انتگرالهای خط و سطح[15]

در این فصل مطالعهٔ *انتگرالهای خط* راکه دربخش ۱۴.۴ آغازشد ازسرگرفته ،انتگرالهای خط جدیدی را معرفی می‌کنیم که برای محاسبهٔ کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیروی متغیر وارد بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد یک منحنی مناسب می‌باشد . همچنین ، مفهوم انتگرال‌مضاعف را با پذیرش این امر که ناحیهٔ انتگرالگیری سطح خمیده باشد تعمیم می‌دهیم . این کار ما را به مفهوم *انتگرال سطح* می‌رساند که در بخش ۱۵.۳ بررسی خواهد شد .

با انتگرالهای خط و سطح می‌توان چند تعمیم چند متغیرهٔ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، یعنی *قضیهٔ گرین* ، *قضیهٔ دیورژانس* ، و *قضیهٔ استوکس* ، را که در بخشهای ۱۵.۴ تا ۱۵.۶ عرضه می‌شوند اثبات کرد . این نتایج در علوم کار بسته اهمیت زیادی داشته ، و در واقع ضمن بررسی پدیده‌هایی فیزیکی نظیر الکتریسیته ، مغناطیس ، ثقل ، و شارش مایع کشف شده‌اند .

یک موضوع جنبی *میدانهای‌برداری* است ؛ یعنی ،توابعی برداری‌از یک‌شناسهٔ *برداری* یا معادلا" ، توابعی برداری از یک نقطهٔ متغیر در صفحه یا در فضا . به بیان صوری ، یک میدان برداری قاعده یا روندی است که‌به هر نقطه در یک مجموعهٔ دویاسه بعدی ازنقاط یک و فقط یک بردار منتسب می‌کند ، ولی روش ما بر معنی ملموس فیزیکی میدانهای برداری تأکید خواهد کرد .

۱۵.۱ انتگرالهای خط

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس. انتگرال خط به صورت

$$\int_C f(x, y)\, ds \qquad (1)$$

در صفحه یا

$$\int_C f(x, y, z)\, ds \qquad (1')$$

در فضا قبلاً" در بخش ۴۰۱۴ به عنوان ابزاری برای محاسبهٔ مرکز جرم سیم خمیدهٔ C با چگالی متغیر معرفی شد. در این کاربرد، انتگرالده موجود در (۱) یا (۱') به شکل ρ، $x\rho$، $y\rho$ ، یا $z\rho$ می‌باشد، که در آنها $\rho = \rho(x, y)$ یا $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی جرم سیم است، ولی نکاتی که به (۱) و (۱') منجر شدند بر هر تابع f پیوسته بر منحنی C در صفحه یا فضا که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد قابل اعمال‌اند. لذا،

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \qquad (2)$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۳۶۷)، که در آن C یک منحنی مسطح به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است، و

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt \qquad (2')$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۳۷۱)، که در آن C یک منحنی فضایی به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است. توجه کنید که رابطهٔ (۲) را می‌توان از (۲') با حذف $z(t)$ به دست آورد.

انتگرالهای (۱) و (۱') را *انتگرالهای خط f نسبت به طول قوس s* می‌نامند. به‌ازای f مثبت، هر انتگرال را می‌توان جرم کل یک سیم خمیده با چگالی متغیر f تعبیر کرد.

مثال ۱. انتگرال

$$\int_C ye^{-x}\, ds$$

را درصورتی حساب کنید که C منحنی مسطح

$$x = \ln(t^2 + 1), \qquad y = 2\arctan t - t \qquad (0 \le t \le \sqrt{3})$$

باشد.

حل. با استفاده از (۲)، داریم

$$\int_C ye^{-x}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\arctan t - t}{t^2+1}\sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^2+1}-1\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\arctan t - t}{t^2+1}\,dt$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \arctan t\, d(\arctan t) - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}\,dt$$
$$= \Big[(\arctan t)^2\Big]_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+1)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{9} - \ln 2.$$

مثال ۲. انتگرال

$$\int_C xyz\,ds$$

را درصورتی بیابید که C منحنی فضایی

$$x = t, \qquad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \qquad z = t^2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

باشد.

حل. به کمک رابطهٔ (۲′)، داریم

$$\int_C xyz\,ds = \frac{4}{3}\int_0^1 t^{9/2}\sqrt{1+4t+4t^2}\,dt = \frac{4}{3}\int_0^1 t^{9/2}(1+2t)\,dt$$
$$= \frac{4}{3}\left[\frac{2}{11}t^{11/2} + \frac{4}{13}t^{13/2}\right]_0^1 = \frac{280}{429}.$$

کار به عنوان انتگرال خط. نوع دیگری از انتگرال خط در تعمیم مفهوم کار انجام شده به وسیلهٔ یک نیروی متغیر از حالت یک بعدی به حالت دو یا سه بعدی ظاهر می‌شود. ذره‌ای به جرم m در نظر می‌گیریم که در صفحه یا فضا حرکت کرده و مسیر C آن نمودار تابع بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (a \le t \le b)$$

باشد، که در آن پارامتر t را زمان می‌گیریم. فرض کنیم C بیشتر از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته، و *هموار* باشد بدین معنی که $\mathbf{r}(t)$ بر $[a, b]$ مشتق $d\mathbf{r}/dt$ ناصفرپیوسته داشته‌باشد.

(با اینحال ، همانند تبصرهٔ صفحهٔ۱۰۸۰، امکان می‌دهیم که در نقاط انتهایی $t=a$ و $t=b$ داشته باشیم $d\mathbf{r}/dt=\mathbf{0}$.) سرعت ذره در لحظهٔ t مساوی است با

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

فرض‌کنیم بر ذره نیروی $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$ وارد شده‌باشد ،که در آن $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری‌از بردار موضع $\mathbf{r}$ است ، یا معادلا" ، یک تابع مانند $\mathbf{F}(x, y)$ یا $\mathbf{F}(x, y, z)$ از مختصات‌نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}$ می‌باشد؛ چنین تابع یک **میدان برداری** نام دارد ، که در این حالت یک میدان نیرو می‌باشد . لذا ، در صفحه داریم

$$\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j},$$

که در آن $P=P(x, y)$ و $Q=Q(x, y)$ مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ بوده و هر دو توابعی اسکالر از دو متغیرند ، ولی در فضا داریم

$$\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},$$

که درآن‌مؤلفه‌های $P=P(x, y, z)$ ، $Q=Q(x, y, z)$ ،و $R=R(x, y, z)$ از $\mathbf{F}$ توابع اسکالری از سه متغیر می‌باشند . فرض‌کنیم $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر مجموعهٔ D پیوسته باشد به این معنی که‌مؤلفه‌های $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر D پیوسته باشند .

بنابر قانون دوم حرکت نیوتن ،

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}. \tag{۳}$$

با ضرب نقطه‌ای (۳) در $\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$ ، معلوم می‌شود که

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

یا معادلا" ، برحسب تندی $v=v(t)=|\mathbf{v}(t)|$ ذره ،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{۴}$$

زیرا

$$\frac{d}{dt}(v^2)=\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})=2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

با انتگرالگیری از (۴) نسبت به t از a تا b ، به دست می‌آوریم

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_a^b=\int_a^b\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt,$$

یعنی ،

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt, \qquad (۵)$$

که در آن $v_A = v(a)$ و $v_B = v(b)$.
کمیت

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

همانند صفحهٔ ۴۲۹ ، *انرژی جنبشی* نام دارد . لذا ، معادلهٔ (۵) می‌گوید که ، به خاطر عمل نیروی $\mathbf{F}$ ، انرژی جنبشی ذره به اندازهٔ

$$W = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (۶)$$

تغییر می‌کند ، که *کار* انجام شده توسط نیرو وقتی ذره مسیر C را از نقطهٔ شروع A به بردار موضع $\mathbf{r}(a)$ تا نقطهٔ پایان B به بردار موضع $\mathbf{r}(b)$ می‌پیماید نام دارد .

حال دو نوع انتگرال خط داریم ، یکی انتگرالهای (۱) و (۱') ، که هر دو را می‌توان به شکل $\int_C f\,ds$ نوشت ، که در آن $f = f(\mathbf{r})$ یک تابع اسکالر (از شناسهٔ برداری) است ، و انتگرالهای سمت راست (۵) و (۶) ، که می‌توان آنها را به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (۷)$$

نوشت ، و شامل میدان‌برداری‌پیوستهٔ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ است ، *که در حالت کلی لازم نیست نیرو باشد* . انتگرال (۷) ، که اختصاری برای

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\,dt \qquad (۸)$$

است ، *انتگرال خط* $\mathbf{F}$ *در امتداد* C نام دارد ، ولی انتگرالگیری در آن به جای طول‌قوس s مثل حالت $\int_C f\,ds$ نسبت به بردار موضع $\mathbf{r}$ است . دیفرانسیل $d\mathbf{r}$ تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ مثل تابع اسکالر تعریف می‌شود . لذا ،

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

درنتیجه ، در صفحه ،

$$d\mathbf{r} = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right)dt = \left(\frac{dx}{dt}dt\right)\mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt}dt\right)\mathbf{j} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$$

و در فضا، $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ، فرمولهای (۵) و (۶) برحسب انتگرال خط (۷) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

و

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

به آسانی معلوم می‌شود که تمام عبارات مربوط به کار W که در بخشهای قبل آمده‌اند حالات خاصی از فرمول اخیر می‌باشند.

انتگرالهای خط نسبت به مختصات. با گذاردن عبارات $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ و $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ در (۷)، در صفحه داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy \qquad (۹)$$

زیرا $(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = P\,dx + Q\,dy$ ، و در فضا خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad (۹')$$

طرفهای راست (۹) و (۹') نیز انتگرالهای خط در امتداد C نام دارند. شاید نوشتن این انتگرالها به صورت

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy), \qquad \int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

ابهام کمتری داشته باشد، ولی استفاده از پرانتز اطراف "فرمهای دیفرانسیل" $P\,dx + Q\,dy$ و $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ مرسوم نیست.

برای محاسبهٔ (۹) و (۹')، رابطهٔ (۸) را به صورت باز می‌نویسیم، در صفحه به دست می‌آوریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}dt \qquad (۱۰)$$

و در فضا خواهیم داشت

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$+ \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt}\,dt + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt}\,dt \qquad (۱۰')$$

جملات این مجموع را به صورت فشرده‌تر

$$\int_C P\,dx, \qquad \int_C Q\,dy, \qquad \int_C R\,dz$$

نشان داده و آنها را نیز انتگرال خط می‌نامیم، البته این بار نسبت به مختصات x، y، و z. لذا، فرمولهای (۱۰) و ('۱۰) با این نماد اختصاری به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy$$

و

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz.$$

درحالتی که C نمودار تابع پیوسته‌ای چون

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

است، می‌توان در فرمول (۱۰) x را پارامتر گرفت، که در این صورت داریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x, f(x))\,dx + \int_a^b Q(x, f(x))f'(x)\,dx. \qquad (۱۱)$$

به همین نحو، هرگاه C نمودار تابع پیوسته‌ای به شکل

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

باشد، آنگاه

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(g(y), y)g'(y)\,dy + \int_a^b Q(g(y), y)\,dy. \qquad (۱۱')$$

فرض کنیم $s = s(t)$ تابع طول قوس C باشد؛ یعنی، طول قوس منحنی C ازنقطهٔ شروع C تانقطه‌به‌بردارموضع $\mathbf{r}(t)$. دراین‌صورت، C علاوه‌براینکه‌نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ است نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ $(0 \le s \le L)$ نیز هست، که در آن L طول C و $\mathbf{r}(s)$ تابع مرکب $\mathbf{r}(t(s))$ شامل معکوس $t = t(s)$ تابع $s = s(t)$ می‌باشد. لذا، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_0^L \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\,ds = \int_0^L \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds. \qquad (۱۲)$$

اما ، همانطور که از صفحات۱۰۸۲و۱۱۷۹می‌دانیم ، $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{T}$ ، که در آن $\mathbf{T}$ بـــردار یکهٔ مماس در امتداد C است . لذا ، انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ نمایش دیگری چون

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

دارد ، که از آن معلوم می‌شود که کار نیروی $\mathbf{F}$ بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد C کــلا" از مؤلفهٔ مماسی‌اش ، یعنی مؤلفه در امتداد بردار $\mathbf{T}$ ، ناشی می‌شود .

همین استدلالی که هم‌اکنون برای اثبات فرمول (۱۲) به کار رفت نشان می‌دهد که *مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ از نمایش پارامتری C مستقل است مشروط براینکه جهت C حفظ گردد .* درواقع ،هرگاه‌منحنی‌جهتدار C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد ،آنگاه C نمودار $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(\tau))$ که در آن $t = t(\tau)$ تابع به طور پیوسته مشتقپذیری است که $t(\alpha) = a$ ، $t(\beta) = b$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ مثبت است ، نیز می‌باشد . اما ، در این صورت ،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}\,d\tau = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,d\tau,$$

که حکم با حروف شکسته را ثابت می‌کند .

اگر جهت C عکس شود ، وضع فرق خواهد کرد . فرض کنیم $-C$ منحنی حاصل از عکس کردن جهت C باشد ، مثل شکل ۱ . در این صورت ، $-C$ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$ است ،که درآن

شکل ۱

$t = t(\tau)$ تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری است که $t(\alpha) = b$ ، $t(\beta) = a$ ، و $dt/d\tau$ بر $[\alpha, \beta]$ منفی است . بنابراین ،

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\,d\tau = \int_b^a \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\,dt = \int_b^a \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = -\int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$

درنتیجه ،

$$\int_{-C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (۱۳)$$

هرگاه C دارای نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B باشد ،آنگاه $-C$ دارای‌نقطهٔ شروع B ونقطهٔ

پایان A می‌باشد (ر.ک. شکل) ، و (۱۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\int_{BA} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{AB} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \tag{۱۳'}$$

البته با این فرض که AB یعنی قوس با شروع A و پایان B ، و BA یعنی همان قوس که در جهت خلاف پیموده شده است . به عنوان تمرین ، نشان دهید که مقدار انتگرال خط $\int_C f(\mathbf{r})\,ds$ ، از نوع (۱) یا (۱') ، درصورت عکس‌کردن جهت C تغییر نمی‌کند .

در مثالهای زیر ، انتگرالهای خط از نوع (۷) تا (۱۱) محاسبه شده‌اند .

مثال ۳. انتگرال

$$I = \int_C 3y\,dx + x\,dy$$

را درصورتی حساب کنید که C نیمدایرهٔ $x=\cos t,\ y=\sin t$ $(0\le t\le \pi)$ باشد .

حل. با استفاده از فرمول (۱۰) ، داریم

$$I = \int_0^{\pi} 3\sin t(-\sin t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos t(\cos t)\,dt$$
$$= -3\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt + \int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt = -\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

مثال ۴. انتگرال

$$I = \int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

را درصورتی حساب کنید که C مکعبی پیچ خوردهٔ

$$x=t,\ y=t^2,\ z=t^3\ (0\le t\le 1)$$

باشد .

حل. این بار از فرمول (۱۰') استفاده کرده ، به دست می‌آوریم

$$I = \int_0^1 t^5\,dt + \int_0^1 t^4(2t)\,dt + \int_0^1 t^3(3t^2)\,dt = \int_0^1 6t^5\,dt = 1.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ، در حالت کلی ، مقادیر یک انتگرال خط درامتداد

منحنیهای مختلف با نقاط انتهایی یکسان متفاوتند.

مثال ۵. انتگرال خط

$$I = \int_C xy\,dx + (y-x)\,dy \qquad (۱۴)$$

را در امتداد هر یک از منحنیهای زیر بین نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ حساب کنید:

(آ) خط $y = x$؛

(ب) سهمی $y = x^2$؛

(پ) سهمی $y^2 = x$؛

(ت) منحنی $y = x^3$.

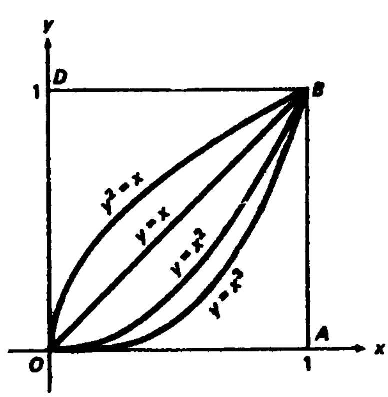
حل. چهار منحنی در شکل ۲ نموده شده‌اند. با استفاده از فرمول (۱۱) ومحاسباتی ساده، خواهیم داشت

(آ) $I = \int_0^1 [x^2 + (x - x)]\,dx = \frac{1}{3}$؛

(ب) $I = \int_0^1 [x^3 + 2(x^2 - x)x]\,dx = \frac{1}{12}$؛

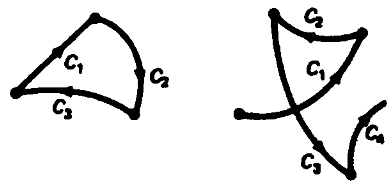
(پ) $I = \int_0^1 \left[x^{3/2} + \frac{1}{2}(x^{1/2} - x)x^{-1/2}\right]dx = \frac{17}{30}$؛

(ت) $I = \int_0^1 [x^4 + 3(x^3 - x)x^2]\,dx = -\frac{1}{20}$.



شکل ۲

منحنیهای قطعه قطعه هموار. فرض کنیم منحنی C از تعدادی متناهی منحنی هموار $C_1, C_2, \ldots, C_n$ انتها به انتها، مانند شکل ۳، تشکیل شده باشد. این نوع منحنی را *قطعه قطعه هموار* گوییم، و می‌تواند در "نقاط اتصال" گوشه داشته باشد. انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$



منحنیهای قطعه قطعه هموار

شکل ۳

در امتداد منحنی قطعه قطعه هموار C با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \cdots + \int_{C_n} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{۱۵}$$

البته (همانطور که به آسانی تحقیق می‌شود)، این فرمول برای منحنی هموار C که به n قوس $C_1, C_2, \ldots, C_n$ تقسیم شده است خود به خود برقرار است.

مثال ۶. انتگرال خط (۱۴) را در امتداد مسیرهای چندضلعی OAB و ODB حساب کنید که در آنها، مثل شکل ۲، $O=(0,0)$، $A=(1,0)$، $B=(1,1)$، و $D=(0,1)$.

حل. مسیرهای OAB و ODB قطعه قطعه هموارند. در واقع، OAB از پاره‌خطهای OA و AB تشکیل شده است، حال آنکه ODB از پاره‌خطهای OD و DB متشکل است. این پاره‌خطها به نمایشهای پارامتری زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
&OA: && x=t, && y=0 && (0\le t\le 1),\\
&AB: && x=1, && y=t && (0\le t\le 1),\\
&OD: && x=0, && y=t && (0\le t\le 1),\\
&DB: && x=t, && y=1 && (0\le t\le 1).
\end{aligned}$$

بنابراین، به کمک (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}
\int_{OAB} xy\,dx + (y-x)\,dy &= \int_{OA} xy\,dx + (y-x)\,dy + \int_{AB} xy\,dx + (y-x)\,dy\\
&= \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\int_{ODB} xy\,dx + (y-x)\,dy = \int_{OD} xy\,dx + (y-x)\,dy + \int_{DB} xy\,dx + (y-x)\,dy$$
$$= \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t\,dt = 1$$

(توجه کنید که بر AB و OD ، $dx = 0$ ، حال آنکه بر OA و DB ، $dy = 0$) . به عنوان تمرین ، از فرمولهای (۱۱) و (۱۱') استفاده کرده همین انتگرالها را محاسبه نمایید .

مثال ۷. انتگرال خط

$$I = \int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$$

را در امتداد منحنیهای مثال ۵ حساب کنید .

حل. محاسبات مستقیم نشان می‌دهند که

(آ) $I = \int_0^1 (x^2 + 2x^2)\,dx = 1$

(ب) $I = \int_0^1 (x^4 + 4x^4)\,dx = 1$

(پ) $I = \int_0^1 (x + x)\,dx = 1$

(ت) $I = \int_0^1 (x^6 + 6x^6)\,dx = 1$

توجه‌کنید که ، برخلاف مثال ۵ ، مقادیر I در مثال ۷ همه یکسانند . در مثال ۱ بخش آینده دلیلش را نشان خواهیم داد .

