بسمه تعالی

پاسخ سوالات سیگنال کنکور ۹۰ بر اساس دفترچه 514B

مهدی تقدسی

۱۶) گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{حقیقی } x[n] \longrightarrow X^*(\omega)=X(-\omega) \qquad (۱)$$

از طرفی اگر $X(\omega)$ حقیقی باشد، $X^*(\omega)=X(\omega)$ است. در نتیجه از رابطه (۱) داریم:

$$X(\omega)=X(-\omega)$$

یعنی $X(\omega)$ زوج است. همچنین می‌دانیم که اگر $X(\omega)$ زوج باشد، $x[n]$ نیز زوج خواهد بود. پس گزینه ۴ صحیح است.

راه سریع‌تر:

می‌دانیم که:

$$\text{حقیقی و زوج } x[n] \longleftrightarrow \text{حقیقی و زوج } X(\omega)$$

تنها در صورتی $x[n]$ و $X(\omega)$ هر دو حقیقی هستند که هر دو زوج باشند.

۱۷) گزینه ۱ صحیح است.

از رابطه پارسوال داریم:

$$\int_{۰}^{۲\pi}|F(\omega)|^{۲}\,d\omega=۲\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f[n]|^{۲} \qquad (۱)$$

در اینجا $F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\mathrm{Im}[X(\omega)]$ می‌باشد. برای محاسبه $f[n]$ ابتدا عکس تبدیل فوریه $\mathrm{Im}[X(\omega)]$ را بدست می-آوریم و سپس با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در حوزه فرکانس، عکس تبدیل فوریه $F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\mathrm{Im}[X(\omega)]$ را محاسبه خواهیم نمود. با توجه به اینکه $\mathrm{Im}[z]=\frac{z-z^*}{۲j}$ می‌باشد، داریم:

$$\mathrm{Im}[X(\omega)]=\frac{X(\omega)-X^*(\omega)}{۲j}=\frac{۱}{۲j}X(\omega)-\frac{۱}{۲j}X^*(\omega)$$

با استفاده از خاصیت مزدوجی عکس تبدیل فوریه فوق برابر است با:

$$F^{-1}\{\mathrm{Im}[X(\omega)]\} = \frac{1}{2j}x[n] - \frac{1}{2j}x^*[-n]$$

حال از خاصیت مشتق‌گیری در حوزه فرکانس، عکس تبدیل فوریه $F(\omega) = \frac{d}{d\omega}\mathrm{Im}[X(\omega)]$ برابر می‌شود با:

$$f[n] = F^{-1}\left\{\frac{d}{d\omega}\mathrm{Im}[X(\omega)]\right\} = \frac{1}{j}n\left\{\frac{1}{2j}x[n] - \frac{1}{2j}x^*[-n]\right\} = -\frac{1}{2}nx[n] + \frac{1}{2}nx^*[-n]$$

در نتیجه از رابطه (۱) داریم:

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{d}{d\omega}\mathrm{Im}[X(\omega)]\right|^2 d\omega = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|-\frac{1}{2}nx[n] + \frac{1}{2}nx^*[-n]\right|^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2\left|-x[n] + x^*[-n]\right|^2$$

با بازکردن سیگمای فوق و جایگذاری مقادیر n از ۲- تا ۲ از روی شکل $x[n]$ به پاسخ 20π می‌رسیم.

ملاحظه می‌کنید که متاسفانه این تست برای کنکور از لحاظ محاسباتی نامناسب است!

توجه: عکس تبدیل فوریه $j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]$ تنها در صورتی برابر قسمت فرد $x[n]$ می‌شود که سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد که اتفاقا در این تست این‌طور نیست و اگر این تست را با این فرض حل کنید به پاسخ نادرست 24π خواهید رسید که در گزینه‌ها هم وجود دارد!

۱۸) گزینه ۲ صحیح است.

