فصل سوم

مدارهای مرتبه اول RC,RL

در فصل قبل مشاهده شد برای تحلیل مدارهای الکتریکی از قانون اهم و به طور کلی از قوانین KVL و KCL استفاده می شود. در قوانین KVL و KCL به ترتیب با ولتاژها و جریان های المان های مختلف مدار سروکار داریم. اما همانطور که دیدیم ولتاژ سلف و جریان خازن به صورت مشتق در روابط ظاهر می شوند و به طور همزمان مجهول مسئله نیز ممکن است باشند. در درس معادلات دیفرانسیل با معادلاتی که مجهول و مشتق آن در معادله وجود داشت آشنا شدیم. به عبارتی در صورتی که سلف یا خازن در مدار باشد معادلات KVL و KCL به معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌شوند، که با استفاده از شرایط اولیه مدار آنها را حل خواهیم کرد. تعداد مرتبه معادله دیفرانسیل مرتبه مدار را مشخص میکند. در اینجا معادلات مرتبه اول یعنی معادلاتی که یک خازن و چند مقاومت (RC) یا یک سلف و چند مقاومت (RL) دارند بررسی خواهند شد.

مروری بر معادلات دیفرانسیل

معادله ای که علاوه بر متغیر اصلی شامل مشتقات آن متغیر هم باشد معادله دیفرانسیل نام دارد. مانند

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=f(t)$$

$$y'+4y=f(t)$$

- تعریف معادله همگن: اگر معادله دیفرانسیل فقط بر حسب متغیر اصلی و مشتقات آن باشد و شامل عدد ثابت یا تابع دیگری نباشد، معادله همگن نام دارد. به عبارت دیگر در معادلات بالا $f(t)=0$ باشد.
- تعریف معادله غیر همگن: در معادله دیفرانسیل عدد ثابت یا $f(t)$ نیز وجود داشته باشد.
- پاسخ همگن: به پاسخ یک معادله دیفرانسیل همگن پاسخ همگن y_h گفته میشود.
- پاسخ خصوصی: تابعی که در معادله غیر همگن صدق کند y_p و یک جواب آن باشد. این پاسخ شبیه $f(t)$ است.
- پاسخ کامل: مجموع پاسخ همگن و پاسخ خصوصی جواب نهایی معادله دیفرانسیل و پاسخ کامل است.

$$y=y_h+y_p$$

نکته: در پاسخ همگن ضرایب ثابت وجود دارد که از شرایط اولیه ($y(0)$ یا $y'(0)$) بدست می آیند.

حل معادلات دیفرانسیل

در درس مدارهای الکتریکی بعد از نوشتن KVL, KCL معمولا معادلات مرتبه اول و دوم بدست می آید. اگر مدار ورودی نداشته باشد فقط جواب همگن خواهیم داشت اما اگر مدار منبع مستقل به عنوان ورودی داشته باشد جواب خصوص نیز دارد که در ادامه روش حل بررسی خواهد شد.

جواب همگن

برای بدست آوردن جواب همگن این معادلات ریشه های معادله مشخصه را بر حسب متغیر s بدست آورده که این ریشه ها به صورت توان در جملات e^{st} به همراه یک ضریب ثابت پشت این عبارت ظاهر میشوند.

۱- مرتبه اول

$$\frac{dy}{dt}+2y=0 \quad \text{یا} \quad y'+2y=0$$

معادله مشخصه $\quad s+2=0 \Rightarrow s=-2 \Rightarrow$ جواب $\; y(t)=Ce^{-2t}$

C از شرایط اولیه یعنی y0 بدست می آید.

۲- مرتبه دوم

حالت اول) معادله مشخصه مرتبه دوم دو ریشه حقیقی داشته باشد.

$$y''+3y'+2y=0$$

$$s^2+3s+2=0 \Rightarrow s=-2\ ,\ s=-1 \Rightarrow y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-t}$$

C1 ,C2 از شرایط اولیه یعنی y0 و y’0 بدست می آیند.

