درس ۴: جبر گزاره‌ها

جدول ارزش (یا جدول درستی) گزاره‌ها

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

در منطق ریاضی، جدول ارزش یا جدول درستی به جدولی گفته می‌شود، که در آن تمام حالت‌های ممکن درستی و نادرستی گزاره‌ها درج شده باشد.

جدول ارزش دو گزاره

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، دراین صورت، این دو گزاره در مقایسه با هم دارای چهار حالت ارزش هستند: یا هر دو درستند، یا p درست است و q نادرست، یا p نادرست است و q درست، یا هر دو نادرستند. لذا جدول ارزش متناظر با این دو گزاره را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

جدول ارزش سه گزاره

اگر p ، q و r سه گزاره‌ی دلخواه باشند، آنگاه این سه گزاره در مقایسه با هم دارای هشت حالت ارزش هستند، که ما آن را در یک جدول ارزش به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

جدول ارزش n گزاره

n گزاره‌ی دلخواه $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n در مقایسه با هم، دارای ۲^n حالت ارزش هستند.

سؤال: یک جدول ارزش برای چهار گزاره‌ی دلخواه رسم کنید.

گزاره‌های مرکب و جداول ارزش آنها

شما می‌توانید با استفاده از رابط‌های منطقی $\sim$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ، $\Longrightarrow$ و $\Longleftrightarrow$، که در درس قبل بیان شد، گزاره‌های مرکب زیادی مانند گزاره‌های زیر را بسازید:

$$p \wedge q, \quad {\sim}p \vee q, \quad {\sim}(p \vee q) \Longleftrightarrow {\sim}p, \quad (p \Rightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$$

ارزش درستی گزاره‌ی مرکب $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ به ارزش‌های درستی گزاره‌های ساده‌ی p_1، p_2، ... و p_n وابسته است؛ یک روش ساده برای نشان دادن این وابستگی استفاده از جدول ارزش می‌باشد. در جدول ارزش زیر تمام رابط‌های گزاره‌ای را که تا این لحظه فراگرفته‌اید، آورده‌ایم:

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	د

در جدول زیر، ارزش گزاره‌ی مرکب ${\sim}(p \vee q) \Longleftrightarrow {\sim}p$ را با توجه به ارزش گزاره‌های p و q تعیین کرده‌ایم:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	${\sim}(p \vee q)$	${\sim}(p \vee q) \Longleftrightarrow {\sim}p$
د	د	ن	د	ن	**د**
د	ن	ن	د	ن	**د**
ن	د	د	د	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	د	**د**

در جدول ارزش زیر ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ را با توجه به ارزش گزاره‌های p ، q و r بدست آورده‌ایم:

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
د	د	د	د	**د**
د	د	ن	ن	**ن**
د	ن	د	د	**د**
د	ن	ن	د	**د**
ن	د	د	د	**د**
ن	د	ن	ن	**د**
ن	ن	د	د	**د**
ن	ن	ن	ن	**د**

گزاره‌های مساوی

دو گزاره‌ی p و q را مساوی یا برابر می‌گوییم هرگاه هر دو گزاره یک خبر را به ما بدهند. برای نمونه، دو گزاره‌ی «پنج بزرگ‌تر از یک است.» و«یک کوچک‌تر از پنج است.» با هم مساویند. زیرا این دو گزاره تنها دو بیان متفاوت از نامساوی «$۵ > ۱$» هستند.

گزاره‌های همیشه درست (راستگوها)

گزاره‌ی مرکب $P(p_۱, p_۲, \dots, p_n)$ را «راستگو» می‌نامیم، هرگاه ارزش آن در تمام حالات منطقی درست باشد. به عبارت دیگر برای هر حالت ممکن از ارزش گزاره‌های $p_۱$ ، $p_۲$ و ... و p_n در ستون ارزش آن حرف «د» وجود داشته باشد. از این به بعد راستگوها را با نماد T نمایش می‌دهیم.