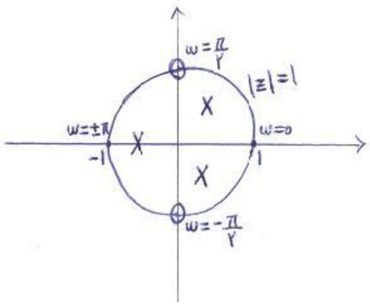
سیگنال $x(t)$ حقیقی و فرد است، پس $X(\omega)$ موهومی و فرد می‌باشد، در نتیجه $\mathrm{Re}[X(\omega)] = 0$ خواهد بود.

می‌دانیم که $\int_{-\infty}^{-\infty}X(\omega)d\omega = 2\pi x(0)$ می‌باشد. از آنجا که سیگنال $x(t)$ در $t=0$ برابر صفر است، در نتیجه $\int_{-\infty}^{-\infty}X(\omega)d\omega = 0$ خواهد بود.

سیگنال $x(t)$ فرد است، پس $X(\omega)$ نیز فرد است، یعنی $X(\omega) = -X(-\omega)$ می‌باشد.

۱۹) گزینه ۱ صحیح است.

نمودار قطب – صفر $H(z)$ به صورت زیر می‌باشد:



قطب‌ها:

$$z^{۳} = -\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} e^{j(۲k+۱)\pi} \Rightarrow z = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} e^{j\frac{(۲k+۱)\pi}{۳}} \;,\; k = -۱, ۰, ۱$$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} e^{-j\frac{\pi}{۳}} \;,\; z = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} e^{j\frac{\pi}{۳}} \;,\; z = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} e^{j\pi}$$

صفرها: $z^{۲} = -۱ \rightarrow z = \pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{۲}}$

با حرکت بر روی دایره یکه، در $\omega = \pm\frac{\pi}{۲}$ صفر داریم، پس یا گزینه ۱ صحیح است یا گزینه ۲. همچنین در نزدیکی $\omega = \pi \,,\, \frac{\pi}{۳} \,,\, -\frac{\pi}{۳}$ قطب داریم، پس پاسخ فرکانسی برای این ωها ماکزیمم دارد. در نتیجه گزینه ۱ صحیح است.

۲۰) گزینه ۲ صحیح است.

با استفاده از خاصیت مقیاس‌دهی در حوزه Z داریم:

$$(-۱)^n x[n] \longleftrightarrow X(-z)$$

همچنین ناحیه همگرایی $X(z)$ برابر $|z| > \frac{۱}{۲}$ می‌باشد، پس ناحیه همگرایی $X(-z)$ برابر $|-z| > \frac{۱}{۲}$ یا همان $|z| > \frac{۱}{۲}$ خواهد بود. پس داریم:

$$y[n] = x[n] + (-۱)^n x[n] \longrightarrow Y(z) = X(z) + X(-z) \quad , \quad |z| > \frac{۱}{۲}$$

۲۱) گزینه ۲ صحیح است.

از آنجا که $x[n]$ حقیقی است، داریم:

$$x_e[n] \xleftrightarrow{F} X_R(\omega) \qquad , \qquad x_o[n] \xleftrightarrow{F} jX_I(\omega)$$

پس عکس تبدیل فوریه $X_I(\omega)$ برابر $\frac{۱}{j}x_o[n]$ می‌باشد. حال با استفاده از خاصیت انتقال فرکانسی عکس تبدیل فوریه $Y(\omega)=۶X_I(\omega+\frac{\pi}{۲})$ برابر می‌شود با:

$$Y(\omega)=۶X_I(\omega+\frac{\pi}{۲}) \xrightarrow{F^{-۱}} y[n]=۶\left(\frac{۱}{j}x_o[n]\right)e^{-j\frac{\pi}{۲}n}=\frac{۶(-j)^n}{j}x_o[n]$$

$$\Rightarrow \quad y[۱]=\frac{۶(-j)^۱}{j}x_o[۱]=-۶\left(\frac{x[۱]-x[-۱]}{۲}\right)=-۶\left(\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}{۲}\right)=-\frac{۱}{۲}$$

۲۲) گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\frac{\pi}{۲})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\big[x[n]\big]e^{j۲n(\frac{\pi}{۲})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\big[x[n]\big]e^{-j(-\pi)n}$$

