سرشاخ شدن با کنکور

- خلاصه مطالب دروس
- جزوات برترین اساتید
- ارایه نکات کنکوری
- مشاوره کنکور
- اخبار کنکوری ها

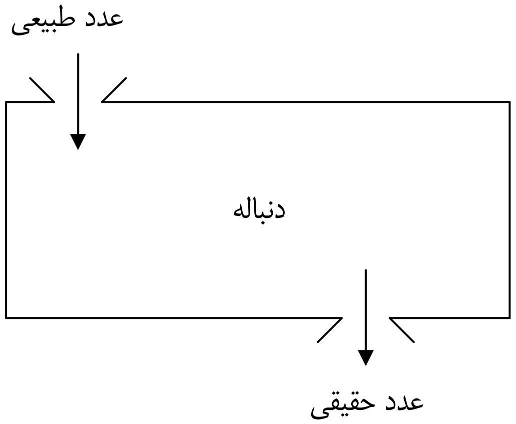
«همه و همه در سرشاخ شدن با کنکور»

www.konkoori.blog.ir

دنباله

هر عبارت جبری بر حسب یک حرف (مانند n) را یک دنباله می نامند. هرگاه عدد طبیعی می گیرد و عدد طبیعی می دهد.

برای مثال عبارت $a_n = \frac{n}{۲n+۱}$ یک دنباله است. با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n می توان یک عدد حقیقی به دست آورد.



توجه :

۱ : این عبارت جبری را **جمله ی عمومی دنباله** می نامند.

۲ : جمله ی عمومی می تواند یک عدد ثابت نیز باشد. مثلاً $a_n = ۵$

مثال : عبارت $a_n = \frac{۳n+۱}{n^۲}$ یک دنباله است.

جمله ی اول $\quad n = ۱ \rightarrow a_۱ = \frac{۳(۱)+۱}{(۱)^۲} = \frac{۴}{۱} = ۴$

جمله ی دوم $\quad n = ۲ \rightarrow a_۲ = \frac{۳(۲)+۱}{(۲)^۲} = \frac{۷}{۴}$

جمله ی سوم $\quad n = ۳ \rightarrow a_۳ = \frac{۳(۳)+۱}{(۳)^۲} = \frac{۱۰}{۹}$

جمله ی چهارم $\quad n = ۴ \rightarrow a_۴ = \frac{۳(۴)+۱}{(۴)^۲} = \frac{۱۳}{۱۶}$

....

جمله ی عمومی (جمله ی nام) $\quad a_n = \frac{۳n+۱}{n^۲}$

جملات این دنباله را می توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$۴ \text{ و } \frac{۷}{۴} \text{ و } \frac{۱۰}{۹} \text{ و } \frac{۱۳}{۱۶} \text{ و } .....$$

تمرین : پنج جمله ی اول دنباله ی زیر را تعیین کنید.

$$a_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n+۳}$$

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{n+۳}{۲n+۱}$ می باشد. جمله ی چهارم این دنباله را به دست آورید.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = ۲^n - ۳n$ می باشد. جمله ی پنجم این دنباله را به دست آورید.

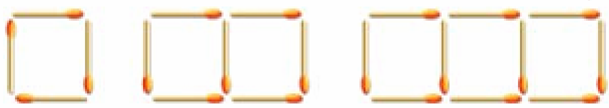
تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-۱)^{n+۱} n^۲$ می باشد. جمله ی ششم این دنباله را به دست آورید.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = -۳n + ۵$ می باشد. تعیین کنید که جمله ی چندم این دنباله برابر ۱۶- می باشد.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^۲ + ۲n - ۳$ می باشد. کدام جمله ی این دنباله ۳۲ می باشد.

تمرین : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = ۳^n - ۱$ می باشد. حساب کنید که جمله ی چندم این دنباله ۸۰ می باشد.

تمرین : با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



الف : تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

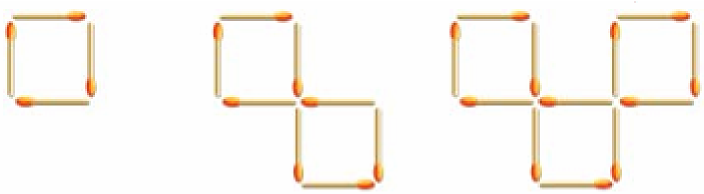
ب : برای ساختن شکل چهارم چند چوب کبریت نیاز است؟

ب : جمله ی nام دنباله ی مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.

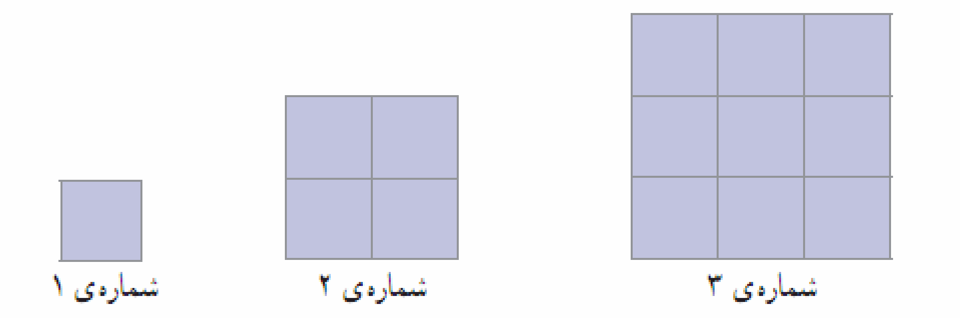
تمرین : جمله ی عمومی دنباله ی زیر را بنویسید.