مسائل

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(\mathbf{r})\,ds$ را حساب کنید .

۱. $\int_C (x+y)\,ds$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(3, 4)$ است

۲. $\int_C (x-y)\,ds$ ، که در آن C پاره‌خط از $(1, 2)$ تا $(5, -2)$ است

۳. $\int_C \frac{ds}{x-y}$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0,-3)$ تا $(6,0)$ است

۴. $\int_C xy\,ds$ ، که در آن C قوس سهموی $x=2t,\ y=t^2$ $(0\le t\le 1)$ است

۵. $\int_C x^2y\,ds$ ، که در آن C مستطیل به رئوس $(0,0)$، $(2,0)$، $(2,3)$، و $(0,3)$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۶. $\int_C \frac{y}{\sqrt{x}}ds$ ، که در آن C منحنی $x=3t^2,\ y=2t^3$ $(1\le t\le 2)$ است

۷. $\int_C (x^2+y^2)^2\,ds$ ، که در آن C دایرهٔ $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ است

۸. $\int_C \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ ، که‌در آن C قوس‌مارپیچی $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=4t$ $(0\le t\le 2\pi)$ است

۹. $\int_C xyz\,ds$ ، که در آن C قوس مستدیر $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=1$ $(0\le t\le \pi/2)$ است

۱۰. $\int_C (2\sqrt{x^2+y^2}-z)\,ds$ ، که‌در‌آن C منحنی $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$ $(0\le t\le\sqrt{2})$ است

۱۱. $\int_C (x+y+z)\,ds$ ، که در آن C فصل مشترک صفحهٔ $y=x$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ در یکهشت اول است که از $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ تا $(0,0,2)$ پیموده شده است .

۱۲. نشان دهید که انتگرال خط $\int_C f(x,y)\,ds$ در امتداد منحنی C به معادلهٔ قطبی $r=r(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$ مساوی است با

$$\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

۱۳. بااستفاده‌از مسئلهٔ قبل، $\int_C (x-y)\,ds$ را درصورتی حساب‌کنیدکه C دایرهٔ $x^2+y^2=2x$ باشد که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است .

۱۴. فرض کنید بر یک ذرهٔ متحرک به سرعت $\mathbf{v}$ نیروی $\mathbf{F}$ وارد است که همواره بر $\mathbf{v}$ عمود می‌باشد . نشان دهید کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بر ذره صفر است .

۱۵. کار نیروی $\mathbf{F}=3x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$ وارد بر یک ذرهٔ متحرک در امتداد قوس‌سهموی $y=4x^2$ از $(0,0)$ تا $(1,4)$ را بیابید .

۱۶. کار نیروی $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}-xy^2\mathbf{j}$ وارد بر ذرهٔ متحرکی‌که یکبار مربع C محدودبه‌خطوط

$x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ را می‌پیماید بیابید.

۱۷. یک تعمیرکار به وزن 150-lb که کیسه‌ای سیمان به وزن 25-lb را حمل می‌کند از یک پلکان مارپیچ حول یک‌سیلوی استوانه‌ای به‌شعاع 10 ft بالا می‌رود. ارتفاع سیلو 60 ft بوده و پلکان دقیقاً" سه دور کامل دور سیلو می‌زند. تعمیرکار با بالارفتن از پلکان چه مقدار کار انجام داده است؟

۱۸. در مسئلهٔ قبل، اگر کیسه سوراخ بوده و ضمن بالارفتن 12 lb سیمان تدریجاً" بریزد، کار انجام شده چقدر است؟

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C P\,dx + Q\,dy$ یا $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ را حساب کنید.

۱۹. $\int_C x\,dy$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(2, -3)$ است

۲۰. $\int_C y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(2, 6)$ تا $(7, 1)$ است

۲۱. $\int_C x\,dy - y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(a, 0)$ تا $(0, b)$ است

۲۲. $\int_C \sin x\,dy - \cos y\,dx$ ، که در آن C پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(\pi/3, \pi/6)$ است

۲۳. $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ ، که درآن C قوس‌مستدیر $x = \cos t, y = \sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ است

۲۴. $\int_C \frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{x^2 + y^2}$ ، که‌درآن C نیمدایرهٔ $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ است

۲۵. $\int_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$ ، که در آن C بیضی $x = \sin t, y = 2\cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۲۶. $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ، که در آن C مربع به رئوس $(1, 0)$، $(0, 1)$، $(-1, 0)$ ، و $(0, -1)$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۷. $\int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + xy + y^2}$ ، که در آن C دایرهٔ $x = a\cos t, y = a\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$ است

۲۸. $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$ ، که در آن C منحنی بستهٔ محدود به سهمیهای $y = x^2$ و $y^2 = x$ است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است

۲۹. $\int_C x\,dx + (x - y)\,dy + (x + y + z)\,dz$ ، که در آن C پاره‌خط از $(1, 0, -1)$ تا $(2, 3, 4)$ است

۳۰. $\int_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$ ، که در آن C همان قوس مارپیچ مسئلهٔ ۸ است

۳۱. $\int_C e^x\,dx + e^y\,dy + e^z\,dz$ ، که در آن C همان مکعبی پیچ خوردهٔ مثال ۴ است

انتگرال $\int_C (x^2 + y)\,dx + (y^2 - x)\,dy$ را در امتداد مسیر داده شده از نقطهٔ $(0, 0)$ تا $(1, 2)$ حساب کنید.

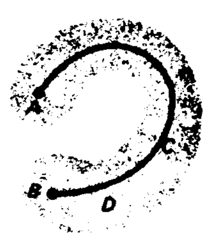
۳۲. پاره‌خط از $(0, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۳. مسیر چندضلعی از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ و سپس از $(1, 0)$ تا $(1, 2)$

۳۴. قوس سهموی $y = 2x^2$ $(0 \le x \le 1)$

۲.۱۵ استقلال از مسیر و میدانهای گرادیان

قلمروها و مسیرها. فرض کنیم D مجموعه‌ای از نقاط در صفحه یا فضا بوده، و به ازای هر جفت از نقاط A و B در D یک منحنی مانند C با نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B موجود باشد که کاملاً در D قرار گیرد. در این صورت، گوییم D **همبند** (**قوسوار**) است. یک مجموعهٔ همبند *باز* را **قلمرو** می‌نامیم (آن را با قلمرو تابع خلط نکنید). مثلاً، شکل ۴ یک قلمرو دوبعدی D را با دو نقطهٔ A و B آن نشان می‌دهد که با منحنی C که کاملاً در D است به هم وصل شده‌اند. توجه کنید که چون قلمرو D باز است، شامل مرز خود نیست.



شکل ۴

منظور از یک منحنی بستهٔ *ساده* یعنی نمودار یک تابع برداری پیوسته مانند $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ در صفحه یا فضا با نقاط انتهایی منطبق بر هم یعنی $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ ، ولی بدون خود قطعی دیگر (صفحهٔ ۷۳۸ را به یاد آورید) . ناحیهٔ دوبعدی D را **همبند ساده** گوییم اگر به ازای هر منحنی بستهٔ سادهٔ C واقع در D ، ناحیهٔ مرکب از C و درونش نیز در D جا داشته باشند . در غیر این صورت ، قلمرو را **همبند چندگانه** می‌نامیم . مثلاً ، قلمرو شکل ۴ همبند ساده است ، زیرا درون هر منحنی بستهٔ سادهٔ واقع در D فقط از نقاط متعلق به D تشکیل شده است ؛ این صرفاً بدان خاطر است که D سوراخ ندارد . از آن‌سو ، قلمرو E شکل ۵ ، که سوراخدار است ، همبند چندگانه است ، زیرا درون هر منحنی بستهٔ ساده در E اطراف سوراخ نقاطی را شامل است که تعلق به E ندارد .

شکل ۵

به ازای دو نقطهٔ A و B ، یک **مسیر** از A به B یعنی منحنی قطعه قطعه هموار مانند C با نقطهٔ شروع A و نقطهٔ پایان B (که بیش از تعدادی متناهی خود قطعی نداشته باشد). به طور کلی ، مقدار انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ در امتداد مسیر C از نقطهٔ A به نقطهٔ B نه فقط به A و B وابسته است بلکه به مسیر خاصی از A به B نیز بستگی دارد . مثلاً ، این امر در مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۴۲۸ ، صحت دارد . لیکن ، حالات بسیاری وجود دارند که در آنها انتگرال خط **مستقل** *از* **مسیر** است ، بدین معنی که مقدارش فقط تابع نقاط انتهایی C بوده و به خود مسیر C بستگی ندارد . همانطور که در قضیهٔ زیر نشان داده‌ایم ، شرط لازم و کافی برای آنکه انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ روی قلمرو D از مسیر مستقل باشد آن است که انتگرالده $\mathbf{F}$ یک **میدان گرادیان** باشد ، بدین معنی که تابع اسکالر مشتقپذیری چون $U = U(x, y)$ تعریف شده بر D موجود باشد که $\mathbf{F}$ گرادیان آن باشد ؛ یعنی ، $\mathbf{F} = \text{grad } U = \nabla U$. قضیه برای میدان دو بعدی $\mathbf{F}$ بیان شده است ، لیکن به آسانی می‌توان آن را به $\mathbf{F}$ سه‌بعدی تعمیم داد .

قضیهٔ ۱ (انتگرالهای خط مستقل از مسیر و میدانهای گرادیان) . *فرض کنیم میدان برداری* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ *بر قلمرو* D *پیوسته باشد . در این صورت ، انتگرال خط*

$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$ بر D مستقل از مسیر است اگر و فقط اگر تابعی چون $U = U(x, y)$ تعریف شده بر D موجود باشد به طوری که $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ یا معادلاً

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{۱}$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$، و C را یک منحنی هموار در D از A به B به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

می‌گیریم. از رابطهٔ (۱) داریم

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b [U_x(x(t), y(t))\,x'(t) + U_y(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt,$$

که در آن $U_x = \partial U/\partial x$ و $U_y = \partial U/\partial y$، و پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای، و به کمک قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، خواهیم داشت

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}[U(x(t), y(t)]\,dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)),$$

این را می‌توان به طور فشردهٔ زیر نوشت:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A), \tag{۲}$$

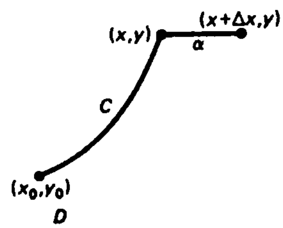
که در آن $U(A)$ و $U(B)$ مقادیر U در $A = (x(a), y(a))$ و $B = (x(b), y(b))$ اند. اگر C فقط قطعه قطعه هموار باشد، همین نتیجه پس از تقسیم C به قوسهای هموار به دست می‌آید (شرح مطلب را به عنوان تمرین می‌گذاریم). چون عبارت $U(B) - U(A)$ از مسیر مستقل است، همین امر در مورد خود انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ درست خواهد بود.

به عکس، فرض کنیم $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ مستقل از مسیر باشد. همچنین، (x_0, y_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y) نقطهٔ متغیری از D بوده، و $U = U(x, y)$ تابع اسکالر تعریف شده با انتگرال خط

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy \tag{۳}$$

باشد، که در آن C مسیری **دلخواه** از (x_0, y_0) به (x, y) است. توجه کنید که این تعریف فقط

به خاطر این معنی دارد که انتگرال (۳) از مسیر مستقل است. حال y را ثابت گرفته و به x نمو Δx می‌دهیم، $|\Delta x|$ را آنقدر کوچک می‌گیریم که، مثل شکل ۶، پاره‌خط افقی α از (x, y)



شکل ۶

تا $(x + \Delta x, y)$ داخل D قرار گیرد (این همیشه امکان دارد، زیرا D یک مجموعهٔ بازاست). در این صورت،

$$U(x + \Delta x, y) = \int_{C+\alpha} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy + \int_\alpha P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن $C + \alpha$ مسیر حاصل از اتصال نقطهٔ شروع α به نقطهٔ پایان C است. با استفاده از (۳) و اینکه در امتداد α، $dy = 0$، خواهیم داشت

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx.$$

اما

$$\int_\alpha P\,dx = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt \qquad (\text{ثابت } y)$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای معمولی،

$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = P(u, y)\,\Delta x \qquad (x \le u \le x + \Delta x),$$

که در آن وقتی $\Delta x \to 0$، $u \to x$. بنابراین، طبق پیوستگی P،

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(u, y) = P(x, y),$$

و استدلالی مشابه‌مستلزم پاره‌خط قائم از (x, y) تا $(x, y + \Delta y)$ نشان می‌دهد که

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y).$$

لذا ، $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\, U$ ، که در آن U تابعی است که با انتگرال خط مستقل از مسیر تعریف شده است .

قضیهٔ اساسی انتگرالهای خط . *انتگرال خط مستقل از مسیر* $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *تنها به نقاط انتهایی* A *و* B *مسیر* C *بستگی دارد ؛ و لذا ، گاهی به شکل* $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ *نوشته می‌شود (البته ، اگر انتگرال خط تابع مسیر باشد ، این نماد نامناسب خواهد بود) . لذا ، فرمولهای (۲) و (۳) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :*

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A) \qquad (۴)$$

و

$$U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P\, dx + Q\, dy.$$

فرمول (۴) ، یا معادلش

$$\int_A^B \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$$

$(\nabla U = \mathbf{grad}\, U)$ مشابه چند متغیرهٔ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است ، و به این دلیل گاهی قضیهٔ *اساسی انتگرالهای خط* نامیده می‌شود .

تبصره . اگر قرار دهیم

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

و

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

قضیهٔ ۱ برقرار می‌ماند

در اینجا طبعاً به جای (۱) داریم

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

که یک فرمول بیشتر دارد .

مثال ۱. در مثال ۷ ، صفحهٔ ۱۴۴۰، دریافتیم که انتگرال خط

$$I = \int_C y^2\,dx + 2xy\,dy$$

در امتداد چهار مسیر مختلف از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ مقدار یکسان 1 را دارد . حال ، با استفاده از قضیهٔ ۱ ، می‌توان حکم کرد که به ازای هر مسیر C از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ ، $I = 1$ ، زیرا $I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ، که در آن $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان (روی تمام صفحهٔ xy) است . در واقع ، لحظه‌ای تأمل معلوم می‌سازد که $\mathbf{F}$ گرادیان تابع

$$U = U(x, y) = xy^2$$

بوده ، و در این صورت فرمول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1.$$

تشخیص میدان گرادیان معمولاً آسان نیست ، و ما بعداً آزمونی مبتنی بر مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان وجود یا عدم وجود تابع U که $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ را ثابت کرد . اگر تابع U موجود باشد ، آن را می‌توان با محاسبهٔ انتگرال خط (۳) به دست آورد .

مثال ۲. در مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۴۳۸، دیدیم که انتگرال خط

$$I = \int_C xy\,dx + (y - x)\,dy$$

از مسیر مستقل نیست ، و این را با نشان دادن اینکه مقادیرش به ازای مسیرهای مختلف بین دو نقطه متفاوتند ثابت کردیم . مستقل از مسیر نبودن I را می‌توان ، بدون محاسبهٔ انتگرالهای خط ، از قضیهٔ ۱ نتیجه گرفت؛ زیرا فرض کنیم I مستقل از مسیر باشد . در این صورت ، طبق قضیهٔ ۱ ، تابعی چون U وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x} = xy, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = y - x.$$

اما این ناممکن است ، زیرا در این صورت

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = x,$$

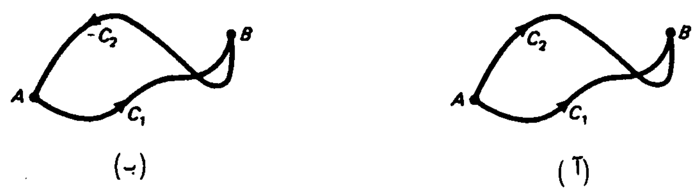
که با این امر مسلم که مشتقات جزئی دوم مخلوط $\partial^2U/\partial x\,\partial y$ و $\partial^2U/\partial y\,\partial x$ درصورت پیوستگی باید متحداً مساوی باشند در تضاد است (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۳۹) .

فرض کنیم انتگرال خط $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ بر قلمرو D مستقل از مسیر باشد، یا معادلاً $\mathbf{F}$ بر D یک میدان گرادیان باشد. همچنین، C مسیر بسته‌ای در D باشد؛ یعنی، مسیری که نقاط انتهایی A و B آن یکی هستند. در این صورت، با گذاردن $A = B$ در فرمول (۲)، فوراً حاصل می‌شود که

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{۵}$$

به عکس، هرگاه (۵) به ازای هر مسیر بسته در D برقرار باشد، آنگاه انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض کنیم C_1 و C_2 دو مسیر از A تا B، مثل شکل ۷ (آ)، باشند. در این صورت، مسیر C که از اتصال نقطهٔ شروع $-C_2$ به نقطهٔ پایان C_1، مثل شکل ۷ (ب)، به دست می‌آید بسته است. بنابراین، طبق فرض،

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$



شکل ۷

پس نتیجه می‌شود که

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

یا معادلاً، به کمک فرمول (۱۳)، صفحهٔ ۱۴۳۶،

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

تبصره. در واقع، می‌توان نشان داد که فرض برقراری (۵) به ازای هر مسیر بستهٔ *سادهٔ* C در قلمرو D استقلال از مسیر انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D را تضمین می‌کند (ر.ک. مسئلهٔ ۳۷).

گردش. اگر C یک مسیر بسته باشد، کمیت $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ گردش $\mathbf{F}$ حول C نام دارد، و اغلب با

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

نموده می‌شود . در نماد $\oint$ معمولا" فرض می‌شود که مسیر C ساده بوده و خود قطعبی جز نقاط انتهایی منطبق برهم ندارد . از قضیهٔ ۱ و نکات فوق معلوم می‌شود که گردش یک میدان گرادیان حول هر مسیر بسته صفر است .

مثال ۳. گردش میدان

$$\mathbf{F}=\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}\qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

را حول دایرهٔ C به مرکز مبداء که یکبار خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید .

حل . میدان $\mathbf{F}$ بر قلمرو همبند چندگانهٔ D مرکب از تمام نقاط صفحهٔ xy جز مبداء تعریف شده‌است. اگردایرهٔ C به‌شعاع a باشد، دارای‌نمایش‌پارامتری $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ است . بنابراین ،

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\oint_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(a\cos t)}{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.\end{aligned}$$

چون گردش حول C ناصفر است ، نتیجه می‌شود که $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان نیست .

انرژی پتانسیل و بقای انرژی . تابع U قضیهٔ ۱ ، بلکه قرینه‌اش، تعبیر فیزیکی مهمی دارد. میدان برداری $\mathbf{F}$ را نیروی متغیری می‌گیریم که بر ذره‌ای به جرم m عمل می‌کند . همانطورکه در صفحهٔ ۱۴۳۴ دیدیم ،

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}, \qquad (۶)$$

که در آن v_A تندی ذره در A و v_B تندی آن در B است . طرف راست (۶) کار W ی نیروی $\mathbf{F}$ بر ذره ضمن حرکت در امتداد مسیر C از A و B بوده ، و طرف چپ تغییر نظیر در انرژی

جنبشی ذره می‌باشد.

حال فرض کنیم $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان باشد؛ یعنی، $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla U(\mathbf{r})$. بنابرقضیهٔ ۱،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A), \qquad (۷)$$

و از تلفیق (۶) و (۷) معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{2} mv_A^2 - U(A) = \frac{1}{2} mv_B^2 - U(B). \qquad (۸)$$

برای تغییر علامت منهای (۸) به علامت به‌علاوه، تابع جدید $V(\mathbf{r}) = -U(\mathbf{r})$ به‌نام *انرژی پتانسیل* ذره یا *پتانسیل* میدان $\mathbf{F}$، را معرفی می‌کنیم؛ درنتیجه، $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. (چون گرادیان یک ثابت صفر است، U و V فقط با تقریب یک ثابت جمعی مثبت تعیین می‌شوند.) در این صورت، معادلهٔ (۸) خواهد شد

$$\frac{1}{2} mv_A^2 + V(A) = \frac{1}{2} mv_B^2 + V(B), \qquad (۸')$$

و می‌گوید که وقتی ذره در یک میدان گرادیان حرکت کند، مجموع انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل V آن ثابت می‌ماند، یا به زبان فیزیک " حفظ می‌شود ". این امر، که نقشی کلیدی در مکانیک نیوتنی دارد، *قانون بقای انرژی* نامیده شده و مقدار مشترک مجموعهای ('۸) *انرژی کل* ذره نام دارد. در این وضع، میدانهای گرادیان، که به بقای انرژی منجر می‌شوند، نیز *میدانهای بقا* نامیده می‌شوند. معادلهٔ (۷) برحسب پتانسیل V به شکل زیر درمی‌آید:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(A) - V(B), \qquad (۷')$$

و می‌گوید که مقدار کار W میدان بقای $\mathbf{F}$ بر ذرهٔ متحرکی از A تا B به مسیر بین A و B وابسته نبوده، و مساوی کاهش V، یا " افت پتانسیل " ضمن رفتن از A تا B است.