مثال ۱. برای نمونه، با رسم جدول ارزش گزاره $p \wedge q \Longrightarrow q$، دیده می‌شود که گزاره‌ی

$$p \wedge q \Longrightarrow q$$

یک راستگو است:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Longrightarrow q$
د	د	د	**د**
د	ن	ن	**د**
ن	د	ن	**د**
ن	ن	ن	**د**

استلزام منطقی

اگر گزاره‌ی شرطی $P \Longrightarrow Q$ یک راستگو باشد، در این صورت به گزاره‌ی $P \Longrightarrow Q$ یک استلزام منطقی گفته می‌شود.

روش اثبات درستی یک استلزام منطقی

از تعریف استلزام منطقی نتیجه می‌شود که اگر بخواهیم ثابت‌کنیم ترکیب شرطی $P \Longrightarrow Q$ یک استلزام منطقی است، کافی است ثابت کنیم $P \Longrightarrow Q$ یک گزاره همیشه درست است.

گزاره‌های همیشه نادرست (تناقض‌ها)

گزاره‌ی مرکب $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ را همیشه نادرست (تناقض) می‌گوییم، اگر در ستون آخر جدول ارزش آن، به ازای تمام ارزش‌های گزاره‌های p_1 ، p_2 ، p_3، ... و p_n تنها ارزش «ن» وجود داشته باشد. از این به بعد، تناقض‌ها را با نماد F نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. با رسم جدول ارزش گزاره $\sim p \wedge p$ دیده می‌شود که گـزاره $\sim p \wedge p$ یک تناقض است:

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**

گزاره‌های هم‌ارز

دو گزاره را هم‌ارز (منطقی) می‌گوییم هرگاه این دو گزاره دارای یک جدول ارزش باشند.

اگر دو گزاره‌ی $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ و $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ هم‌ارز باشند، آنگاه می‌نویسیم:

$$P(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

مثال ۳. با رسم جدول ارزش گزاره‌های $p \Longrightarrow q$ و $\sim p \vee q$ دیده می‌شود که این دو گزاره هم‌ارزند. در این حالت می‌نویسیم:

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$p \Longrightarrow q$
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**د**
ن	ن	**د**

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	**د**
د	ن	د	**ن**
ن	د	ن	**د**
ن	ن	د	**د**

مثال۴. جدول ارزش گزاره‌ی $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$ را در زیر رسم کرده‌ایم.

همانطور که دیده می‌شود، این گزاره یک گزاره‌ی راستگو است. در این حالت می‌توان نوشت:

$$[(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)] \equiv T$$

p	q	$p \Longrightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$
د	د	**د**	ن	**د**	**د**
د	ن	**ن**	ن	**ن**	**د**
ن	د	**د**	د	**د**	**د**
ن	ن	**د**	د	**د**	**د**

مثال ۵. به عنوان نمونه دیگر، در جدول ارزش گزاره $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$، که در صفحه‌ی بعد رسم شده است، دیده می‌شود که این گزاره با T هم‌ارز است. یعنی گزاره $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ یک گزاره‌ی راستگو است. در این حالت می‌نویسیم $[[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q] \equiv T$.

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge\sim p$	$[(p \vee q) \wedge\sim p] \Rightarrow q$
د	د	ن	د	ن	**د**
د	ن	ن	د	ن	**د**
ن	د	د	د	د	**د**
ن	ن	د	ن	ن	**د**

ارتباط هم‌ارزی با ترکیب دوشرطی

در مثال ۳ دیدیم که هم‌ارزی $(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$ برقرار است. ضمناً، در مثال ۴ دیدیم که ترکیب دوشرطی $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$ یک راستگو است. این ارتباط منطقی بین این دو مثال ما را بر آن می‌دارد که تعریف دیگری برای یک هم‌ارزی بیاوریم.