۲ و ۷ و ۱۲ و ۱۷ و ....

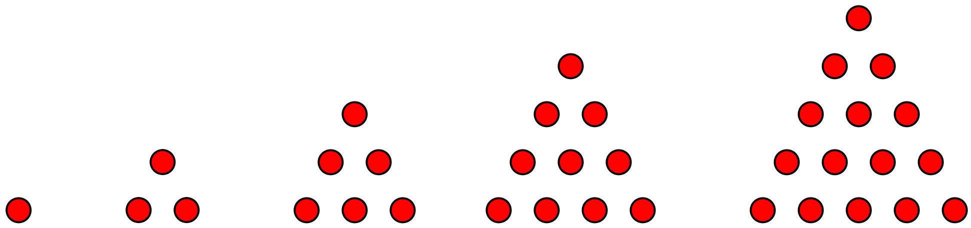
تمرین : جمله ی عمومی دنباله ی مربوط به شکل های زیر که با چوب کبریت ساخته شده است، را بنویسید.



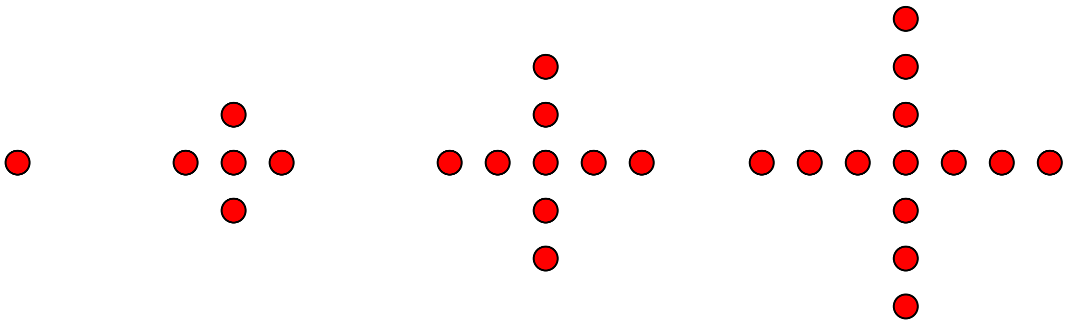
تمرین : دنباله ی مربوط به تعداد مربع های کوچک هر شکل را نوشته و سپس جمله ی nام آن بیابید



تمرین : جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.



تمرین : جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله ی بیستم این دنباله را به دست آورید.



تمرین : کدام یک از عبارت های زیر دنباله نمی باشد؟ چرا ؟

الف : $3n(-1)^n$ ب) $a_n=\frac{4n+7}{2n-6}$ ج) $a_n=\frac{n+1}{n}$ د) $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n+1}$

***

دنباله ی حسابی (عددی)

هر دنباله که تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشد را دنباله ی حسابی می نامند و این عدد ثابت را قدرنسبت مـی گویند و آن را با d نمایش می دهند.

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است، زیر تفاضل هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۴ است؟

۵ و ۹ و ۱۳ و ۱۷ و ....

$a = a_{۱} = ۵$ جمله ی اول

$d = ۴$ قدر نسبت

تمرین : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی است؟ چرا ؟

الف) ۵ و ۷ و ۱۰و۱۴و ....

ب) ۵ و ۳ و ۱ و ۱- و ....

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

اگر a جمله ی اول و d قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

$a_{۱} = a$ جمله ی اول

$a_{۲} = a_{۱} + d = a + d$ جمله ی دوم

$a_{۳} = a_{۲} + d = (a + d) + d = a + ۲d$ جمله ی سوم

$a_{۴} = a_{۳} + d = (a + ۲d) + d = a + ۳d$ جمله ی چهارم

$a_{۵} = a_{۴} + d = (a + ۳d) + d = a + ۴d$ جمله ی پنجم

....

$a_n = a + (n - ۱)d$ جمله ی عمومی (nام)

تمرین : دنباله ی حسابی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و ۷ و ۱۱ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی بیست و یکم این دنباله را بدست آورید.

تمرین : جمله ی پانزده ام دنباله ی حسابی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۵ و ۸

تمرین : در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم ۲۷ و جمله ی سوم ۱۱ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اول این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

تمرین : اگر دو جمله ی غیر متوالی a_j و a_i از یک دنباله ی حسابی معلوم باشند. ثابت کنید که $d=\dfrac{a_i-a_j}{i-j}$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی حسابی استفاده کنیم.

$$a_n=a+(n-۱)d$$

$$a_i=a+(i-۱)d \rightarrow a_i=a+id-d$$
$$a_j=a+(j-۱)d \rightarrow a_j=a+jd-d$$

$$\rightarrow a_i-a_j=(a+id-d)-(a+jd-d)$$
$$\rightarrow a_i-a_j=a+id-d-a-jd+d \rightarrow a_i-a_j=id-jd \rightarrow a_i-a_j=(i-j)d$$
$$\rightarrow d=\frac{a_i-a_j}{i-j}$$

تمرین : در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم ۱۷ و جمله ی دوازدهم ۵۲ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، ثابت کنید که : $۲y=x+z$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی حسابی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدرنسبت می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

$$\begin{matrix} d=y-x \\ d=z-y \end{matrix} \rightarrow y-x=z-y \rightarrow ۲y=x+z$$

تمرین : در دنباله ی حسابی زیر مقدار t را به دست آورید.

