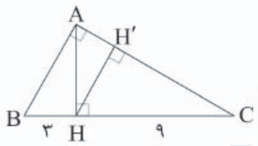
۱۲۳ **۲**



نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه برابر است با حاصل‌ضرب وتر در اندازهٔ تصویر آن ضلع در وتر. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow AB^۲=۳\times ۱۲=۳۶\Rightarrow AB=۶$$

از طرفی دو مثلث ABC و $HH'C$ متشابه‌اند، در نتیجه داریم:

$$\frac{HC}{BC}=\frac{HH'}{AB}\Rightarrow \frac{۹}{۱۲}=\frac{HH'}{۶}\Rightarrow HH'=۴/۵$$

۱۲۴ **۳** چون دو مثلث متشابه‌اند ولی قابل انطباق نیستند، پس ضلع با اندازهٔ ۴ در مثلث اولی با ضلع به اندازهٔ ۴ در مثلث دوم متناسب نیست. در نتیجه دو حالت داریم:

حالت اول:

$$\frac{۴}{۵}=\frac{a}{۴}=\frac{b}{۷}\Rightarrow a=\frac{۱۶}{۵},\ b=\frac{۲۸}{۵}\Rightarrow \text{محیط}=۴+\frac{۱۶}{۵}+\frac{۲۸}{۵}=\frac{۶۴}{۵}$$

حالت دوم:

$$\frac{۴}{۷}=\frac{a}{۵}=\frac{b}{۴}\Rightarrow a=\frac{۲۰}{۷},\ b=\frac{۱۶}{۷}\Rightarrow \text{محیط}=۴+\frac{۲۰}{۷}+\frac{۱۶}{۷}=\frac{۶۴}{۷}$$

بنابراین کم‌ترین محیط برابر $\frac{۶۴}{۷}$ است.

توجه: در هر دو حالت جای a و b می‌تواند عوض شود ولی تأثیری در محیط مثلث ندارد.

۱۲۵ **۳**

چون چهارضلعی BCDE ذوزنقه است بنابراین $DE\parallel BC$ است. در نتیجه داریم:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$$\text{BCDE محیط ذوزنقه}=۵+۱۳+۸(x+y)=۲۸\Rightarrow x+y=۱/۲۵$$

$$\text{ABC محیط مثلث}=۱۳+۱۳(x+y)=۱۳+۱۳\times ۱/۲۵$$
$$=۱۳+۱۶/۲۵=۲۹/۲۵$$

۱۲۶ **۲** **نکته:** در هر مثلث قائم‌الزاویه:

الف) میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است.

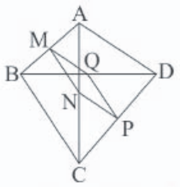
ب) اگر یک زاویهٔ ۱۵° یا ۷۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

$$\begin{cases}AM=\frac{BC}{۲}\\ AH=\frac{BC}{۴}\end{cases}\Rightarrow HM^۲=AM^۲-AH^۲=(\frac{BC}{۲})^۲-(\frac{BC}{۴})^۲$$

$$\Rightarrow HM=\frac{\sqrt{۳}}{۴}BC\xrightarrow{HM=۳}۳=\frac{\sqrt{۳}}{۴}BC\Rightarrow BC=۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AM=\frac{BC}{۲}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}\\ AH=\frac{BC}{۴}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۴}=\sqrt{۳}\end{cases}\Rightarrow AM+AH=۲\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

۱۲۷ **۱**



$$\overset{\Delta}{ABC}:\begin{cases}AM=MB\\ AN=NC\end{cases}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel BC,\ MN=\frac{۱}{۲}BC$$

$$\overset{\Delta}{BCD}:\begin{cases}DQ=QB\\ DP=PC\end{cases}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}QP\parallel BC,\ QP=\frac{۱}{۲}BC$$

$$\Rightarrow MN=QP,\ MN\parallel QP$$

بنابراین چهارضلعی MNPQ همواره متوازی‌الاضلاع است.

۱۲۸ **۳** می‌دانیم مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

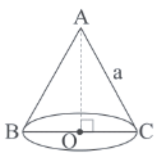
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱$$

$i=۳b$ (i، تعداد نقاط درونی و b، تعداد نقاط مرزی است.)

$$۱۳=\frac{b}{۲}+۳b-۱\Rightarrow b=۴,\ i=۳b=۱۲$$

۱۲۹ **۲** اگر از نقطهٔ $A\in d$، خط Δ را موازی d' رسم کنیم، صفحهٔ P شامل Δ و d با خط d' موازی خواهد بود. چون از نقطهٔ A فقط یک خط موازی d' می‌توان رسم کرد، بنابراین صفحهٔ P منحصربه‌فرد است.

