

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مهندسه محاسباتی
فصل ۱۳

Robot Motion Planning

بخش ۱۳.۲ تا ۱۳.۵

بهار ۹۱ - دشتی

یادآوری :

- نقطه مرجع (reference point) : نشان دهنده مکان ربات در صفحه
- $R(x,y)$: ربات R در مختصات (x,y) قرار دارد .
- فضای کار (Work Space)
- فضای پیکربندی (Configuration Space)
- فضای پیکربندی آزاد (C_{free})

برای ربات نقطه ای :

- استفاده از نقشه دوزنقه ای فضای پیکربندی آزاد
- پیدا کردن نقشه راه (Road map)
- پیدا کردن یک مسیر از نقطه شروع تا هدف با استفاده از نقشه راه .

- زمان لازم برای پردازش مجموعه موانع S (با n یال) : $O(n \log n)$
- زمان لازم برای پیدا کردن یک مسیر حرکت (در صورت وجود) : $O(n)$

مجموع مینکوفسکی

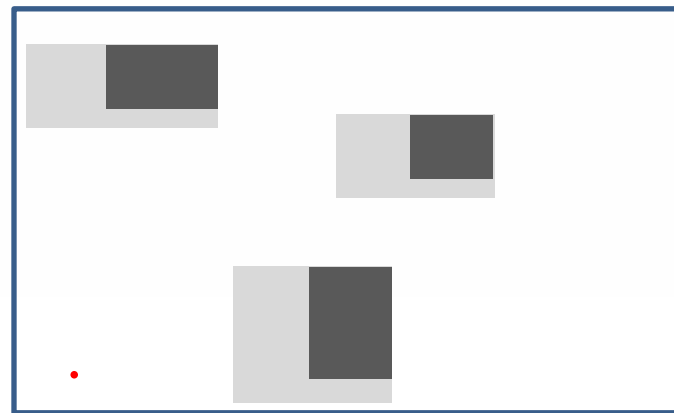
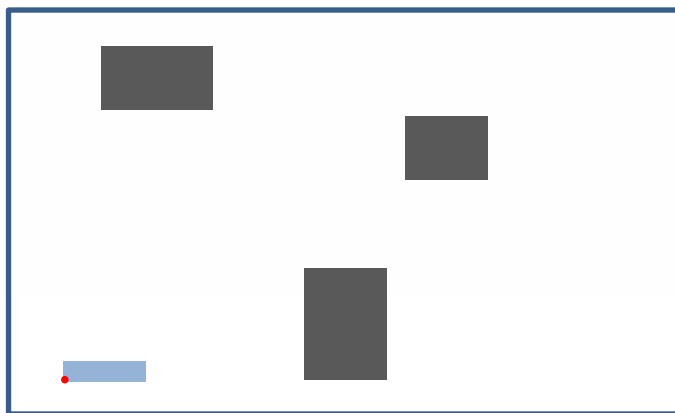
Minkowski Sums



- ✓ در بخش قبل برای مسیریابی ربات نقطه ای از نقشه دوزنقه ای استفاده شد .
- ✓ برای ربات چند ضلعی نیز می توان از همان خط مشی استفاده نمود .
- ✓ تفاوت در فضای پیکربندی موانع (Configuration –Space obstacles)

فرضیات :

- ربات یک چند ضلعی محدب است .
- موانع چند ضلعی های محدب هستند .



مجموع مینکوفسکی

Minkowski Sums



- ✓ در بخش قبل برای مسیریابی ربات نقطه ای از نقشه دوزنقه ای استفاده شد .
- ✓ برای ربات چند ضلعی نیز می توان از همان خط مشی استفاده نمود .
- ✓ تفاوت در فضای پیکربندی موانع (Configuration –Space obstacles)

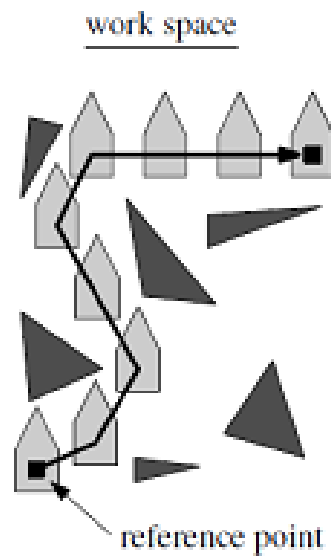
فرضیات :

- ربات یک چند ضلعی محدب است .
- موانع چند ضلعی محدب هستند .

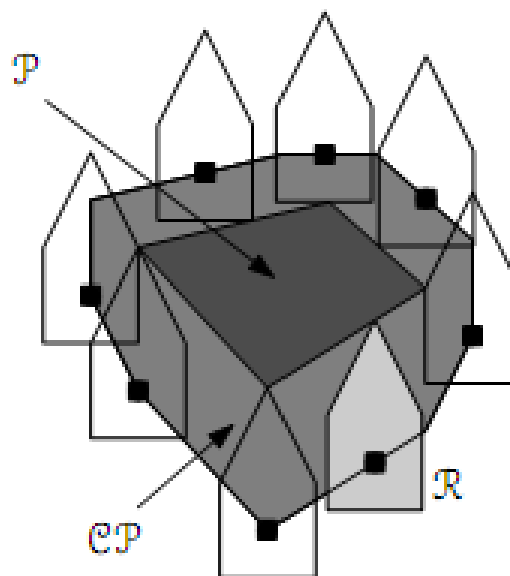
فضای پیکربندی موانع (C-obstacle) برای مانع P و ربات R

مجموعه نقاطی در فضای پیکربندی می باشد که P با R اشتراک دارد و با CP نمایش می دهیم.

$$CP = \{(x, y) : R(x, y) \cap P \neq \emptyset\}$$



- فضای پیکربندی برای ربات چند ضلعی بر خلاف ربات نقطه ای، از فضای کاری آن متفاوت است .
- بقیه مراحل همانند مسیر یابی ربات نقطه ای می باشد .