با توجه به فرمول تبدیل فوریه زمان‌گسسته، عبارت فوق به معنای تبدیل فوریه سیگنال $\mathrm{Re}\big[x[n]\big]$ به ازای $\omega=-\pi$ است. با توجه به اینکه $\mathrm{Re}[z]=\frac{z+z^*}{۲}$ می‌باشد، داریم:

$$F\left\{\mathrm{Re}\big[x[n]\big]\right\}=F\left\{\frac{x[n]+x^*[n]}{۲}\right\}=\frac{۱}{۲}F\left\{x[n]\right\}+\frac{۱}{۲}F\left\{x^*[n]\right\}=\frac{۱}{۲}X(\omega)+\frac{۱}{۲}X^*(-\omega)$$

حال تبدیل فوریه فوق به ازای $\omega=-\pi$ برابر $\frac{۱}{۲}X(-\pi)+\frac{۱}{۲}X^*(\pi)$ می‌باشد که با توجه به شکل $X(\omega)$، مساوی صفر است.

۲۳) گزینه‌های ۲ و ۳ صحیح هستند.

می‌دانیم که اگر در سیستمی پاسخ به هر ورودی شیفت‌یافته برابر خروجی شیفت‌یافته شود سیستم TI است. یعنی اگر به ازای هر $x(t)$ و $y(t)$، پاسخ به $x(t-\tau)$ برابر $y(t-\tau)$ شود، سیستم TI خواهد بود.

در این تست پاسخ به $x(t-\tau)$ برابر $y(t-\tau)$ شده است، اما $x(t)$ یک ورودی مشخص است و نه هر ورودی دلخواه! اما اگر بتوانیم هر ورودی دلخواه $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی از $x(t-\tau)$ بیان کنیم، از آنجا که سیستم خطی است، پس پاسخ به $x_1(t)$ (یعنی $y_1(t)$) نیز برابر همان ترکیب خطی از $y(t-\tau)$ می‌باشد؛ و چون $x(t)$ و $y(t)$ شرط TIبودن را رعایت می‌کنند، پس هر $x_1(t)$ و $y_1(t)$ دلخواه نیز شرط TIبودن را رعایت خواهند کرد و سیستم TI خواهد بود. پس می‌توان مسأله را به این صورت مطرح کرد:

$x(t)$ چه سیگنالی باشد تا بتوان هر سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی از $x(t-\tau)$ بیان کرد؟ یا به عبارت بهتر $x(t)$ چه سیگنالی باشد تا بتوان هر سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از $x(t)$ بیان کرد؟ قبل از پاسخ به این سؤال، یادآوری می‌کنیم که ترکیب خطی و انتقالی در حالت کلی، به شکل کانولوشن قابل بیان است. یعنی اگر بخواهیم $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از $x(t)$ بنویسیم، در حالت کلی می‌توانیم این ترکیب را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$x_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

عبارت فوق $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از $x(t)$ نمایش می‌دهد، یا به عبارت دیگر $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی از $x(t-\tau)$ بیان می‌کند. $f(\tau)$ نقش ضریب، و انتگرال نقش جمع را بازی می‌کند. $f(\tau)$ باید طوری انتخاب شود که $x_1(t)$ به صورت فوق با $x(t)$ رابطه داشته باشد. از طرفی عبارت فوق را می‌توان به شکل کانولوشن زیر بیان کرد:

$$x_1(t)=f(t)*x(t) \qquad (۱)$$

حال مسأله را به این صورت مطرح می‌کنیم:

$x(t)$ چه سیگنالی باشد تا بتوان هر سیگنال دلخواه $x_1(t)$ را به صورت رابطه (۱) بر حسب $x(t)$ نمایش داد؟ به عبارت دیگر $x(t)$ چه سیگنالی باشد تا برای هر $x_1(t)$ دلخواه یک $f(t)$ ای وجود داشته باشد تا بتوان $x_1(t)$ را با استفاده از رابطه (۱)، بر حسب $x(t)$ نمایش داد؟ برای پاسخ به این سؤال، رابطه (۱) را به ترتیب در حوزه فوریه و لاپلاس بررسی می‌کنیم.