۱۳۰ **۴** سطح مقطع ایجادشده، مثلث ABC خواهد بود.



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow a^۲=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

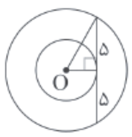
$$\text{ارتفاع مثلث ABC}=OA=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sqrt{۲}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}(\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع})$$

$$=\frac{۱}{۳}(\pi\,(۲-\frac{۶}{۴})\frac{\sqrt{۶}}{۲})=\frac{۱}{۳}(\frac{\pi}{۲}\times\frac{\sqrt{۶}}{۲})=\frac{\sqrt{۶}\pi}{۱۲}$$

۱۳۱ **۴** اگر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را r و شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را R بنامیم، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

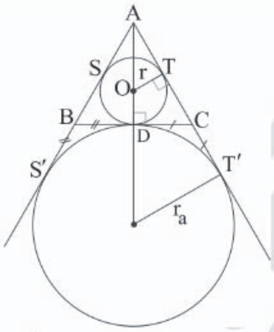
$$R^۲-r^۲=۲۵$$



مساحت دایرهٔ کوچک − مساحت دایرهٔ بزرگ = مساحت محصور بین دو دایره

$$=\pi R^۲-\pi r^۲=\pi(R^۲-r^۲)=\pi\times ۲۵=۲۵\pi$$

۱۳۲ **۳**



$$\begin{cases} BD = BS' \\ CD = CT' \\ AT' = AS' \end{cases}$$

محاطی داخلی $r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\overset{\Delta}{AOT}: \tan 30^\circ=\frac{r}{AT} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{AT} \Rightarrow AT=1$$

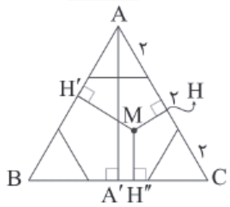
$$AB+AC+BC=2+2+2=6 \Rightarrow AB+AC+CT'+BS'=6$$

$$AB+BS'+AC+CT'=AS'+AT'=2AT'$$

$$\Rightarrow 2AT'=6 \Rightarrow AT'=3 \Rightarrow TT'=AT'-AT=3-1=2$$

۱۳۳ **۳**

مساحت شش‌ضلعی منتظم $=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6\sqrt{3} \Rightarrow a=2$



با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ساخته می‌شود. (مطابق شکل)

اگر از نقطهٔ M درون شش‌ضلعی منتظم عمودهای MH، MH' و MH'' را رسم کنیم، از هندسهٔ پایهٔ (۱) به یاد داریم که مجموع فواصل هر نقطه از سه ضلع مثلث برابر طول ارتفاع مثلث است و مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۶ است و اندازهٔ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول ضلع است. بنابراین:

$$MH+MH'+MH''=AA'=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$$

۱۳۴ **۲** اگر A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ باشد، آن‌گاه همواره داریم:

۱) $m_{AA'}=\frac{-1}{m_\Delta}$

۲) $H \in \Delta$ (وسط AA')

حال دو شرط بالا را در گزینه‌ها بررسی می‌کنیم: $m_\Delta=-3 \Rightarrow m_{AA'}=\frac{1}{3}$

۱) $A(2,3), A'(3,-2) \Rightarrow m_{AA'}=\frac{3+2}{2-3}=-5 \neq \frac{1}{3}$ ×

۲) $A(2,3), A'(-4,1) \Rightarrow m_{AA'}=\frac{3-1}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

شرط اول برقرار است، حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم. باید وسط AA' در معادلهٔ خط صدق کند.

$$\text{وسط } AA'=(\frac{2-4}{2},\frac{3+1}{2})=(-1,2)\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در معادله}}3(-1)+2+1=0$$

در معادلهٔ خط صدق کرد، پس گزینهٔ (۲) درست است. بررسی بقیهٔ گزینه‌ها به عهدهٔ دانش‌آموز!

۱۳۵ **۲** ابتدا مساحت مثلث ABC را با استفاده از قاعدهٔ هرون پیدا می‌کنیم:

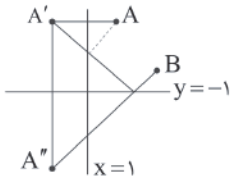
$$P=\frac{7+5+3}{2}=\frac{15}{2} \Rightarrow S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

حال مساحت مجانس مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}=K^2 S_{\overset{\Delta}{ABC}}=(\frac{2}{3})^2\times\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

۱۳۶ **۲** کوتاه‌ترین مسیر، خط مستقیم است بنابراین ابتدا قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط $x=1$ به دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم سپس قرینهٔ A' را نسبت به خط $y=-1$ به دست می‌آوریم و آن را A'' می‌نامیم.