یک میدان برداری‌را به‌طور پیوسته‌مشتقپذیر گوییم اگر مشتقات جزئی اول مؤلفه‌هایش موجود و پیوسته باشند. قضیهٔ زیر روابطی را توصیف می‌کند که باید برای مؤلفه‌های یک میدان گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر برقرار باشند.

قضیهٔ ۲ (شرایط وارد بر مؤلفه‌های یک میدان گرادیان). *فرض کنیم* $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ *یک میدان گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر قلمرو* D *با مؤلفه‌های* $P = P(x, y, z)$ ،

$Q = Q(x, y, z)$ ، و $R = R(x, y, z)$ باشد . در این صورت ، در هر نقطهٔ از D ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \tag{۹}$$

برهان . چون $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است ، تابعی مانند $U = U(x, y, z)$ تعریف شده بر D وجود دارد به طوری که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

بنابراین ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x},$$
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z},$$

که در آن پیوستگی هر مشتق جزئی اول سمت چپ پیوستگی مشتق جزئی دوم سمت راست را ایجاب می‌کند . اما ، در این صورت ، بنابر نکتهٔ بعداز مثال ۴ ، صفحهٔ ۱۲۳۹ ،

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z},$$

و این فرمولها با (۹) معادل می‌باشند .

در حالت میدان گرادیان دوبعدی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، توابع P و Q فقط تابع x و y بوده، و مؤلفهٔ z ، R وجود ندارد . در این صورت ، معادلات (۹) به تنها شرط

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{۹'}$$

تحویل می‌شود .

لذا ، عدم برقراری شرایط (۹) ، یا شرط (۹') در حالت دوبعدی ، به ما می‌گوید که $\mathbf{F}$ میدان گرادیان نیست . این امر سئوال زیر را مطرح می‌سازد : آیا برقراری (۹) یا (۹') بر قلمرو D میدان گرادیان بودن $\mathbf{F}$ بر D را **تضمین می‌کند** ؟
با کمال تعجب ، جواب منفی است ، و این را مثال زیر نشان خواهد داد .

مثال ۴. فرض کنیم میدان $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ همانند مثال ۳ باشد. در این صورت،

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

و $\mathbf{F}$ بر قلمرو همبند **چندگانه** D مرکب از تمام نقاط صفحهٔ xy جز مبداء تعریف‌شده‌است. با محاسبهٔ مشتقات جزئی $\partial Q/\partial x$ و $\partial P/\partial y$، به آسانی معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

درنتیجه، شرط (۹') در هر نقطه از D برقرار است. با اینحال، همانطور که در مثال ۳ نشان دادیم، $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان نیست.

آزمون میدان گرادیان. چون قلمرو D مثال ۴ همبندچندگانه‌است، امکان‌آنکه شرط(۹') میدان گرادیان بودن $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ را در صورت همبند *ساده* بودن D تضمین کند هنوز وجود دارد. همانطور که بعدا" می‌بینیم، این امر صحت دارد (ر.ک. نتیجهٔ۲، صفحهٔ ۱۴۸۳). در قضیهٔ زیر نتیجه‌رافقط برای قلمرو *مستطیلی*، که البته قلمرو همبند ساده ازنوع مقدماتی خاصی است، ثابت می‌کنیم. در مسئلهٔ ۲۰ می‌بینید که این قضیه‌صورت سه‌بعدی نیز دارد.

قضیهٔ ۳ (آزمون میدان گرادیان بر قلمرو مستطیلی). *فرض کنیم مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ در هر نقطه از قلمرو مستطیلی $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ در شرط*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

صدق نمایند. در این صورت، $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر D است؛ و در واقع، $\mathbf{F}$ گرادیان تابع

$$U = U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt \qquad (۱۰)$$

است، که در آن (x_0, y_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y) نقطهٔ متغیری از D می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان بر D باشد. در این صورت، انتگرال

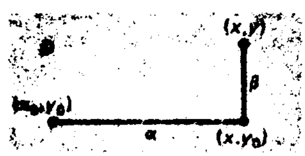
خط $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است و ، همانند برهان قضیهٔ ۱ ، $\mathbf{F}$ گرادیان تابع زیر است :

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن C مسیری در D از نقطهٔ ثابت (x_0, y_0) به نقطهٔ متغیر (x, y) از D می‌باشد . مسیر C از پاره‌خط افقی α ی مرسوم از (x_0, y_0) به (x, y_0) و پس از آن پاره‌خط قائم β ی مرسوم از (x, y_0) تا (x, y) تشکیل شده است . همانطور که در شکل ۸ نشان دادیم ، این مسیر ، صرف نظر از انتخاب (x_0, y_0) و (x, y) ، همواره در قلمرو مستطیلی D قرار دارد . لذا ،

$$U = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy + \int_\beta P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha P\,dx + \int_\beta Q\,dy,$$

زیرا بر α ، $dy = 0$ و بر β ، $dx = 0$ ، و این بلافاصله فرمول (۱۰) را به ما می‌دهد ،که در آن در هر دو انتگرال سمت راست که انتگرالهای معین عادی هستند از متغیر ظاهری انتگرالگیری t استفاده شده است (در انتگرالده دوم x ثابت گرفته شده است) .



شکل ۸

فرمول (۱۰) با این فرض به دست آمد که $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان است ، که ما در واقع سعی در اثبات آن داریم! اما اگر معلوم شود که گرادیان U مساوی $\mathbf{F}$ است ، موفق به اثبات قضیه خواهیم شد . لذا ، اینک به محاسبهٔ مشتقات جزئی U می‌پردازیم . اولین انتگرال سمت راست (۱۰) مستقل از y است ، ولی هر دو انتگرال تابع x می‌باشند . لذا ، ابتدا از (۱۰) نسبت به y مشتق گرفته ، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y) \qquad (۱۱)$$

(قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۴۰۵) .حال ، با استفاده از مسئلهٔ ۵۱ ، صفحهٔ ۱۳۴۰، از(۱۰)نسبت به x مشتق می‌گیریم . نتیجه خواهد شد

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = P(x, y_0) + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x}\,dt.$$

اما ، به خاطر شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ و تغییر y به متغیر ظاهری t ،

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dt = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} dt = P(x, y) - P(x, y_0).$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر ، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y), \tag{۱۱}$$

که همراه با (۱۱) نشان می‌دهد که

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y},$$

یا معادلاً $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$.

مثال ۵. فرض کنیم

$$P(x, y) = \frac{1}{y}, \qquad Q(x, y) = -\frac{x}{y^2} \qquad (y \neq 0), \tag{۱۲}$$

و $D = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$ یک قلمرو مستطیلی باشد که نقطه‌ای از محور x (خط $y = 0$) را ندارد. در این صورت ، چون

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

از قضیهٔ ۳ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{y^2}$$

یک میدان گرادیان بر D است. لذا ، $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر نیمصفحهٔ بالایی $y > 0$ است ، که می‌توان آن‌را قلمرو مستطیلی بی‌کران $D = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$ گرفت ، و بر نیمصفحهٔ پایینی $y < 0$ نیز چنین می‌باشد.

ممکن است دریافته باشید که $\mathbf{F}$ گرادیان تابع $U(x, y) = x/y$ است ، ولی اگر متوجه نشده‌اید ، می‌توانید $U(x, y)$ را با استفاده از فرمول (۱۰) بسازید. در واقع ، با گذاردن (۱۲) در (۱۰) و انتخاب $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$ ، به دست می‌آوریم

$$U(x, y) = \int_0^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2} dt = \frac{x}{y}.$$

اثر انتخاب مقادیر مختلف x_0 و y_0 صرفاً معرفی ثابت انتگرالگیری است. مثلاً ، انتخاب

$x_0 = y_0 = 1$ نتیجه می‌دهد که

$$U(x, y) = \int_1^x dt - \int_1^y \frac{x}{t^2}\,dt = \frac{x}{y} - 1.$$

لذا، شکل کلی $U(x, y)$ عبارت است از

$$U(x, y) = \frac{x}{y} + C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد. رابطهٔ $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ را با محاسبهٔ مستقیم امتحان کنید.

تابع $U(x, y)$ همان رابطه را با میدان برداری $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ دارد که پادمشتق $U(x)$ با تابع یک‌متغیرهٔ $F(x)$ داراست، و بخصوص $U(x, y)$ فقط با تقریب یک‌ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است. تفاوت اساسی در این است که اگرچه هر تابع پیوسته بر یک بازه مانند $F(x)$ پادمشتق دارد، تنها بعضی از میدانهای به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر یک قلمرو مستطیلی مانند $\mathbf{F}(x, y)$ " مشتق " تابعی چون $U(x, y)$ اند، و این توابع آنهایی هستند که در " شرط انتگرالپذیری " $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق می‌کنند.

مسائل

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ با مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادیان‌است؟ اگر چنین است، تابع U و قلمرو D را بیابید که بر آن $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$.

۱. $P = e^x \sin y,\ Q = e^x \cos y$

۲. $P = x \ln y,\ Q = -x/y$

۳. $P = x^2 + y^2,\ Q = x^3 + 2xy$

۴. $P = x + \ln y,\ Q = (x/y) + \sin y$

۵. $P = 4x^3y^3 - 3y^2,\ Q = 3x^4y^2 - 6xy$

۶. $P = x^2 + xy^3,\ Q = x^2y^2 - 2y$

۷. $P = xe^y,\ Q = ye^x$

۸. $P = x \sin 2y,\ Q = x^2 \cos 2y$

۹. $P = y - (\sin^2 y)/x^2,\ Q = x + (\sin 2y)/x$

۱۰. $P = 2x \cos^2 y,\ Q = 2y - x^2 \sin 2y$

تحقیق کنید که میدان نیروی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بقا است، و سپس، با استفاده از فرمول (۷)،

کار W ی نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر ذرهٔ متحرک از A تا B را حساب کنید.

۱۱) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j},\ A = (0, 1),\ B = (-3, 4)$

۱۲) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},\ A = (-1, 1),\ B = (2, 3)$

۱۳) $\mathbf{F} = (x + y)(\mathbf{i} + \mathbf{j}),\ A = (-13, 0),\ B = (5, 12)$

۱۴) $\mathbf{F} = (2x + 3y)\mathbf{i} + (3x - 2y)\mathbf{j},\ A = (-4, 6),\ B = (1, -2)$

۱۵) $\mathbf{F} = [(x + y + 1)e^x - e^y]\mathbf{i} + [e^x - (x + y + 1)e^y]\mathbf{j},\ A = (0, 0),\ B = (\ln 3, \ln 2)$

۱۶) $\mathbf{F} = (\sinh x + \cosh y)\mathbf{i} + (x \sinh y + 2)\mathbf{j},\ A = (0, \ln 4),\ B = (\ln 2, 0)$

۱۷. گردش میدان

$$\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + 4y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

را حول دایرهٔ C به مرکز مبداء که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است حساب کنید.

۱۸. نشان دهید که قضیهٔ ۳ در صورت تعویض فرمول (۱۰) با

$$U = U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt$$

برقرار می‌ماند.

۱۹. نیروی جاذبهٔ ثقلی وارد بر ذرهٔ Q به جرم یک در نقطه به بردار موضع $\mathbf{R}$ ازسوی‌ذره P به جرم M در نقطه‌ای به بردار موضع $\mathbf{R}_1$ مساوی است با $\mathbf{F} = -(GM/r^2)\mathbf{u}$، که در آن G ثابت عمومی ثقل بوده، $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_1$، $r = |\mathbf{r}|$، و $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ بردار یکه از P_1 به Q است. نشان دهید که، برحسب **پتانسیل ثقلی** $U = GM/r$ (فیزیکدانان $V = -U$ را پتانسیل ثقلی می‌نامند)، $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$. به‌طورکلی، نشان دهید هرگاه Q به‌وسیلهٔ n ذرهٔ $P_1, \ldots, P_n$ به جرمهای $M_1, \ldots, M_n$ در نقاطی به بردارهای موضع $\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_n$ جذب گردد، آنگاه نیروی برآیند $\mathbf{F}$ وارد بر Q مجدداً" مساوی است با $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$ که در آن

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{GM_i}{r_i} \qquad (r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_i|).$$

۲۰. صورت سه‌بعدی زیر از قضیهٔ ۳ را ثابت کنید: فرض کنید مؤلفه‌های $P = P(x, y, z)$، $Q = Q(x, y, z)$، و $R = R(x, y, z)$ میدان برداری به‌طور پیوسته‌مشتق‌پذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ به ازای هر نقطه از قلمرو مستطیلی

$$D = \{(x, y, z): a < x < b,\ c < y < d,\ A < z < B\}$$

در شرایط زیر صدق نمایند:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

در این صورت، **F** یک میدان گرادیان D است؛ و در واقع، **F** گرادیان تابع

$$\begin{aligned} U &= U(x, y, z) \\ &= \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt \end{aligned} \qquad \text{(یک)}$$

است، که در آن (x_0, y_0, z_0) نقطهٔ ثابتی از D و (x, y, z) نقطهٔ متغیری از D می‌باشد.

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ با مؤلفه‌های دادهٔ $P = P(x, y, z)$، $Q = Q(x, y, z)$ و $R = R(x, y, z)$ میدان گرادیان است؟ درصورت بودن، تابع U و قلمرو D را طوری بیابیدکه برآن $F = \text{grad}\ U$. (ر.ک. مسئلهٔ ۲۰ و، درصورت لزوم، از فرمول (یک) استفاده نمایید.)

۲۱. $P = y + z,\ Q = x + z,\ R = x + y$

۲۲. $P = y - z,\ Q = x - z,\ R = x - y$

۲۳. $P = yz,\ Q = xz,\ R = xy$

۲۴. $P = xyz,\ Q = \frac{1}{2}x^2z,\ R = \frac{1}{2}x^2y$

۲۵. $P = 2xy,\ Q = \ln(1 + x^2),\ R = \ln(1 + z^2)$

۲۶. $P = yz\cos xy,\ Q = xz\cos xy,\ R = \sin xy$

۲۷. $P = \ln y - \cos 2z,\ Q = (x/y) + z,\ R = y + 2x\sin 2z$

۲۸. $P = Q = R = 1/(x + y + z)$

۲۹. اگر تابع مشتقپذیری چون $U = U(x, y)$ موجود باشد به طوری که $dU = P\,dx + Q\,dy$، فرم دیفرانسیل $P\,dx + Q\,dy$ را ***دیفرانسیل کامل*** گویند. نشان دهید $P\,dx + Q\,dy$ دیفرانسیل کامل است اگر و فقط اگر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان گرادیان باشد.

۳۰. نشان دهید که $(y + xy^2)\,dx - x\,dy$ دیفرانسیل کامل نیست، ولی با ضرب شدن در "عامل انتگرالگیری" مناسبی چون $f(x, y)$ به این صورت درمی‌آید. $f(x, y)$ را با امتحان بیابید.

۳۱. یک راه‌آهن هوایی کودکان به ارتفاع 121 ft برده شده و سپس رها می‌شود. تندی ماکزیمم آن در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر چقدر است؟ از مقاومت هوا و اصطکاک صرف نظر کرده، از استدلال مربوط به تبدیل انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی استفاده نمایید. آیا جواب به وزن کل واگنها و مسافرانش بستگی دارد؟ شتاب ثقل g را $32\ \text{ft/sec}^2$ بگیرید.

۳۲. دو کودک در لبهٔ بامی به ارتفاع h ft از زمین ایستاده‌اند. اولی سنگی را با تندی v_0 پایین می‌اندازد، و در همین زمان دومی سنگ دیگری را با تندی v_0 به بالا پرت می‌کند. نشان دهید که هر دو سنگ با تندی $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ به زمین می‌خورند، منتها در زمانهای مختلف t_1 و t_2. زمانهای t_1 و t_2 و نیز $\Delta t = t_2 - t_1$ را بیابید.

۳۳. انرژی پتانسیل V یک‌فنر کشیده‌شده را درصورتی بیابید که نیروی بازگردان الاستیک $F = -ks$ باشد، که در آن k ثابت فنر بوده و s انبساط طولی فنر نسبت به طول طبیعی‌اش باشد (صفحهٔ ٤٣١ را به یاد آورید). وقتی $s = 0$ ، V را صفر بگیرید.

۳۴. عنکبوتی به‌وسیلهٔ یک تار از سقف آویزان است. فرض کنید وزن عنکبوت طول طبیعی تار را دوبرابر کرده، آن را از L به $2L$ تبدیل کند. عنکبوت برای رسیدن به سقف W کار انجام می‌دهد که با کار W_0 درصورت غیرالاستیک بودن تار به طول $2L$ صورت می‌گیرد متفاوت است. نشان دهید که $W = \frac{3}{4}W_0$.

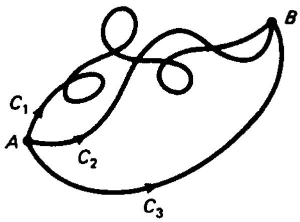
۳۵. فرض کنید T کرهٔ جامد $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ به شعاع a بوده، و Q یک ذره به جرم یک در نقطهٔ $(0, 0, Z)$ خارج T باشد. همچنین، T به چگالی ثابت δ بوده، و T را به "گوه‌های کروی" $T_i\ (i = 1, \ldots, n)$ از نوع شکل ۵۳، صفحهٔ ۱۴۱۷، افرازکنید. سپس هر T_i را ذره‌ای مانند P_i به جرم M_i بگیرید، که M_i حاصل‌ضرب δ در حجم T_i است، و مسئلهٔ ۱۹ را به ازای فاصلهٔ r_i نقطهٔ T_i تا Q اعمال کنید، و بالاخره اندازهٔ ماکزیمم تمام T_iها را به‌صفر نزدیک‌کرده، حد بگیرید تا معلوم شود که Q با نیروی $\mathbf{F} = \text{grad}\ U$ جذب T می‌شود، که در آن پتانسیل ثقلی U با انتگرال

$$U = \iiint_T \frac{G\delta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z)^2}}\, dV$$

داده می‌شود. U را حساب کرده، نشان دهید که کرهٔ جامد T نقطهٔ P را با نیرویی جذب می‌کند که گویی تمام جرمش در مرکز آن متمرکز شده است. نشان دهید این نه فقط در مورد چگالی ثابت δ ، بلکه برای هر تابع چگالی به‌طور کروی متقارن $\delta = \delta(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ نیز درست است.

۳۶. نشان دهید که نیروی ثقلی خالص یک غشاء کروی همگن بر ذره‌ای در داخل آن صفر است.

۳۷. شکل ۹ دو مسیر C_1 و C_2 از A به B را نشان می‌دهد، که در آن C_1 و C_2 دوبار (درنقاطی غیر از A و B) متقاطع بوده، و C_1 سه خود قطعی دارد. فرض کنید فقط می‌دانیم که به ازای هر مسیر بستهٔ *سادهٔ* C (در قلمروی)، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. با معرفی مسیر دیگر C_3 از A به B ، که C_1 یا C_2 را قطع نکند، نشان دهید که $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.