رابطه (۱) در **حوزه فوریه** به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$X_1(\omega)=F(\omega).X(\omega)$$

حال مسأاله به این صورت مطرح می‌شود:

$X(\omega)$ چه تابعی باشد تا بتوان هر $X_1(\omega)$ دلخواه را به صورت فوق نمایش داد؟ به عبارت دیگر $X(\omega)$ چه تابعی باشد تا برای هر $X_1(\omega)$ دلخواه یک $F(\omega)$ ای وجود داشته باشد تا بتوان $X_1(\omega)$ را با استفاده از رابطه فوق بر حسب $X(\omega)$ نمایش داد؟ پاسخ به این سؤال بسیار ساده است: <u>$X(\omega)$ نباید به ازای هیچ "بازه فرکانسی" برابر صفر باشد.</u> در این صورت

$X_1(\omega)$ هر چه که باشد می‌توان آن را به صورت $X(\omega)$ ضربدر یک تابع $F(\omega)$ای نوشت (توجه کنید که به دلیل امکان حذف قطب و صفر، عبارت "بازه فرکانسی" را بکار بردیم نه "نقطه فرکانسی"!). پس با حل مسأله در حوزه فوریه باید $x(t)$ای را انتخاب کنیم که $X(\omega)$ به ازای هیچ بازه فرکانسی برابر صفر نباشد که به گزینه‌های ۲ و ۳ می‌رسیم. توجه شود که تبدیل فوریه گزینه ۱، یک پالس می‌شود که بدیهی است در بعضی از بازه های فرکانسی برابر صفر است.

اما رابطه (۱) در **حوزه لاپلاس** به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$X_1(s) = F(s).X(s)$$

حال سؤال به این صورت مطرح می‌شود:

$X(s)$ چه تبدیل لاپلاسی باشد تا بتوان هر $X_1(s)$ دلخواه را به صورت فوق نمایش داد؟ به عبارت دیگر $X(s)$ چه تبدیل لاپلاسی باشد تا برای هر $X_1(s)$ دلخواه یک $F(s)$ای وجود داشته باشد که بتوان $X_1(s)$ را با استفاده از رابطه فوق بر حسب $X(s)$ نمایش داد؟ پاسخ به این سؤال نیز بسیار ساده است: $X(s)$ هر چه می‌تواند باشد! در واقع فقط کافی است که $X(s)$ وجود داشته باشد، در اینصورت می‌توان هر $X_1(s)$ دلخواه را به صورت $X(s)$ ضربدر یک تابع $F(s)$ای نوشت. بنابراین $x(t)$ باید مطابق گزینه‌های ۲ یا ۳ باشد که تبدیل لاپلاس دارند. توجه شود که گزینه ۱ تبدیل لاپلاس ندارد. البته در حل مسأله در حوزه لاپلاس ممکن است در مورد ناحیه همگرایی ابهاماتی وجود داشته باشد ولی تا حدی می‌توان آن ابهامات را توجیه نمود. توضیحات بیشتر از حوصله حل این تست خارج است و صرفنظر می‌گردد.

با توجه به استدلال فوق و پاسخ داده شده، می‌توان نتیجه گرفت که هر سیگنال دلخواه را می‌توان بر حسب ترکیب خطی و انتقالی (و در حالت کلی کانولوشنی) از سیگنال $u(t)$ و $rect(t)$ نمایش داد.

توجه: احتمالا طراح این تست، مسأله را صرفا در حوزه فوریه بررسی کرده و به این نتیجه رسیده است که $X(\omega)$ نباید به ازای هیچ "نقطه فرکانسی" برابر صفر باشد و بنابراین فقط گزینه ۳ را به عنوان پاسخ تست در نظر گرفته است که البته این استدلال کامل نیست. یک دلیل واضح برای صحیح بودن هر دو گزینه ۲ و ۳ این است که "هر سیگنالی را که بتوان بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از $u(t)$ نوشت، حتما می‌توان آن را بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از $rect(t)$ هم نمایش داد زیرا خود سیگنال $u(t)$ را می‌توان بر حسب ترکیب خطی و انتقالی از سیگنال $rect(t)$ نوشت."