حالت دوم) معادله مشخصه مرتبه دوم ریشه مضاعف داشته باشد.

$$y''+2y'+y=0$$

$$s^2+2s+1=0 \Rightarrow s=-1 \quad s=-1 \qquad y=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$$

حالت سوم) معادله مشخصه مرتبه دوم ریشه مختلط داشته باشد.

$$y''+6y'+11y=0$$

$$s^2+6s+11=0 \Rightarrow s=-3\pm j\sqrt{2} \qquad y=e^{-3t}\left(C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t\right)$$

جواب خصوصی

اگر مدار یک منبع مستقل به عنوان ورودی داشته باشد تابع f(t) در معادله دیفرانسیل ظاهر میشود.

$$y''+y'+y=f(t)$$

در این حالت علاوه بر جواب همگن یک جواب خصوصی نیز وجود خواهد داشته که جواب نهایی از جمع این دو بدست خواهد آمد. این جواب خصوصی به تابع f(t) بستگی دارد. برای بدست آوردن آن یک تابع دقیقا مشابه با f(t) با ضرایب مجهول در معادله جای گذاری میکنیم تا ضریب مجهول یعنی در واقع جواب خصوصی بدست آبد. در پایان جواب کل جمع جواب همگن و جواب خصوصی خواهد بود.

مثال:

$$y' + y = e^{2t} \qquad y(0) = 2$$

$$s + 1 = 0 \Rightarrow s = -1 \Rightarrow y_h = Ce^{-t}$$

$$y_p = Ae^{2t} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (Ae^{2t})' + Ae^{2t} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{2t} + Ae^{2t} = e^{2t} \Rightarrow 2A + A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

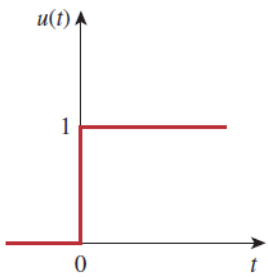
$$y_p = \frac{1}{3}e^{2t} \qquad y = y_h + y_p = Ce^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

قبل از بررسی مدارهای مرتبه اول با انواع ورودی مدار $f(t)$ آشنا خواهیم شد.

تابع پله

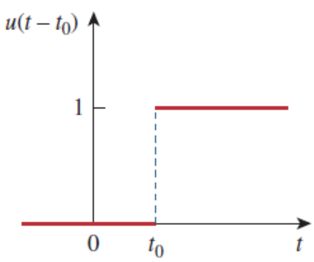
یکی از مهم‌ترین ورودی‌های تست سیستم، تابع پله (Step) واحد است. منابع یا ورودی های مدار در لحظه مشخصی وارد مدار میشوند و قبل از آن صفر بوده اند، برای نشان دادن لحظه شروع و ناپیوستگی ورود منابع به مدار از تابع پله استفاده میشود. در واقع از تابع پله برای نشان دادن تغییر ناگهانی در ولتاژ یا جریان استفاده می‌کنیم. این کار مخصوصاً در سیستم‌های کنترل و کامپیوترهای دیجیتال کاربرد دارد.

تابع پله $u(t)$ به بیان ریاضی با معادله و نمودار زیر نشان داده میشود.



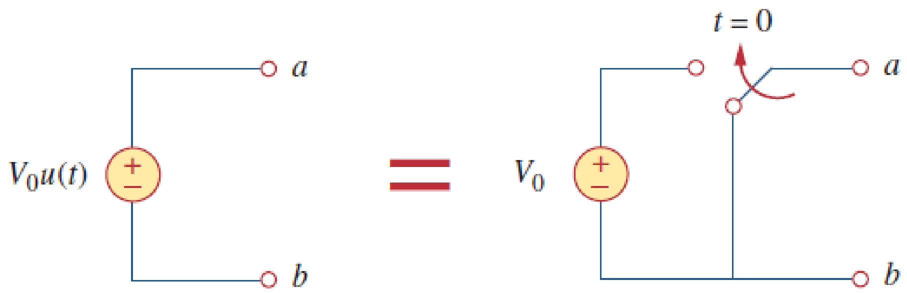
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

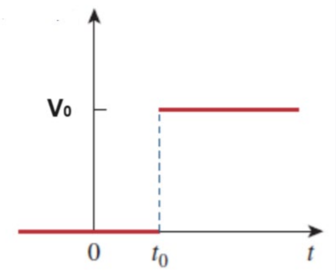
اگر تغییر ناگهانی به جای $t=0$ در $t=t_0$ رخ دهد، تابع پله به‌شکل زیر خواهد بود، در این حالت می‌گوییم، t_0 ثانیه تاخیر یافته است.