شکل ۹

۳.۱۵ مساحت سطح و انتگرالهای سطح

مساحت سطح. حال به *انتگرالهای سطح* رومی‌آوریم؛ یعنی، انتگرالها روی سطوحی که در حالت کلی خمیده‌اند. بحث را با مسئلهٔ تعیین مساحت نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیر دو متغیره آغاز می‌کنیم. فرض کنیم سطح S نمودار تابع

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in R)$$

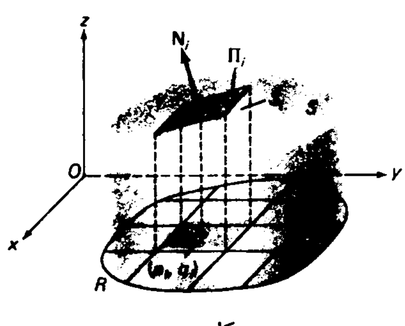
باشد، که در آن R یک ناحیهٔ نرمال در صفحهٔ xy است که درصفحهٔ ۱۳۱۸ تعریف شد، و f تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد (یعنی، مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ موجود و پیوسته‌اند). همانند تعریف انتگرال مضاعف روی R که در بخش ۱.۱۴ داده شد، R را با رسم خطوط

$$x = x_j \quad (j = 0, 1, \ldots, J), \qquad y = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, K), \tag{1}$$

که در آنها

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{K-1} < y_K = d,$$

و ناحیهٔ مستطیلی $\{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ شامل ناحیهٔ R است، به n زیر ناحیهٔ $R_1, R_2, \ldots, R_n$ افراز می‌کنیم. صفحات با همان معادلات (۱) موازی صفحات yz و xz بوده، و S را به n "عنصر سطح" $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مانند عنصر S_i در شکل ۱۰ برای حالت $f(x, y) \ge 0$ تقسیم می‌کنند.



شکل ۱۰

حال در هر زیر ناحیهٔ R_i نقطهٔ دلخواه (p_i, q_i) را اختیار کرده ، و نقطهٔ P_i بر S_i را طوری می‌یابیم که (p_i, q_i) تصویر آن درصفحهٔ xy باشد. سپس در هر نقطهٔ P_i صفحهٔ مماس بر S را رسم می‌کنیم. این کار n صفحهٔ مماس به ما می‌دهد که صفحات (۱) را در n ناحیهٔ مسطح $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ قطع می‌کنند که مانند توفالهای بام چسبیده به S می‌باشند؛ در شکل ناحیهٔ Π_i برای یک عنصر سطح " درونی " S_i آمده است که تصویرش روی صفحهٔ xy مستطیلی است. فرض کنید $\Delta\sigma_i$ مساحت Π_i باشد (علامت σ سیگمای کوچک یونانی است). در این صورت، گویی مجموع $\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$ تقریب مناسبی است به آنچه شهودا " مساحت A_S سطح S برداشت می‌شود، و این تقریب وقتی اندازه هر عنصرسطح S_i کوچکتر شود، یعنی اندازهٔ مش

$$\mu = \max\{x_1 - x_0, \ldots, x_J - x_{J-1}, y_1 - y_0, \ldots, y_K - y_{K-1}\}$$

افراز R به صفر نزدیک شود، بهتر خواهد شد. این نکات ما را به تعریف A_S به صورت حد

$$A_S = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i \qquad (۲)$$

رهنمون می‌سازد.

حال فرض کنیم $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بردارهای یکه‌ای در امتداد محورهای x ، y ، و z بوده و $\mathbf{N}_i$ یک قائم *بالایی* به Π_i (و درنتیجه، به S_i یا S) در P_i باشد؛ یعنی، بردار ناصفری عمود بر Π_i و رو به *بالا* که با محور z مثبت (و درنتیجه، با $\mathbf{k}$) زاویهٔ حادهٔ γ_i بسازد برای تبدیل (۲) به انتگرال مضاعف روی R ، می‌بینیم که اگر ΔA_i مساحت زیرناحیهٔ R_i باشد، آنگاه، دست کم به ازای یک " توفال Π_i " با اضلاع مستقیم[1] ،

$$\Delta\sigma_i = \Delta A_i \sec\gamma_i, \qquad (۳)$$

برای مشاهدهٔ این امر، به شکل ۱۱ نگاه می‌کنیم که توفال با اضلاع مستقیم Π_i به شکل متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد که به‌وسیلهٔ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ پیموده می‌شود. مساحت $\Delta\sigma_i$ توفال اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ است، ولی‌خود حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ قائمی چون $\mathbf{N}_i$ به Π_i می‌باشد (به خاطر سادگی، $\mathbf{N}_i$ را به گوشهٔ Π_i وصل می‌کنیم). فرض کنیم زیر ناحیهٔ مستطیلی R_i که زیر Π_i در صفحهٔ xy واقع است به طول اضلاع Δx و Δy باشد. در این صورت، $\Delta A_i = \Delta x \Delta y$ ، و از شکل واضح است که

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D} = \Delta x\,\mathbf{i} + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D}) = \Delta x\,\mathbf{i} + r\mathbf{k},$$

---

۱. *می‌توان نشان داد که حتی اگر تمام جملات $\Delta\sigma_i$ نظیر به توفال Π_i با اضلاع خمیده را حذف کنیم، مجموع (۲) به همان حد A_S نزدیک خواهد شد.*

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'E'} + \overrightarrow{E'E} = \Delta y\,\mathbf{j} + (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{E'E}) = \Delta y\,\mathbf{j} + s\mathbf{k},$$

که در آن r و s اسکالرهای مناسبی می‌باشند. بنابراین،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\Delta x\,\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (\Delta y\,\mathbf{j} + s\mathbf{k}) = \Delta x\,\Delta y\,\mathbf{k} - r\,\Delta y\,\mathbf{i} - s\,\Delta x\,\mathbf{j},$$

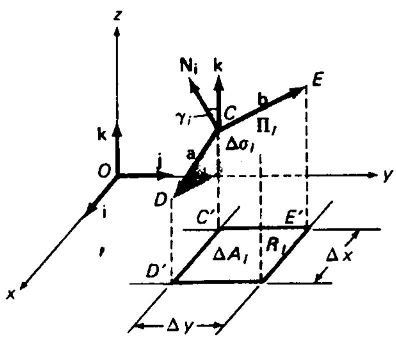
درنتیجه،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{k} = \Delta x\,\Delta y$$

و لذا،

$$\Delta\sigma_i \cos\gamma_i = \Delta x\,\Delta y = \Delta A_i,$$

که با (۳) معادل می‌باشد.



شکل ۱۱

پس از (۲) و (۳) معلوم می‌شود که

$$A_S = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \sec\gamma_i. \qquad (۴)$$

با انتخاب $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ در فرمول (۳)، صفحهٔ ۱۲۶۶، و توجه به این امر که S نمودار معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ است، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{N}_i = -f_x(p_i, q_i)\mathbf{i} - f_y(p_i, q_i)\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad (۵)$$

یک قائم بالایی به Π_i در (p_i, q_i) است. بنابراین،

$$\cos\gamma_i = \frac{\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{N}_i||\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}},$$

یا معادلاً

$$\sec\gamma_i = \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1} \qquad (۶)$$

بالاخره، با گذاردن (۶) در (۴)، معلوم می‌شود که

$$A_S = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}\, \Delta A_i.$$

این حد انتگرال مضاعف تابع

$$\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}$$

روی R است. لذا، A_S از انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$A_S = \iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA, \tag{۷}$$

که وجودش را قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۱۳۲۳، و پیوستگی مشتقات‌جزئی f_x و f_y بر R تضمین می‌کنند که پیوستگی انتگرالده بر R را نتیجه می‌دهند. فرمول (۷) را می‌توان به صورت فشرده‌تر زیر نوشت:

$$A_S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA. \tag{۷'}$$

البته، برای حالتی که سطح S نمودار یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر تعریف شده بر یک ناحیه در صفحهٔ مختصاتی غیراز صفحهٔ xy باشد، فرمولهای مشابهی وجود دارند. برای به دست آوردن این فرمولها، انتگرالده (۷') را با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

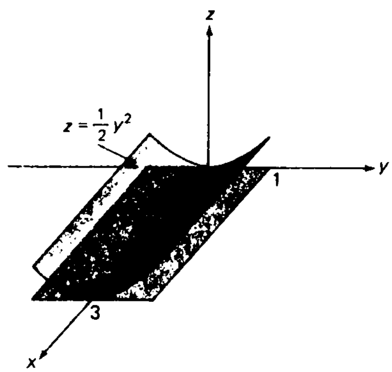
اگر R ناحیه‌ای در صفحهٔ xz باشد، و با

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}$$

اگر R ناحیه‌ای در صفحهٔ yz باشد تعویض کنید.

مثال ۱. فرض کنید S بخشی از استوانهٔ سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ روی ناحیهٔ مستطیلی R درصفحهٔ xy باشد که به محور y، خط $x = 3$، و خطوط $y = \pm 1$ محدود شده است (ر.ک. شکل ۱۲). مساحت A_S سطح S را پیدا نمایید.

حل. بنابر تقارن، A_S دوبرابر مساحت قسمتی از S است که روی ربع اول صفحهٔ xy قرار



شکل ۱۲

دارد. لذا، با اعمال فرمول ($'۷$) ، و به کمک فرمول ($'۶$) ، صفحهٔ ۶۲۹، به‌دست‌می‌آوریم

$$\begin{aligned} A_S &= 2 \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA = 2 \int_0^3 dx \int_0^1 \sqrt{y^2 + 1}\, dy \\ &= 6\left[\frac{1}{2} y\sqrt{y^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln (y + \sqrt{y^2 + 1})\right]_0^1 \\ &= 3[\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})] \approx 6.89. \end{aligned}$$

کاربرد فرمول (۷) یا ($'۷$) اغلب به یک انتگرال مجازی همگرا منجر می‌شود. در این حالات، مساحت A_S مقدار این انتگرال مجازی گرفته می‌شود.

مثال ۲. مساحت A_S سطح S که‌نمودارتابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(a > 0)$ است‌را بیابید.

حل. چون S نیمکره‌ای به شعاع a است، از قبل می‌دانیم که $A_S = \frac{1}{2}(4\pi a^2) = 2\pi a^2$. لذا، این مثال فقط برای توضیح روش آورده شده است. با آنکه تابع $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر قلمرو تعریفش، یعنی قرص بستهٔ $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2\}$ ، پیوسته است، ولی بر R به‌طور پیوسته مشتقپذیر نیست، زیرا مشتقات جزئی

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ که مرز R است وجود ندارد. ولی $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ بر هر قرص

بستهٔ

$$R_u = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq u^2\} \qquad (0 < u < a)$$

با شعاع کوچکتر u به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد؛ و لذا، شایسته است مساحت S را با انتگرال مضاعف مجازی

$$\begin{aligned} A_S &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_R \sqrt{\frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dA \\ &= \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA = \lim_{u \to a^-} \iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA \end{aligned}$$

تعریف کنیم. به‌خاطر تقارن مستدیر، به مختصات قطبی می‌رویم، داریم

$$\iint_{R_u} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^u \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr = 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^u$$

$$= 2\pi a\,(a - \sqrt{a^2 - u^2}),$$

و درنتیجه،

$$A_S = 2\pi a \lim_{u \to a^-} (a - \sqrt{a^2 - u^2}) = 2\pi a^2.$$

انتگرالهای سطح. حال انتگرال یک تابع پیوسته روی سطح خمیدهٔ S را تعریف می‌کنیم. بار دیگر فرض‌کنیم S نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیهٔ نرمال R در صفحهٔ xy تعریف شده است، و نقاط تقسیم x_j, y_k، اندازهٔ مش μ، زیر ناحیه‌های R_i، و "مساحات مقدماتی" ΔA_i و $\Delta\sigma_i$ همان معانی قبل را داشته‌باشند. همچنین $g(x, y, z)$ یک تابع سه‌متغیره باشد که بر سطح S پیوسته است؛ این یعنی تابع مرکب $g(x, y, f(x, y))$ بر ناحیهٔ R که تصویر S روی صفحهٔ xy است پیوسته می‌باشد. با اختیار نقطهٔ دلخواه (p_i, q_i) در هر زیر ناحیهٔ R_i، مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta\sigma_i$$

را تشکیل می‌دهیم. فرض‌کنیم وقتی اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود، این مجموع،

بی‌توجه‌به انتخاب اعداد x_j ، y_k ، p_i ، و q_i صادق در شرایط مقرر، به‌حدی متناهی نزدیک گردد. در این صورت، این حد را **انتگرال (سطح)** g روی S نامیم و با

$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma$$

نشان می‌دهیم، و گوییم تابع g بر S ، یا روی S ، **انتگرالپذیر** است. لذا،

$$\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta\sigma_i, \tag{۸}$$

که در آن g **انتگرالده** انتگرال سمت چپ نام دارد.

مثال ۳. با اختیار $g(x, y, z) \equiv 1$ در فرمول (۸)، به دست می‌آید

$$\iint_S 1\, d\sigma = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i = A_S,$$

که در آن A_S مساحت سطح S می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$A_S = \iint_S d\sigma.$$

برای محاسبهٔ انتگرال سطح $\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma$ روی S ، به موازات استدلالی که برای به دست آمدن فرمول (۷) برای مساحت S به کار رفت حرکت می‌کنیم. لذا، S را با R و $\Delta\sigma_i$ را با $\Delta A_i \sec \gamma_i$ تعویض می‌کنیم، که در آن γ_i زاویهٔ بین محور z مثبت و یک قائم رو به بالا به S در $P_i = (p_i, q_i, f(p_i, q_i))$ است. درنتیجه، به کمک (۶) داریم

$$\begin{aligned}\iint_S g(x, y, z)\, d\sigma &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i))\, \Delta A_i \sec \gamma_i \\ &= \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(p_i, q_i, f(p_i, q_i)) \sqrt{[f_x(p_i, q_i)]^2 + [f_y(p_i, q_i)]^2 + 1}\, \Delta A_i,\end{aligned}$$

که در آن حد سمت راست انتگرال مضاعف زیر است:

$$\iint_R g(x, y, f(x, y)) \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\, dA.$$

که وجودش را فرض پیوستگی توابع g ، f_x ، و f_y بر R تضمین می‌نماید . بنابراین ،

$$\iint_S g(x, y, z)\,d\sigma = \iint_R g(x, y, f(x, y))\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\,dA \qquad (۹)$$

یا ، به‌طور فشرده‌تر ،

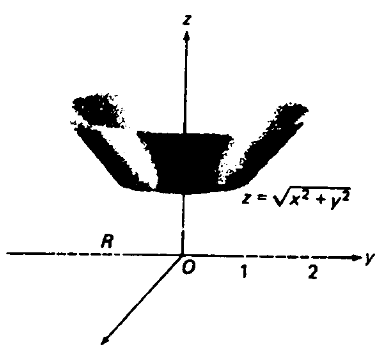
$$\iint_S g(x, y, z)\,d\sigma = \iint_R g(x, y, z)\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dA, \qquad (۹)$$

که در طرف راست ، $z = f(x, y)$. البته ، برای حالتی که S نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیری است که بر ناحیه‌ای در صفحهٔ xz یا صفحهٔ yz تعریف شده است ، فرمولهایی مشابه (۹) و (۹') وجود دارند .

مثال ۴ . انتگرال سطح

$$\iint_S \ln z\,d\sigma$$

را درصورتی حساب کنید که S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۳) .



شکل ۱۳

حل . تصویر S روی صفحهٔ xy ناحیهٔ طوقی $R = \{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ است ، و

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

لذا ، از (۹′) پس از رفتن به مختصات قطبی نتیجه می‌شود که

$$\iint_S \ln z\, d\sigma = \iint_R \ln \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\, dA$$

$$= \sqrt{2}\iint_R \ln \sqrt{x^2+y^2}\, dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r \ln r\, dr.$$

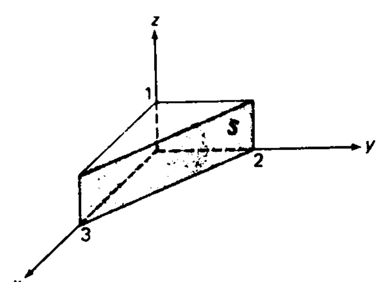
بنابراین ، به کمک انتگرالگیری جزء به جزء ،

$$\iint_S \ln z\, d\sigma = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}r^2 \ln r - \frac{1}{4}r^2\right]_1^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(8 \ln 2 - 3) \approx 5.65,$$

مثال ۵. انتگرال سطح

$$\iint_S xz\, d\sigma$$

را درصورتی بیابید که S بخشی از صفحهٔ $2x + 3y = 6$ در یکهشت اول باشد که بین صفحات $z = 0$ و $z = 1$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۴) .



شکل ۱۴

حل . چون S موازی محور z است ، پس نمودار تابع $z = f(x, y)$ نیست . لیکن ، نمودار تابع $y = 2 - \frac{2}{3}x$ بر ناحیهٔ مستطیلی $R = \{(x, z): 0 \le x \le 3, 0 \le z \le 1\}$ در صفحهٔ xz ، ونیز نمودار تابع $x = 3 - \frac{3}{2}y$ بر ناحیهٔ مستطیلی $R' = \{(y, z): 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}$ درصفحه yz می‌باشد . بنابراین ،

$$\iint_S xz\,d\sigma = \iint_R xz\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\,dx\,dz = \frac{\sqrt{13}}{3}\int_0^3 dx\int_0^1 xz\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{13}}{3}\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4},$$

یا ، به صورت دیگر ،

$$\iint_S xz\,d\sigma = \iint_{R'}\left(3 - \frac{3}{2}y\right)z\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}\,dy\,dz$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{2}\int_0^2 dy\int_0^1\left(3 - \frac{3}{2}y\right)z\,dz$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{2}\left[y - \frac{1}{4}y^2\right]_0^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{3\sqrt{13}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{4}$$

همانطور که جرم کل یک سیم به شکل منحنی C با انتگرال خط $\int_C \rho(x, y)\,ds$ داده می‌شود ، که در آن $\rho(x, y)$ چگالی در نقطهٔ (x, y) از C است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمتر سنجیده می‌شود ، جرم کل یک ورقهٔ فلزی نازک به شکل سطح S از انتگرال سطح $\iint_S \rho(x, y, z)\,d\sigma$ به دست می‌آید ، که در آن $\rho(x, y, z)$ چگالی در نقطهٔ (x, y, z) از S است که با واحدهایی چون گرم بر سانتیمترمربع سنجیده خواهد شد . شرح جزئیات لازم نیست ، چرا که قبلا" در فصل ۱۴ برای اجسام جامد ، ورقه‌های مسطح ، و سیمها با چگالی متغیر داده شده است . در این وضع می‌توان مرکز جرم و گشتاورهای ماند یک سطح فلزی با چگالی متغیر یا ثابت را نیز تعریف کرد (ر.ک. مسائل ۲۱ تا ۲۳) .

ما اغلب می‌خواهیم یک انتگرال سطح را روی سطح S مرکب از تعدادی متناهی زیر سطح $S_1, S_2, \ldots, S_n$ حساب کنیم که هر یک نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتقپذیربوده و فقط در بخشی یا تمام منحنیهای مرزی سهیم‌اند ولی نقطهٔ مشترک دیگری ندارند . انتگرال تابع پیوستهٔ g روی سطح S به‌طور طبیعی تعریف شده و مساوی مجموع انتگرالهای g روی زیرسطوح $S_1, S_2, \ldots, S_n$ گرفته می‌شود . به‌طور مشخص ،

$$\iint_S g\,d\sigma = \iint_{S_1} g\,d\sigma + \iint_{S_2} g\,d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\,d\sigma, \qquad (10)$$

که در آن برای اختصار به‌جای $g(x, y, z)$ فقط می‌نویسیم g .

$$\iint_S xy^2z^3\,d\sigma = \left(\int_0^1 y^2\,dy\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right) + \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right)$$
$$+\left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{8}.$$

بردارهای یکهٔ قائم به یک‌سطح. مجموعهٔ بردارهای یکهٔ قائم به‌سطح S یک میدان برداری بر S را تشکیل می‌دهد. مثلاً، فرض کنیم S نمودار یک تابع به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر مانند

$$z = f(x, y) \qquad ((x, y) \in R)$$

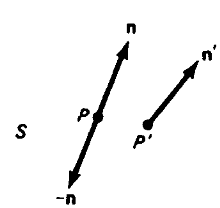
باشد، که در آن R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy است. در این صورت، همان استدلالی که به فرمول (۵) منجر شد نشان می‌دهد که

$$\mathbf{n} = \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}$$

یک‌بردار یکهٔ قائم‌به S در نقطهٔ $P = (x, y, f(x, y))$ است، و همین‌طور بردار جهت‌دار متقابل

$$-\mathbf{n} = \frac{f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}}.$$

در واقع، $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ *بالایی* به S در P است که از S به بالا اشاره داشته، و $-\mathbf{n}$ بردار یکهٔ *پایینی* به S در P است‌که‌از S به‌پایین‌اشاره‌دارد (به‌یادداشته‌باشیدکه $0 < \mathbf{n}\cdot\mathbf{k} \le 1$) همانطور که در شکل ۱۶ نشان داده شده، فقط دو بردار یکه به S در P وجود دارد. فرض کنیم $\mathbf{n}'$ قائم یکهٔ بالایی در نقطهٔ دیگر P' از S باشد (ر.ک. شکل). در این صورت، به خاطر پیوستگی مشتقات‌جزئی f_x و f_y، زاویهٔ بین $\mathbf{n}$ و $\mathbf{n}'$ را می‌توان با اختیار P' به‌قدرکافی نزدیک P بدلخواه کوچک‌کرد. این امر با گفتن اینکه قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ بر S **به‌طور پیوسته تغییر**



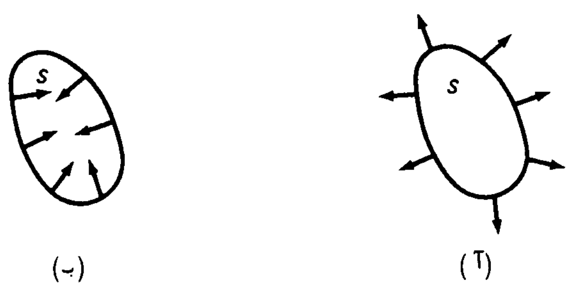
شکل ۱۶

می‌کند ، یا اینکه **قائم یکهٔ پیوستهٔ** $\mathbf{n}$ بر S وجود دارد بیان می‌شود. هرگاه $\mathbf{n}$ یک قائم یکهٔ پیوسته بر S باشد ، آنگاه بردار یکهٔ متقابل $-\mathbf{n}$ نیز چنین است . یک سطح با بردار یکهٔ قائم پیوسته را ***هموار*** می‌گویند .