تعریف: دوگزاره‌ی P و Q را هم‌ارز می‌گوییم و می‌نویسیم $P \equiv Q$ ، اگر و تنها اگر ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow Q$ یک راستگو باشد. به عبارت دیگر، هم‌ارزی $P \equiv Q$ را به زبان ریاضی می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$(P \Longleftrightarrow Q) \equiv T$$

اثبات درستی یک هم‌ارزی

از این تعریف یک روش برای اثبات درستی یک هم‌ارزی بدست می‌آید. به این طریق که برای بررسی درستی هم‌ارزی $P \equiv Q$ کافی است نشان دهیم ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow Q$ یک راستگو است. با این روش به اثبات چند قضیه‌ی مهم می‌پردازیم.

قضیه ۱. (خاصیت بازتابی هم‌ارزی) هر گزاره با خودش هم‌ارز است.

اثبات: فرض کنید گزاره‌ی P یک گزاره‌ی دلخواه باشد. کافی است ثابت کنیم که ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow P$ یک راستگو است. این مطلب به‌سادگی از جدول زیر قابل ملاحظه است.:

P	P	$P \Longleftrightarrow P$
د	د	**د**
ن	ن	**د**

قضیه ۲. (خاصیت تقارنی هم‌ارزی) اگر گزاره‌ی P با گزاره‌ی Q هم‌ارز باشد، آنگاه گزاره‌ی Q با گزاره P هم‌ارز است.

اثبات: فرض کنید برای دو گزاره‌ی دلخواه P و Q هم‌ارزی $P \equiv Q$ برقرار باشد. پس طبق تعریف هم‌ارزی، ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow Q$ یک راستگو است.

راستگو بودن $P \Longleftrightarrow Q$ ایجاب می‌کند که گزاره‌های P و Q هم‌ارزش هستند. از این واقعیت نتیجه می‌شود که ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow Q$ یک گزاره همیشه درست است، پس هم‌ارزی $Q \equiv P$ برقرار است و حکم کامل می‌شود.

جدول زیر از چپ به راست خلاصه مطالب گفته شده را در بر دارد:

$P \Longleftrightarrow Q$	P	Q	$Q \Longleftrightarrow P$
د	د	د	**د**
د	ن	ن	**د**

قضیه ۳. (خاصیت تعدّی هم‌ارزی) اگر گزاره‌ی P با گزاره‌ی Q و گزاره‌ی Q با گزاره‌ی R هم‌ارز باشد، آنگاه گزاره‌ی P با گزاره‌ی R هم‌ارز است.

اثبات: فرض کنید که برای سه گزاره دلخواه P، Q و R هم‌ارزی‌های $P \equiv Q$ و $Q \equiv R$ برقرار باشند. از اینجا بنا بر تعریف هم‌ارزی، نتیجه می‌شود که ترکیب‌های دوشرطی $P \Longleftrightarrow Q$ و $Q \Longleftrightarrow R$ هر دو راستگو هستند. راستگو بودن این دو ترکیب دوشرطی ایجاب می‌کند که گزاره‌های P، Q و R هم‌ارزش هستند. از این واقعیت نتیجه می‌شود که ترکیب دوشرطی $P \Longleftrightarrow R$ یک گزاره همیشه درست است، پس هم‌ارزی $P \equiv R$ برقرار است و حکم کامل می‌شود.

جدول زیر از چپ به راست خلاصه مطالب گفته شده را در بر دارد:

$P \Longleftrightarrow Q$	P	Q	$Q \Longleftrightarrow R$	Q	R	$P \Longleftrightarrow R$
د	د	د	**د**	د	د	**د**
د	ن	ن	**د**	ن	ن	**د**

قانون هم‌ارزی (اتحاد هم‌ارزی)

هر هم‌ارزی منطقی، که درستی آن به راحتی توسط جدول ارزش گزاره‌ها قابل بررسی باشد، یک قانون هم‌ارزی یا اتحاد هم‌ارزی نامیده می‌شود.