یادآوری: اگر مبحث سیستم‌های خطی در فصل دوم را به یاد داشته باشید، بیان کردیم که اگر پاسخ یک سیستم خطی به $\delta(t-\tau)$ برابر $h(t-\tau)$ (تابعی از $t-\tau$) باشد، آن سیستم TI خواهد بود. در واقع این نکته و استدلال بیان شده در این تست با هم همخوانی دارند. زیرا سیگنال $\delta(t)$ به ازای هیچ بازه فرکانسی برابر صفر نیست و همچنین تبدیل لاپلاس آن نیز وجود دارد و برابر ۱ است و می‌توان هر سیگنال دیگری را بر حسب ترکیب خطی و انتقالی (و در حالت کلی ترکیب کانولوشنی) از سیگنال $\delta(t)$ نوشت.

۲۴) گزینه ۳ صحیح است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * h[-n] \quad \Rightarrow \quad Y(z) = H(z).H\left(\frac{۱}{z}\right) = H(z).H(z^{-۱}) \qquad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$Y(z) = \frac{۹z}{(۳z-۱)(۳-z)} = \frac{۱}{(z-\frac{۱}{۳})(z^{-۱}-\frac{۱}{۳})} = \frac{۱}{(z-\frac{۱}{۳})} \cdot \frac{۱}{(z^{-۱}-\frac{۱}{۳})} \qquad (۲)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) و این نکته که سیستم $H(z)$ علی و پایدار است (همه قطب‌ها داخل دایره یکه هستند)، داریم:

$$H(z) = \frac{۱}{z-\frac{۱}{۳}} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{z^{-۱}}{۱-\frac{۱}{۳}z^{-۱}} \;,\; |z| > \frac{۱}{۳} \quad \longrightarrow \quad h[n] = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱} u[n-۱]$$

$$A = \sum_{n=۰}^{+\infty} h[n] = \sum_{n=۰}^{+\infty}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-۱} u[n-۱] = ۳\sum_{n=۱}^{+\infty}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n} = ۳ \times \frac{(\frac{۱}{۳})}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

$$B = \sum_{n=۰}^{+\infty} h^{۲}[n] = \sum_{n=۰}^{+\infty}\left(\frac{۱}{۹}\right)^{n-۱} u[n-۱] = ۹\sum_{n=۱}^{+\infty}\left(\frac{۱}{۹}\right)^{n} = ۹ \times \frac{(\frac{۱}{۹})}{۱-\frac{۱}{۹}} = \frac{۹}{۸}$$

۲۵) گزینه ۲ صحیح است.

$$S_۱: \quad y(t) = \int_{۰}^{+\infty} e^{-۲\tau} x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-۲\tau} u(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * e^{-۲t}u(t)$$

سیستم فوق LTI است و $h(t) = e^{-۲t}u(t)$ می‌باشد. داریم:

$$H(s) = \frac{۱}{s+۲} \;,\; \mathrm{Re}[s] > -۲$$

از آنجا که H(s) صفری در ناحیه همگرایی خود ندارد، پس سیستم معکوس‌پذیر است.

$$S_2: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2|\tau|} x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|\tau|} x(t-\tau) u(t-\tau) d\tau = x(t)u(t) * e^{-2|t|}$$

ورودیِ لحظات منفی (به دلیل وجود $u(t)$) به خروجی منتقل نمی‌شود. پس سیستم معکوس‌ناپذیر است. این موضوع از روی خود انتگرال نیز به وضوح مشخص است؛ متغیر انتگرال (τ) از $-\infty$ تا t تغییر می‌کند، پس آرگومان ورودی ($t-\tau$) از $+\infty$ تا 0 تغییر خواهد کرد. در نتیجه ورودیِ لحظات منفی هیچگاه به خروجی منتقل نمی‌شوند.

۲۶) گزینه ۴ صحیح است.