در این وضع ، می‌توان دوقائم یکهٔ پیوسته بر سطح تعریف کرد که نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیری به شکل $y = g(x, z)$ یا $x = h(y, z)$ باشد. مثلا" ، دو قائم یکه در نقطهٔ $P = (x, g(x, z), z)$ از نمودار $y = g(x, z)$ عبارتنداز

$$\pm \frac{-g_x(x, z)\mathbf{i} - g_z(x, z)\mathbf{k} + \mathbf{j}}{\sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1}}.$$

همچنین ، می‌توان دو میدان از بردارهای یکهٔ قائم بر یک سطح " بستهٔ " S ، مانند کره ، بیضی‌گون ، یا مکعب ، تعریف کرد که فضا را به دو ناحیه تقسیم کنند ، یک ناحیهٔ کراندار به نام ***داخل*** S و یک ناحیهٔ بی‌کران به نام ***خارج*** S . در این صورت ، یک‌میدان از قائمهای یکه از قائمهای یکهٔ ***خارجی*** به S تشکیل شده است که ، مثل شکل ۱۷ (آ) اشاره به خارج S دارد ، و میدان دیگر از قائمهای یکهٔ ***داخلی*** تشکیل شده است که ، مثل‌شکل ۱۷ (ب) ، اشاره به داخل S دارد .روی یک مکعب ،وقتی بردار یکه از یک وجه به‌دیگری می‌رود ،



(ب)   (آ)

شکل ۱۷

تغییر جهت ناگهانی‌دارد.لذا ، یک مکعب سطح هموار نیست ،ولی ***قطعه قطعه هموار*** است، بدین معنی که از تعدادی متناهی سطح هموار تشکیل شده است که در امتداد مرزهایشان به هم وصل شده‌اند (در مکعب ، این سطوح هموار شش وجه آن می‌باشند) .

تبصره. تمام سطوح مورد بحث **دوطرفه** هستند . مثلا" ، نمودار تابع $z = f(x, y)$ یک طرف بالایی و یک طرف پایینی دارد ،کره خارج و داخل دارد ،و از این قبیل . با آنکه منحصرا" به سطوح دوطرفه توجه داریم ، باید از وجود سطوح **یکطرفه** آگاه بود (یک نمونهٔ کلاسیک از این سطوح در مسئلهٔ ۲۴ ذکر شده است) .

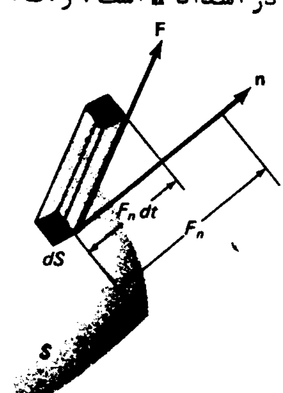
شار یک میدان برداری در امتداد یک سطح. حال نوع خاصی از انتگرالهای سطح را معرفی می‌کنیم که در ریاضیات کار بسته اهمیتی اساسی داشته و دردو بخش آخر این فصل نقشی کلیدی ایفا می‌کند. فرض کنید S یک سطح (دوطرفهٔ) هموار باشد که بر آن بردار یکهٔ پیوستهٔ $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ اختیار شده است، که $\mathbf{r}$ بردار موضع نقطهٔ متغیر S بوده، و $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک میدان برداری پیوسته بر S باشد. دراین صورت، منظوراز *شار* $\mathbf{F}$ *در امتداد* S یعنی انتگرال سطح

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma, \tag{11}$$

شامل حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. با عکس کردن جهت $\mathbf{n}$، یعنی انتخاب قائم پیوستهٔ دیگر $-\mathbf{n}$ بر S، علامت شار عوض می‌شود، زیرا

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot -\mathbf{n})\, d\sigma = \iint_S -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = -\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

برای تعبیر فیزیکی انتگرال شار (۱۱)، فرض می‌کنیم سطح S در مایعی با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ که از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کرده ولی مستقل از زمان است فرو رفته باشد (به زبان مکانیک مایعات، یک "شارش حالت پایدار"). در این صورت، شار $\mathbf{F}$ در امتداد S عبارت است از حجم خالص مایعی که در واحد زمان از یک طرف که با $-\mathbf{n}$ معین می‌شود به طرفی که با $\mathbf{n}$ مشخص می‌شود در امتداد S جریان می‌یابد. برای مشاهدهٔ این امر به صورت زیر استدلال کرده، از دیفرانسیلها به‌طور شهودی استفاده می‌کنیم. در یک بازهٔ زمانی به طول کوتاه dt، حجم مایع عبور کرده از قطعهٔ کوچکی از S، که آن را با dS نمایش می‌دهیم، مساوی حجم استوانه‌ای است (معمولاً "مایل) به قاعدهٔ dS وارتفاع $F_n\, dt$، که در آن F_n مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ در امتداد $\mathbf{n}$ است؛ ر.ک. شکل ۱۸.



شکل ۱۸

این حجم مساوی است با $F_n\,dt\,d\sigma$، که در آن $d\sigma$ مساحت dS می‌باشد (مثال ۱ ، صفحهٔ ۶۹۹ ، را به یاد آورید) . در اینجا فرض می‌کنیم زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{n}$ از $90°$ متجاوز نباشد ؛ در غیر این صورت ، استوانه در طرف دیگر S قرار داشته و حجم مایع جریان یافته از dS منفی است (قدرمطلق آن مساوی حجم استوانه است) ، زیرا شارش اینک از طرف معین‌شده با $\mathbf{n}$ به طرف معین شده با $\mathbf{n}-$ است . لذا ، حجم مایع عبور کرده در امتداد dS بر واحد زمان مساوی است با

$$\frac{F_n\,dt\,d\sigma}{dt} = F_n\,d\sigma = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

و با جمعبندی سهمهای تمام قطعات کوچک به سطح dS که S را می‌سازند ، انتگرال شار(۱۱) به دست خواهد آمد .اگر آخرین مرحله را خیلی شتاب زده می‌بینید ، S را به‌زیرسطحهای کوچک $S_1, S_2, \ldots, S_n$ افراز کرده ، $\mathbf{r}_i$ را بردار موضع نقطهٔ دلخواه S_i گرفته ،ومجموع‌ریمان $\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}_i)]\,\Delta\sigma_i$ را تشکیل دهید ، که در آن $\Delta\sigma_i$ مساحت S_i می‌باشد . در این صورت ، انتگرال شار (۱۱) حد این مجموع است وقتی μ ، یعنی اندازهٔ ماکزیمم زیر سطوحها ، به صفر نزدیک گردد . (" اندازهٔ S_i " خود ماکزیمم فاصله بین نقاط S_i می‌باشد .)

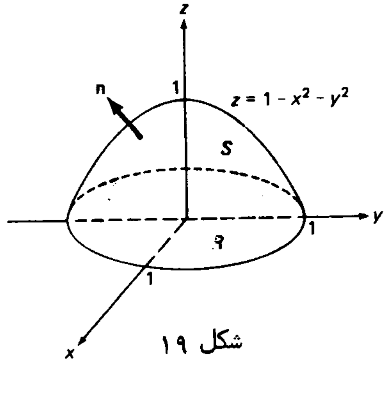
مثال ۷. شار میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ را در امتداد سطح S که نمودار

$$z = 1 - x^2 - y^2 \qquad (z \geq 0)$$

است ، با انتخاب $\mathbf{n}$ به عنوان قائم یکهٔ بالایی به S ، حساب کنید .

حل. سطح S " عرقچین سهموی " شکل ۱۹ است . چون

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$



شکل ۱۹

یک قائم بالایی به S است، بردار $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$ قائم یکهٔ بالایی به S می‌باشد (توجه کنید که $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$). اما $\mathbf{N} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$، و

$$|\mathbf{N}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1.}$$

لذا، طبق فرمول (۹)،

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_R (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|\mathbf{N}|\, dA = \iint_R \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\right)|\mathbf{N}|\, dA \\ &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dA = \iint_R [x^2(2x) + y^2(2y) + z]\, dA \\ &= \iint_R [1 - (x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)]\, dx\, dy,\end{aligned}$$

که در آن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \le 1$ در صفحهٔ xy می‌باشد. با تبدیل به مختصات قطبی، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [1 - r^2 + 2r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)]r\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{2}{5}r^5(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right]_{r=0}^{1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{5}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right] d\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

زیرا $\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta = 0$ (چرا؟)

به‌طورکلی، هرگاه سطح هموار S نمودار تابع $z = f(x, y)$ باشد که بر ناحیهٔ R_{xy} در صفحهٔ xy تعریف شده است، آنگاه، درست به روش حل مثال ۷، معلوم می‌شود که شار میدان برداری پیوستهٔ $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ در امتداد S به صورت زیر است:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} \left(-F_1\frac{\partial z}{\partial x} - F_2\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\right)dx\, dy \qquad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0). \tag{۱۲}$$

دو فرمول دیگر شار، که مشابه (۱۲) است، در مسئلهٔ ۳۱ داده شده‌اند.

مثال ۸. شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از مکعب S در یکهشت اول را بیابید

که به صفحات مختصات و صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $z = 1$ محدود شده است (همین سطح در مثال ۶ درنظر گرفته شده بود) .

حل . طبیعی است که شار $\mathbf{F}$ خارج مکعب S مساوی مجموع شارهای $\mathbf{F}$ در امتداد شش وجه S ، از داخل S به خارج S ، تعریف می‌شود . در جدول زیر ، این وجوه $S_1, \ldots, S_6$ همراه با بردارهای یکهٔ خارجی نظیر و مقادیر حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ذکر شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۵) .

وجه	قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$
$S_1: x = 1$	$\mathbf{i}$	$xy^2 = y^2$
$S_2: y = 1$	$\mathbf{j}$	$-yz = -z$
$S_3: z = 1$	$\mathbf{k}$	$x^2z^2 = x^2$
$S_4: x = 0$	$-\mathbf{i}$	0
$S_5: y = 0$	$-\mathbf{j}$	0
$S_6: z = 0$	$-\mathbf{k}$	0

چون بر S_4 ، S_5 ، و S_6 ، $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ ، کافی است شارهای در امتداد سه‌وجه مکعب ، یعنی وجه جلوی S_1 ، وجه سمت راست S_2 ، و وجه بالایی S_3 ، را درنظر بگیریم . بنابراین ،

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

$$= \iint_{R_1} y^2\, dy\, dz + \iint_{R_2} (-z)\, dx\, dz + \iint_{R_3} x^2\, dx\, dy,$$

که‌در آن مثل مثال ۶ $R_1=\{(y, z): 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ ، $R_2=\{(x, z): 0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1\}$ و $R_3 = \{(x, y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ برای تبدیل یک انتگرال روی S_i به یک‌انتگرال روی R_i ، می‌توان $d\sigma$ را با حاصل‌ضرب دیفرانسیلهای مختصات نظیر به R_i عوض کرد . زیرا S_i موازی R_i می‌باشد . لذا ، بالاخره ، شار خالص $\mathbf{F}$ خارج مکعب S ، عبارت است از

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \left(\int_0^1 y^2\, dy\right)\left(\int_0^1 dz\right) - \left(\int_0^1 dx\right)\left(\int_0^1 z\, dz\right)$$

$$+ \left(\int_0^1 x^2\, dx\right)\left(\int_0^1 dz\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

مسائل

مساحت A_S سطح داده شدهٔ S را بیابید.

۱. S بخشی از صفحهٔ $3x + 2y + 6z = 12$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۲. S بخشی از استوانهٔ سهموی $z = x^2$ است که توسط صفحات $x = \sqrt{2}$، $y = x$، و $y = 2x$ جدا شده است

۳. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که بین صفحات $x = 0$، $y = 0$، $x = a$، و $y = b$ قرار دارد $(a > 0, b > 0)$

۴. S بخشی از مخروط $z^2 = 2xy$ است که داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a قرار دارد

۵. S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ است که توسط استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$ جدا شده است.

۶. S: بخشی از استوانهٔ مستدیر $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$ است که داخل کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ قرار دارد

۷. S عرقچین سهموی $x = 12 - y^2 - z^2$ $(x \geq 0)$ است

۸. S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که توسط استوانهٔ بیضوی $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ جدا شده است

۹. S بخشی از استوانهٔ $x^2 + z^2 = a^2$ است که داخل استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ با همان شعاع a قرار دارد

۱۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ در یکهشت اول است که توسط صفحهٔ $y + z = 4$ جدا شده است

۱۱. S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحهٔ xy و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2y$ قرار دارد

۱۲. S بخشی از استوانهٔ سهموی $z^2 = 4x$ است که توسط استوانهٔ سهموی $y^2 = 4x$ و صفحهٔ $x = 3$ جدا شده است

انتگرال سطح داده شده را حساب کنید.

۱۳. $\iint_S xyz\, d\sigma$، که در آن S بخشی از صفحهٔ $x + y + z = 1$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۱۴. $\iint_S z^2\, d\sigma$، که در آن S کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ است

۱۵. $\iint_S x^2\, d\sigma$، که در آن S بخشی از مخروط $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ است که بین صفحات $x = 0$ و

$x = 1$ قرار دارد

۱۶. $\iint\limits_S z\,d\sigma$ ، که در آن S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است که در یکهشت اول قرار دارد.

۱۷. $\iint\limits_S x^2y^2\,d\sigma$ ، که در آن S نیمکرهٔ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ است

۱۸. $\iint\limits_S y\,d\sigma$ ، که در آن S عرقچین سهموی $y = 2 - x^2 - z^2$ $(y \geq 0)$ است

۱۹. $\iint\limits_S (x + y + z)\,d\sigma$ ، که در آن S همان سطح مکعبی مثال ۶ است

۲۰. $\iint\limits_S (x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,d\sigma$ ، که در آن S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که از استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$ جدا شده است.

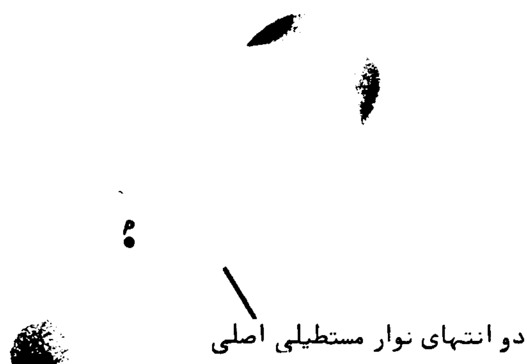
فرض کنید S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 4$ واقع است، و نیز چگالی در هر نقطهٔ P از S مساوی فاصلهٔ P تا صفحهٔ $z = 0$ باشد. در این صورت، کمیات زیر را بیابید.

۲۱. جرم کل و مرکز جرم S

۲۲. گشتاور ماند S حول محور z

۲۳. مرکز گون S را درصورتی بیابید که S بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ باشد که در یکهشت اول قرار دارد.

۲۴. فرض کنید یک قطعه کاغذ مستطیلی نیم دور چرخیده و سپس دو انتهایش را به هم بچسبانیم. سطح حاصل، به نام **نوار موبیوس**، در شکل ۲۰ نموده شده است. چرا



نوار موبیوس

شکل ۲۰

این سطح یکطرفه است؟

راهنمایی. حشره‌ای در نظر بگیرید که در خط وسط نوار از نقطهٔ P شروع به حرکت نماید.

شار $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را درصورتی حساب کنید که $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی به S، به ازای میدان $\mathbf{F}$ و سطح S داده شده، باشد.

۲۵. $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، S نیمکرهٔ $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$

۲۶. $\mathbf{F}=xz\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$، S عرقچین سهموی مثال ۷

۲۷. $\mathbf{F}=\mathbf{i}-y^2\mathbf{j}-z\mathbf{k}$، S بخشی از سهمی‌گون هذلولوی $z=xy$ که بالای ناحیهٔ مستطیلی $0\le x\le 3, 0\le y\le 2$ قرار دارد

۲۸. $\mathbf{F}=-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}+3\mathbf{k}$، S بخشی از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ است که در یکهشت اول قرار دارد

۲۹. شار میدان $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ خارج سطح بستهٔ S محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و صفحات $z=0$ و $z=3$ را پیدا کنید.

۳۰. شار میدان $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$ خارج از مکعب مثال ۸ را پیدا نمایید.

۳۱. فرض کنید $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته بر سطح هموار S باشد که نمودار تابع $y=g(x,z)$ است که بر ناحیهٔ R_{xz} در صفحهٔ xz تعریف شده است. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{R_{xz}}\left(-F_1\frac{\partial y}{\partial x}+F_2-F_3\frac{\partial y}{\partial z}\right)dx\,dz.$$

همچنین، نشان دهید هرگاه S نمودار تابع $x=h(y,z)$ باشد که بر ناحیهٔ R_{yz} در صفحهٔ yz تعریف شده است، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iint_{R_{yz}}\left(F_1-F_2\frac{\partial x}{\partial y}-F_3\frac{\partial x}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

در اینجا $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ پیوسته‌ای بر S است که در شرط $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}>0$ در حالت اول و شرط $\mathbf{n}\cdot\mathbf{i}>0$ در حالت دوم صدق می‌کند.

۳۲. فرض کنید S سطح‌هموار‌ی‌باشد که درآن واحد نمودار سه‌تابع $z=f(x,y)$، $y=g(x,z)$ و $x=h(y,z)$ است که بر نواحی R_{xy}، R_{xz}، و R_{yz} در صفحات xy، xz، و yz تعریف شده‌اند، و $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ یک تابع برداری پیوسته بر S باشد. نشان دهید هرگاه S قائم یکهٔ پیوسته‌ای چون $\mathbf{n}$ داشته‌باشد که با هر سه محورهای‌مثبت‌مختصات

زاویهٔ حاده بسازد ، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{yz}} F_1\,dy\,dz + \iint_{R_{xz}} F_2\,dx\,dz + \iint_{R_{xy}} F_3\,dx\,dy. \qquad \text{(یک)}$$

۳۳ . انتگرال $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ را به‌کمک فرمول (یک) درصورتی حساب‌کنید که $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ = S بخشی از صفحهٔ

$$x + y + z = a \quad (a > 0)$$

است که در یکهشت اول قرار دارد ، و $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی به S می‌باشد . سپس جواب را با استفاده از فرمول (۱۲) امتحان نمایید .

