پاسخ کتاب کار و تمرین

■ مجموعه تمرینات

۱-

$$A = ۷^{\sqrt{۱۴۷}} \times ۷^{\sqrt{۳}} = ۷^{۷\sqrt{۳}} \times ۷^{\sqrt{۳}} = ۷^{۸\sqrt{۳}}$$

$$B = \frac{۵^{۳\sqrt{۳}} \times ۵^{۳\sqrt{۳}}}{(۲۵)^{۲\sqrt{۳}}} = \frac{۵^{۴\sqrt{۳}}}{(۵^۲)^{۲\sqrt{۳}}} = \frac{۵^{۴\sqrt{۳}}}{۵^{۴\sqrt{۳}}} = ۱$$

$$C = \left(\frac{۳^{\sqrt{۱۶}}}{۳\times ۳^{۲\sqrt{۸}}}\right)^۲ = \left(\frac{۳^۴}{۳\times ۳^{۴\sqrt{۲}}}\right)^۲ = \left(\frac{۳^۳}{۳^{۲\sqrt{۲}}}\right)^۲ = \frac{۳^۶}{۳^{۴\sqrt{۲}}} = ۳^{۶-۴\sqrt{۲}}$$

$$D = \frac{(۲^۲)^{۳\sqrt{۱۲}} \times ۲^{۳\sqrt{۳}}}{(۲^۴)^{\sqrt{۳}} \times (۲^۳)^{۲\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۶\sqrt{۱۲}} \times ۲^{۳\sqrt{۳}}}{۲^{۴\sqrt{۳}} \times ۲^{۶\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۱۲\sqrt{۳}} \times ۲^{۳\sqrt{۳}}}{۲^{۱۰\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۱۵\sqrt{۳}}}{۲^{۱۰\sqrt{۳}}} = ۲^{۵\sqrt{۳}} = (۲^۵)^{\sqrt{۳}} = ۳۲^{\sqrt{۳}}$$

$$E = (۳ + ۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}-۱}(\sqrt{۲} - ۱)^{۲(\sqrt{۲}-۱)} = (۳ + ۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}-۱}(۳ - ۲\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}-۱}$$

$$= \left((۳ + ۲\sqrt{۲})(۳ - ۲\sqrt{۲})\right)^{\sqrt{۲}-۱} = (۱)^{\sqrt{۲}-۱} = ۱$$

$$F = (\sqrt{۳})^{\sqrt[۵]{۳۲}} = (\sqrt{۳})^۲ = ۳$$

$$G = \left(۹^{-\frac{۱}{۲}} \times ۸^{-\frac{۱}{۲}}\right)^۲ = \left((۳^۲)^{-\frac{۱}{۲}}(۲^۳)^{-\frac{۱}{۲}}\right)^۲ = (۳^{-۱} \times ۲^{-۱})^۲ = (۶^{-۱})^۲ = \frac{۱}{۶^۲} = \frac{۱}{۲۱۶}$$

۲-

$$\sqrt[۱۰]{x^۹} = \frac{(۲^۳)^{\frac{۱}{۳}} \times \sqrt{۲^۵}}{\sqrt[۵]{۲^۴}} = \frac{۲^۱ \times ۲^{\frac{۵}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}} = \frac{۲^{\frac{۷}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}} = ۲^{\frac{۷}{۲}-\frac{۴}{۵}} = ۲^{\frac{۲۷}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۲^{۲۷}} = \sqrt[۱۰]{(۲^۳)^۹} = \sqrt[۱۰]{۸^۹} \Rightarrow x = ۸$$

۳-

$$a = \frac{۳^{\sqrt{۴۵}}}{۹^{\sqrt{۲۰}}} = \frac{۳^{۳\sqrt{۵}}}{(۳^۲)^{۲\sqrt{۵}}} = \frac{۳^{۳\sqrt{۵}}}{۳^{۴\sqrt{۵}}} = ۳^{-\sqrt{۵}} = \frac{۱}{۳^{\sqrt{۵}}}$$

چون $۹ > ۵ > ۴$ پس $۳ > \sqrt{۵} > ۲$ و درنتیجه $۳^۳ > ۳^{\sqrt{۵}} > ۳^۲$ پس $۲۷ > ۳^{\sqrt{۵}} > ۹$ درنتیجه

$$\frac{۱}{۹} < \frac{۱}{۳^{\sqrt{۵}}} < \frac{۱}{۲۷}$$

۴-

$$x^{\sqrt{۳}} = ۳^{-۳} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } \sqrt{۳}} \left(x^{\sqrt{۳}}\right)^{\sqrt{۳}} = (۳^{-۳})^{\sqrt{۳}} \Rightarrow x^۳ = ۳^{-۳\sqrt{۳}}$$

$$x = \sqrt[۳]{۳^{-۳\sqrt{۳}}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳^{۳\sqrt{۳}}}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲۷^{\sqrt{۳}}}} = \frac{۱}{۳^{\sqrt{۳}}}$$

