\times۲\times۱=۶$

مثال: تعداد حالت‌های ممکن برای دو چرخنده‌ی سه قسمتی　$۳\times۳=۹$