.... و ۲۳ و t و ۷

تمرین : در دنباله ی حسابی زیر مقدار x را تعیین کنید.

$$1-x \text{ و } 2+x \text{ و } 1+2x \text{ و } \ldots\ldots$$

تمرین : اگر زاویه های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله ی حسابی تشکیل شود. نشان دهید که یکی از زاویه های این مثلث ۶۰ درجه است.

تمرین : در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات نهم و سیزدهم و بیستم برابر ۷۸ است. جمله ی چهاردهم این دنباله را به دست آورید.

***

دنباله ی هندسی

هر دنباله که خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی باشد را دنباله ی هندسی می نامند و این عدد ثابت را قدرنسبت می گویند و آن را با q نمایش می دهند[1].

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی است، زیر خارج قسمت هر دو جمله ی متوالی آن برابر ۲- است؟

$$3 \text{ و } -6 \text{ و } 12 \text{ و } -24 \text{ و } \ldots$$

$a=a_1=3$ جمله ی اول

$q=-2$ قدر نسبت

تمرین : کدام یک از دنباله های زیر ، یک دنباله ی حسابی و کدام یک هندسی است؟ چرا ؟

الف) ۳ و ۵- و ۱۳- و۲۱- ....

د) $2 \text{ و } 2\sqrt{3} \text{ و } 6 \text{ و } 6\sqrt{3} \text{ و } 18 \text{ و } \ldots$

ب) ۵ و ۱۵ و ۴۵ و ۱۳۵ و ....

هـ) $2 \text{ و } 1 \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ و } \ldots$

ج) ۵ و ۷ و ۱۴ و ۱۶و ۳۲ و ....

جمله ی عمومی دنباله ی هندسی

اگر a جمله ی اول و q قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت :

$a_1=a$ جمله ی اول

$a_2=a_1q=aq$ جمله ی دوم

[1] . در هر دنباله ی هندسی جمله ی اول و قدر نسبت ، نباید صفر باشند.

جمله ی سوم $a_3 = a_2 q = (aq)q = aq^2$

جمله ی چهارم $a_4 = a_3 q = (aq^2)q = aq^3$

جمله ی پنجم $a_5 = a_4 q = (aq^3)q = aq^4$

....

جمله ی عمومی (nام) $a_n = aq^{n-1}$

تمرین : دنباله ی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

۳ و ۶ و ۱۲ و .....

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی پنجم این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین : جمله ی پانزده ام دنباله ی هندسی زیر را تعیین کنید.

۸ و ۴ و ۲ و ....

تمرین : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم ۱۶۲ و جمله ی دوم ۶ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اول این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین : اگر دو جمله ی غیر متوالی a_j و a_i از یک دنباله ی هندسی معلوم باشند. ثابت کنید که $q = \sqrt[i-j]{\dfrac{a_i}{a_j}}$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی هندسی استفاده کنیم.

$$a_n = aq^{n-1}$$

$$a_i = aq^{i-1}$$
$$a_j = aq^{j-1}$$
$$\rightarrow \frac{a_i}{a_j} = \frac{aq^{i-1}}{aq^{j-1}} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = \frac{q^{i-1}}{q^{j-1}} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = q^{i-1-j+1} \rightarrow \frac{a_i}{a_j} = q^{i-j}$$

تمرین : در یک دنباله ی هندسی جمله ی هفتم ۸۱ و جمله ی چهارم ۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین : اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که : $y^{۲} = xz$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله ی هندسی تفاضل هر دو جمله ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدر نسبت می نامند و آن را با q نمایش می دهند.

$$\begin{array}{l} q = \dfrac{y}{x} \\ q = \dfrac{z}{y} \end{array} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \rightarrow y^{۲} = xz$$

تمرین : در دنباله ی هندسی زیر مقدار t را به دست آورید.

.... و ۶۳ و t و ۷

تمرین : در دنباله ی هندسی زیر مقدار x را تعیین کنید.

...... و $۹x$ و ۶ و x

تمرین : بین دو عدد $۳^{۹} \times ۲^{۵}$ و $۳^{۷} \times ۲^{۳}$ عددی قرار دهید که دنباله ی هندسی تشکیل شود.

تمرین : در یک دنباله ی هندسی قدرنسبت ۲ و $a_{۵} - a_{۳} = ۴۸$. این دنباله را مشخص کنید.

تمرین : وسط های اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸ را به هم وصل می کنیم و این عمل را روی مثلث جدید انجام می دهیم. اگر این عمل را بی شمار بار تکرار کنیم. مساحت های مثلث های ایجاد شده دنباله ای را می سازند.

الف : نوع دنباله را مشخص کنید.

ب : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین : توپی طوری ساخته شده است که وقتی به زمین بخورد $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی اش ، بالا می رود. اگر این توپ از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۸۱ متر رها شود، دنباله ی پایین آمدن های توپ را بنویسید و سپس جمله ی عمومی آن را مشخص کنید.