۴.۱۵ قضیهٔ گرین ؛ تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه

قضیهٔ زیر ، که به ریاضیدان خودآموز انگلیسی ، جرج گرین[1] (۱۷۹۳–۱۸۴۱) منسوب‌است، رابطهٔ عمیق بین انتگرال خط در امتداد مرز یک ناحیهٔ مسطح و انتگرال مضاعف مربوطه روی خود ناحیه را آشکار می‌سازد .

قضیهٔ ۴ (قضیهٔ گرین) . *فرض‌کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است ، و توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند . در این صورت ،*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA, \qquad (1)$$

که در آن C خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

برهان ناقص . برهان کامل قضیهٔ گرین در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود ؛ و لذا ، قضیه فقط برای حالت خاصی که در آن R ناحیهٔ سادهٔ محدود به منحنی قطعه قطعه هموار C ثابت می‌شود (با اینحال ، ر.ک. مسئلهٔ ۱۸) . چون ناحیهٔ R ساده است ، به‌طور قائم و افقی ساده است ؛ درنتیجه ، بخصوص

$$R = \{(x, y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

که در آن ، همانطور که فرض شد ، g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه همواری دارند . این امر در

---

1. George Green

شکل ۲۱ (آ) نموده شده‌است ، که در آن C منحنی بستهٔ $KLMNK$ است؛ یعنی ، منحنی از قوسهای KL ، LM ، MN ، و NK با همین ترتیب تشکیل شده است ، و ما این امکان را می‌دهیم که یکی یا هر دو پاره‌خط LM و NK به یک نقطه تحویل می‌شوند . بنابر قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۱۳۲۹، به کار رفته در مورد $-\partial P/\partial y$ ،

$$\iint_R -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA = -\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx = \int_{KL} P\,dx + \int_{MN} P\,dx$$

(ر.ک. فرمول (۱۱) ، صفحهٔ ۱۴۳۵) . اما

$$\int_{LM} P\,dx = \int_{NK} P\,dx = 0,$$

زیرا بر LM و NK داریم $dx = 0$ ؛ و لذا ،

$$\int_C P\,dx = \int_{KL} P\,dx + \int_{LM} P\,dx + \int_{MN} P\,dx + \int_{NK} P\,dx$$
$$= \int_{KL} P\,dx + \int_{MN} P\,dx,$$

درنتیجه ،

$$\int_C P\,dx = \iint_R -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA. \qquad (۲)$$

به همین نحو ، با نمایش R به شکل

$$R = \{(x, y): c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

که در آن توابع h_1 و h_2 نمودارهای قطعه قطعه هموار بر $[c, d]$ اند ، معلوم می‌شود که

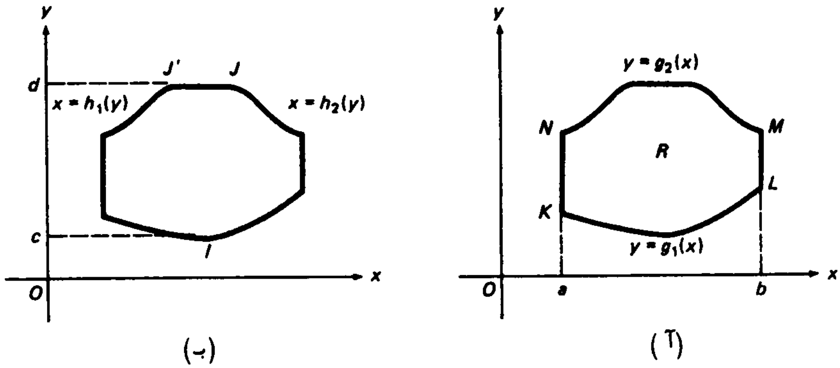
$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy$$

$$= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{J'I'} Q\,dy$$

(ر.ک. شکل ۲۱ (ب) ،که در آن R همان ناحیهٔ شکل ۲۱ (آ) است منتها با حواشی مختلف) .

اما

$$\int_{JJ'} Q\,dy = 0,$$



شکل ۲۱

زیرا بر JJ' ، $dy = 0$ ؛ و درنتیجه ،

$$\int_C Q\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{JJ'} Q\,dy + \int_{J'I} Q\,dy = \int_{IJ} Q\,dy + \int_{J'I} Q\,dy,$$

درنتیجه ،

$$\int_C Q\,dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA. \qquad (۲')$$

با افزودن (۲) به (۲')، بالاخره فرمول مطلوب (۱) به دست می‌آید .

نتیجهٔ ۱ . فرض کنیم R و C همانند در قضیهٔ گرین باشند . در این صورت ، مساحت R از هر یک از فرمولهای زیر به دست می‌آید :

$$A = -\int_C y\,dx, \qquad A = \int_C x\,dy, \qquad A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy, \qquad (۳)$$

که در آن C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

برهان . انتخاب $P = -y, Q = 0$ فرمول (۱) را به $\int_C -y\,dx = \iint_R dA$ تبدیل می‌کند، ولی انتخاب $P = 0,\ Q = x$ آن را به $\int_C x\,dy = \iint_R dA$ بدل می‌سازد . اما $\iint_R dA = A$ ، که دو فرمول اول (۳) را ثابت خواهد کرد . برای به دست آوردن فرمول سوم ، دو فرمول اول را به‌هم افزوده و حاصل را نسبت به A حل کنید ، یا در (۱) $P = -\frac{1}{2}y,\ Q = \frac{1}{2}x$ را اختیار نمایید .

نتیجهٔ ۲ . فرض کنیم مؤلفه‌های $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان برداری به طور پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ در هر نقطه از قلمرو همبند سادهٔ D در شرط $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق کنند . دراین صورت ، $\mathbf{F}$ بر D مستقل از مسیر است ، یا معادلاً " $\mathbf{F}$ یک میدان گرادیان بر D می‌باشد .

برهان . فرض‌کنیم C یک مسیر بستهٔ ساده در D بوده ، و در هر نقطهٔ D ، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ چون D همبند ساده است ، درون C نیز مشمول D است (صفحهٔ ۱۴۴۴ را به یاد آورید) . لذا ، بر ناحیهٔ R مرکب از C و درون آن ، $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. اما ، طبق قضیهٔ گرین ،

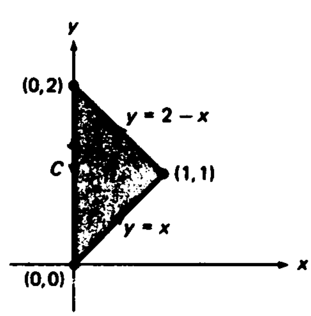
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_R 0\,dA = 0.$$

بنابراین ، به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ C مشمول D ، $\int_C P\,dx + Q\,dy = 0$. پس‌از تبصرهٔ صفحهٔ ۱۴۴۹ معلوم می‌شود که انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D از مسیر مستقل است ، یا معادلاً " $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان می‌باشد (قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۱۴۴۴، را به یاد آورید) .

مثال ۱ . با استفاده از قضیهٔ گرین ، انتگرال خط

$$\int_C (x^2 + y^2)\,dx + (x + 2y)^2\,dy$$

را درصورتی حساب کنید که C مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است (ر.ک. شکل ۲۲) .



شکل ۲۲

حل . بنابر فرمول (۱) به ازای $P = x^2 + y^2$ ، $Q = (x + 2y)^2$ ، و ناحیهٔ سایه‌دار R شکل ،

$$\int_C (x^2+y^2)\,dx+(x+2y)^2\,dy=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)^2-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right]dA$$

$$=\iint_R[2(x+2y)-2y]\,dA=2\iint_R(x+y)\,dA=2\int_0^1 dx\int_x^{2-x}(x+y)\,dy$$

$$=2\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=x}^{2-x}dx=2\int_0^1\left[x(2-x)+\frac{1}{2}(2-x)^2-x^2-\frac{1}{2}x^2\right]dx$$

$$=4\int_0^1(1-x^2)\,dx=4\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{8}{3}.$$

جواب را بامحاسبهٔ مستقیم انتگرال خط امتحان کنید ،که خواهید دید محاسبات مشکلتری دارد .

مثال ۲ . با استفاده از نتیجهٔ ۱ ، مساحت A محصور به یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b را پیدا نمایید .

حل . با فرض اینکه بیضی نمایش پارامتری $x=a\cos t,\ y=b\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ دارد خللی به کلیت وارد نمی‌شود . لذا ، طبق فرمول سوم (۳) ،

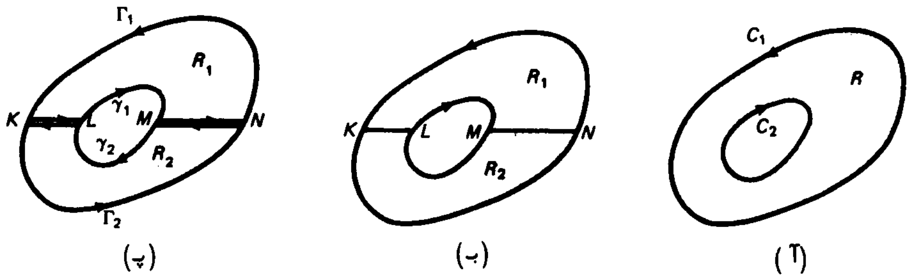
$$A=\frac{1}{2}\int_C -y\,dx+x\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(-b\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(b\cos t)]\,dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab,$$

و این را قبلا" در مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۲۴، دیدیم .

حالت منحنیهای دو مرزی . صورتی از قضیهٔ گرین وجود دارد که در آن ناحیهٔ R بین دو منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C_1 و C_2 واقع است . فرض کنیم C_2 ، مثل شکل ۳۳ (آ) ، داخل C_1 واقع بوده ، و جهت مثبت پیمودن منحنی C_1 یا C_2 چنان است که R همـواره سمت **چپ** ناظری قرار می‌گیرد که منحنی‌را می‌پیماید .لذا ، جهت مثبت منحنی خارجی C_1 خلاف جهت عقربه‌های ساعت است ، ولی جهت مثبت منحنی داخلی C_2 **در جهت عقربـه‌هـای ساعت** می‌باشد؛ این امر با سر سهم روی منحنیها نموده شده است . دو پاره‌خط بـه نـام " میان بر " رسم می‌کنیم که C_1 و C_2 را به هم وصل می‌کنند . در این صورت ، ناحیهٔ R بین C_1 و C_2 به دو زیر ناحیهٔ R_1 و R_2 مثل شکل ۲۳ (ب) تقسیم می‌شود که هر یک فقط یک منحنی

بستهٔ ساده به عنوان مرز دارد. به‌طور مشخص، با رجوع به شکل ۲۳ (پ)، می‌بینیم‌که مرز R_1 کنتوری است که از قوس Γ_1، پاره‌خط KL، قوس γ_1، و پاره‌خط MN تشکیل شده است که به همین ترتیب و با جهات نموده شده پیموده می‌شود، ولی مرز R_2 کنتوری است که‌از قوس Γ_2، پاره‌خط NM، قوس γ_2، و پاره‌خط LK تشکیل شده است.



شکل ۲۳

حال فرض کنیم توابع $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ بر R، و درنتیجه بر زیرناحیه‌های R_1 و R_2، مشتقپذیر باشند. با اعمال قضیهٔ گرین بر R_1 و R_2، معلوم می‌شود که

$$\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint\limits_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA+\iint\limits_{R_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$
$$=\left(\int_{\Gamma_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{KL}\cdots+\int_{\gamma_1}\cdots+\int_{MN}\cdots\right)$$
$$+\left(\int_{\Gamma_2}P\,dx+Q\,dy+\int_{NM}\cdots+\int_{\gamma_2}\cdots+\int_{LK}\cdots\right),$$

که در آن هر مورد نقاط... یعنی عبارت $P\,dx + Q\,dy$. اما، همانند فرمول $(13')$، صفحه ۱۴۳۶، $\int_{LK}\cdots = -\int_{KL}\cdots$ و $\int_{MN}\cdots = -\int_{NM}\cdots$. لذا، انتگرالها در امتداد میان‌برها همدیگر را حذف می‌کنند، و آنچه می‌ماند عبارت است از

$$\iint\limits_{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\left(\int_{\Gamma_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{\Gamma_2}\cdots\right)$$
$$+\left(\int_{\gamma_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{\gamma_2}\cdots\right)$$
$$=\int_{C_1}P\,dx+Q\,dy+\int_{C_2}P\,dx+Q\,dy$$

(فرمول (۱۵) ، صفحه‌ء ۱۴۳۹، را به یاد آورید) . لذا ، قضیه‌ء گرین برای ناحیه‌ء R بین منحنیهای C_1 و C_2 برقرار است ، مشروط براینکه انتگرال $\int_C P\,dx + Q\,dy$ در فرمول (۱) به صورت مجموع انتگرالهای خط $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy$ و $\int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$ تعبیرشود البته با این فرض که هر یک از منحنیهای C_1 و C_2 در جهت مثبت مناسبی پیموده شود .

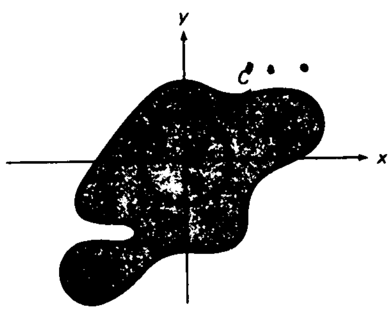
مثال ۳ . فرض کنید C منحنی بسته‌ء ساده‌ء قطعه قطعه هموار باشد که مبداء را احاطه‌کرده و یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است . نشان دهید که

$$\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi. \qquad (۴)$$

حل . توابع $P = -y/(x^2+y^2)$ و $Q = x/(x^2+y^2)$ همه جا جز در مبداء تعریف شده و به طور پیوسته مشتقپذیر باشند ؛ و اگر $(x, y) \neq (0\ 0)$ ،

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

فرض کنید γ دایره‌ای به مرکز مبداء بوده و یکبار در جهت ***عقربه‌های ساعت*** پیموده شده و آنقدر کوچک باشد که در C جای گیرد (ر.ک. شکل ۲۴) . در این صورت ، P و Q به



شکل ۲۴

طور پیوسته مشتقپذیر و بر ناحیه‌ء R بین C و γ در $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صدق می‌کند . بنابر این ، طبق قضیه‌ء گرین برای دو منحنی مرزی ،

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0,$$

اما ، در این صورت ،

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = -\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy,$$

که در آن γـ*خلاف جهت عقربه‌های ساعت* پیموده می‌شود. این فرمول (۴) را ثابت می‌کند، زیرا طبق مثال ۳، صفحهٔ ۱۴۵۰، $\int_{-\gamma} P\,dx + Q\,dy = 2\pi$. به عنوان تمرین، از نتیجهٔ ۲ استفاده کرده نشان دهید که اگر مبداء خارج C باشد، طرف راست (۴) به‌جای 2π مساوی 0 می‌شود.

تبدیلات مختصات و ژاکوبیها. حال، با استفاده از قضیهٔ گرین، فرمولی برای تغییر متغیر انتگرال مضاعف ثابت می‌کنیم. نمونهٔ مهمی از این‌گونه فرمولها قبلاً" در قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۱۳۹۲، آمده است، که در آن نشان دادیم هرگاه $f(x, y)$ بر ناحیهٔ R پیوسته بوده، و R نقش ناحیهٔ R' در صفحهٔ $r\theta$ تحت تبدیل

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

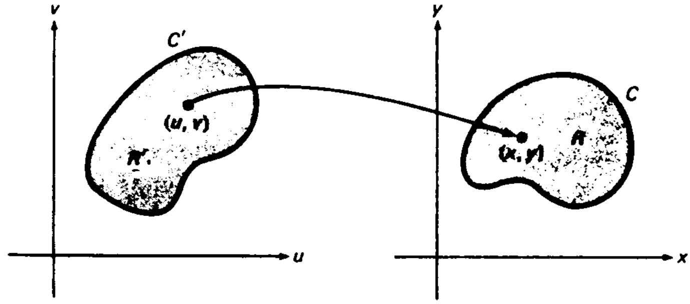
از مختصات قطبی r و θ به مختصات قائم x و y باشد، آنگاه

$$\iint\limits_{R} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{۵}$$

حال فرمولی مشابه (۵) برای تبدیل مختصات کلی به شکل

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \tag{۶}$$

از مختصات u و v به‌مختصات قائم x و y جستجو می‌کنیم. فرض کنیم تبدیل (۶) بر ناحیهٔ R' در صفحهٔ uv تعریف شده باشد که عبارت است از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه‌هموار C' و درون آن، و نقش R' تحت این تبدیل ناحیهٔ R در صفحهٔ xy باشد که از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار دیگر C و درونش، مثل شکل ۲۵، تشکیل شده است. به علاوه، فرض کنیم وقتی (u, v) منحنی C' را یکبار در جهت مثبت طی کند، نقش (x, y) نقطهٔ (u, v) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی طی خواهد کرد. همچنین، چند فرض دیگر در



شکل ۲۵

باب تبدیل (۶) می‌کنیم :

(یک) توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ پیوسته بوده و بر R' مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته‌دارند؛

(دو) دترمینان

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

که ژاکوبی تبدیل (۶) نام داشته و به‌طور فشرده با $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ نموده می‌شود ، بر R' ناصفر است ؛

(سه) تبدیل (۶) یک به یک است ؛ یعنی ، نه فقط نظیر به هر نقطه از R' نقطهٔ منحصر به فردی مانند (x, y) در R وجود دارد ، بلکه نظیر هر نقطهٔ (x, y) در R نقطهٔ منحصر به فرد (u, v) در R' نیز موجود است ، و تبدیل از R به R' با

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y) \tag{۶'}$$

نموده خواهد شد .

تحت این شرایط می‌توان نشان داد که توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ بر R پیوسته بوده ، و مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته دارند ، و نیز ژاکوبی

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

تبدیل معکوس (۶') بر R ناصفر بوده و در فرمول

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \text{ ،} \tag{۷}$$

صدق خواهد کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۲۶) . بخصوص ، رابطهٔ (۷) ایجاب می‌کند که‌ژاکوبیهای $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ بر نواحی مربوطهٔ R و R' هم‌علامت می‌باشند .

تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف . حال ، با تمام فرضهای فوق در باب تبدیلات (۶) و (۶') ، نواحی R و R' ، و منحنیهای C و C' ، قضیه‌ای بیان می‌کنیم که فرمول (۵) را تعمیم خواهد داد . برهان قضیه سرراست ولی کاربردی نسبتاً " تکنیکی از قضیهٔ گرین است ، و لذا ، به آخر بخش موکول شده است .

قضیهٔ ۵ (تغییر متغیر در انتگرالهای مضاعف) . هرگاه $f(x, y)$ بر R پیوسته باشد ، آنگاه

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv. \tag{۸}$$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته نشان داده شده که قضیهٔ ۵ تحت شرایط ضعیفتر نیز برقرار است؛ بخصوص، اگر تبدیل (۶) بر مرز ناحیهٔ R' یک به یک نباشد .

مثال ۴ . نشان دهید که فرمول (۵) حالت خاصی از فرمول (۸) است .

حل . فرض کنیم متغیرهای u و v مختصات قطبی r و θ باشند . در این صورت ،تبدیل (۶) عبارت است از

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

که در آن $r \geq 0$ (ر.ک. صفحهٔ ۱۳۹۱) ، و ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

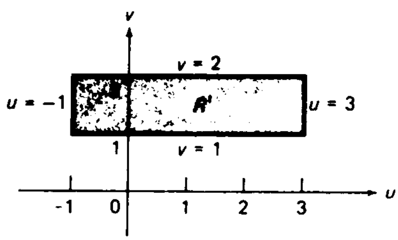
لذا ، به ازای این انتخاب u و v ، فرمول (۸) به (۵) تحویل خواهد شد .

مثال ۵ . انتگرال مضاعف $\iint_R xy\, dx\, dy$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ شکل ۲۶ (آ) است که مرزش C متوازی‌الاضلاع به اضلاعی در امتداد خطوط $x + 3y = -1$ ، $x + 3y = 3$ ، $x - y = 1$ ، و $x - y = 2$ باشد .