اثر نقطه مرجع چند ضلعی R دورتا دور مانع P ، مرز فضای CP را بوجود می آورد .

مجموع مینکوفسکی

- مجموع مینکوفسکی دو مجموعه $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ و $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ که با عبارت

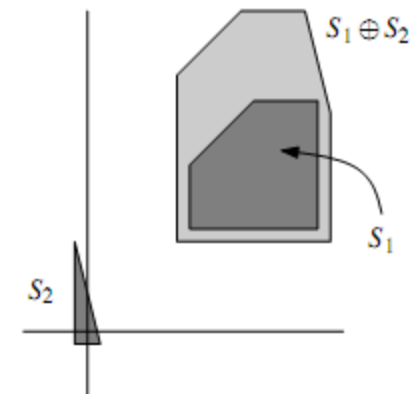
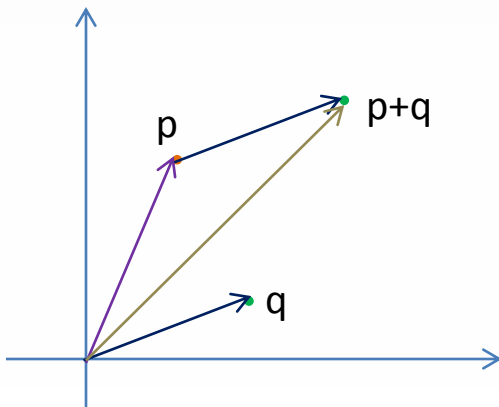
$$S_1 \oplus S_2$$

نشان داده می شود، به شکل زیر تعریف می کنیم :

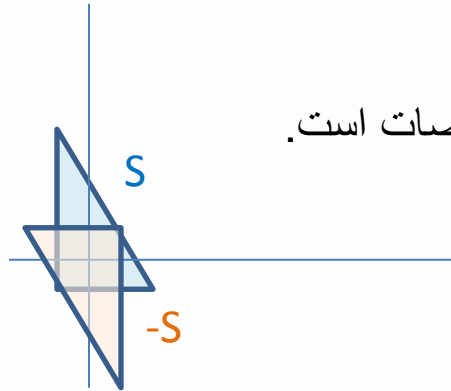
$$S_1 \oplus S_2 = \{p + q : p \in S_1, q \in S_2\}$$

که در آن $p+q$ نشان دهنده جمع برداری بردارهای $p=(p_x, p_y)$ و $q=(q_x, q_y)$ می باشد .

$$p+q := (p_x+q_x, p_y+q_y)$$



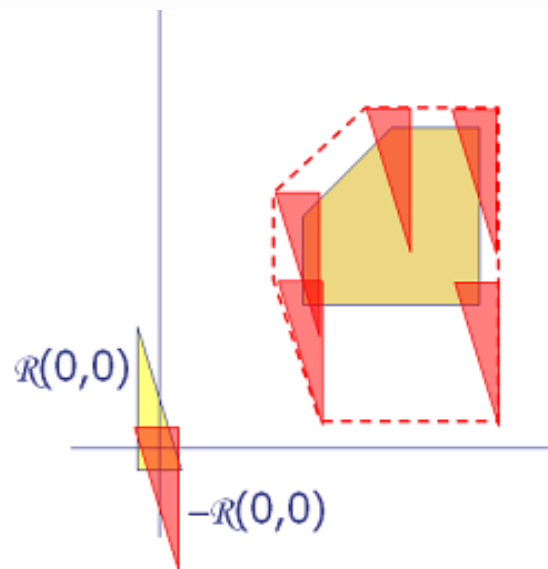
- برای بیان $C - obstacles$ بوسیله جمع های مینکوفسکی به یک نماد گذاری دیگر احتیاج داریم.
 اگر $p=(p_x, p_y)$ باشد بنابراین داریم : $-p=(-p_x, -p_y)$
 و همچنین برای مجموعه S داریم : $-S=\{-p : p \in S\}$



به عبارت دیگر : $-S$ بازتاب مجموعه S نسبت به مبدا مختصات است.

اگر R یک ربات انتقالی مسطح باشد و P یک مانع باشد، در این صورت فضای پیکربندی P (CP) برابر است با :

$$\mathcal{P} \oplus (-R(0,0))$$



اگر R یک ربات انتقالی مسطح باشد و P یک مانع باشد، در این صورت فضای پیکربندی P (CP) برابر است با :

$$\mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$$

اثبات :

ثابت می کنیم که $R(x,y)$ با p اشتراک دارد اگر و فقط اگر داشته $(x,y) \in \mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$
اثبات طرف اول :

$R(x,y)$ با p اشتراک دارد و $q=(q_x,q_y)$ یک نقطه در این اشتراک باشد.
در این صورت $q \in R(x,y)$ و در نتیجه :

$$(q_x - x, q_y - y) \in \mathcal{R}(0,0)$$

$$(x - q_x, y - q_y) \in -\mathcal{R}(0,0)$$

یا بطور معادل

از آنجایی که $q \in R$ پس داریم : $(x,y) = (q_x, q_y) + (x - q_x, y - q_y) \leftarrow (x,y) \in \mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$