$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

برای مثال ورود منبع ولتاژ طبق شکل زیر در زمان t_0 با استفاده از کلیدزنی را می‌توان با تابع پله واحد به صورت زیر نشان داد:

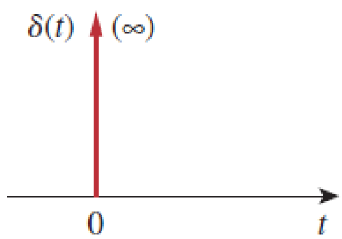




$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ V_0, & t > t_0 \end{cases} \qquad v(t) = V_0 u(t - t_0)$$

تابع ضربه واحد

مشتق تابع پله تابع ضربه یا دلتا $\delta(t)$ است که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

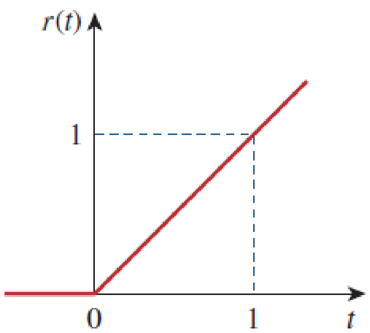


$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{تعریف نشده}, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \qquad \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

هیچ منبعی در واقع نمیتواند تابع ضربه باشد زیرا باید در زمان صفر مقدار بینهایت داشته باشد. جریان‌ها و ولتاژهای ضربه‌ای مدار، بر اثر کلیدزنی یا منابع ضربه‌ای ایجاد می‌شوند. تابع ضربه را می‌توان به‌عنوان یک شوک در نظر گرفت یا به‌عنوان یک پالس بسیار کوتاه با مساحت واحد تصور کرد. برای مثال رعد و برق میتواند تابع ضربه باشد. این تابع برای مدلسازی ریاضی در برخی مدارات استفاده شود.

تابع شیب واحد

تابع شیب $r(t)$ انتگرال تابع پله است.

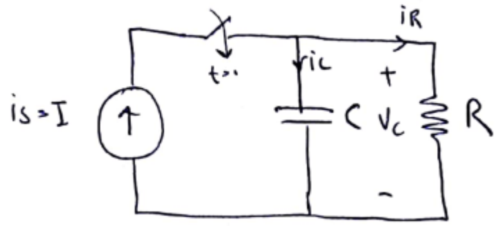


$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & t \ge 0 \end{cases} \qquad r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)\, dt$$

نکته: سایر ورودیهای رایج مانند توابع سینوسی در فصل پنجم بررسی خواهند شد.

بررسی مدار RC

در مدار زیر یک مقاومت، خازن و منبع وجود دارد. با فرض اینکه خازن شارژ داشته است (در اینجا صفر در نظر گرفته شده است) معادلات حاکم بر مدار را تشکیل می‌دهیم:



$$i_C + i_R = I$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$i_R = \frac{V_C}{R} \quad \Rightarrow \quad C\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{R} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{I}{C} \qquad V_C(0) = 0$$

طرف راست معادله دیفرانسیل غیر صفر است. بنابراین جواب نهایی دو قسمت در نظر میگیریم که جواب همگن و جواب خصوصی نام دارند.

$$V_C = V_h + V_p$$

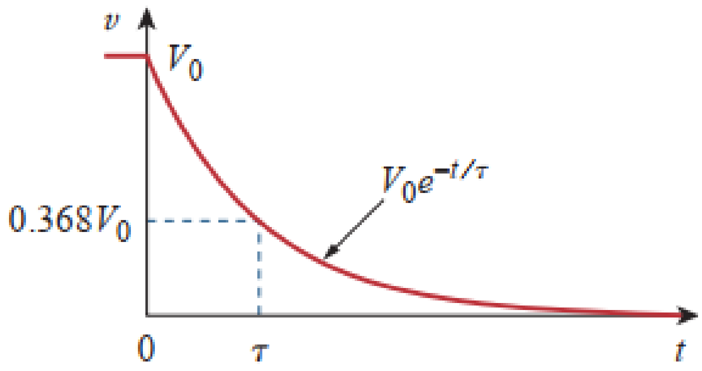
برای معادله همگن داریم

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0 \qquad V_C(0) = V_0$$

$$S + \frac{1}{RC} = 0 \quad \Rightarrow S = -\frac{1}{RC} \quad \Rightarrow V_C = K e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = K e^{-\frac{0}{RC}} \quad \Rightarrow K = V_0$$

$$\Rightarrow V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



τ ثابت زمانی مدار نام دارد و τ =RC تعریف میشود.

قسمت دوم معادله دیفرانسیل جواب خصوصی است که در واقع به ورودی یا منبع تغذیه مدار وابسته است. برای حل آن طبق روشهای درس معادلات دیفرانسیل تابعی مشابه تابع سمت راست حدس میزنیم و معادله را حل می کنیم.