$A'\begin{vmatrix}-1\\5\end{vmatrix}, A''\begin{vmatrix}-1\\-7\end{vmatrix}$ بنابراین کوتاه‌ترین فاصله، فاصلهٔ دو نقطهٔ A'' و B است.

$$A''B=\sqrt{(7+1)^2+(2+7)^2}=\sqrt{145}$$

۱۳۷ **۳** طبق قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=K \Rightarrow \begin{cases}\sin\hat{A}=\frac{a}{K}\\ \sin\hat{B}=\frac{b}{K}\\ \sin\hat{C}=\frac{c}{K}\end{cases} \quad (*)$$

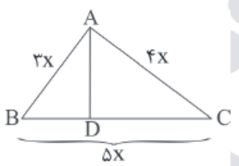
حال طبق فرض داریم:

$$\sin^2\hat{A}=2-\cos^2\hat{B}-\cos^2\hat{C}=\underbrace{1-\cos^2\hat{B}}_{\sin^2\hat{B}}+\underbrace{1-\cos^2\hat{C}}_{\sin^2\hat{C}}$$

$$\Rightarrow \sin^2\hat{A}=\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}\xrightarrow{*}(\frac{a}{K})^2=(\frac{b}{K})^2+(\frac{c}{K})^2$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}=\frac{\pi}{2}$$

۱۳۸ **۳** با توجه به قضیهٔ نیمسازها داریم:



AD نیمساز زاویهٔ $A \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AB+AC}=\frac{BD}{BD+DC}$

$$\Rightarrow \frac{3x}{7x}=\frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{7}$$

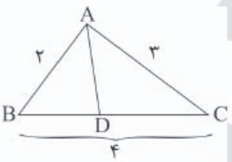
۱۳۹ ۲ با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\hat{C}\Rightarrow ۱۶=۴+۹-۱۲\cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{C}=-\frac{۱}{۴}$$

$$\sin^{۲}\hat{C}=۱-\cos^{۲}\hat{C}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۴۰ ۱



ابتدا با استفاده از قضیهٔ نیمساز داخلی اندازهٔ DC را حساب می‌کنیم. چون AD نیمساز داخلی زاویهٔ A است، بنابراین:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\xrightarrow{BD=x}\frac{۲}{۳}=\frac{x}{۴-x}\Rightarrow ۳x=۸-۲x\Rightarrow x=\frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow BD=\frac{۸}{۵},\ DC=۴-\frac{۸}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

حال طبق قضیهٔ طول نیمساز داخلی داریم:

$$AD^{۲}=AB\times AC-BD\times DC=۲\times۳-\frac{۸}{۵}\times\frac{۱۲}{۵}$$

$$=۶-\frac{۹۶}{۲۵}=\frac{۵۴}{۲۵}\Rightarrow AD=\frac{۳\sqrt{۶}}{۵}$$

۱۴۱ ۴ ابتدا برای گزاره، جدول ارزش رسم می‌کنیم.

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$p\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د
ن	ن	د	ن

با توجه به جدول ارزش در می‌یابیم که گزارهٔ داده‌شده هم‌ارز با q می‌باشد.

۱۴۲ ۲ با توجه به افراز داده‌شده مجموعهٔ A به صورت $A=\{۱,۲,۳,\{۱,۲\},\{۲,۳\}\}$ می‌باشد و ۵عضوی است. تعداد افرازهای یک مجموعهٔ ۵عضوی که فقط شامل یک مجموعهٔ زوج‌عضوی باشند، عبارتند از:

حالت اول: ---/-- ⇐ تعداد افرازها $=\binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۳}=۱۰$

حالت دوم: ----/- ⇐ تعداد افرازها $=\binom{۵}{۴}\times\binom{۱}{۱}=۵$

حالت سوم: --/-/-/- ⇐ تعداد افرازها $=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۳!}=۱۰$

⇐ تعداد کل افرازها $=۱۰+۵+۱۰=۲۵$

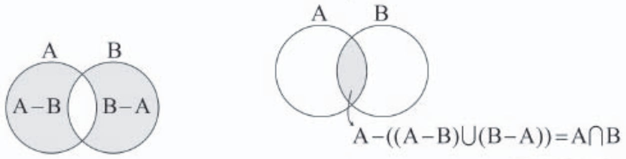
۱۴۳ ۴

$$X=A-(B\cap(C-A))=A-(B\cap(C\cap A'))$$

$$=A\cap(B'\cup(C'\cup A))=A\cap\underbrace{(A\cup B'\cup C')}_{\text{جذب}}=A$$

$$\Rightarrow Y=A-[(A-B)\cup(B-A)]$$

برای ساده کردن عبارت، از نمودار ون استفاده می‌کنیم:



۱۴۴ ۱

$$n(S)=۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

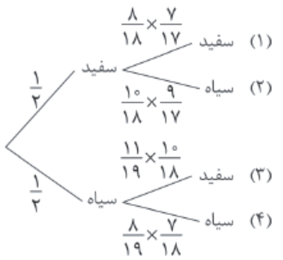
$S=\{\underline{۱۲۳},۱۲۴,۱۲۵,\underline{۱۲۶},۱۳۴,\underline{۱۳۵},۱۳۶,۱۴۵,۱۴۶,\underline{۱۵۶},$
$\underline{۲۳۴},۲۳۵,۲۳۶,۲۴۵,\underline{۲۴۶},۲۵۶,\underline{۳۴۵},۳۴۶,۳۵۶,\underline{۴۵۶},\cdots\}$

$A=\{۱۲۳,۱۲۶,۱۳۵,۱۵۶,۲۳۴,۲۴۶,۳۴۵,۴۵۶,\cdots\}$

$$\Rightarrow n(A)=۸\times۶\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸\times۶}{۱۲۰}=\frac{۴}{۱۰}=۰/۴$$

دقت کنید: هر یک از اعدادی که در S نوشته شده‌اند در اصل ۶ عدد می‌باشند که فقط یکی از آن‌ها نوشته شده و جایگشت‌های آن نوشته نشده است.

۱۴۵ ۳



$$P=\frac{P(\text{شاخهٔ ۱})}{P(\text{شاخهٔ ۱})+P(\text{شاخهٔ ۴})}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۸}\times\frac{۷}{۱۷}}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۸}\times\frac{۷}{۱۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۹}\times\frac{۷}{۱۸}}$$

$$=\frac{\frac{۱۴}{۱۵۳}}{\frac{۱۴}{۱۵۳}+\frac{۱۴}{۱۷۱}}=\frac{\frac{۱}{۱۵۳}}{\frac{۱۷۱+۱۵۳}{۱۵۳\times۱۷۱}}=\frac{\cancel{۱۵۳}\times۱۷۱}{\cancel{۱۵۳}\times۳۲۴}=\frac{۱۹}{۳۶}$$

۱۴۶ ۱

$$P(\text{عدد روشده، بزرگ‌تر از ۳})=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$P=\binom{۱۰}{۶}\times(\frac{۱}{۲})^{۶}\times(\frac{۱}{۲})^{۴}=۲۱۰\times\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{۲۱۰}{۱۰۲۴}=\frac{۱۰۵}{۵۱۲}$$

انتخاب ۶ پرتاب از ۱۰ پرتاب
احتمال ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۳
احتمال ظاهر شدن عددی کوچک‌تر یا مساوی ۳

۱۴۷ ۲ **نکته:** برای محاسبهٔ واریانس از دستور زیر می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\sigma^{۲}=\frac{\sum x_i^{۲}}{n}-(\overline{x})^{۲}$$

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}\Rightarrow\overline{x}=\frac{۵۶}{۷}=۸\qquad(n=۷)$$

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{x}}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{\sigma}{۸}\Rightarrow\sigma=۲$$

$$\sigma^{۲}=\frac{\sum x_i^{۲}}{n}-(\overline{x})^{۲}\Rightarrow ۲^{۲}=\frac{\sum x_i^{۲}}{۷}-۸^{۲}\Rightarrow\sum x_i^{۲}=۷\times(۴+۶۴)$$

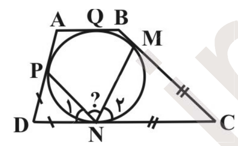
$$\Rightarrow\sum x_i^{۲}=۷\times۶۸=۴۷۶$$

هندسه ۲

-۱۱۱ *(مهرداد ملوندی)*

چون ABCD ذوزنقه است، پس:

$$\hat{D} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} = ۶۸^\circ, \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{B} = ۴۲^\circ$$



می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره، دو مماس بر آن دایره رسم کنیم، طول دو مماس با هم برابر است. پس:

$$\begin{cases} DP = DN \Rightarrow \hat{N}_1 = \dfrac{۱۸۰^\circ - \hat{D}}{۲} = \dfrac{۱۱۲^\circ}{۲} = ۵۶^\circ \\ CM = CN \Rightarrow \hat{N}_2 = \dfrac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲} = \dfrac{۱۳۸^\circ}{۲} = ۶۹^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{MNP} = ۱۸۰^\circ - (\hat{N}_1 + \hat{N}_2) = ۱۸۰^\circ - ۱۲۵^\circ = ۵۵^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