قضیه‌ی زیر که به جبر گزاره‌ها معروف است، یکی از مهم‌ترین قضایای منطق است. در این قضیه تعدادی قانون هم‌ارزی ارائه شده است که دانشجویان به راحتی می‌توانند درستی آن‌ها را توسط جدول ارزش گزاره‌ها بررسی کنند. با به خاطر سپردن این قوانین و با استفاده از سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی در هم‌ارزی‌ها می‌توانیم قوانین هم‌ارزی بسیاری را بدون استفاده از جدول ارزش ثابت کنیم. این روش که به استدلال قیاسی معروف است، در فصول بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۴. (جبر گزاره‌ها) فرض کنید که p و q دو گزاره‌ی دلخواه، T یک گزاره‌ی همیشه درست (راستگو) و F یک گزاره‌ی همیشه نادرست (تناقض) باشد. در این صورت قوانین هم‌ارزی زیر برقرارند:

۱) **قوانین همانی:**

$$p \wedge T \equiv p, \qquad p \wedge F \equiv F, \qquad p \vee T \equiv T, \qquad p \vee F \equiv p$$

۲) **قوانین مکمل:**

$$p \vee \sim p \equiv T, \qquad p \wedge \sim p \equiv F, \qquad \sim F \equiv T, \qquad \sim T \equiv F$$

۳) **قانون نفی مقدم یا قانون نقیضین:**

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

۴) **قوانین خودتوانی:**

$$p \vee p \equiv p, \qquad p \wedge p \equiv p$$

۵) **قوانین جابه‌جایی یا تعویض‌پذیری:**

$$p \vee q \equiv q \vee p, \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۶) **قوانین شرکت‌پذیری یا انجمنی:**

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r), (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

۷) **قوانین پخشی یا توزیع‌پذیری:**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{و} \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

۸) **قوانین دمورگان:**

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q, \qquad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

۹) **قانون جمع یا ادخال فاصل:**

$$[p \Longrightarrow (p \vee q)] \equiv T, \qquad q \Longrightarrow (p \vee q)] \equiv T$$

۱۰) **قوانین اختصار یا حذف عاطف:**

$$[(p \wedge q) \Longrightarrow p] \equiv T, \qquad [(p \wedge q) \Longrightarrow q] \equiv T$$

۱۱) **قانون ترکیب شرطی:**

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

۱۲) **قانون ترکیب دو شرطی:**

$$(p \Longleftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

۱۳) **قانون عکس نقیض:**

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

۱۴) **قانون برهان خلف:**

$$[(p \wedge \sim q) \Longrightarrow (q \wedge \sim p)] \equiv (p \Longrightarrow q)$$

۱۵) **قانون قیاس یا تعدّی:**

$$\{[(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)\} \equiv T$$

۱۶) **قانون تفکیک با دو مقدمه:**

$$[(p \wedge q) \Longrightarrow r] \equiv [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

۱۷) **قانون انتزاع یا قیاس استثنایی:**

$$\{[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Rightarrow q\} \equiv T$$

۱۸) **قانون نقیض انتزاع یا قیاس دفع:**

$$\{[\sim q \wedge (p \Longrightarrow q)] \Rightarrow \sim p\} \equiv T$$

۱۹) قوانین جذب:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p, \qquad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

۲۰) قوانین شبه جذب:

$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q, \qquad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

۲۱) قانون رفع مولفه:

$$\{[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q\} \equiv T$$

۲۲) قوانین راسل یا قیاس ذوالوجهین مثبت:

$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]\} \equiv T$$
$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]\} \equiv T$$

۲۳) قوانین نقیض راسل یا قانون قیاس ذوالوجهین منفی:

$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)]\} \equiv T$$
$$\{[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \wedge \sim s) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)]\} \equiv T$$

اثبات ۲۳ قانون موجود در قضیه‌ی ۴ به راحتی توسط رسم جداول ارزش انجام‌پذیر است. در مثال‌های ۳، ۴ و ۵ نمونه‌های از این نوع اثبات را مشاهده کرده‌اید. برای جلوگیری از افزایش حجم بی‌مورد کتاب، اثبات سایر قوانین را در تمرینات به عهده خوانندگان گذاشته‌ایم.