اگر R یک ربات انتقالی مسطح باشد و P یک مانع باشد، در این صورت فضای پیکربندی P (CP) برابر است با :

$$\mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$$

اثبات :

ثابت می کنیم که $R(x,y)$ با p اشتراک دارد اگر و فقط اگر داشته $(x,y) \in \mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$
اثبات طرف دوم :

اگر $(x,y) \in \mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$

در اینصورت نقاطی وجود دارند که :

$$(r_x, r_y) \in \mathcal{R}(0,0)$$

$$(p_x, p_y) \in \mathcal{P}$$

$$(x,y) = (p_x - r_x, p_y - r_y)$$

$$p_y = r_y + y \quad p_x = r_x + x$$

بنابراین :

یا بطور معادل :

بنابراین $R(x,y)$ با p اشتراک دارد .

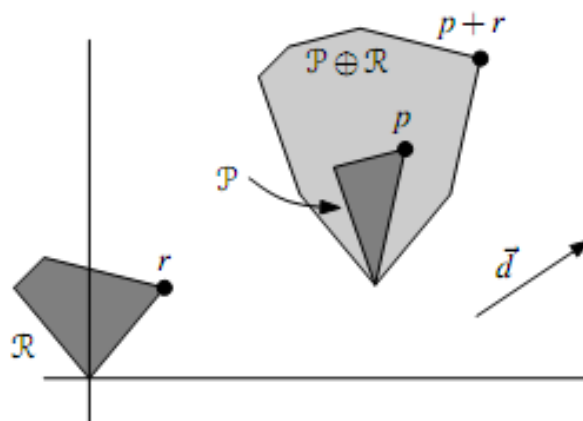
بنابر این فضای پیکربندی موانع برای ربات مسطح R برابر است با:
جمع مینکوفسکی موانع و $-R(0,0)$

نکته: بعضی مواقع به $\mathcal{P} \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$ بعنوان تفاضل مینکوفسکی P و $R(0,0)$ اشاره میشود که بعلت اختلاف تعریف در نوشته های ریاضی از بکار بردن آن اجتناب می شود.

در ادامه:

برخی خواص مفید جمع مینکوفسکی و یک الگوریتم برای محاسبه آن بحث می شود.

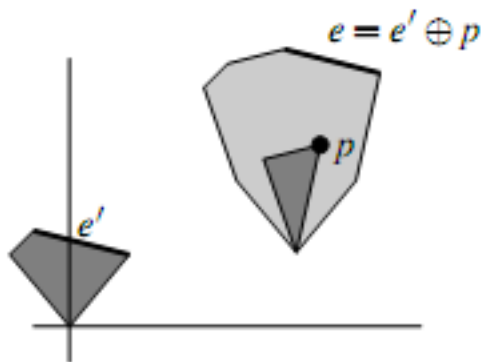
اگر P و R دو شی در صفحه باشند و داشته باشیم $CP = P \oplus R$ یک نقطه ماکزیمم در جهت $\vec{d}$ بر روی CP برابر است با مجموع نقاط ماکزیمم در جهت $\vec{d}$ بر روی P و R



اگر P و R دو چند ضلعی محدب به ترتیب با n و m یال باشند.
در این صورت جمع مینکوفسکی $P \oplus R$ یک چند ضلعی محدب با حداکثر $n+m$ یال خواهد بود.

اثبات :

- تحذب جمع مینکوفسکی دو مجموعه محدب مستقیماً از تعریف حاصل میشود .
- برای مشاهده خطی بودن پیچیدگی جمع مینکوفسکی :
- یک یال e از $P \oplus R$ را در نظر بگیرید . این یال در جهت بردار نرمال خارجی خود ماکزیمم است .
- بنابراین باید توسط نقاطی از P و R تولید شده باشد که در این جهت ماکزیمم باشند .
- علاوه بر این حداقل P یا R باید دارای یالی باشند که در آن جهت ماکزیمم باشد .
- e را به این یال شارژ می کنیم .
- در این روش چون هر یال حداکثر یکبار شارژ می شود،
- بنابراین تعداد کل یالها حداکثر $n+m$ خواهد بود .



اگر P و R یال موازی نداشته باشند در اینصورت جمع مینکوفسکی آنها دقیقا $n+m$ یال دارد .

جمع مینکوفسکی دو چند ضلعی محدب یک چند ضلعی محدب و دارای پیچیدگی خطی است.

مرزهای دو جمع مینکوفسکی می تواند فقط به شکل خاصی با یکدیگر اشتراک داشته باشد !

A pair of pseudodiscs

تعریف :

دو شی مسطح o_1 و o_2 که مرز هر کدام بوسیله یک منحنی بسته ساده محدود شده است را در نظر می گیریم . به طور شهودی o_1 و o_2 را یک **جفت شبه دیسک** می نامیم اگر مرزهای آنها یعنی ∂o_1 , ∂o_2 حداکثر در دو نقطه اشتراک داشته باشند .



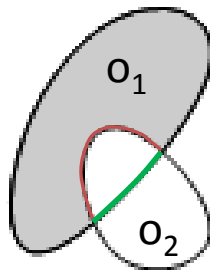
- بنابراین o_1, o_2 را یک جفت شبه دیسک می نامیم اگر در شرط زیر صدق کند :

$\partial o_1 \cap \text{int}(o_2)$ همبند باشد.