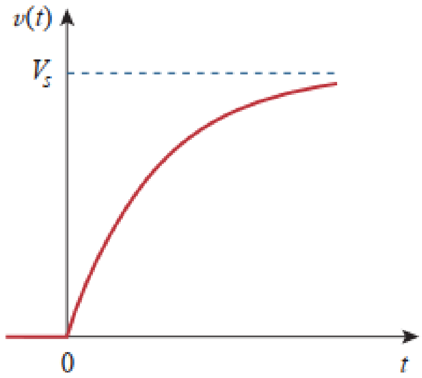
$$V_p = A \Rightarrow \frac{d(A)}{dt} + \frac{A}{RC} = \frac{I}{C}$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{A}{RC} = \frac{I}{C} \Rightarrow A = RI$$

$$\Rightarrow V_C = V_h + V_p = K e^{-\frac{t}{RC}} + RI$$

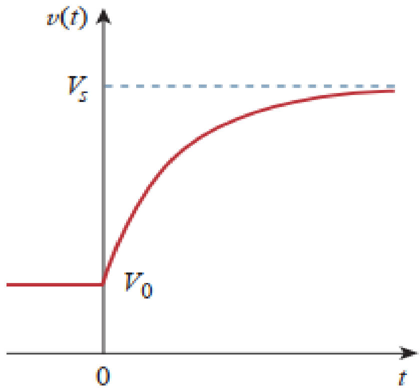
$$V_C(0) = 0 \Rightarrow 0 = K e^{-\frac{0}{RC}} + RI \Rightarrow -RI = K$$

$$\Rightarrow V_C = -RI e^{-\frac{t}{RC}} + RI = RI\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



جواب نهایی مدار جمع دو جواب بدست آمده خواهد بود.

$$V_C = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} + RI\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



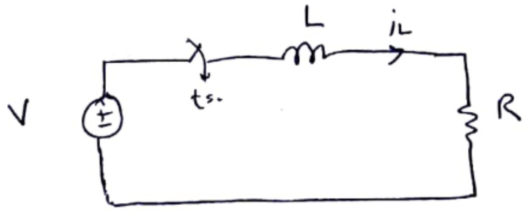
اگر پاسخ را بازنویسی کنیم، می‌توان جواب نهایی مدارهای مرتبه اول را به‌صورت زیر نوشت:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)]e^{-t/\tau}$$

که در آن، v(0)، ولتاژ اولیه در t=0+ و v(∞)، مقدار نهایی یا حالت ماندگار است.

مدار RL

اگر یک سلف و یک مقاومت داشته باشیم به طریق مشابه جواب معادله شبیه حالت قبل خواهد شد. با این تفاوت که معادله بر حسب جریان سلف نوشته شده و **ثابت زمانی به صورت τ =L/R** تعریف میشود. جریان سلف به صورت زیر خواهد بود:



$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

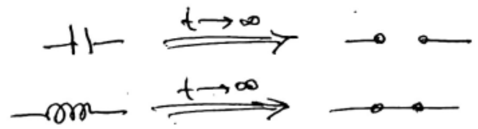
جمع بندی مدار مرتبه اول

مقدار یک کمیت در مدارهای مرتبه اول از رابطه کلی زیر بدست می آید که f میتوان ولتاژ یا جریان باشد.

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

برای بدست آوردن این رابطه ۳ مجهول اصلی وجود دارد که به صورت زیر مشخص میشوند.

۱- برای بدست آوردن مقدار تابع در بینهایت f(∞) ابتدا مدار در بینهایت تحلیل میکنیم. بدین معنی که فرض میکنیم مدت زمان زیادی گذشته باشد. بعد از گذشتن زمان زیاد خازن شارژ کامل میشود و ولتاژ ثابت دارد و دیگر جریانی از آن نمیگذرد. با توجه به اینکه در خازن جریان مشتق ولتاژ است، جریان برابر صفر میشود یعنی خازن شبیه اتصال باز عمل میکند. همچنین به صورت مشابه برای بعد از گذشتن زمان زیاد از سلف جریان آن ثابت میشود و چون ولتاژ سلف مشتق جریان است مشتق عدد ثابت برابر صفر شده و ولتاژ صفر یعنی سلف شبیه به اتصال کوتاه عمل میکند. جمع بندی اینکه برای تحلیل در بینهایت از معادل مدار باز و اتصال کوتاه برای خازن و سلف استفاده کرده و مدار را حل میکنیم.