تمرین : در اولین خانه ی شطرنج یک دانه گندم قرار می دهیم. در خانه ی دوم شطرنج دو دانه گندم قرار می دهیم. در خانه ی سوم شطرنج چهار دانه گندم قرار می دهیم. به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه ی قبلی دانه ی گندم قرار می دهیم. دنباله ی حاصل از تعداد دانه های گندم در هر خانه را نوشته و جمله ی عمومی آن را مشخص کنید.

***

دنباله ی ثابت

هر دنباله که تمام جملات آن برابر باشند، را دنباله ی ثابت می نامند. مانند دنباله ی زیر

۵ و ۵ و ۵ و ۵ و ...

این دنباله ، هم دنباله ی حسابی ($d=0$) و هم دنباله ی هندسی ($q=1$) می باشد.

***

همگرایی دنباله (نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد)

برخی از دنباله ها به گونه ای هستند که اگر به جملات آنها دقت کنیم، مشاهده می کنیم که این جملات بویژه در مراتب بالاتر به عدد خاصی نزدیک و نزدیکتر می شوند. در اصطلاح می گویند، این دنباله به عدد مورد نظر همگرا است.

مثال : جملات دنباله ی زیر به عدد یک نزدیک می شوند.

۰/۹ و ۰/۹۹ و ۰/۹۹۹ و ۰/۹۹۹۹ و ....

برای اثبات این مطلب کافی است هر یک از جملات دنباله را از عدد یک کم کنیم و سپس نشان دهیم که جملات دنباله ی جدید (دنباله ی تفاضل ها) به صفر نزدیک می شوند.

$$1-\frac{9}{10} \text{ و } 1-\frac{99}{100} \text{ و } 1-\frac{999}{1000} \text{ و } 1-\frac{9999}{10000} \text{ و } \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \text{ و } \frac{1}{100} \text{ و } \frac{1}{1000} \text{ و } \frac{1}{10000} \text{ و } \ldots\ldots$$

و چون جملات دنباله ی تفاضل ها به صفر نزدیک می شوند، پس دنباله ی اصلی به یک نزدیک می شوند.

تمرین : نشان دهید که جملات دنباله ی زیر به $\frac{16}{9}$ نزدیک می شوند.

۱/۷ و ۱/۷۷ و ۱/۷۷۷ و ۱/۷۷۷۷ و ....

تمرین : جملات دنباله ی زیر به چه عددی نزدیک می شوند. حدس بزنید و سپس حدس خود را ثابت کنید.

۵/۰۵ و ۵/۰۰۵ و ۵/۰۰۰۵ و ....

تذکر : قرار داد می کنیم که جملات دنباله ی ثابت ، به مقدار ثابت دنباله نزدیک می شوند. برای مثال جملات دنباله ی ۴ و ۴ و ۴ و ۴ و .... به عدد ۴ نزدیک می شوند.

***

دنباله ی تقریبات اعشاری یک عدد حقیقی

گاهی اوقات می توان دنباله ای از اعداد اعشاری طوری ایجاد کرد که به عدد خاصی نزدیک می شود. این دنباله را دنباله ی تقریبات اعشاری عدد مورد نظر می نامند.

با تقسیم صورت بر مخرج یک کسر یا با محاسبه ی ریشه ی اعشاری یک عدد می توان دنباله ی تقریبات اعشاری آن عدد را تا چند رقم اعشار به دست آورد.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۱}{۹}$ را بنویسید.

حل : با تقسیم عدد ۱۱ بر ۹ دنباله ی زیر را می توان تشکیل داد. این دنباله را دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۱}{۹}$ می نامند.

$$۱/۲ \text{ و } ۱/۲۲ \text{ و } ۱/۲۲۲ \text{ و } ۱/۲۲۲۲ \text{ و } ...$$

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۳}{۱۱}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۳}{۷}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ را بنویسید.

تمرین : دنباله ی تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۳}$ را بنویسید.

تمرین : اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق کند. چهار جمله ی اول تقریبات اعشاری x را بنویسید.

$$۲x+۱<۱۹/۹۴۷۲ \text{ و } ۱۰-x<۰/۵۲۶۵$$

***

ریشه گیری از اعداد حقیقی

فرض کنید که n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک و a و b اعداد حقیقی باشند و که $a^n=b$ آنگاه a را ریشه ی n ام عدد b می نامند و آن را با نماد $\sqrt[n]{b}$ نمایش می دهند. عدد طبیع n را فرجه ی رادیکال می گویند.

$$a^n=b \rightarrow \sqrt[n]{b}=a$$

مثال ۱:

$$۲^{۳} = ۸ \rightarrow \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

یعنی ۲ ریشه ی سوم عدد ۸ است.

مثال ۲:

$$(-۵)^{۳} = -۱۲۵ \rightarrow \sqrt[۳]{-۱۲۵} = -۵$$

یعنی ۵- ریشه ی سوم عدد ۱۲۵- است.

مثال ۳:

$$۲^{۵} = ۳۲ \rightarrow \sqrt[۵]{۳۲} = ۲$$

یعنی ۲ ریشه ی پنجم عدد ۳۲ است.

مثال ۴:

$$۳^{۲} = ۹ \rightarrow \sqrt{۹} = ۳$$

یعنی ۳ ریشه ی پنجم عدد ۹ است.