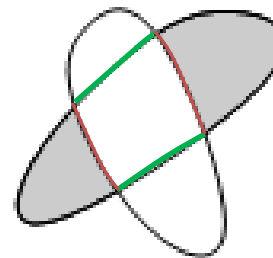
$\partial o_2 \cap \text{int}(o_1)$ همبند باشد.

$\text{int}(o)$: فضای داخلی شی o

pseudodiscs



not pseudodiscs



تعریف :

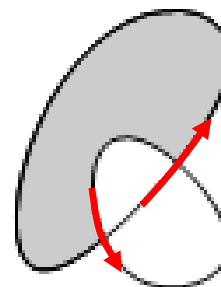
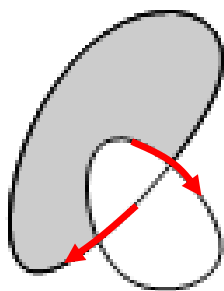
یک مجموعه از اشیاء که هر کدام بوسیله یک منحنی ساده بسته محصور شده اند را **مجموعه شبه دیسک** ها گویند، اگر هر جفت از اشیاء این مجموعه یک جفت شبه دیسک باشد .

تعریف جفت شبه دیسک در مورد حداقل دو شی می باشد
و بکار بردن این تعاریف برای یک شی بی معنی است .

boundary crossing

تعریف :

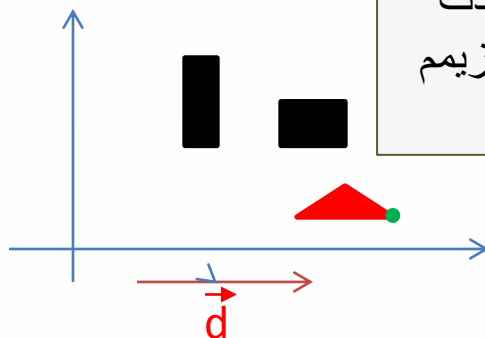
- دو چند ضلعی $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ را در نظر بگیرید. نقطه اشتراک $p \in \partial\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{P}'$ را یک گذرگاه عبوری گوییم، هرگاه $\partial\mathcal{P}$ در نقطه p از داخل $\mathcal{P}'$ به خارج از $\mathcal{P}'$ حرکت کند.



ملاحظه ۱۳.۶:

یک جفت از شبه دیسک های چند ضلعی P و P' حداکثر دو گذرگاه عبوری دارد .

گوییم یک چند ضلعی در جهت d از دیگر چند ضلعی ها شدت بیشتری دارد، اگر نقطه ماکزیم آن در جهت d از نقاط ماکزیم دیگر چند ضلعی ها بزرگتر باشد .

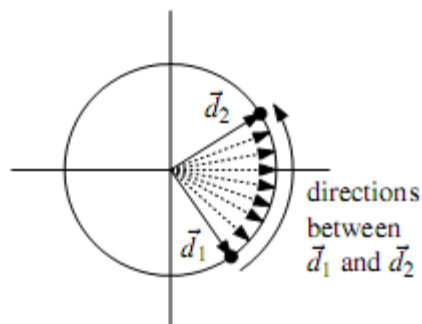


□ جهت ها را می توان بوسیله نقاط بر روی دایره واحد به مرکز مبدا مختصات نشان داد

□ یک نقطه بر روی این دایره نشان دهنده جهت برداری است از مبدا تا آن نقطه

□ بازه جهت ها از $\vec{d}_1$ به $\vec{d}_2$ برابر است با جهت های متناظر با نقاط روی دایره واحد از

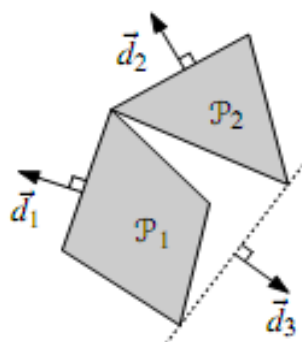
نقطه d_1 تا نقطه d_2 در جهت پادساعتگرد .



بازه جهت ها از $\vec{d}_1$ به $\vec{d}_2$ و بازه جهت ها از $\vec{d}_2$ به $\vec{d}_1$ یکسان نیستند .

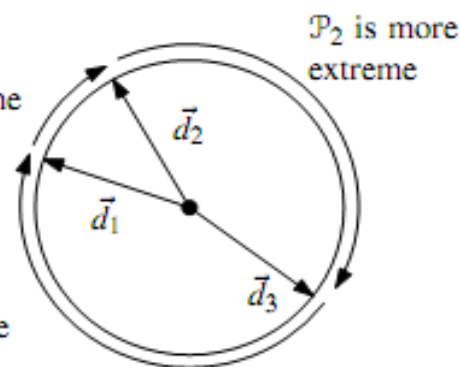
ملاحظه ۱۳.۷:

اگر $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ دو چند ضلعی محدب با فضای داخلی جدا از هم باشند. اگر $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ جهاتی باشند که در آنها $\mathcal{P}_1$ شدت بیشتری نسبت به $\mathcal{P}_2$ داشته باشد، آنگاه $\mathcal{P}_1$ در تمامی جهت های بازه d_1 به d_2 (یا d_2 به d_1) نسبت به $\mathcal{P}_2$ شدت بیشتری خواهد داشت.