۵-

$$x = ۱ - \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۱-\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۱+\sqrt{۲}}{-۱} \Rightarrow \frac{۱}{x} = -(۱ + \sqrt{۲})$$

$$\sqrt[۳]{x - x^{-۱}} = \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{۲} + (۱ + \sqrt{۲})} = \sqrt[۳]{۲}$$

۶-

$$۷^{y} = \sqrt{۵} \Rightarrow (۷^{y})^{x} = (\sqrt{۵})^{x} \Rightarrow ۷^{xy} = \left(۵^{\frac{۱}{۲}}\right)^{x} \Rightarrow ۷^{xy} = ۵^{\frac{x}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۷^{xy} = (۵^{x})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۷^{xy} = (\sqrt{۷})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۷^{xy} = \left(۷^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۷^{xy} = ۷^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow xy = \frac{۱}{۴}$$

۷-

$$\frac{۴^{۰/۷۵}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + ۹^{۰/۲۵} = \frac{۴^{\frac{۳}{۴}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + ۹^{\frac{۱}{۴}}$$

$$= \frac{۲^{\frac{۳}{۲}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + ۳^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲^{۳}}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} + \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}{(۱+\sqrt{۲})^{۲}-۳} + \sqrt{۳} = \frac{۲\sqrt{۲}+۴-۲\sqrt{۶}}{۳+۲\sqrt{۲}-۳} + \sqrt{۳}$$

$$= \frac{۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۶}+۴}{۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} = ۱ - \sqrt{۳} + \frac{۴}{۲\sqrt{۲}} + \sqrt{۳} = ۱ + \frac{۲}{\sqrt{۲}} = ۱ + \sqrt{۲}$$

۸- الف)

$$\frac{۲۵^{x+۱}}{۸۱^{y}} = \frac{۲۵ \times ۲۵^{x}}{(۳^{۴})^{y}} = \frac{۲۵ \times ۵^{۲x}}{۳^{۴y}} = \frac{۲۵ \times (۵^{x})^{۲}}{(۳^{y})^{۴}} = \frac{۲۵ \times (\sqrt{۳})^{۴}}{(\sqrt{۵})^{۴}} = \frac{۲۵ \times ۳}{۲۵} = ۳$$

ب)

$$(۵^{x})^{y} = (\sqrt{۳})^{y} \Rightarrow ۵^{xy} = ۳^{\frac{y}{۲}} \Rightarrow ۵^{xy} = (۳^{y})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۵^{xy} = (\sqrt{۵})^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow ۵^{xy} = ۵^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow xy = \frac{۱}{۴}$$

۹-

الف) $\frac{x^{\sqrt{۲}}}{x^{\sqrt{۸}}} = ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{x^{\sqrt{۲}}}{x^{۲\sqrt{۲}}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{x^{\sqrt{۲}}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^{\sqrt{۲}} = ۴$

$$\left(x^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = ۴^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^{۲} = (۲^{۲})^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^{۲} = \left(۲^{\sqrt{۲}}\right)^{۲} \Rightarrow x = ۲^{\sqrt{۲}}$$

ب) $(\sqrt{۲})^{x} = \sqrt[۵]{۲} \Rightarrow \left(۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{x} = ۲^{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow ۲^{\frac{x}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \frac{۲}{۵}$

پ) $x^{\sqrt{۵}} = ۲ \Rightarrow \left(x^{\sqrt{۵}}\right)^{\sqrt{۵}} = ۲^{\sqrt{۵}} \Rightarrow x^{۵} = ۲^{\sqrt{۵}} \Rightarrow x = \sqrt[۵]{۲^{\sqrt{۵}}} \Rightarrow x = ۲^{\frac{\sqrt{۵}}{۵}}$

ت) $x^{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}} = ۲ \Rightarrow \left(x^{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}\right)^{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} = ۲^{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \Rightarrow x^{(۲-۳)} = ۲^{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}} \Rightarrow x^{-۱} = ۲^{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۲^{-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}} \Rightarrow x = -\sqrt{۲} + \sqrt{۳}$$

۱۰- دنباله هندسی را در نظر می‌گیریم که ۴ جمله داشته باشد و جملهٔ اول آن $\sqrt[3]{2}$ و جملهٔ چهارم آن $\sqrt[3]{2}$ باشد.