این نوع سوالات را می‌توان با توجه به تعریف و مفهوم دقیق خواص سیستم‌ها تحلیل کرد. ما در اینجا برای سادگی و درک بهتر ابتدا با مثال نقض شروع می‌کنیم:

بررسی تغییرپذیری با زمان: فرض کنید رابطه سیستم تغییرپذیر با زمان S_1 به صورت $y(t) = x(2t)$ و رابطه سیستم تغییرپذیر با زمان S_2 به صورت $y(t) = x(\frac{t}{2})$ باشد. در این صورت رابطه سیستم کلی به صورت $y(t) = x(t)$ خواهد بود که تغییر ناپذیر با زمان است.

سیستم اول به ورودی شیفت‌یافته به مقدار t_0، خروجی شیفت‌یافته به مقدار $\frac{t_0}{2}$ می‌دهد. همچنین سیستم دوم به ورودی شیفت-یافته به مقدار $\frac{t_0}{2}$، خروجی شیفت‌یافته به مقدار t_0 می‌دهد. در نتیجه هیچ‌کدام از دو سیستم TI نیستند ولی سیستم کلی TI می‌شود، زیرا در کل پاسخ به ورودی شیفت‌یافته به مقدار t_0، خروجی شیفت‌یافته به مقدار t_0 خواهد بود. در واقع TV بودن دو سیستم، همدیگر را خنثی می‌کنند و سیستم کل TI می‌شود.

بررسی پایداری: فرض کنید رابطه سیستم پایدار S_1 به صورت $y(t) = -1$ و رابطه سیستم ناپایدار S_2 به صورت $y(t) = \begin{cases} t & , \; x(t) \geq 0 \\ 2 & , \; x(t) < 0 \end{cases}$ باشد. در این صورت رابطه سیستم کلی به صورت $y(t) = 2$ خواهد بود (چرا؟)؛ که سیستمی پایدار است.

در واقع نکته اصلی اینجاست که سیستم ناپایدار لزوما به همه ورودی‌های کراندار پاسخ بیکران نمی‌دهد، بلکه کافی است که حداقل به یک ورودی کراندار، پاسخ بیکران دهد. بنابراین ممکن است که اصلا در خروجی سیستم اول، آن سیگنالی که سیستم دوم به آن پاسخ بیکران می‌دهد ایجاد نشود. در مثالی که در بالا بیان شد، سیستم پایدار اول، فقط خروجی ۱- ایجاد می‌کند؛ از طرف دیگر سیستم ناپایدار دوم اتفاقا به ورودیِ ۱- (از ضابطه دوم) پاسخ کراندار ۲ می‌دهد. در نتیجه خروجی سیستم دوم هیچگاه نامحدود نخواهد شد و بنابراین سیستم کلی پایدار است.

۲۷) گزینه ۳ صحیح است.

ورودی داده شده (پالس از ۳- تا ۳) را $x_1(t)$ می‌نامیم.

می‌دانیم در یک سیستم خطی اگر یکی از ورودی‌ها ترکیب خطی از ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز همان ترکیب از خروجی‌های دیگر خواهد بود. پس باید سعی کنیم ورودی $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی از سیگنال $\cos\omega_\circ t$ بنویسیم. برای این کار می‌توانیم از رابطه‌ی عکس تبدیل فوریه استفاده نماییم؛ زیرا تبدیل فوریه، یک سیگنال را بر حسب نمایی‌هایی به شکل $e^{j\omega_\circ t}=\cos\omega_\circ t+j\sin\omega_\circ t$ تجزیه می‌کند. در حالت کلی داریم:

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\sin\omega t\,d\omega \qquad (1)$$

رابطه فوق سیگنال $x_1(t)$ را بر حسب ترکیب خطی از نمایی‌هایی به شکل $e^{j\omega t}$ و به تبع آن بر حسب ترکیب خطی از سیگنال-های $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ به ازای همه ωها بیان می‌دارد. بنابراین اگر پاسخ یک سیستم خطی به ورودی $e^{j\omega t}$ یا به طور معادل به ورودی‌های $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ مشخص باشد، پاسخ به هر ورودی دلخواه $x_1(t)$ به کمک رابطه فوق بدست می‌آید.