$\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_2$ are
equally extreme

$\mathcal{P}_1$ is more
extreme



قضیه ۱۳.۸:

اگر $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ دو چند ضلعی محدب با فضای داخلی جدا از هم باشند و $\mathcal{R}$ یک چند ضلعی محدب دیگر باشد. در این صورت مجموع مینکوفسکی $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ و $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}$ شبه دیسک می باشد.

اگر $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ دو چند ضلعی محدب با فضای داخلی جدا از هم باشند و $\mathcal{R}$ یک چند ضلعی محدب دیگر باشد. در اینصورت مجموع مینکوفسکی $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ و $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}$ شبه دیسک می باشد.

اثبات:

قرار می دهیم: $CP_1 = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ & $CP_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}$

با توجه به تقارن فقط کافیت نشان دهیم که $\partial CP_1 \cap \text{int } CP_2$ همبند است.

فرض خلف: فرض کنید $\partial CP_1 \cap \text{int } CP_2$ همبند نباشد. در اینصورت چهار جهت

$\vec{d}_p, \vec{d}_q, \vec{d}_r$ و $\vec{d}_s$ به تناوب وجود دارد که بردارهای نرمال خارجی نقاط $p, q, r, s \in CP_1$ هستند.

و $p, r \in \text{int}(CP_2)$ و $q, s \notin \text{int}(CP_2)$. بنابراین CP_2 در جهت های $\vec{d}_p$ و $\vec{d}_r$ نسبت به CP_1

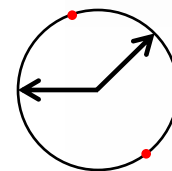
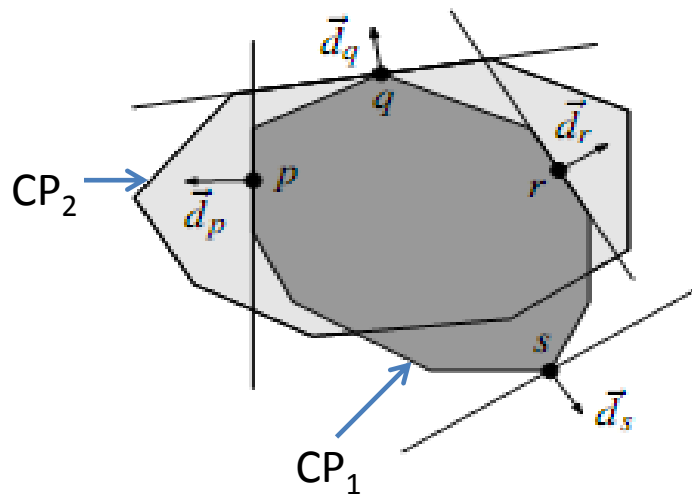
شدت بیشتری دارد در حالی که برای جهت های $\vec{d}_q$ و $\vec{d}_s$ اینگونه نیست. طبق ملاحظه ۱۳.۴ $\mathcal{P}_1$

شدت بیشتری نسبت به $\mathcal{P}_2$ در جهت $\vec{d}_p$ و $\vec{d}_r$ دارد ولی در جهت $\vec{d}_q$ و $\vec{d}_s$ اینگونه نیست و این با ملاحظه

۱۳.۷ تناقض دارد.

قضیه ۸.۱۳:

اگر $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ دو چند ضلعی محدب با فضای داخلی جدا از هم باشند و $\mathcal{R}$ یک چند ضلعی محدب دیگر باشد. در این صورت مجموع مینکوفسکی $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{R}$ و $\mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{R}$ شبه دیسک می باشد.



قضیه ۱۳.۹:

اگر S مجموعه ای از شبه دیسک های چند ضلعی محدب با مجموع n یال باشد. آنگاه پیچیدگی اجتماع آنها حداکثر $2n$ خواهد بود.

قضیه ۱۳.۹:

اگر S مجموعه ای از شبه دیسک های چند ضلعی محدب با مجموع n یال باشد. آنگاه پیچیدگی اجتماع آنها حداکثر $2n$ خواهد بود.

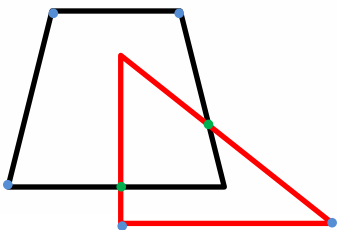
اثبات:

با شارژ کردن هر رأس از اجتماع به یک رأس شبه دیسک بطوریکه هر رأس شبه دیسک حداکثر دوبار شارژ می شود.

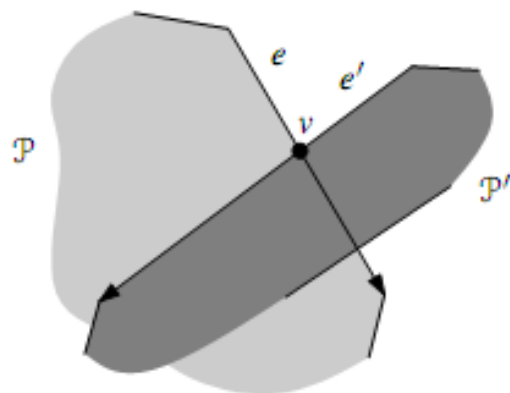
شارژ کردن به روش زیر انجام می شود:

در مرز اجتماع دو نوع رأس وجود دارد:

- رئوس شبه دیسک
- نقاط اشتراک دو یال داخلی دو شبه دیسک

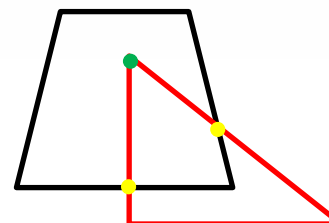
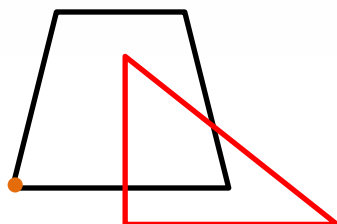


ادامه اثبات :



- ❖ رئوس نوع اول : بر روی خودشان شارژ می شوند .
- ❖ رئوس نوع دوم : راسی مانند v در اجتماع که حاصل اشتراک یال e از P و یال e' از P' است را در نظر می گیریم .
- ❖ $e \cap e'$ یک گذرگاه عبوری است .
- ❖ طبق ملاحظه ۱۳.۶ e هیچ گذرگاه عبوری دیگری با $\partial P'$ ندارد .
(همچنین e' با ∂P)

- ❖ با شروع از $e \cap e'$ یال e را به سمت داخل P' ادامه می دهیم .
- ❖ چون e با $\partial P'$ در نقطه دیگری اشتراک ندارد بنابراین نقطه پایانی یال e درون P' قرار دارد .
- ❖ راس v را به این راس پایانی شارژ می کنیم .
- ❖ بدین ترتیب هر راس v از هر شبه دیسک P حداکثر دوبار شارژ می شود .



الگوریتم محاسبه جمع مینکوفسکی

یک الگوریتم ساده برای محاسبه جمع مینکوفسکی دو چند ضلعی محدب P و R تمامی جفت راس های v, w ($v \in P, w \in R$) را در نظر گرفته و $v + w$ را محاسبه می کند. سپس غلاف محدب تمامی جمع ها را محاسبه می کند.

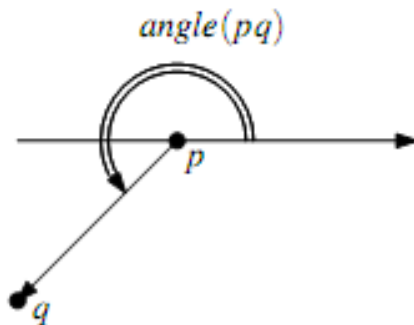
عیب: چون تمامی جفت راس ها را بررسی می کند، بنابراین هنگامی که رئوس چند ضلعی ها زیاد باشد، کارایی ندارد.

الگوریتم محاسبه جمع مینکوفسکی

الگوریتم تناوبی :

- فقط جفت راس هایی را در نظر می گیرد که در یک جهت ماکزیمم هستند .
- زمان اجرای خطی دارد .
- از مفهوم $\text{angle}(pq)$ استفاده می شود .

$\text{angle}(pq)$: زاویه بین بردار $\vec{pq}$ و جهت مثبت محور x ها



Algorithm MINKOWSKISUM($\mathcal{P}, \mathcal{R}$)

Input. A convex polygon $\mathcal{P}$ with vertices $v_1, \dots, v_n$, and a convex polygon $\mathcal{R}$ with vertices $w_1, \dots, w_m$. The lists of vertices are assumed to be in counterclockwise order, with v_1 and w_1 being the vertices with smallest y-coordinate (and smallest x-coordinate in case of ties).

Output. The Minkowski sum $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.

1. $i \leftarrow 1; j \leftarrow 1$
2. $v_{n+1} \leftarrow v_1; v_{n+2} \leftarrow v_2; w_{m+1} \leftarrow w_1; w_{m+2} \leftarrow w_2$
3. **repeat**
4. Add $v_i + w_j$ as a vertex to $\mathcal{P} \oplus \mathcal{R}$.
5. **if** $\text{angle}(v_i v_{i+1}) < \text{angle}(w_j w_{j+1})$
6. **then** $i \leftarrow (i + 1)$
7. **else if** $\text{angle}(v_i v_{i+1}) > \text{angle}(w_j w_{j+1})$
8. **then** $j \leftarrow (j + 1)$
9. **else** $i \leftarrow (i + 1); j \leftarrow (j + 1)$
10. **until** $i = n + 1$ and $j = m + 1$

قضیه ۱۳.۱۰:

جمع مینکوفسکی دو چند ضلعی محدب با n و m رأس در زمان $O(n+m)$ محاسبه می شود.



تا بحال فرض کرده ایم که دو چند ضلعی، محدب باشند .
حال اگر یک یا هر دو چند ضلعی غیر محدب باشند، چه اتفاقی می افتد ؟

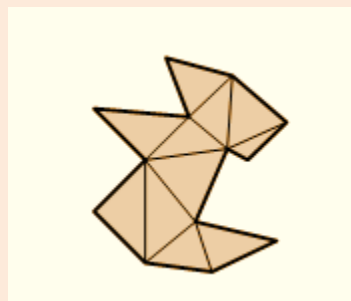
برای هر سه مجموعه S_1, S_2, S_3 رابطه زیر برقرار است.

$$S_1 \oplus (S_2 \cup S_3) = (S_1 \oplus S_2) \cup (S_1 \oplus S_3)$$

حالت اول :

جمع مینکوفسکی چند ضلعی غیر محدب P با n راس و چند ضلعی محدب R با m راس را محاسبه می کنیم.