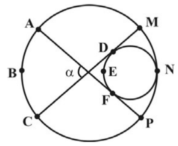
-۱۱۲ *(رضا بفشنره)*

با توجه به این‌که $\widehat{MNP} = ۹۳^\circ$ و با فرض $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = x$، مطابق شکل داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{MNP}}{۲} \Rightarrow ۲\alpha = x + ۹۳^\circ \quad (۱)$$

$$\alpha = \frac{\widehat{DNF} - \widehat{DEF}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{(۳۶۰^\circ - x) - x}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱۸۰^\circ - x \qquad (۲)$$



با جمع طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$۲\alpha + \alpha = (x + ۹۳^\circ) + (۱۸۰^\circ - x) \Rightarrow ۳\alpha = ۲۷۳^\circ \Rightarrow \alpha = ۹۱^\circ$$

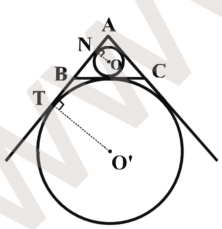
(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

-۱۱۳ *(سینا محمدپور)*

در هر مثلث کوچک‌ترین دایرهٔ محاطی، دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $\left(r = \dfrac{S}{P}\right)$ و بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی، دایرهٔ محاطی خارجی نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث $\left(r_a = \dfrac{S}{P-a}\right)$ است.

با توجه به تمرین ۶ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی، طول پاره‌خط‌های AN و AT از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$AN = P - a$ و $AT = P$



با فرض $BC = ۷$، بزرگ‌ترین دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC، نظیر این ضلع می‌باشد و در نتیجه خواستهٔ سوال، محاسبهٔ طول پاره‌خط NT است.

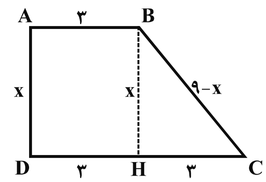
داریم:

$$\text{مماس مشترک خارجی} = NT = AT - AN = P - (P - a) = a = ۷$$

(هندسه ۲- دایره: مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۳۰)

۱۱۴- (امیرحسین ابومحبوب)

اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد، آن‌گاه رابطهٔ $AB + CD = AD + BC$ بین اضلاع آن برقرار است.

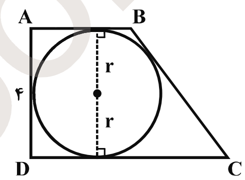


بنابراین با رسم ارتفاع BH داریم:

$$\underbrace{AB}_{3} + \underbrace{CD}_{6} = AD + BC \xrightarrow{AD=x} BC = 9 - x$$

$$\overset{\Delta}{BHC} : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow (9 - x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow x = 4 \Rightarrow AD = 4$$



حال با توجه به این که طول AD برابر با طول قطر دایره است، پس داریم:

$$AD = 2r = 4 \Rightarrow r = 2$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۷ تا ۲۹)

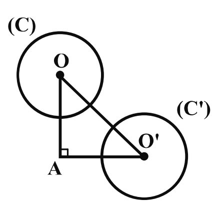
۱۱۵- (سینا محمدپور)

چون دوران تبدیلی طولپاست، پس طول شعاع‌های دو دایره با هم برابر است.

داریم:

$$R = R' \Rightarrow a + 2 = 4 - a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow R = R' = 3$$

مطابق شکل دایرهٔ C' تصویر دایرهٔ C در دوران به مرکز A و با زاویهٔ 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.



$$OA = AO' \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OO' = 6\sqrt{2}$$

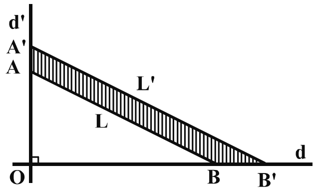
طول مماس مشترک داخلی دو دایره : $TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$

$$= \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3 + 3)^2} = \sqrt{72 - 36} = 6$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

۱۱۶- (سینا محمدپور)

اگر مساحت مثلث OAB برابر S باشد، مساحت مثلث $OA'B'$ برابر k^2S است. (دو شکل متجانس، همواره متشابه‌اند.)



$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{1}{2} OA \times OB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

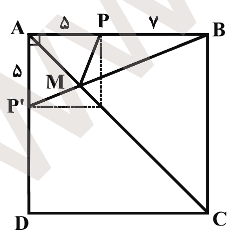
$$S_{AA'B'B} = S_{\overset{\Delta}{OA'B'}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} = k^2S - S = (k^2 - 1)S$$

$$\xrightarrow[S=\frac{\sqrt{3}}{18}]{k=\sqrt{\sqrt{3}+1}} S_{AA'B'B} = (\sqrt{3} + 1 - 1)\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{1}{6}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۴۵ تا ۵۰)

۱۱۷- (محمد خندان)

اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطهٔ M به‌طوری که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کم‌ترین مقدار $PM + BM$ را پیدا کنیم. (مقدار $PB = 7$ مشخص است.) برای این‌کار از روش هرون کمک می‌گیریم. نقطهٔ P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می‌نامیم. نقطهٔ M محل برخورد $P'B$ با AC است.