در این تست سیگنال $x_1(t)$ زوج است، پس $X_1(\omega)$ نیز زوج است. از آنجا که $\sin\omega t$ تابعی فرد است، بنابراین تابع $X_1(\omega)\sin\omega t$ نسبت به ω فرد است. در نتیجه انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\sin\omega t\,dt$ در رابطه (۱) برابر صفر می‌شود. پس سیگنال $x_1(t)$ را در اینجا استثنائاً (به دلیل زوج بودن) می‌توان فقط بر حسب ترکیب خطی از سیگنال‌های $\cos\omega t$ تجزیه کرد. یعنی از رابطه (۱) داریم:

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (2)$$

به همین دلیل در این تست فقط پاسخ به ورودی $\cos\omega t$ داده شده است و نیازی به داشتن پاسخ به ورودی $\sin\omega t$ نداریم. ولی در حالت کلی در یک سیستم <u>خطی</u> باید یا پاسخ به ورودی $e^{j\omega t}$ یا پاسخ به هر دو ورودی $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ داده شود تا بتوان با استفاده از رابطه (۱) پاسخ به هر ورودی دلخواه دیگر را بدست آورد. رابطه (۲) ترکیب خطی $x_1(t)$ بر حسب $\cos\omega t$ به ازای همه ωها می‌باشد. با توجه به اینکه پاسخ به $\cos\omega t$ برابر $\cos\omega t\cos 2\omega t=\frac{1}{2}\cos\omega t+\frac{1}{2}\cos 3\omega t$ داده شده است، پس پاسخ به ورودی $x_1(t)$ یعنی $y_1(t)$ برابر همان ترکیب خطی رابطه (۲) از $\frac{1}{2}\cos\omega t+\frac{1}{2}\cos 3\omega t$ می‌باشد. یعنی داریم:

$$x_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad \Rightarrow \qquad y_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\left[\frac{1}{2}\cos\omega t+\frac{1}{2}\cos 3\omega t\right]d\omega$$

$$\Rightarrow \qquad y_1(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)\cos 3\omega t\,d\omega \qquad (3)$$

با مقایسه روابط (۳) و (۲) داریم:

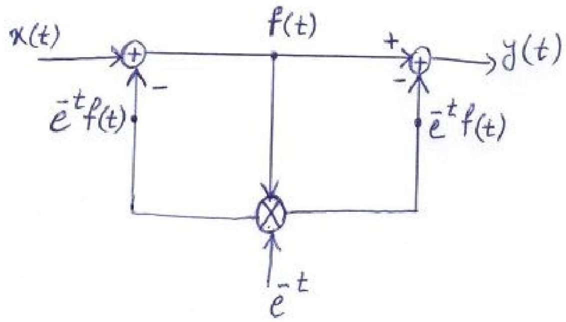
$$y_1(t)=\frac{1}{2}x_1(t)+\frac{1}{2}x_1(3t) \qquad (4)$$

توجه کنید که رابطه (۴) به معنی رابطه ورودی – خروجی این سیستم نیست و این رابطه فقط برای ورودی $x_1(t)$ و پاسخ آن صادق است.

حال با توجه به سیگنال $x_1(t)$ و رابطه (۴)، $y_1(t)$ به شکل گزینه ۳ بدست می‌آید.

تذکر بسیار مهم: ممکن است فکر کنید که از همان ابتدا می‌توانستیم با توجه به ورودی $\cos\omega t$ و خروجی $\cos\omega t\cos 2\omega t=\frac{1}{2}\cos\omega t+\frac{1}{2}\cos 3\omega t$ رابطه سیستم را به صورت $y(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(3t)$ حدس بزنیم و مسأله را خیلی راحت‌تر و وسریع‌تر حل نماییم. ولی این استدلال کاملا غلط است و در اینجا به صورت اتفاقی و به دلیل زوج بودن سیگنال $x_1(t)$ این راه حل غلط (حدس رابطه سیستم)، ما را به جواب صحیح می‌رساند! وگرنه رابطه این سیستم لزوماً به صورت $y(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(3t)$ نیست و مثلاً می‌تواند به صورت $y(t)=x(t)+\frac{1}{2}x(3t)-\frac{1}{2}x(-t)$ و بی‌نهایت حالت دیگر نیز باشد. و اگر سیگنال $x_1(t)$ زوج نبود، با این روش (حدس رابطه سیستم) به جواب کاملاً نادرستی می‌رسیدیم. اگر ورودی داده‌شده زوج نبود، برای محاسبه خروجی باید پاسخ به ورودی $\sin\omega t$ نیز به ما داده می‌شد و یا در حالت کلی باید پاسخ به ورودی $e^{j\omega t}$ داده می‌شد تا بتوانیم از رابطه (۱) پاسخ به هر ورودی دلخواه $x_1(t)$ را بدست آوریم.