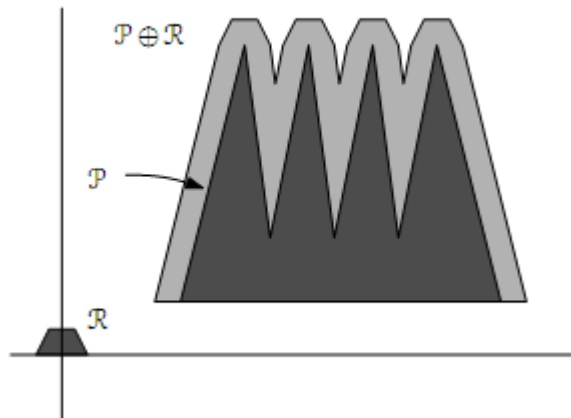
- چند ضلعی P را با توجه به فصل ۳، مثلث بندی می کنیم .
- P دارای n راس و در نتیجه $n-2$ مثلث $(t_1, \dots, t_{n-2})$ خواهد بود.
- محاسبه جمع مینکوفسکی تک تک مثلث ها با چند ضلعی محدب R



$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{n-2} t_i \oplus \mathcal{R}$$

پیچیدگی زمانی $P \oplus R$

- از آنجایی که t_1 یک مثلث و R یک چند ضلعی محدب با m راس می باشد.
- بنابراین $t_i \oplus R$ یک چند ضلعی محدب با حداکثر $m+3$ راس خواهد بود .
- علاوه بر این مثلث ها دارای فضای داخلی جدا از هم هستند .
- مجموعه جمع مینکوفسکی برابر با مجموعه شبه دیسک ها می باشد .
- پیچیدگی اجتماع آنها خطی از مجموع پیچیدگی ها می باشد
- بنابراین پیچیدگی $P \oplus R$ برابر با $o(nm)$ است .



✓ این یک کران بالا پیچیدگی برای یک چند ضلعی محدب و یک چند ضلعی غیر محدب است .

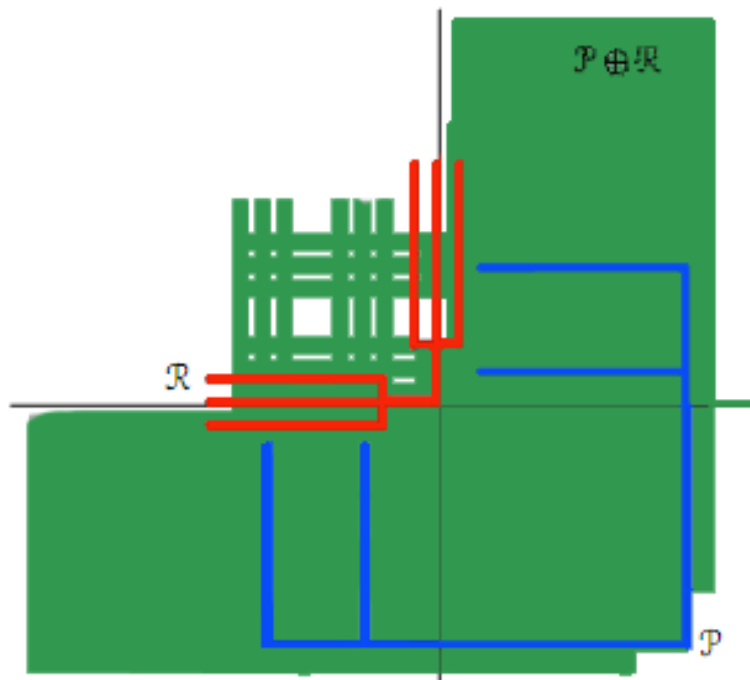
حالت دوم :

جمع مینکوفسکی چند ضلعی غیر محدب P با n راس و چند ضلعی غیر محدب R با m راس را محاسبه می کنیم.

- هر دو چند ضلعی را با توجه به فصل ۳، مثلث بندی می کنیم .
- P دارای n راس و در نتیجه $n-2$ مثلث $(t_1, \dots, t_{n-2})$ خواهد بود.
- R دارای m راس و در نتیجه $m-2$ مثلث $(u_1, \dots, u_{m-2})$ خواهد بود .
- محاسبه جمع مینکوفسکی $t_i + u_j$ به ازای $i=1, \dots, n-2$, $j=1, \dots, m-2$
- محاسبه اجتماع جمع های مینکوفسکی

پیچیدگی زمانی $P \oplus R$

- هر $t_i \oplus u_j$ در زمان ثابت محاسبه می شود .
- مجموع $t_i \oplus u_j$ برابر است با $(n-2)(m-2)$.
- $P \oplus R$ برابر است با اجتماع $(n-2)(m-2)$ چند ضلعی با پیچیدگی ثابت .
- بنابراین پیچیدگی $P \oplus R$ برابر است با $o(n^2m^2)$.



این یک کران بالا برای پیچیدگی می باشد
که در عمل نیز ممکن است اتفاق بیفتد .

قضیه ۱۳.۱۱:

اگر P و R دو چند ضلعی به ترتیب با n و m راس باشند، پیچیدگی جمع مینکوفسکی $P \oplus R$ برابر است با:

- الف) $O(n+m)$ اگر هر دو چند ضلعی محدب باشند.
- ب) $O(nm)$ اگر یکی محدب و دیگری غیر محدب باشد.
- ج) $O(n^2m^2)$ اگر هر دو چند ضلعی غیر محدب باشند.

Translational Motion Planning

قضیه ۱۳.۱۲:

اگر R یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت باشد که در میان مجموعه S (شامل موانع چند ضلعی و بدون اشتراک، با مجموع n یال) حرکت می کند. در این صورت پیچیدگی فضای پیکربندی آزاد $C_{free}(R, S)$ برابر با $O(n)$ خواهد بود.