توجه: اگر فرجه ی رادیکال عدد ۲ باشد، معمولاً آن را نمی نویسند. یعنی

$$a^{۲} = b \rightarrow \sqrt{b} = a$$

عدد a را جذر b نیز می خوانند. واضح است که

الف : هر عدد مثبت دو ریشه ی دوم دارد. برای مثال ۲۵ دو ریشه ی دوم دارد. یکی $+\sqrt{۲۵} = ۵$ و دیگری $-\sqrt{۲۵} = -۵$

ب : اعداد منفی ریشه ی دوم ندارند. برای مثال ۹- ریشه ی دوم ندارد. زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که بتوان ۲ برسد و ۹- بدست آید. در اصطلاح گویند $\sqrt{-۹}$ تعریف نشده یا نامعین است.[2]

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۶۴} =$

۲) $\sqrt[۴]{۱۶} =$

۳) $\sqrt[۵]{۳۲} =$

۴) $\sqrt{۱۶} =$

۵) $\sqrt[۴]{۸۱} =$

۶) $\sqrt{-۲۵} =$

۷) $\sqrt[۳]{-۸} =$

۸) $\sqrt[۴]{-۸۱} =$

---

2. این دو خاصیت برای رادیکال های با فرجه ی زوج نیز درست است.

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۲۱۶} =$ ۴) $\sqrt{-۳۶} =$ ۷) $\sqrt{(-۲)^{۴}} =$

۲) $\sqrt[۳]{-۸} =$ ۵) $\sqrt[۴]{-۸۱} =$ ۸) $\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}} =$

۳) $\sqrt[۵]{-۳۲} =$ ۶) $-\sqrt{۱۰۰} =$ ۹) $\sqrt[۷]{۱} =$

تذکر :

۱ : از این به بعد هر کجا عبارت $\sqrt[n]{x}$ مورد استفاده قرار گیرد.منظور x و n هایی می باشند که رادیکال قابل تعریف باشد.

۲ : ریشه ی دوم هر عدد مثبت را جذر و ریشه ی سوم را کعب می نامند.

۳ : ریشه ی nام عدد یک برابر یک است. $\sqrt[n]{۱} = ۱$

نتیجه: برای هر x حقیقی همواره داریم:

$$\sqrt{x^{۲}} = |x|$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\sqrt{(-۵)^{۲}} =$ ۲) $\sqrt{۷^{۲}} =$ ۳) $-\sqrt{(-۳)^{۲}} =$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sqrt{(۲-\sqrt{۳})^{۲}} =$ ب) $\sqrt{(\sqrt{۲}-\sqrt{۵})^{۲}} =$

***

توان رسانی با اعداد گویا

اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی مخالف یک باشد، عبارت $\sqrt[n]{a}$ را با نماد $a^{\frac{۱}{n}}$ نمایش می دهند.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{n}}$$

مثال: $\sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}$, $\sqrt[۳]{۶} = ۶^{\frac{۱}{۳}}$

نتیجه : اگر a یک عدد حقیقی و m و n دو عدد طبیعی غیر یک باشند. در این صورت داریم:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

مثال: $\sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$

تمرین : عبارت $9^{1/5}$ را به صورت رادیکالی بنویسید. سپس مقدار آن را به دست آورید.

تمرین : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$4^{\frac{3}{2}} =$$

تمرین : برای هر عدد گویای r ثابت کنید که $1^r = 1$

حل : فرض کنید که $r = \frac{m}{n}$ (n و m دو عدد صحیح و $n \neq 0$) در این صورت :

$$1^r = 1^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{1^m} = \sqrt[n]{1} = 1$$

قوانین توان رسانی با ، توان های صحیح برای توان های گویا نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا باشند. در این صورت:

$$a^r.b^r = (ab)^r \qquad a^r.a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

تمرین : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد گویای دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

$$1)\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad 2)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r = (a \times \frac{1}{b})^r = (a)^r \times (\frac{1}{b})^r = a^r \times \frac{1}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \times \frac{1}{a^s} = a^r \times a^{-s} = a^{r+(-s)} = a^{r-s} = a^{r-s}$$

تمرین : برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی و مثبت a نشان دهید که $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

حل :

$$a^{-r}=(a^{-1})^r=(\frac{1}{a})^r=\frac{1^r}{a^r}=\frac{1}{a^r}$$

قوانین رادیکال ها: با توجه به تعریف فوق ، اعمال زیر مانند اعمال روی توان ها می توان بیان کرد.

۱) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

۲) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

۳) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

۴) $\sqrt[n]{a^n}=a$ اگر n فرد باشد.

۵) $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ اگر n زوج باشد.

۶) $b\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b^n a}$ اگر b مثبت باشد.

۷) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

۸) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

تمرین : هر یک از قوانین فوق را ثابت کنید.

اثبات ۱ :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\times b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab}$$

اثبات۲ :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

اثبات ۳ :

$$(\sqrt[n]{a})^m=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

اثبات ۶ :

$$b\sqrt[n]{a}=b(a^{\frac{1}{n}})=(b^n)^{\frac{1}{n}}(a^{\frac{1}{n}})=(b^n a)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{b^n a}$$

اثبات ۷ :

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

اثبات ۸ :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{(a)^{\frac{1}{n}}}=((a)^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

نتیجه: به کمک قوانین بیان شده برای رادیکال ها به سادگی داریم.

الف) $a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{xy}$ ب) $\frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}}=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ ج) $(\sqrt[n]{a^m})^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را به کمک خواص رادیکال محاسبه کنید.