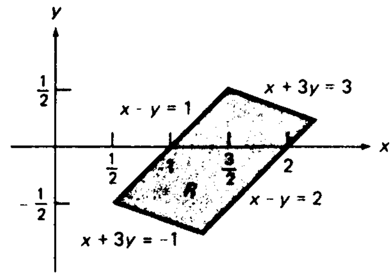
حل . عبارات $x + 3y$ و $x - y$ در معادلات خطوطی می‌آیند که R را محدود کرده‌اند ، و این عبارات متغیرهای جدید

$$u = x + 3y, \qquad v = x - y \tag{۹}$$

را می‌نمایند ، زیرا در این صورت معادلات خطوط به $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ ، و $v = 2$ ساده می‌شوند . لذا ، نقش R تحت تبدیل (۹) ناحیهٔ R' در صفحهٔ uv است که مرزش C' مستطیلی است که اضلاعش در امتداد خطوط $u = -1$ ، $u = 3$ ، $v = 1$ ، و $v = 2$ می‌باشد ، مانند شکل ۲۶ (ب) . با حل دستگاه معادلات (۹) نسبت به x و y و برحسب u و v ، به



(ب)



(آ)

شکل ۲۶

دست می‌آوریم

$$x = \frac{1}{4}(u + 3v), \qquad y = \frac{1}{4}(u - v), \tag{۹}$$

درنتیجه،

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}. \tag{۱۰}$$

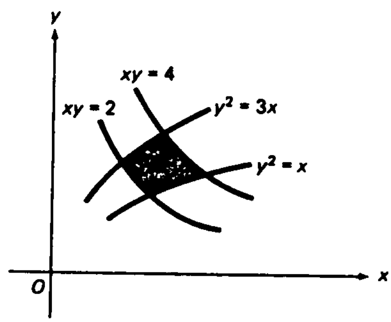
بنابراین، طبق فرمول (۸)،

$$\begin{aligned} \iint_R xy\,dx\,dy &= \iint_{R'} \frac{1}{16}(u + 3v)(u - v)\left|-\frac{1}{4}\right| du\,dv \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} du \int_{1}^{2} (u^2 + 2uv - 3v^2)\,dv \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} \Big[u^2v + uv^2 - v^3\Big]_{v=1}^{2} du \\ &= \frac{1}{64}\int_{-1}^{3} (u^2 + 3u - 7)\,du = \frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 - 7u\right]_{-1}^{3} = -\frac{5}{48}. \end{aligned}$$

با بررسی متناظر بین رئوس C و C'، به‌آسانی معلوم می‌شود که اگر کنتور C یا C' در جهتی (عقربه‌های ساعت یا خلاف آن) پیموده شود، دیگری جهت مخالف آن‌را خواهد داشت. انتظار این امر می‌رفت، زیرا ژاکوبی (۱۰) منفی است. توجه کنید که (۱۰) را می‌توان ابتدا با محاسبهٔ $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ و سپس اعمال فرمول (۷) به‌دست آورد. به‌عنوان

تمرین ، انتگرال $\iint_R xy\,dx\,dy$ را مستقیما" حساب کرده ، و ببینید که استفاده از روش فعلی چقدر آسان است .

مثال ۶. انتگرال مضاعف $\iint_R (x^2/y^4)\,dx\,dy$ را درصورتی حساب کنید که R ناحیهٔ محدود به هذلولیهای $xy = 2$ ، $xy = 4$ ، و سهمیهای $y^2 = x,\ y^2 = 3x$ باشد (ر.ک. شکل ۲۷) .



شکل ۲۷

حل . با نوشتن

$$xy = u, \qquad y^2 = vx,$$

یا معادلا"

$$u = xy, \qquad v = \frac{y^2}{x},$$

می‌بینیم که منحنیهایی که مرز R را تشکیل می‌دهند نظیر به مقادیر $u = 2$ ، $u = 4$ ، $v = 1$ ، و $v = 3$ اند . همچنین ،

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\[1ex] -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x},$$

و در این صورت (۷) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{x}{3y^2} = \frac{1}{3v}.$$

و با انتخاب $f(x, y) = x^2/y^4 = 1/v^2$ در فرمول (۸) و توجه به اینکه R' ناحیهٔ مربعی $\{(u, v): 2 \le u \le 4, 1 \le v \le 3\}$ در صفحهٔ uv است، معلوم می‌شود که

$$\iint_R \frac{x^2}{y^4}\, dx\, dy = \iint_{R'} \frac{du\, dv}{3v^3} = \frac{1}{3}\left(\int_2^4 du\right)\left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3}\right) = \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2v^2}\right]_1^3 = \frac{8}{27}.$$

تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه. نکات فوق را می‌توان به ابعاد سه تعمیم داد. فرض کنیم

$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{۱۱}$$

یک نگاشت سه‌بعدی از ناحیهٔ توپر T' در فضای uvw به روی ناحیهٔ توپر T در فضای xyz باشد، و فرض کنیم (۱۱) در شرایطی مشابه آنهایی که بر تبدیل دوبعدی (۶) اعمال شدند صدق نماید. بخصوص، فرض کنیم دترمینان 3×3

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

که **ژاکوبی** تبدیل (۱۱) نام داشته و به‌طور فشرده با $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ نموده می‌شود، بر T' ناصفر باشد. در این صورت، مشابه قضیهٔ ۵ را داریم، که آن را بدون برهان ذکر می‌کنیم:

قضیهٔ ۶ (تغییر متغیر در انتگرالهای سه‌گانه). هرگاه $f(x, y, z)$ بر T پیوسته باشد، آنگاه

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{T'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\, dv\, dw. \tag{۱۲}$$

مثال ۷. حجم V متوازی‌السطوح T محدود به شش صفحهٔ $x + y + 2z = \pm 3$، $x - 2y + z = \pm 2$، و $4x + y + z = \pm 6$ را پیدا کنید.

حل . با معرفی متغیرهای جدید

$$u = x + y + 2z, \qquad v = x - 2y + z, \qquad w = 4x + y + z,$$

که در آنها $-3 \le u \le 3$ ، $-2 \le v \le 2$ ، و $-6 \le w \le 6$ ، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -3 + 3 + 2(9) = 18.$$

اما ، بنابر مشابه فرمول (۷) ،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 1,$$

و درنتیجه ،

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{18}.$$

لذا ، طبق فرمول (۱۲) به ازای $f(x, y, z) \equiv 1$ ،

$$V = \iiint_T dx\,dy\,dz = \frac{1}{18}\left(\int_{-3}^{3} du\right)\left(\int_{-2}^{2} dv\right)\left(\int_{-6}^{6} dw\right)$$
$$= \frac{1}{18}(6)(4)(12) = 16.$$

برهان قضیهٔ ۵ *(اختیاری)*. فرض کنیم

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt,$$

که در آن x_0 ثابت است؛ درنتیجه ، $\partial F(x, y)/\partial x = f(x, y)$. بنابر قضیهٔ گرین در صفحهٔ xy به ازای $P = 0$ و $Q = F$ ،

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C F(x, y)\,dy, \tag{۱۳}$$

که در آن C یکبار در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) پیموده‌می‌شود . فرض کنیم

$$u = u(t), \qquad v = v(t) \qquad (a \le t \le b)$$

معادلات پارامتری منحنی C' باشند (مرز ناحیهٔ R') که یکبار درجهت مثبت‌پیموده‌می‌شود. در این صورت، C به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(u(t), v(t)), \qquad y = y(u(t), v(t)) \qquad (a \le t \le b),$$

و وقتی t از a تا b تغییر کند، نقطهٔ (x, y) منحنی C را یکبار در جهت مثبت یا منفی می‌پیماید (در آخر برهان دقیقاً مشخص‌می‌شود). طرف راست (۱۳) را می‌توان‌برحسب تابع مرکب $G(t) = F(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$ به صورت زیر نوشت:

$$\int_C F(x, y)\,dy = \int_a^b G(t)\frac{dy}{dt}\,dt$$

اما، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt},$$

و لذا، برحسب تابع مرکب $H(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$،

$$\begin{aligned}\int_C F(x, y)\,dy &= \int_a^b G(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt \\ &= \int_{C'} H(u, v)\frac{\partial y}{\partial u}\,du + H(u, v)\frac{\partial y}{\partial v}\,dv\end{aligned} \tag{۱۴}$$

مشاهده می‌کنید که طرف راست (۱۴) یک انتگرال در صفحهٔ uv به شکل زیر است:

$$\int_{C'} P\,du + Q\,dv,$$

که در آن

$$P = H\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad Q = H\frac{\partial y}{\partial v}.$$

حال، برای ادامهٔ برهان، انتگرال $\int_{C'} P\,du + Q\,dv$ را با اعمال مجدد قضیهٔ گرین، این بار در صفحهٔ uv، اعمال می‌کنیم. به‌طور مشروح،

$$\begin{aligned}\int_{C'} P\,du + Q\,dv &= \iint_{R'}\left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\,dv \\ &= \iint_{R'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(H\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(H\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]du\,dv \\ &= \iint_{R'}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + H\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - H\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}\right)du\,dv\end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$= \iint_{R'} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, dv,$$

که در آخرین مرحله از فرض پیوستگی مشتقات جزئی دوم $y(u, v)$ استفاده کرده‌ایم . امـا ، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای و تعریف H ،

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{۱۶}$$

لذا ، از تلفیق روابط (۱۳) تا (۱۶) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y)\, dx\, dy &= \pm \iint_{R'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] du\, dv \\ &= \pm \iint_{R'} \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv \\ &= \pm \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv. \end{aligned} \tag{۱۷}$$

در اینجا علامت به‌علاوه درصورتی اختیار می‌شود که C با افزایش t از a تا b در جهـت مثبت پیموده شود ، ولی اگر C در جهت منفی پیموده شود ، باید علامت منفی‌اختیارگردد (چرا ؟) .

بالاخره ، فرض‌کنیم $f(x, y) \equiv 1$. در این صورت ، طرف چپ (۱۷) مساحت R است، که ذاتا " مثبت‌است ،و این به ما می‌گویدکه درصورت‌مثبت‌بودن ژاکوبی $J = \partial(x, y)/\partial(u, v)$ علامت به‌علاوه و ، درصورت منفی بودن J ، علامت منها را اختیار کنیم . به عبارت‌دیگر، اگر ژاکوبی J را با قدر مطلقش $|J| = |\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ عوض کنیم ، می‌توانیم در (۱۷) علامت $\pm$ را حذف نماییم . در این صورت ، فرمول (۱۷) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv,$$

و برهان قضیهٔ ۵ کامل خواهد بود .

مسائل

انتگرال‌خط داده شده رابا استفاده از قضیهٔ گرین حساب کنید .(در هر حالت ،منحنی C در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .)

۱. $\int_C (y^4 - x)dx + (y - x^2)dy$ ، که در آن C مربعی به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است

۲. $\int_C (y + \ln x)dx + (x^3 + e^{-y})dy$ ، که در آن C مثلثی به رئوس $(1, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(2, 1)$ است

۳. $\int_C (3x - 2y)dx + (2x + 3y)dy$ ، که‌درآن C مرز ناحیهٔ بین‌سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ است

۴. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + [xy^2 + y \ln (x + \sqrt{x^2 + y^2})]\, dy$ ، که در آن C مستطیلی به رئوس $(1, 0)$ ، $(4, 0)$ ، $(4, 5)$ ، و $(1, 5)$ است

۵. $\int_C -xy^2\, dx + xy^2\, dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ است

۶. $\int_C (2x + y)dx + 2x\, dy$ ، که در آن C بیضی $4x^2 + 9y^2 = 36$ است

۷. $\int_C e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy$ ، که در آن C بیضی $2x^2 + y^2 = 1$ است

۸. $\int_C \frac{xy^2}{1 + x^2}\, dx + y \ln (1 + x^2)dy$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 + 2y = 0$ است

۹. $\int_C -y \sec^2 x\, dx + \tan x\, dy$ ،که‌درآن C مثلثی به‌رئوس $(0, 0)$ ، $(\pi/4, 0)$ ،و $(\pi/4, \pi/2)$ است

۱۰. $\int_C -xy\, dx + (y^2 + 16)dy$ ، که در آن C از نیمهٔ بالایی بیضی $4x^2 + y^2 = 1$ و پاره خط واصل بین نقاط$(\pm\frac{1}{2}, 0)$تشکیل شده است .

مساحت A ناحیهٔ دادهٔ شدهٔ R را با استفاده از انتگرال خط بیابید .

۱۱. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $xy = 4$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ محصور شده است

۱۲. R ناحیه‌ای در ربع اول است که به هذلولی $8xy = 1$ و سهمیهای $y = x^2$ و $x = y^2$ محصور شده است ، با نقطهٔ $(1, 1)$ بر مرزش

۱۳. R ناحیهٔ محصور به ستاره‌گون

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \sin^3 t \qquad (0 \le t \le 2\pi, a > 0)$$

است (ر.ک. شکل ۴۵، صفحهٔ ۷۴۵)

۱۴. R ناحیهٔ محصور به دلگون

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \qquad y = 2a\sin t - a\sin 2t$$
$$(0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$$

است (ر.ک. شکل ۴۸، صفحهٔ ۷۴۹)

۱۵. فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که از منحنی سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است. نشان دهید که مرکز گون R به مختصات زیر است:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\int_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\int_C y^2\,dx, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن A مساحت R است.

۱۶. مرکز گون ناحیهٔ مسئلهٔ ۱۱ را با استفاده از فرمولهای (یک) بیابید.

۱۷. انتگرال خط $\int_C P\,dx + Q\,dy$ را بر قلمرو همبند چندگانه‌ای چون D طوری مثال بزنید که از مسیر مستقل باشد. (توجه کنید که نتیجهٔ ۲ این امکان را از بین نمی‌برد!)

۱۸. نشان دهید که قضیهٔ گرین برای هر ناحیهٔ بستهٔ کراندار R که بتوان آن را با رسم خطوط موازی مناسبی موازی محورهای مختصات به تعدادی متناهی زیر ناحیهٔ ساده تجزیه کرد برقرار است.

ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ تبدیل داده شده را بیابید.

۱۹. $x = au + bv,\ y = cu + dv$

۲۰. $x = u^2 - v^2,\ y = uv$

۲۱. $x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2),\ y = \arctan(v/u)$

۲۲. $x = u^2v,\ y = uv^2$

۲۳. $x = e^u\cos v,\ y = e^u\sin v$

۲۴. $x = ue^{-v},\ y = ve^u$

۲۵. تحقیق کنید که تبدیل مسئلهٔ ۲۳ و معکوسش در فرمول (۷) صدق می‌کنند.

۲۶. ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{vmatrix},$$

و سپس، فرمول (۷) را با استفاده از این قاعده برای ضرب دترمینانهای 2×2 و به کارگیری مکرر قاعدهٔ زنجیره‌ای ثابت نمایید.

ژاکوبی $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ تبدیل داده شده را بیابید.

۲۷. $x = au,\ y = \alpha u + bv,\ z = \beta u + \gamma v + cw$

۲۸. $x = vw,\ y = uw,\ z = uv$

۲۹. $x = u + v + w,\ y = u^2 + v^2 + w^2,\ z = uv + uw + vw$

۳۰. $x = e^u \cos v \sin w,\ y = e^u \cos v \cos w,\ z = e^u \sin v$

انتگرال مضاعف داده شده را با استفاده از قضیهٔ ۵ و تغییر متغیر مناسبی حساب کنید .

۳۱. $\iint\limits_R x^2\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به خطوط $2x + y = 1$ ، $2x + y = 3$ ، $x - 2y = -1$ ، و $x - 2y = 2$ است

۳۲. $\iint\limits_R \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx\,dy$ ، که‌درآن R ناحیهٔ محدود به‌خطوط $y = 0$ ، $y = 3x$ ، $x + y = 1$ ، و $x + y = 2$ است .

۳۳. $\iint\limits_R \frac{1}{y}\,dx\,dy$ ، که درآن R ناحیهٔ محدود به منحنیهای $y^3 = x^2,\ y^3 = 4x^2$ و خطوط $y = x,\ y = 2x$ است .

۳۴. $\iint\limits_R x^2y^2\,dx\,dy$ ، که در R ناحیهٔ محدود به هذلولیهای $xy = 2,\ xy = 3$ و خطوط $y = x,\ y = 5x$ است .

۳۵. $\iint\limits_R \frac{x^2 \sin xy}{y}\,dx\,dy$ ، که در آن R ناحیهٔ محدود به سهمیهای $x^2 = \pi y/2$ ، $x^2 = \pi y$ ، $y^2 = x/2$ ، و $y^2 = x$ است .

۳۶. $\iint\limits_R \cos\frac{x - y}{x + y}\,dx\,dy$ ، که درآن R ناحیهٔ محدود به محور x ، خط $y = x$ ، و خط $x + y = \pi/2$ است .

۳۷. انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint\limits_T yz\,dx\,dy\,dz$ را درصورتی حساب کنید که T ناحیهٔ محدود به شش صفحهٔ $x + y + z = \pm 2$ ، $x - y + z = \pm 3$ ، و $x + y - z = \pm 1$ باشد .

۳۸. نشان دهید که قضیهٔ ۹ ، صفحهٔ ۱۴۰۶، راجع به انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه‌ای ، حالت خاصی از قضیهٔ ۶ راجع به تغییر مختصات درانتگرالهای سه‌گانه است .

۳۹. نشان دهید که قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۱۴۱۶، راجع به انتگرالهای سه‌گانه در مختصات

کروی نیز حالت خاصی از قضیهٔ ۶ می‌باشد.

۴۰. ابتدا، با تبدیل $x = au,\ y = bv$، مساحت محصور به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را تعیین کنید. سپس حجم محصور به بیضی‌گون $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ را با تبدیلی مشابه معین نمایید.

۵.۱۵ قضیهٔ دیورژانس

مطلب را با نوشتن قضیهٔ گرین

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \tag{1}$$

به شکل برداری آغاز می‌کنیم. دراینجا C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار است که یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، و $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ توابعی هستند که بر ناحیهٔ مسطح کراندار R مرکب از منحنی C و درونش به طور پیوسته مشتقپذیرند. با معرفی میدان برداری دوبعدی $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$، می‌بینیم که طرف‌چپ(۱) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ است (فرمول (۹)، صفحهٔ ۱۴۳۴، را به یاد آورید). لذا، اگر به جای $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ بنویسیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$، فرمول (۱) به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA,$$

یا معادلا"

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \tag{2}$$

در می‌آید. راه دیگر نوشتن (۲) عبارت است از

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathbf{T}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA, \tag{2}$$

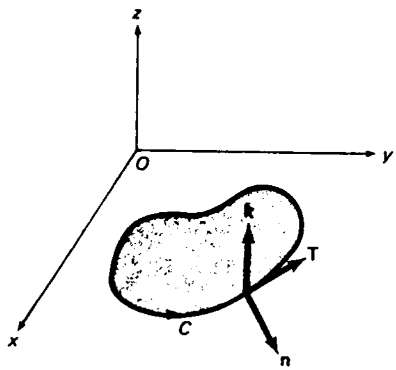
که در آن $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس به C می‌باشد (بحث بعداز فرمول (۱۲)، صفحهٔ ۱۴۳۵، را به یاد بیاورید.)

اگر $\mathbf{F}$ را نیرو تعبیر کنیم، فرمول (۲) به ما می‌گوید که کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بر ذره‌ای که C را می‌پیماید مساوی انتگرال مضاعف سمت راست (۲) است. مثلا"، از مثال۱، صفحهٔ۱۴۸۳، معلوم می‌شود که کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + 2y)^2\mathbf{j}$ بر ذره‌ای که مثلث به رئوس $(0, 0)$، $(1, 1)$، و $(0, 2)$ را در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

می‌پیماید مساوی $\frac{8}{3}$ است. توجه‌کنید هرگاه $\mathbf{F}$ یک میدان بقا باشد، آنگاه $\partial F_2/\partial x = \partial F_1/\partial y$ و نیرو وقتی ذره C را می‌پیماید "کاری صورت نمی‌دهد".