۲- برای بدست آوردن مقدار تابع در صفر $f(0^+)$ ابتدا مدار را در $t=0^-$ تحلیل میکنیم. با توجه به پیوستگی ولتاژ خازن و جریان سلف مقدار آنها را در $t=0+$ برابر با مقدار آنها در صفر منفی است. یعنی

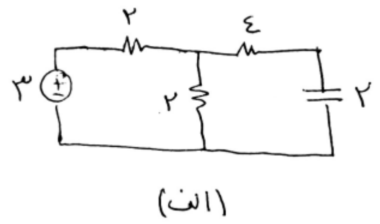
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \quad , \quad V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

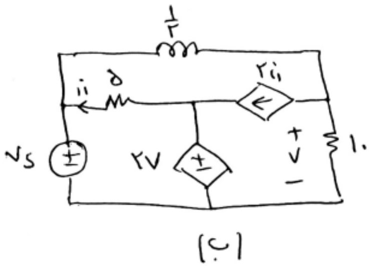
برای تحلیل در صفر منفی فرض میکنیم مدت زمان زیادی از منفی بینهایت تا صفر منفی گذشته و شبیه مرحله یک است.

۳- برای بدست آوردن ثابت زمانی τ اگر بیش از یک مقاومت در مدار داشته باشم منابع را صفر کرده (منبع ولتاژ اتصال کوتاه و منبع جریان مدار باز) و مقدار مقاومت معادل تونن از دید دو سر سلف و خازن را بدست می آوریم.

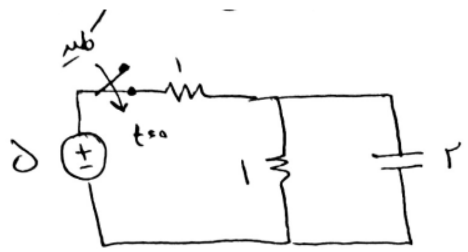
$$\tau = R_{th} C \quad \text{برای RC}$$
$$\tau = \frac{L}{R_{th}} \quad \text{برای RL}$$

مثال ۱: ثابت زمانی مدارهای زیر را بدست آورید.

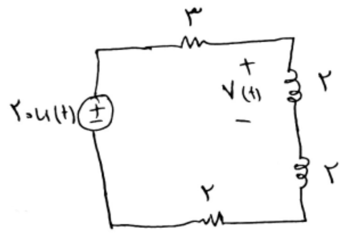




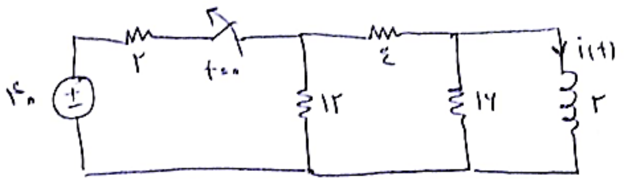
مثال۲: در مدار زیر مقدار ولتاژ خازن را بدست بیاورید.



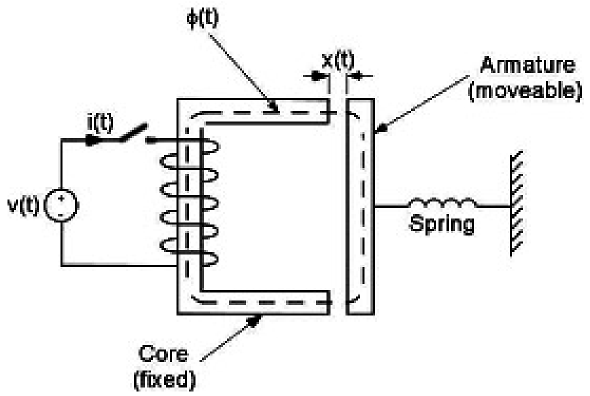
مثال ۳: در مدار زیر ولتاژ v(t) را بدست آورید.



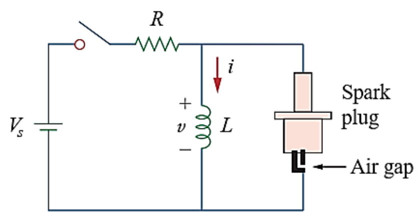
مثال ۴: در مدار زیر کلید مدت زیادی بسته بوده و در زمان صفر باز میشود جریان سلف را بدست آورید.