Translational Motion Planning

قضیه ۱۳.۱۲:

اگر R یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت باشد که در میان مجموعه S (شامل موانع چند ضلعی و بدون اشتراک، با مجموع n یال) حرکت می کند. در اینصورت پیچیدگی فضای پیکربندی آزاد $C_{free}(R, S)$ برابر با $O(n)$ خواهد بود.

اثبات:

ابتدا هر مانع چند ضلعی را مثلثی می کنیم.
فضای پیکربندی آزاد مکمل اجتماع فضای پیکربندی این مثلث ها خواهد بود.
ربات دارای پیچیدگی ثابت است و فضای پیکربندی موانع نیز دارای پیچیدگی ثابت است و تشکیل یک مجموعه شبه دیسک می دهد (قضیه ۱۳.۸).
طبق قضیه ۱۳.۹ اجتماع این شبه دیسک ها پیچیدگی خطی دارد.

الگوریتم ساختن فضای آزاد

- فضای ممنوعه (Forbidden Space) را محاسبه می کنیم .
- فضای آزاد، متمم فضای ممنوعه خواهد بود .

اگر $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ مثلث های حاصل از مثلث بندی موانع باشند، برای محاسبه فضای ممنوعه خواهیم داشت

$$\mathcal{C}_{forb} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{CP}_i = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i \oplus (-\mathcal{R}(0,0))$$

Algorithm FORBIDDENSPACE($\mathcal{CP}_1, \dots, \mathcal{CP}_n$)

Input. A collection of $\mathcal{C}$ -obstacles.

Output. The forbidden space $\mathcal{C}_{\text{forb}} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{CP}_i$.

1. **if** $n = 1$
2. **then return** $\mathcal{CP}_1$
3. **else** $\mathcal{C}_{\text{forb}}^1 \leftarrow \text{FORBIDDENSPACE}(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{\lceil n/2 \rceil})$
4. $\mathcal{C}_{\text{forb}}^2 \leftarrow \text{FORBIDDENSPACE}(\mathcal{P}_{\lceil n/2 \rceil + 1}, \dots, \mathcal{P}_n)$
5. Compute $\mathcal{C}_{\text{forb}} = \mathcal{C}_{\text{forb}}^1 \cup \mathcal{C}_{\text{forb}}^2$.
6. **return** $\mathcal{C}_{\text{forb}}$

لم ۱۳.۱۳ :

فضای پیکربندی آزاد (C_{free}) یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت، که از بین مجموعه چند ضلعی هایی با مجموع n یال می گذرد، در زمان $O(n \log^2 n)$ محاسبه می شود .

لم ۱۳.۱۳ :

فضای پیکربندی آزاد (C_{free}) یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت، که از بین مجموعه چند ضلعی هایی با مجموع n یال می گذرد، در زمان $O(n \log^2 n)$ محاسبه می شود .

اثبات :

یک چند ضلعی با m راس در زمان $O(m \log m)$ مثلثی می شود . (رک فصل سوم)
اگر m_i نشانگر پیچیدگی مانع p_i باشد، مثلثی سازی تمامی موانع متناسب است با :

$$\sum_{i=1}^t m_i \log m_i \leq \sum_{i=1}^t m_i \log n = n \log n$$

عملیات ادغام در سطر پنجم الگوریتم دارای پیچیدگی $O(n_1 + n_2 + k) \log(n_1 + n_2)$ می باشد .

n_1, n_2, k پیچیدگی $UC^2_{\text{forb}}, C^1_{\text{forb}}, C^2_{\text{forb}}$ می باشد . (رک فصل دوم)

از آنجایی که پیچیدگی فضای پیکربندی ممنوعه، خطی است. بنابراین n_1, n_2, k همگی از مرتبه $O(n)$ هستند .
بنابراین زمان ادغام از مرتبه $O(n \log n)$ است .

لم ۱۳.۱۳ :

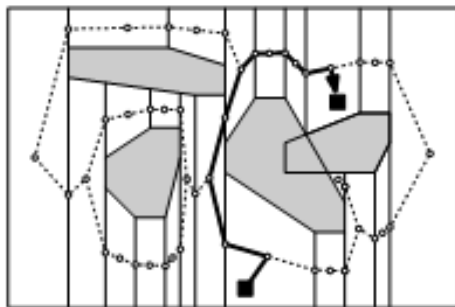
فضای پیکربندی آزاد (C_{free}) یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت، که از بین مجموعه چند ضلعی هایی با مجموع n یال می گذرد، در زمان $O(n \log^2 n)$ محاسبه می شود .

اثبات :

با حل بازگشتی زیر زمان اجرای الگوریتم را بدست می آوریم .

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + O(n \log n)$$

زمان اجرای الگوریتم $O(n \log^2 n)$ خواهد بود .



قضیه ۱۳.۱۴ :

R یک ربات محدب با پیچیدگی ثابت است که در بین مجموعه S (شامل موانع چند ضلعی بدون اشتراک با مجموع n یال) حرکت می کند. می توانیم S را در زمان مورد انتظار $O(n \log^2 n)$ پردازش کنیم، بطوریکه بین هر نقطه شروع و هدف یک مسیر بدون برخورد برای R را (در صورت وجود) در زمان $O(n)$ محاسبه کند.

پہلے



پہلے