۱) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۶}=$

۲) $\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۴}=$

۳) $\sqrt{۲۰۰}\div\sqrt{۲}=$

۴) $\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۹}}=$

۵) $\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۰}=$

۶) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۱۸}}=$

۷) $\sqrt[۳]{-۲}\times\sqrt[۳]{۴}=$

۸) $\sqrt[۳]{۱۶}\div\sqrt[۳]{۲}=$

۹) $(\sqrt[۳]{۲})^{۳}\times(\sqrt{۳})^{۶}=$

۱۰) $\sqrt[۳]{۵}\times\sqrt{۵}=$

۱۱) $\sqrt[۱۲]{۳^{۴}}\times\sqrt[۶]{۳^{۸}}=$

۱۲) $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=$

۱۳) $\sqrt[۳]{\sqrt{۱۲۵}}=$

۱۴) $\sqrt[۳]{-۲\sqrt{۲}}=$

تمرین: در هر مورد ضریب را به داخل رادیکال ببرید و حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۱) $۳\sqrt{۵}=$

۲) $۲\sqrt[۳]{۵}=$

۳) $۲\sqrt[۳]{\sqrt{۵}}=$

۴) $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۵}}=$

۵) $\sqrt{۴\sqrt{۲\sqrt{۲}}}=$

۶) $۵\sqrt[۳]{۵}\times۳\sqrt[۴]{۳}=$

تمرین: تساوی های زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{۳۲} =$ ۳) $\sqrt[۵]{۱۲۸} =$ ۵) $\sqrt{۳۶a^{۵}b^{۷}c^{۱۰}} =$

۲) $\sqrt[۳]{۳۲} =$ ۴) $\sqrt{۵۰x^{۶}y^{۹}} =$ ۶) $\sqrt[۳]{۱۶x^{۶}y^{۱۲}z^{۱۴}} =$

تمرین: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۷})(\sqrt{۳}+\sqrt{۷}) =$ ۲) $\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}} \times \sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}} =$

تمرین : درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = a$$

حل :

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = ((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{n})^{m} = (\sqrt[n]{a})^{n} = a$$

تمرین : برای هر عدد حقیقی و مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

حل :

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = a^{\frac{۱}{m}} \times a^{\frac{۱}{n}} = a^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

رادیکال های متشابه: دو یا چند رادیکال را متشابه می نامند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف: فرجه های مساوی داشته باشند.

ب: اعداد زیر رادیکال ها برابر باشند.

برای مثال هر دسته از رادیکال های زیر متشابهند.

الف) $۲\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -۴\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \frac{۱}{۷}\sqrt[۳]{۵}\ ,\ -\sqrt[۳]{۵}\ ,\ \sqrt[۳]{۵}$

ب) $۳\sqrt{x}\ ,\ -۲\sqrt{x}\ ,\ \frac{۲}{۳}\sqrt{x}\ ,\ ۱\frac{۲}{۷}\sqrt{x}\ ,\ -\sqrt{x}\ ,\ \sqrt{x}$

نتیجه: رادیکال های متشابه فقط در ضرایب آنها اختلاف دارند.

جمع و تفریق رادیکال ها

دو رادیکال را وقتی می توان جمع یا تفریق کرد که متشابه باشند.[۳] در این صورت حاصل، رادیکالی متشابه آنها است، بطـوری که ضریب آن از جمع یا تفریق رادیکال های داده شده بدست می آید.

برای مثال:

الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=(۵+۲-۱)\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$

ب) $۲\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{x}+۵\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt[۳]{x}-۴\sqrt[۳]{x}=(۲-۱+۵+۳-۴)\sqrt[۳]{x}=۵\sqrt[۳]{x}$

ولی رادیکال های زیر به دلیل متشابه نبودن نمی توان جمع یا تفریق کرد.

ب) $\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt[۵]{x}$ الف) $۵\sqrt{۳}+۲\sqrt{۶}$

تمرین: عبارت های زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

۱) $۵\sqrt{۲}+۷\sqrt{۲}-۴\sqrt{۲}=$

۲) $۴\sqrt{۲}-۷\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}=$

۳) $\sqrt{x}+۲\sqrt{y}-۳\sqrt{x}+۴\sqrt{y}-۵\sqrt{x}+۶\sqrt{y}=$

۴) $۴\sqrt[۵]{m}+۳\sqrt[۵]{n}-۲\sqrt[۵]{m}+۸\sqrt[۵]{n}=$

تذکر: گاهی لازم است قبل از انجام عمل جمع یا تفریق دو رادیکال آنها را ساده کرد.

تمرین: عبارت های زیر را ساده کنید.

۱) $۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۳۲}+\sqrt{۱۲}-\sqrt{۳}=$

۲) $۶\sqrt{۳}-\sqrt{۹۸}+\sqrt{۵۰}+\sqrt{۲۷}+۲\sqrt{۲۰۰}=$

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۷۲}}+\sqrt{\frac{۳}{۱۵۰}}=$

۴) $۵\sqrt[۳]{۴}+۲\sqrt[۳]{۳۲}-\sqrt[۳]{۱۰۸}=$

۵) $۲\sqrt[۳]{x}+۳\sqrt{x}-۴\sqrt[۳]{x}+۲\sqrt{x}=$

۶) $\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۲)-\sqrt{۳}(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=$

۷) $(۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(\sqrt{۳}-۵\sqrt{۲})=$

۸) $(\sqrt{۷}-\sqrt{۵})(\sqrt{۷}+\sqrt{۵})=$

***

۲. توجه کنید که شرط ضرب یا تقسیم رادیکال ها فقط مساوی بودن فرجه های آنها است ولی شرط جمع و تفریق رادیکال ها متشابه بودن آنها می باشد.