مثال۵: شکل زیر یک رله را نشان می‌دهد. رله به این صورت عمل میکند که اگر کلید وصل شود و سیم پیچ برقدار شود قسمت متحرک بسته شده و کار مکانیکی انجام میدهد. مدار الکتریکی رله با یک مدار RL مدل میشود. حال اگر منبع ۱۲ ولتی به رله متصل شود و مقاومت سیم پیچ رله ۱۵۰ اهم و سلف معادل سیم پیچ ۳۰ میلی هانری و برای عملکرد رله جریان ۵۰ میلی آمپر لازم باشد، بعد از بسته شدن کلید چه مدت زمان طول میکشد تا رله عمل کند؟



مثال ۶: قابلیت عدم تغییر جریان سلف را میتوان در سیستم جرقه زنی خودرو استفاده کرد. در شکل زیر این سیستم نشان داده شده است. اگر مقاومت ۴ اهم و سلف ۶ میلی هانری باشد، با استفاده از یک منبع ۱۲ ولتی و باز کردن کلید در ۱ میلی ثانیه چه ولتاژی دو سر شمع ایجاد می شود.

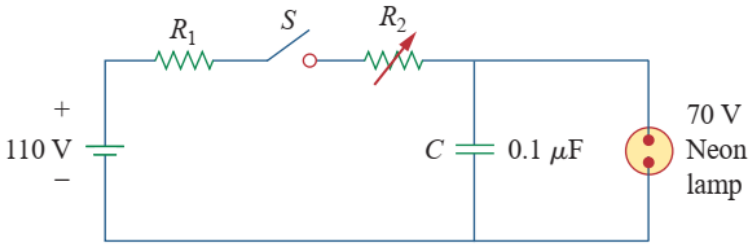


راهنمایی:

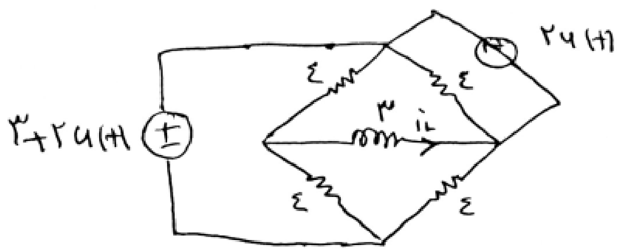
$$V = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

مثال ۷: شکل زیر یک مدار تاخیر را نشان میدهد که با استفاده از خازن ساخته شده است. در این مدار ولتاژ منبع ۱۱۰ ولت و برای روشن کردن لامپ ۷۰ ولت لازم است. اگر خازن یک میکرو فاراد و مقاومت R1 ۱.۵ مگا اهم باشد، مقدار مقاومت دوم برای ایجاد زمان تاخیر ۱ ثانیه ای را تعیین کنید.

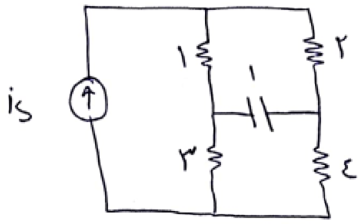
راهنمایی: $v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/\tau} = 110[1 - e^{-t/\tau}]$



مثال ۸: در مدار زیر جریان سلف را بدست آورید.



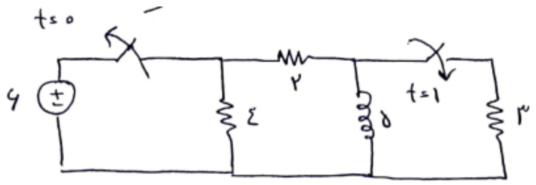
مثال ۹: مدار زیر را با استفاده از نوشتن معادله دیفرانسیل حل کنید.



مدار با دو ثابت زمانی

اگر در مدار کلید زنی به صورتی انجام شود که مقاومت دیده شده از دو سر سلف یا خازن تغییر کند، از آن لحظه به بعد ثابت زمانی متفاوت خواهد بود. برای حل چنین مداری به ازای هر بازه زمانی تغییر در مدار تحلیل را انجام میدهیم و مقدار اولیه جریان سلف یا ولتاژ خازن برای بازه بعد با مقدار نهایی در بازه قبل برابر است.

مثال۱۰: در مدار زیر جریان عبوری از سلف را برای تمام زمانها بدست آورده و رسم کنید.



جواب

$$i_L(t)=\begin{cases} ۳ & t<۰ \\ ۳e^{-۱٫۲t} & ۰<t<۱ \\ ۰٫۹\, e^{-۰٫٤(t-1)} & t>۱ \end{cases}$$