با توجه به شکل داریم:

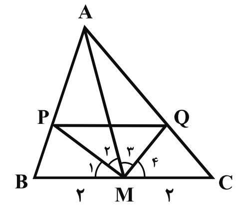
$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$

$$\overset{\Delta}{BAP'} : P'B^2 = \underbrace{AP'}_{5}{}^2 + \underbrace{AB}_{12}{}^2 \Rightarrow P'B = 13$$

$$\text{محیط مثلث } PBM = \underbrace{PM + BM}_{13} + \underbrace{PB}_{7} = 20$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی: صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۱۱۸- *(محمد خندان)*



با توجه به قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AMB}: \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{۶}{۲} = ۳ \\ \overset{\Delta}{AMC}: \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{۶}{۲} = ۳\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AQ}{QC}$$

بنابراین با توجه به عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $PQ \parallel BC$ است.

در نتیجه داریم:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AP+BP} = \frac{AM}{AM+BM} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow PQ = \frac{۳}{۴}BC = \frac{۳}{۴} \times ۴ = ۳$$

حال با توجه به این‌که MP و MQ نیمساز زوایای داخلی در دو مثلث AMB و AMC هستند، می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ + \hat{M}_۴ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow[\hat{M}_۳=\hat{M}_۴]{\hat{M}_۱=\hat{M}_۲}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۲ + \hat{M}_۳ = ۹۰^\circ$$

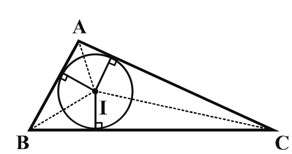
پس مثلث PMQ قائم‌الزاویه است و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MP^۲ + MQ^۲ = PQ^۲ = ۳^۲ = ۹$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲)

۱۱۹- *(امیرحسین ابومحبوب)*

فرض می‌کنیم r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد، با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{IAB}} = \dfrac{rc}{۲} = ۷ \Rightarrow c = \dfrac{۱۴}{r} \\ S_{\overset{\Delta}{IAC}} = \dfrac{rb}{۲} = ۱۵ \Rightarrow b = \dfrac{۳۰}{r} \\ S_{\overset{\Delta}{IBC}} = \dfrac{ra}{۲} = ۲۰ \Rightarrow a = \dfrac{۴۰}{r} \end{cases}$$

از طرفی مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{IAB}} + S_{\overset{\Delta}{IAC}} + S_{\overset{\Delta}{IBC}} = ۷ + ۱۵ + ۲۰ = ۴۲$$

اکنون با توجه به قضیهٔ هرون داریم:

$$P = \frac{a+b+c}{۲} = \frac{\frac{۱۴}{r} + \frac{۳۰}{r} + \frac{۴۰}{r}}{۲} = \frac{۴۲}{r}$$

$$S = \sqrt{\frac{۴۲}{r}\left(\frac{۴۲}{r} - \frac{۱۴}{r}\right)\left(\frac{۴۲}{r} - \frac{۳۰}{r}\right)\left(\frac{۴۲}{r} - \frac{۴۰}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow ۴۲ = \frac{۱۶۸}{r^۲} \Rightarrow r = ۲$$

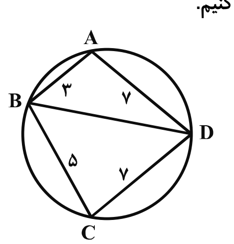
$$\Rightarrow P = \frac{۴۲}{r} = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

بنابراین اندازهٔ نصف محیط مثلث برابر ۲۱ و اندازهٔ محیط مثلث برابر ۴۲ است.

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۷۳ تا ۷۶)

۱۲۰- *(محمد خندان)*

قطر BD را رسم می‌کنیم.



چهارضلعی ABCD محاطی است، پس هر دو زاویهٔ روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند و کسینوس آنها قرینهٔ یکدیگر است. در نتیجه:

$$\cos\hat{A} = -\cos\hat{C}$$

حال با توجه به قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ABD و BCD داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABD}: BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB.AD.\cos\hat{A} \\ \overset{\Delta}{BCD}: BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ - ۲BC.CD.\cos\hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BD^۲ = ۹ + ۴۹ - ۲\times۳\times۷\times\cos\hat{A} \\ BD^۲ = ۲۵ + ۴۹ - ۲\times۵\times۷\times\cos\hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵۸ - ۴۲\cos\hat{A} = ۷۴ - ۷۰\cos\hat{C} \xrightarrow{\cos\hat{A}=-\cos\hat{C}}$$

$$۱۱۲\cos\hat{A} = -۱۶ \Rightarrow \cos\hat{A} = -\frac{۱}{۷} \Rightarrow BD = ۸$$

$$\cos\hat{A} = -\frac{۱}{۷} \Rightarrow \sin\hat{A} = \sqrt{۱ - \left(-\frac{۱}{۷}\right)^۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۷}$$