توان رسانی با اعداد حقیقی

گاهی اوقات توان یک عدد می تواند یک عدد حقیقی نیز باشد. برای مثال $۲^{\sqrt{۵}}$

معمولاً محاسبه ی مقدار واقعی این اعداد امکان پذیر نیست و اغلب از تقریبات اعشاری آنها استفاده می شود. برای مثال محاسبه مقدار دقیق $۵^{\sqrt{۲}}$ مشکل است ، ولی می توان مقدار تقریبی این عدد را با دقت چند رقم اعشار تعیین کرد. مثلاً:

$$۲^{\sqrt{۳}} = ۲^{۱/۷} = ۲^{\frac{۱۷}{۱۰}} = \sqrt[۱۰]{۲^{۱۷}} = \sqrt[۱۰]{۱۳۱۰۷۲} = ۳/۲۴$$

قوانین توان رسانی با توان های صحیح برای توان های حقیقی نیز برقرار است. یعنی اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. در این صورت:

$$(a^r)^s = a^{rs} \qquad a^r.b^r = (ab)^r \qquad ۱^r = ۱$$

$$a^r.a^s = a^{r+s} \qquad a^{-r} = \frac{۱}{a^r}$$

تمرین : اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و s و r دو عدد حقیقی دلخواهی باشند. ثابت کنید که :

$$۱)\ (\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad ۲)\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

حل :

۱ :

$$(\frac{a}{b})^r = (a \times \frac{۱}{b})^r = (a)^r \times (\frac{۱}{b})^r = a^r \times \frac{۱}{b^r} = \frac{a^r}{b^r}$$

۲ :

$$\frac{a^r}{a^s} = a^r \times \frac{۱}{a^s} = a^r \times a^{-s} = a^{r+(-s)} = a^{r-s} = a^{r-s}$$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۱)\ ((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} =$$

$$۲)\ ((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}} =$$

$$۳)\ ((\sqrt{۱۰})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}} =$$

$$۴)(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} =$$

$$۵)\ (۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi+۱}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi+۱} =$$

تمرین : عبارت زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} =$$

تمرین : حاصل عبارت $\dfrac{۴^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}} \times ۸^{\sqrt{۳}}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{۴^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}} \times ۸^{\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۲\sqrt{۳}} \times ۲^{۵\sqrt{۳}}}{۲^{۲\sqrt{۳}} \times ۲^{۳\sqrt{۳}}} = \frac{۲^{۷\sqrt{۳}}}{۲^{۵\sqrt{۳}}} = ۲^{۲\sqrt{۳}}$$

تمرین : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۲}} + ۱ = ۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}} + ۱ = ۵ \rightarrow x^{\sqrt{۲}} = ۴ \rightarrow (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (۴)^{\sqrt{۲}} \rightarrow x^{۲} = ۲^{۲\sqrt{۲}} \rightarrow x = ۲^{\sqrt{۲}}$$

تمرین : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} = ۲$$

تمرین : دو عدد $\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}}$ و $\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$ را با هم مقایسه کنید.

حل : ابتدا عدد داده شده را به توان $\sqrt{۱۲}$ می رسانیم.

$$(\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۲}^{\sqrt{۳۶}} = \sqrt{۲}^{۶} = ۲^{۳} = ۸$$

$$(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۳}^{\sqrt{۲۴}} = \sqrt{۳}^{۲\sqrt{۶}} = (\sqrt{۳}^{۲})^{\sqrt{۶}} = ۳^{\sqrt{۶}}$$

واضح است که $۹ < ۳^{۲} < ۳^{\sqrt{۶}}$ پس $۸ < ۳^{\sqrt{۶}}$ یعنی $\sqrt{۲}^{\sqrt{۳}} < \sqrt{۳}^{\sqrt{۲}}$

تمرین : جملات دنباله ی زیر به چه عددی نزدیک می شوند؟ چرا؟

$۸^{۱/۳}$ و $۸^{۱/۳۳}$ و $۸^{۱/۳۳۳}$ و ...

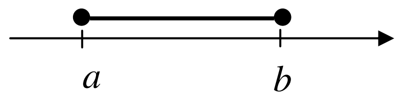
***

فاصله (بازه)

هر قطعه از مجموعه ی اعداد حقیقی را یک فاصله یا بازه می نامند.اگر b و a دو عدد حقیقی و $a<b$ بازه های زیر را می توان معرفی کرد.

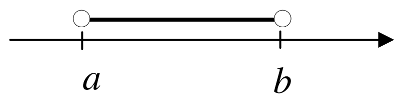
الف : بازه هایی که از دو طرف محدود می باشند.

۱) بازه ی بسته



$$[a,b]=\{x \mid x\in R, a\le x\le b\}$$

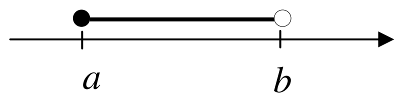
۲) بازه ی باز



$$(a,b)=\{x \mid x\in R, a< x< b\}$$

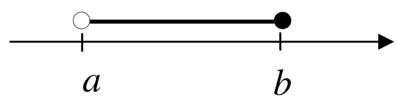
ب : بازه هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می باشند.