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2}\, q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[18]{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \sqrt[18]{2} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[18]{2 \times 8} = \sqrt[18]{2^4} = \sqrt[9]{4} \\ a_3 &= \sqrt[9]{4} \times \sqrt[18]{2} = \sqrt[18]{4^2 \times 2} = \sqrt[18]{32} \end{aligned}\right\} \text{واسطه‌های هندسی مورد نظر}$$

۱۱-

$$3^{\sqrt{18}} = 3^{2\sqrt{2}} = \left(3^{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

$$3^{\sqrt{8}-2} = \frac{3^{\sqrt{8}}}{3^2} = \frac{3^{2\sqrt{2}}}{9} = \frac{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^2}{9} = \frac{a^2}{9}$$

۱۲-

$$\sqrt[kn]{a^k} = a^{\frac{k}{kn}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

۱۳-

الف) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

ب) $a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} \Rightarrow a^{-2} < b^{-2}$

پ) $\begin{matrix} a > 1 \\ r > s \end{matrix} \Rightarrow a^r > a^s$

ت) $0 < a < 1 \Rightarrow a^r < a^s$

■ ویژهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند

۱-

$$x^{2\sqrt{2}} - 5x^{\sqrt{2}} + 6 = 0$$

$$(x^{\sqrt{2}} - 2)(x^{\sqrt{2}} - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^{\sqrt{2}} - 2 = 0 \Rightarrow x^{\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow \left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2^{\sqrt{2}}} \\ x^{\sqrt{2}} - 3 = 0 \Rightarrow x^{\sqrt{2}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 3^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{3^{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

۲-

$$(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 6$$

می‌دانیم $3 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ پس:

$$(3 - 2\sqrt{2})^x + \left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 6$$

$$(3 - 2\sqrt{2})^{2x} - 6(3 - 2\sqrt{2})^x + 1 = 0$$

فرض کنیم $y = (3-2\sqrt{2})^x$ پس:

$$y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$y = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow (3-2\sqrt{2})^x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow (3-2\sqrt{2})^x = (3-2\sqrt{2})^{-1} \Rightarrow x = -1$$

$$y = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (3-2\sqrt{2})^x = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 1$$

۳-

$$A = (1+\sqrt{2})^{\sqrt{8}} \times (3-\sqrt{8})^{\sqrt{2}} = \left((1+\sqrt{2})^2\right)^{\sqrt{2}} \times (3-2\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$$

$$= (3+2\sqrt{2})^{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right)^{\sqrt{2}} = (9-8)^{\sqrt{2}} = 1$$

$$B = (3+2\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}}(\sqrt{2}+1)^{\sqrt{2}-1} = \left((\sqrt{2}+1)^2\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}+1}}(\sqrt{2}+1)^{\sqrt{2}-1}$$

$$= (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{\sqrt{2}+1}}(\sqrt{2}+1)^{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2+2-1}{\sqrt{2}+1}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{4}{\sqrt{2}+1}}$$

۴-

$$\frac{\sqrt{3}^{(x^2+2x)}}{\sqrt{3}^{(2x^2+1)}} = (\sqrt{3})^{x^2+2x-2x^2-1} = \sqrt{3}^{(x-1)^2} = (\sqrt{3})^{2(x-1)} = \sqrt{27}^{(x-1)} = 3\sqrt{3}^{(x-1)}$$

$$x - 1 = \sqrt[2]{3} \rightarrow (x-1)^2 = 3$$

۵-

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt[5]{4} = \sqrt[20]{4^4} = \sqrt[20]{256} \\ b = \sqrt[4]{5} = \sqrt[20]{5^5} = \sqrt[20]{3125} \\ c = \sqrt[4]{2} = \sqrt[20]{2^5} = \sqrt[20]{32} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقایسه}} c < a < b$$