حال با توجه به قضیهٔ سینوس‌ها، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی را به‌دست می‌آوریم:

$$۲R = \frac{BD}{\sin\hat{A}} \Rightarrow R = \frac{BD}{۲\sin\hat{A}} = \frac{۸}{۲\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۷}} = \frac{۷}{\sqrt{۳}} = \frac{۷\sqrt{۳}}{۳}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۲ تا ۶۹)

هندسه ۲

-۱۱۱ (فرشاد فرامرزی)

هر n ضلعی منتظم محاط در دایره، آن را به n کمان مساوی تقسیم می‌کند، بنابراین داریم:

$$\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \widehat{CD} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

$$\widehat{M}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{36^\circ + 30^\circ}{2} = 33^\circ$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۵، ۱۶ و ۲۸)

-۱۱۲ (محمد خندان)

در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر است.

بنابراین در چهارضلعی $ABCD$ ، $AB + CD = AD + BC$ است و در نتیجه داریم:

$$\text{محیط } ABCD = 2(AB + CD) = 2(3x + 7) = 38$$

$$\Rightarrow 3x + 7 = 19 \Rightarrow x = 4$$

می‌دانیم طول مماس‌های رسم شده از یک نقطهٔ خارج دایره بر آن دایره برابر یکدیگرند، پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} BQ = BM = 3 \\ CQ = CP = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC = BQ + CQ = 7$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ و ۲۷)

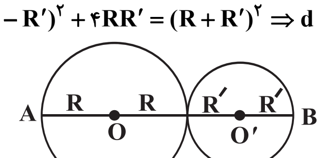
-۱۱۳ (فرشاد فرامرزی)

اگر شعاع‌های دو دایره به ترتیب برابر R و R' و طول خط‌المرکزین دو دایره برابر d باشد، آنگاه داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} : TT' = \sqrt{2R \times 2R'}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'} \Rightarrow d^2 - (R - R')^2 = 4RR'$$

$$\Rightarrow d^2 = (R - R')^2 + 4RR' = (R + R')^2 \Rightarrow d = R + R'$$



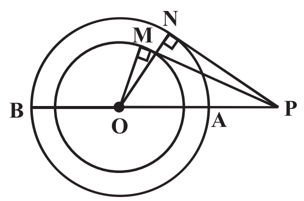
بنابراین دو دایره مماس خارج هستند و فاصلهٔ دورترین نقاط دو دایره مطابق شکل برابر مجموع قطرهای آنها است، یعنی داریم:

$$AB = 2R + 2R'$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۲۰ تا ۲۳)

-۱۱۴ (مسعود درویشی)

از نقطه P به مرکز دو دایره وصل می‌کنیم تا دایرهٔ بزرگ‌تر را مطابق شکل در در نقاط A و B قطع کند. داریم:



$$O\overset{\Delta}{P}M : OP^2 = OM^2 + PM^2 = 9 + 27 = 36 \Rightarrow OP = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PA = OP - OA = 6 - 4 = 2 \\ PB = OP + OB = 6 + 4 = 10 \end{cases}$$

طبق روابط طولی برای دایرهٔ بزرگ‌تر داریم:

$$PN^2 = PA \times PB = 2 \times 10 = 20 \Rightarrow PN = 2\sqrt{5}$$

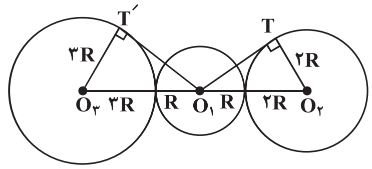
روش دوم:

$$OMP : OP^2 = OM^2 + PM^2 = 9 + 27 = 36$$

$$O\overset{\Delta}{N}P : PN^2 = OP^2 - ON^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow PN = 2\sqrt{5}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۰)

-۱۱۵ (امیرحسین ابومحبوب)



$$O_1\overset{\Delta}{T}O_2 : O_1T^2 = O_1O_2^2 - O_2T^2$$

$$= 9R^2 - 4R^2 = 5R^2$$

$$O_1\overset{\Delta}{T'}O_3 : O_1T'^2 = O_1O_3^2 - O_3T'^2 = 16R^2 - 9R^2 = 7R^2$$

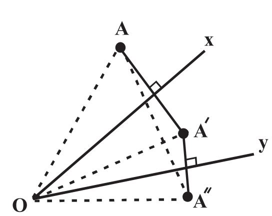
$$\frac{O_1T^2}{O_1T'^2} = \frac{5R^2}{7R^2} = \frac{5}{7}$$

(هندسه ۲- دایره: صفحه‌های۲۰ تا ۲۳)

-۱۱۶ (مسعود درویشی)

بازتاب تبدیلی طولپا است، بنابراین $OA = OA' = OA''$ است. از طرفی ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطعی که با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، یک دوران با زاویهٔ 2θ حول نقطهٔ تقاطع دو محور بازتاب است، پس $A\hat{O}A'' = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث OAA'' ، متساوی‌الاضلاع است.