۳)



$$[a,b)=\{x \mid x\in R, a\le x< b\}$$

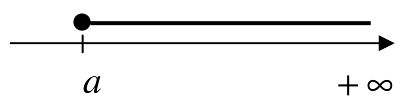
۴)



$$(a,b]=\{x \mid x\in R, a< x\le b\}$$

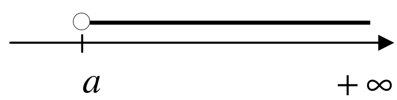
ج : بازه هایی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود می باشند.

۵)



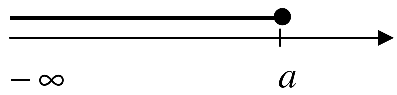
$$[a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x\ge a\}$$

۶)



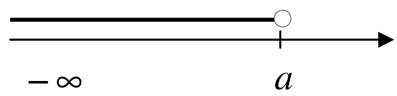
$$(a,+\infty)=\{x \mid x\in R, x> a\}$$

۷)



$$(-\infty,a]=\{x \mid x\in R, x\le a\}$$

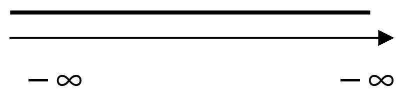
۸)



$$(-\infty,a)=\{x \mid x\in R, x< a\}$$

د : بازه هایی که از دو طرف نامحدود می باشند.

۹)



$$(-\infty,+\infty)=R$$

تمرین : هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

۱) $A=\{x\in R \mid ۰<x<۱\}$

۲) $B=\{x\in R \mid x\ge \frac{\sqrt{۲}}{۳}\}$

۳) $C=\{x\in R \mid -۲x+۶>۰\}$

۴) $D=\{x\in R \mid x\ne ۵\}$

تمرین: هر یک از بازه های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

الف) $A=[-۲,۵]$ ب) $B=(۳,۷]$ ج) $C=(-\infty,\sqrt{۲})$

تمرین: نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آنها را به صورت فاصله بنویسید.

الف) $۳x-۵\ge ۲x+۲$ ب) $۵<-۳x-۱\le ۸$

***

تمرین برای حل :

۱ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = (-1)^{n+1} + \frac{3}{n+2}$ می باشد. پنج جمله ی اول این دنباله را بنویسید.

۲ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = \frac{3n}{n+1}$ می باشد. جمله ی هشتم این دنباله را بنویسید.

۳ : تعیین کنید که هر یک از جمله های عمومی زیر ، مربوط به کدام دنباله است؟

دنباله	جمله ی عمومی
۳ و ۶ و ۱۲ و ...	$a_n = n^3$
۱ و ۸ و ۲۷و ...	$a_n = (-1)^n$
۵ و ۵ و ۵ و ...	$a_n = 3n + 1$
۴ و ۷ و ۱۰ و ...	$a_n = 3 \times 2^{n-1}$
۱- و ۱ و ۱- و ...	$a_n = 5$

۴ : جمله ی عمومی هر یک از دنباله های زیر را تعیین کرده و سپس سه جمله ی دیگر برای هر یک بنویسید.

۱) ۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,....

۲) ۳,۶,۱۲,۲۴, ...

۳) ۱,۳,۶,۱۰,۲۱,....

۴) ۳,۳,۳,۳,۳,....

۵) ۳-,۳,۳-,۳,۳-,....

۶) ۱,۴,۹,۱۶,۲۵,...

۵ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = 2n + 5$ می باشد. تعیین کنید که کدام جمله ی آن ۱۷ است؟

۶ : جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 4n - 3$ می باشد. تعیین کنید که کدام جمله ی آن ۴۲ است؟

۷ : اگر $4m - 11$ و $3m + 2$ و $m - 1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، مقدار m را به دست آورید.

۸ : عددی بین ۵ و ۸۰ قرار دهید به طوری که این سه عدد تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند. مسئله چند جواب دارد؟

۹ : اگر 9^c و 81^b و 3^a سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند، ثابت کنید که $8b = a + 2c$.

۱۰ : در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم برابر ۶ و جمله ی هشتم برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۱۱ : جملات دنباله ی $a_n = ۱ + \frac{۳}{n+۲}$ به چه عددی نزدیک می شوند.

۱۲ : حاصل عبارت زیر را بیابید.

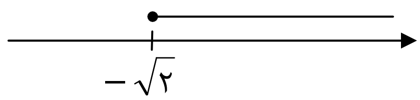
$$(-۲\sqrt{۲}+۳)^{\sqrt{۷}-۲} \times (۲\sqrt{۲}+۳)^{\frac{۳}{\sqrt{۷}+۲}}$$

۱۳ : مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید.

$$\sqrt[۳]{۹} \times \sqrt[۵]{۲۷} = \sqrt[۶]{۳^x}$$

۱۴ : مقدار عبارت $(x^۲-۱)(x^۴-x^۲+۱)(x^۴+x^۲+۱)(x^۲+۱)$ را به ازای $x = \sqrt[۶]{۵}$ را به دست آورید.

۱۵ : در جدول زیر ، خانه های خالی را با نماد خواسته شده ، پرکنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد فاصله
		$[-۱,۳)$
	$\{x \mid x \in R, ۲ < x < ۳\}$	
		

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.org