۲۸) گزینه ۱ صحیح است.



$$\begin{cases} x(t)-e^{-t}f(t)=f(t) \longrightarrow f(t)=\dfrac{x(t)}{1+e^{-t}} & (1) \\ f(t)-e^{-t}f(t)=y(t) \longrightarrow f(t)(1-e^{-t})=y(t) & (2) \end{cases}$$

با جایگذاری $f(t)=\dfrac{x(t)}{1+e^{-t}}$ از رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$$y(t)=\frac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}\cdot x(t)$$

سیستم فوق خطی بدون حافظه است. همچنین به دلیل اینکه $\dfrac{1-e^{-t}}{1+e^{-t}}$ به ازای همه tها محدود است، پس سیستم پایدار می‌باشد.

۲۹) گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم که در یک سیستم LTI حقیقی پاسخ به ورودی $\cos\omega_0 t$ برابر $|H(\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t+\angle H(\omega_0)\right)$ می‌باشد. با توجه به خروجی داده شده، داریم:

$$|H(\omega_0)|=e^{-|\omega_0|} \quad , \quad \angle H(\omega_0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad H(\omega)=e^{-|\omega|}$$

بنابراین پاسخ فرکانسی این سیستم برابر $H(\omega)=e^{-|\omega|}$ می‌باشد. حال باید $h(t)$ را محاسبه کنیم. برای محاسبه عکس تبدیل فوریه $H(\omega)=e^{-|\omega|}$ باید از خاصیت دوگانی استفاده نماییم، زیرا $e^{-|\omega|}$ در جدول تبدیل فوریه نیست ولی $e^{-|t|}$ در جدول موجود می‌باشد.

خاصیت دوگانی:

$$h(t) \xleftrightarrow{F} H(\omega)$$
$$H(t) \xleftrightarrow{F} ۲\pi h(-\omega)$$

در اینجا داریم:

$$\overset{?}{h(t)} \xleftrightarrow{F} e^{-|\omega|}$$
$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} ۲\pi h(-\omega)$$

تبدیل فوریه $e^{-|t|}$ طبق جدول برابر $\frac{۲}{\omega^۲+۱}$ می‌باشد. پس داریم:

$$۲\pi h(-\omega)=\frac{۲}{\omega^۲+۱} \quad \Rightarrow \quad h(t)=\frac{۱}{\pi}\cdot\frac{۱}{t^۲+۱} \quad \Rightarrow \quad h(\circ)=\frac{۱}{\pi} \ , \ h(۱)=\frac{۱}{۲\pi}$$

۳۰) گزینه ۳ صحیح است.

تابع $\delta(e^{-|t|}+t^۲+۱)$ همیشه برابر صفر می‌باشد، زیرا عبارت $e^{-|t|}+t^۲+۱$ همیشه مخالف صفر است. در نتیجه انتگرال داده شده برابر است با:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(t+۲)\delta'(t+۱)dt$$

فرمول مهم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta^{(n)}(t-t_\circ)dt=(-۱)^n x'(t)\Big|_{t=t_\circ}$$

برای محاسبه انتگرال I از فرمول فوق به ازای $x(t)=t+۲ \ , \ n=۱ \ , \ t_\circ=-۱$ داریم:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}(t+۲)\delta'(t+۱)dt=(-۱)^۱(t+۲)'\Big|_{t=-۱}=-۱$$