بنابراین داریم:



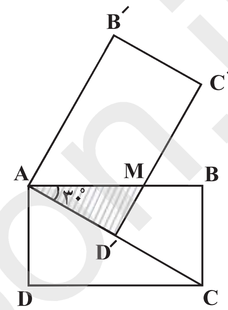
$$S_{OAA''} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}OA^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۲^۲ = \sqrt{۳}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۴)

(امیرحسین ابومحبوب)

-۱۱۷

از دوران مستطیل $ABCD$ حول نقطهٔ A و به اندازهٔ ۶۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت، مطابق شکل مستطیل $AB'C'D'$ حاصل می‌شود که نقطهٔ D' بر روی قطر AC واقع است.



دوران تبدیلی طولپاست، پس $AD' = AD = \sqrt{۳}$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰°، نصف طول وتر است، پس با فرض $MD' = x$ ، $AM = ۲x$ است و داریم:

$$A\overset{\Delta}{M}D' : AM^۲ = AD'^۲ + MD'^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳ + x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۱ \xrightarrow{x>۰} x = ۱$$

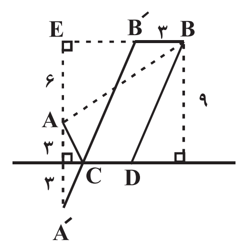
$$S_{AMD'} = \frac{۱}{۲}MD' \times AD' = \frac{۱}{۲}\times ۱ \times \sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحه‌های ۴۲ و ۴۳)

(معصومه اکبری‌صحت)

-۱۱۸

ابتدا نقطهٔ A را نسبت به رودخانه بازتاب می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید، سپس نقطهٔ B را به اندازهٔ ۳ کیلومتر (برابر طول CD) موازی با CD به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' حاصل شود.



چهار ضلعی $B'BDC$ متوازی‌الاضلاع است، پس $B'C = BD$ است. طبق مسئلهٔ هرون برای پیداکردن کوتاه‌ترین مسیر بین A و B' داریم:

$$A\overset{\Delta}{E}B : BE^۲ = AB^۲ - AE^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow BE = ۸$$

$$B'E = BE - BB' = ۸ - ۳ = ۵$$

$$A'\overset{\Delta}{E}B' : A'B'^۲ = A'E^۲ + B'E^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow A'B' = ۱۳$$

$$\Rightarrow A'C + CB' = ۱۳ \Rightarrow AC + BD = ۱۳$$

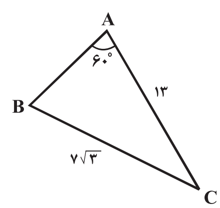
طول کوتاه‌ترین جاده $= AC + CD + BD = ۱۳ + ۳ = ۱۶$

(هندسه ۲- تبدیل‌های هندسی و کاربردها: صفحهٔ ۵۵)

(امیرحسین ابومحبوب)

-۱۱۹

مطابق شکل فرض کنید $\widehat{A} = ۶۰^\circ$ ، $BC = a = ۷\sqrt{۳}$ و $AC = b = ۱۳$ باشد. در این صورت طبق قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc \times \cos A$$

$$\Rightarrow ۱۴۷ = ۱۶۹ + c^۲ - ۲\times ۱۳ \times c \times \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow c^۲ - ۱۳c + ۲۲ = ۰ \Rightarrow (c-۲)(c-۱۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} c = ۲ \\ c = ۱۱ \end{cases}$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۶ تا ۶۹)

(محمد خندان)

-۱۲۰

طبق قضیهٔ میانه‌ها در مثلث ABC داریم:

$$AB^۲ + AC^۲ = ۲AM^۲ + \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow ۳۲ + ۷۲ = ۲AM^۲ + ۳۲$$

$$\Rightarrow AM^۲ = ۳۶ \Rightarrow AM = ۶$$

طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث AMB داریم:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AP}{AB} = \frac{۳}{۵}$$

از طرفی طبق تمرین ۱ صفحهٔ ۷۲ کتاب درسی پاره‌خط PQ موازی ضلع BC است، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{PQ}{۸} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow PQ = ۴/۸$$

(هندسه ۲- روابط طولی در مثلث: صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)