۶-

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = \left(5^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{2}} + 5^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{2}{2}}\right)\left(5^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{2}}\right)$$

$$= \left(2 \times 5^{\frac{1}{2}}\right)\left(2 \times 2^{\frac{2}{2}}\right)$$

$$(x^2 - y^2)^2 = \left(\left(2 \times 5^{\frac{1}{2}}\right)\left(2 \times 2^{\frac{2}{2}}\right)\right)^2 = \left(2 \times 5^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(2 \times 2^{\frac{2}{2}}\right)^2$$

$$= (2^2 \times 5^1)(2^2 \times 2^2) = 40 \times 32 = 1280$$

■ دورهٔ سریع مطالب

۱- درست ۲- نادرست

۳- نادرست ۴- نادرست

۵- نادرست ۶- $-\frac{۱۵}{۴}$

۷- $\frac{۱}{۲}$ ۸- $۲^{۱۰}$

۹- ۶۲۵ ۱۰- $\sqrt{۲}$

■ آزمون چهارگزینه‌ای

۱- گزینهٔ «۲»

$$۲^{\frac{۱}{\sqrt{۳}-۲}} = ۳^{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۳-۴}} = ۳^{-(\sqrt{۳}+۲)} = \frac{۱}{۳^{\sqrt{۳}+۲}} = \frac{۱}{۳^{\sqrt{۳}} \times ۳^{۲}} = \frac{۱}{۹a}$$

۲- گزینهٔ «۲»

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[۴]{۳} = \sqrt[۱۲]{۳^{۴}} = \sqrt[۱۲]{۸۱} \\ \sqrt[۴]{۵} = \sqrt[۱۲]{۵^{۳}} = \sqrt[۱۲]{۱۲۵} \\ \sqrt{۲} = \sqrt[۱۲]{۲^{۶}} = \sqrt[۱۲]{۶۴} \\ \frac{۴}{۳} < \sqrt{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \sqrt[۴]{۵} \text{ از همه بزرگ‌تر} \Rightarrow \sqrt[۱۲]{۱۲۵} \text{ از همه بزرگ‌تر است}$$

۳- گزینهٔ «۱»، جملات دنبالهٔ مورد نظر به $۲۷^{\frac{۲}{۳}}$ نزدیک می‌شوند که برابر است با:

$$۲۷^{\frac{۲}{۳}} = (۳^{۳})^{\frac{۲}{۳}} = ۳^{۲} = ۹$$

۴- گزینهٔ «۳»

$$۹^{\frac{۳}{۲}} - ۲ \times ۱۶^{-\frac{۱}{۴}} = (۳^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - ۲(۲^{۴})^{-\frac{۱}{۴}} = ۳^{۳} - ۲(۲)^{-۱} = ۲۷ - ۱ = ۲۶$$

۵- گزینهٔ «۲»

$$(\sqrt{۲})^{\frac{۳}{۴}} = \left(۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۳}{۴}} = ۲^{\frac{۳}{۸}} = \sqrt[۸]{۲^{۳}} = \sqrt[۸]{۸}$$

۶- گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{۶} \times ۶^{-\frac{۱}{۲}} - ۴ \times ۴^{-\frac{۳}{۴}} = ۶^{\frac{۱}{۲}} \times ۶^{-\frac{۱}{۲}} - ۴^{۱-\frac{۳}{۲}} = ۶^{۰} - ۴^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۲}}} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۴}} = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۷- گزینهٔ «۳»

$$\frac{a^c}{a^d} = a^c \times a^{-d} = a^{c-d}$$

۸- گزینهٔ «۴»

$$x^{\sqrt{۲}} = ۲^{-۱} \Rightarrow \left(x^{\sqrt{۲}}\right)^{\sqrt{۲}} = (۲^{-۱})^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^۲ = ۲^{-\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۲^{-\sqrt{۲}}} = \sqrt{\frac{۱}{۲^{\sqrt{۲}}}} = \frac{۱}{\sqrt{۲^{\sqrt{۲}}}}$$

۹- گزینهٔ «۳»، فرض کنیم x واسطهٔ هندسی بین دو عدد $\sqrt[۲]{۲}$ و $\sqrt[۳]{۲}$ باشد، داریم:

$$x^۲ = \sqrt[۲]{۲} \times \sqrt[۳]{۲} \Rightarrow x^۲ = ۲^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{\frac{۷}{۱۲}} \Rightarrow x = ۲^{\frac{۷}{۲۴}} \Rightarrow x = \sqrt[۲۴]{۲^۷} = \sqrt[۲۴]{۱۲۸}$$

۱۰- گزینهٔ «۱»

$$x^{\sqrt{۳}+\sqrt{۱۲}} = ۲^{\sqrt{۷۵}} \Rightarrow x^{\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}} = ۲^{۵\sqrt{۳}} \Rightarrow x^{۳\sqrt{۳}} = ۲^{۵\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow (x^۳)^{\sqrt{۳}} = (۲^۵)^{\sqrt{۳}} \Rightarrow x^۳ = ۲^۵ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۲^۵} = ۲\sqrt[۳]{۴}$$