حال شکل برداری جالب دیگری از قضیهٔ گرین را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ *خارجی* به منحنی C باشد. در این صورت، از شکل ۲۸ واضح است که $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$. چون $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$



شکل ۲۸

انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ را، که با طرف چپ (۲') در این فرق دارد که به جای $\mathbf{T}$ در آن $\mathbf{n}$ آمده است، می‌توان به صورت انتگرال مضاعفی روی ناحیهٔ R محدود به C بیان کرد. در واقع،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \int_C -F_2\, dx + F_1\, dy,$$

و درنتیجه، بنابر قضیهٔ گرین (۱) به‌ازای $P = -F_2$ و $Q = F_1$، فوراً معلوم می‌شودکه

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA. \qquad (۳)$$

طرف چپ (۳) مشابه انتگرال شار $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ است، که در آن S یک سطح و $\mathbf{F}$ یک میدان برداری سه‌بعدی می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۱۴۷۳). از اینروست که $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$ را *شار* $\mathbf{F}$ *در امتداد* C می‌نامند. برای تعبیر فیزیکی $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$، فرض کنیم صفحهٔ xy با لایهٔ نازکی از یک مایع با ضخامتی نامحسوس پوشانده شده باشد که با سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ در

حال حرکت است . در این صورت ، شار $\mathbf{F}$ در امتداد C مساحت خالص مایعی است که در امتداد C بر واحد زمان از داخل به خارج C جریان دارد . این را می‌توان با تعدیلهای مختصری در استدلال صفحات ۱۴۷۳تا۱۴۷۴، که به تعبیر فیزیکی شار $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ درامتداد سطح S با شارشی فضایی به سرعت $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ منجر شد ، دید . بخصوص، سطح S و استوانهٔ مایل شکل ۱۸ با منحنی C و متوازی‌الاضلاعی که یک ضلعش قوسی از C بوده و یک ساقش در امتداد $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$ است تعویض می‌شوند .

مثال ۱ . شار میدان $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x + 2y)^2\mathbf{j}$ را در امتداد مثلث C به رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 2)$ شکل ۲۲ ، صفحهٔ ۱۴۸۳، پیدا نمایید .

حل . بنابر فرمول (۳) به ازای $F_1 = x^2 + y^2$ و $F_2 = (x + 2y)^2$ ، داریم

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y)^2\right]dy\\ &= \int_0^1 dx \int_x^{2-x}(6x + 8y)\,dy = 2\int_0^1 \Big[3xy + 2y^2\Big]_{y=x}^{2-x} dx\\ &= 2\int_0^1 (8 - 2x - 6x^2)\,dx = 2\Big[8x - x^2 - 2x^3\Big]_0^1 = 10.\end{aligned}$$

دیورژانس یک میدان برداری . در فرمول (۳) انتگرالده مضاعف روی R *دیورژانس* دوبعدی میدان $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ نام دارد و به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

فرمول (۳) را می‌توان برحسب این کمیت به شکل زیر نوشت :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA, \qquad (۴)$$

که **قضیهٔ دیورژانس دوبعدی** نام دارد . بنابر (۴) ، شار میدان $\mathbf{F}$ در امتدادمنحنی بستهٔ سادهٔ C مساوی انتگرال دیورژانس آن روی ناحیهٔ R محدود به C می‌باشد .

به‌طورکلی ، دیورژانس میدان برداری سه‌بعدی $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \qquad (۵)$$

توجه کنید که عمل دیورژانس‌گیری ، میدان برداری $\mathbf{F}$ را به یک میدان اسکالرتبدیل‌می‌کند. این با عمل گرادیان‌گیری

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

که میدان اسکالر f را به یک میدان برداری تبدیل می‌کند تقابل دارد . همچنین ، توجه کنید که اگر حاصل‌ضرب نقطه‌ای صوری عملگر دل

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

را در $\mathbf{F}$ تشکیل دهیم، $\operatorname{div}\mathbf{F}$ به دست می‌آید ، چرا که

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

مثال ۲ . $\operatorname{div}(f\mathbf{F})$را درصورتی حساب کنید که f یک تابع اسکالر مشتقپذیر بوده و $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری مشتقپذیر باشد .

حل . بنابر تعریف (۵) و قاعدهٔ حاصل‌ضرب برای مشتقگیری ، داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + f\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}F_3 + f\frac{\partial F_3}{\partial z}\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + \frac{\partial f}{\partial z}F_3\right) + f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\\ &= (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{F} + f\operatorname{div}\mathbf{F},\end{aligned}$$

یا ، به‌طور فشرده‌تر ،

$$\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = \nabla f\cdot\mathbf{F} + f\nabla\cdot\mathbf{F}.$$

حال نشان می‌دهیم که (۴) صورت دوبعدی قضیهٔ همگرایی سه‌بعدی کلیترمی‌باشد .

قضیهٔ ۷ (قضیهٔ دیورژانس) . *فرض کنیم T ناحیهٔ توپر متشکل از سطح بستهٔ قطعه‌قطعه هموار S و درونش بوده ، $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ خارجی به S باشد ، و* $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ *یک*

میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد . در این صورت ،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV, \qquad (۶)$$

یعنی ، شار $\mathbf{F}$ در امتداد S مساوی انتگرال $div\,\mathbf{F}$ روی ناحیهٔ T است که به S محدود شده است[۱].

برهان ناقص . قضیه را فقط درحالتی ثابت می‌کنیم که T، x-ساده ، y-ساده ، و z-ساده ، به صورت تعریف‌شده در صفحهٔ ۱۳۴۰، باشد ؛ برهان کامل در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته آمده است . با نوشتن فرمول (۶) به صورت زیر :

$$\iint_S (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dV, \qquad (۶')$$

معلوم می‌شود که قضیه درصورتی ثابت است که نشان دهیم

$$\iint_S (F_1\mathbf{i})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dV, \qquad (۷)$$

$$\iint_S (F_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dV, \qquad (۸)$$

$$\iint_S (F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dV, \qquad (۹)$$

زیرا (۶') مجموع فرمولهای (۷) تا (۹) می‌باشد . هر سه فرمول به یک نحو ثابت می‌شوند ؛ و لذا ، کافی است فقط یکی از آنها ، مثلاً (۹) ، را ثابت کنیم .

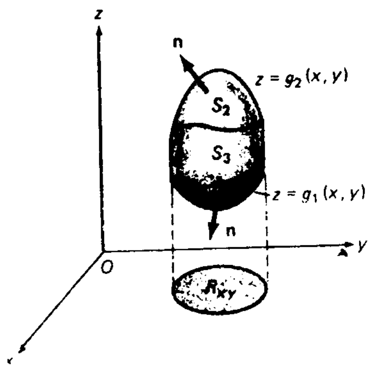
برای این کار ، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که چون ناحیهٔ T ، z-ساده ، و S قطعه قطعه هموار است ، T مجموعه‌ای است به شکل

$$\{(x, y, z): (x, y)\in R_{xy},\ g_1(x, y)\le z\le g_2(x, y)\},$$

که در آن R_{xy} تصویر T روی صفحهٔ xy بوده ، و توابع g_1 و g_2 نمودارهای قطعه قطعه هموار دارند . لذا ، T به شکل ۲۹ است که از سطح پایینی S_1 ، سطح بالایی S_2 ، و سطح‌جانبی S_3

---

۱ . همچنین ، به افتخار کارل فردریش گاوس Carl Friedrich Gauss (1777–1855) که بزرگترین ریاضیدان عالم است ، قضیهٔ گاوس نامیده می‌شود .



شکل ۲۹

تشکیل شده است که از پاره‌خط‌هایی موازی محور z تولید می‌شود. در بعضی حالات، مثلاً کره، ممکن است S_3 غایب باشد، ولی S_3 سهمی در $\iint_S (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ ندارد، زیرا بردار $\mathbf{n}$ بر S_3 موازی صفحهٔ xy است؛ و درنتیجه، $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. لذا، برای اثبات (۹)، کافی است نشان دهیم که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV. \qquad (۹')$$

رابطهٔ (۹') با استفاده از نتایج قبل به آسانی ثابت می‌شود. اولاً، از قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۱۳۴۵، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dV &= \iint_{R_{xy}} dA \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z}\, dz \\ &= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))]\, dA.\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

ثانیاً، بنابرفرمول (۱۲)، صفحهٔ ۱۴۷۵، به ازای $S = S_2$، $\mathbf{F} = F_3\mathbf{k}$، $F_1 = 0$، $F_2 = 0$ و $dx\, dy = dA$،

$$\iint_{S_2} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_2(x, y))\, dA. \qquad (۱۱)$$

برای به دست آوردن فرمول نظیر برای S_1، باید $\mathbf{n}$ را با $\mathbf{n}-$ عوض کنیم، زیرا قائم یکهٔ خارجی

بر S_1 رو به پایین است درحالی که بر S_2 رو به بالا می‌باشد . از این نتیجه می‌شود که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y))\, dA,$$

یا معادلا "

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\iint_{R_{xy}} F_3(x, y, g_1(x, y))\, dA. \tag{۱۱'}$$

با افزودن (۱۱) به (۱۱')، معلوم می‌شود که

$$\iint_{S_1} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{S_2} (F_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$
$$= \iint_{R_{xy}} [F_3(x, y, g_2(x, y)) - F_3(x, y, g_1(x, y))]\, dA,$$

و از مقایسهٔ این فرمول با (۱۰) رابطهٔ (۹')، و درنتیجه (۹)، ثابت می‌شود. همانطور که قبلا " گفتیم ، بقیهٔ برهان عبارت است از اثبات فرمولهای (۷) و (۸) بااستدلالهایی مشابه.

مثال ۳. در مثال ۸، صفحهٔ ۱۴۷۵، شار میدان $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x^2z^2\mathbf{k}$ خارج از سطح مکعبی S محدود به‌صفحات مختصات وصفحات $x = 1$، $y = 1$، و $z = 1$ را بامحاسبهٔ مستقیم پیدا کردیم . این کمیت را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس حساب کنید .

حل. دیورژانس $\mathbf{F}$ مساوی است با

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-yz)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = y^2 - z + 2x^2z,$$

و درنتیجه ، طبق قضیهٔ دیورژانس ،

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_T (y^2 - z + 2x^2z)\, dV,$$

که در آن T مکعب توپر محدود به S است . بنابراین ،

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (y^2 - z + 2x^2z)\,dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left[y^2z - \frac{1}{2}z^2 + x^2z^2\right]_{z=0}^1 dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(y^2 - \frac{1}{2} + x^2\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y + x^2y\right]_{y=0}^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{6} + x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6},$$

که با مثال مذکور هماهنگی دارد. توجه کنید که چگونه قضیهٔ دیورژانس نیاز به امتحان جداگانهٔ رفتار $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ بر هر یک از شش وجه S را از بین می‌بردا

مثال ۴. شار میدان $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ خارج از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a را بیابید.

حل. کره را با S و گوی $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ را با T نشان داده، قضیهٔ دیورژانس را به‌کار می‌بریم. چون

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

پس از تبدیل به مختصات کروی می‌بینیم که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^a (3\rho^2)\rho^2 \sin\phi\,d\rho$$

$$= 6\pi\left(\int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^4\,d\rho\right) = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

مثال ۵. شار میدان $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ خارج از سطح S و صادق در شرایط قضیهٔ ۷ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0,$$

درنتیجه ، اگر T ناحیهٔ محصور به S باشد ، می‌توان فوراً نتیجه گرفت که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_T 0\,dV = 0.$$

یک میدان با دیورژانس صفر ، مانند میدان $\mathbf{F}$ در مثال قبل ، را **سلونوئیدی** می‌نامند .

مثال ۶ . شار میدان $\mathbf{F} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج از سطح S صادق در شرایط قضیهٔ ۷ را بیابید .

حل . این بار

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$$

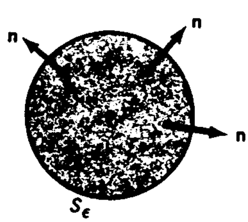
$$= \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV = 3\iiint_T dV = 3V,$$

که در آن V حجم ناحیهٔ T محصور به S است . با حل نسبت به V ، فرمول جالب

$$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \tag{۱۲}$$

به دست می‌آید که حجم یک جسم را برحسب شار بردار $\mathbf{r}$ در امتداد سطحش بیان می‌کند.

تعبیر فیزیکی دیورژانس . حال دیورژانس را تعبیر فیزیکی می‌کنیم . فرض کنیم $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ میدان سرعت حالت پایدار یک مایع تراکم‌ناپذیر متحرک باشد ، که در آن $\mathbf{v}$ به‌طورپیوسته مشتق‌پذیر است . فرض کنیم $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{a}) > 0$ ؛ درنتیجه ، دیورژانس $\mathbf{v}$ در نقطهٔ P به بردار موضع $\mathbf{a}$ مثبت است . فرض کنیم S_ε کره‌ای به شعاع ε و مرکز P با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ بوده ، و T_ε گوی محصور به S_ε باشد (ر.ک. شکل ۳۰) . در این صورت ، چون $\operatorname{div}\mathbf{v}$ پیوسته است



شکل ۳۰

(چرا؟) ، $\operatorname{div} \mathbf{v}$ به ازای ε به‌قدر کافی کوچک بر T_ε مثبت می‌باشد. بنابراین، طبق قضیهٔ دیورژانس،

$$\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{T_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV \tag{۱۳}$$

نیز مثبت است؛ درنتیجه، یک شارش روبه‌خارجی از مایع در امتداد S_ε وجود دارد. دراین حالت گوییم شارش یک **منبع** در P دارد. به همین نحو، هرگاه $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) < 0$ ، آنگاه $\int_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma < 0$ ؛ درنتیجه، یک شارش روبه *داخلی* از مایع درامتداد S_ε وجود دارد وگوییم شارش یک **چاهک** در P دارد. مثلاً، فرض کنیم لوله‌ای از آب با چنان سرعتی پر شود که شیر زیر سطح آب قرار گیرد، ولی سطح آب به‌خاطر بازبودن فاضل‌آب ثابت بماند. در این صورت، شارش درحالت پایدار بوده و یک‌منبع در شیر و یک چاهک در فاضل‌آب‌دارد. در غیاب منبع یا چاهک داریم $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) = 0$ ، زیرا تراکم‌ناپذیری مایع از هر تجمع یا فقدان مایع داخل S_ε جلوگیری می‌کند.

از فرمول (۱۳) نتیجهٔ جالب دیگری می‌توان به دست آورد. فرض کنیم V_ε حجم T_ε باشد. در این صورت، (۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{V_\varepsilon} \iiint_{T_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV = \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

که در آن عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط $\mathbf{v}$ روی ناحیهٔ T_ε است (مسئلهٔ ۳۲، صفحهٔ ۱۳۵۵، را به یاد بیاورید) . اما وقتی $\varepsilon \to 0$ ، این مقدار متوسط به $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a})$ ، یعنی مقدار دیورژانس $\mathbf{v}$ در P ، نزدیک می‌شود (چرا؟) . بنابراین،

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{V_\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma, \tag{۱۴}$$

که تعبیر *فارغ از* **مختصات** دیورژانس $\mathbf{v}$ در P به عنوان *شار* $\mathbf{v}$ **بر واحد حجم** در P را به ما می‌دهد. بخصوص، اگر $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{a})$ مثبت باشد، یک " دیورژانس " خالص یا شارش روبه‌خارج مایع از کرهٔ S_ε وجود خواهد داشت.

مسائل

دیورژانس میدان دوبعدی دادهٔ شدهٔ $\mathbf{F}$ را بیابید.

۱. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{F} = (\cos^2 xy)\mathbf{i} + (\sin^2 xy)\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{F} = (\cosh^2 xy)\mathbf{i} + (\sinh^2 xy)\mathbf{j}$

۵. $\mathbf{F} = \ln(\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{i} + \arctan(x/y)\mathbf{j}$

۶. $\mathbf{F} = (x \ln|x|)\mathbf{i} + (y \ln|y|)\mathbf{j}$

دیورژانس میدان سه‌بعدی داده شدهٔ $\mathbf{F}$ را بیابید.

۷. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

۸. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۹. $\mathbf{F} = xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

۱۰. $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

۱۱. $\mathbf{F} = \text{grad}\,(e^{x+y+z})$

۱۲. $\mathbf{F} = (\sin xy)\mathbf{i} + (\cos xz)\mathbf{j} + (\sinh yz)\mathbf{k}$

۱۳. $\text{div}\,(a\mathbf{F} + b\mathbf{G})$ را درصورتی حساب کنید که a و b اسکالرهای ثابتی باشند.

۱۴. دیورژانس گرادیان میدان اسکالر f *لاپلاسین* f نام دارد و با $\nabla^2 f$ نموده می‌شود. لذا،

$$\nabla^2 f = \text{div}\,(\text{grad}\, f) = \text{div}\,(\nabla f).$$

معادلهٔ $\nabla^2 f = 0$ *معادلهٔ لاپلاس* نام دارد، و جوابهای این معادله *توابع توافقی* خوانده می‌شوند (ر.ک. صفحهٔ ۱۲۳۹). نشان دهید که در بعد دو

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ولی، در بعد سه،

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

۱۵. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ همه جا جز در مبداء توافقی است.

۱۶. نشان دهید که تابع $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ هیچ جا توافقی نیست. مسئلهٔ ۵۱، صفحهٔ ۱۲۴۱، به زبان توابع توافقی چه می‌گوید؟

۱۷. آیا تابع $f(x, y, z) = e^x(\sin y + \cos z)$ توافقی است؟ جواب خود را شرح دهید.

۱۸. نشان دهید که $\text{div}\,(f\nabla f) = |\nabla f|^2 + f\nabla^2 f$.

۱۹. فرمول (۱۲) را برای کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق کنید.

۲۰. شبیه دوبعدی فرمول (۱۲) را یافته، و آن را برای دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a تحقیق نمایید.

کمیات زیر را با استفاده از قضیهٔ دیورژانس دوبعدی حساب کنید.

۲۱. شار میدان $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ خارج از دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2$

۲۲. شار میدان $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ خارج از مربع به رئوس $(0, \pm 1)$ و $(2, \pm 1)$

۲۳. فرض کنید $\partial f/\partial n$ مشتق تابع f از دو یا سه‌متغیر در جهت قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ به مسیر بستهٔ سادهٔ C یا سطح بستهٔ S باشد (درنتیجه، $\partial f/\partial n = \nabla f \cdot \mathbf{n}$)، و نیز f بر C یا S مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد. نشان دهید

$$\iint_R \nabla^2 f\, dA = \int_C \frac{\partial f}{\partial n}\, ds, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن R ناحیهٔ مسطح مرکب از مسیر C و درونش است، یا

$$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma, \qquad \text{(یکَ)}$$

که در آن T ناحیهٔ توپر مرکب از سطح S و درونش می‌باشد.

۲۴. فرمول (یکَ) را برای تابع $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ و مکعب

$$T = \{(x, y, z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

تحقیق نمایید.

به کمک قضیهٔ دیورژانس، شار میدان دادهٔ شدهٔ $\mathbf{F}$ خارج از کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را حساب کنید.

۲۵. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۶. $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (a, b, c ثابت)

۲۷. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

۲۸. $\mathbf{F} = 2x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

با محاسبهٔ طرفین معادلهٔ (۶)، قضیهٔ دیورژانس را برای ناحیهٔ توپر T و میدان $\mathbf{F}$ تحقیق کنید.

۲۹. $T = \{(x, y, z): x + y + z \le a, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

۳۰. $T = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c\}$, $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

۳۱. $T = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \le 2, 0 \le z \le 1\}$, $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۳۲. فرض کنید $f = f(x, y, z)$ و $g = g(x, y, z)$ دو تابع اسکالر با مشتقات دوم پیوسته بوده، و S، $\mathbf{n}$، و T همانند در قضیهٔ دیورژانس باشند. *اتحاد اول گرین* را ثابت کنید:

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV = \iint_S f\nabla g\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

و، با استفاده از آن، *اتحاد دوم گرین* را اثبات نمایید:

$$\iiint_T (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \iint_S (f\nabla g - g\,\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

۱۵ . ۶ قضیهٔ استوکس[1]

کرل یک میدان برداری . از بخش اخیر به یاد می‌آورید که دیورژانس $\mathbf{div\ F}$ میدان برداری $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ از حاصلضرب *نقطه‌ای* عملگر ∇ در $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود . حال *کرل* $\mathbf{F}$ را درنظر می‌گیریم که از حاصلضرب *خارجی* ∇ در $\mathbf{F}$ تشکیل می‌شود . لذا ،

$$\begin{aligned}\mathbf{curl\ F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k},\end{aligned} \tag{1}$$

که می‌توان آن را به‌طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\mathbf{curl\ F} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}. \tag{1'}$$

این یک دترمینان عددی معمولی نیست ، زیرا اولین سطرش از بردارها ، دومین سطرش از عملگرهای دیفرانسیل جزئی ، و سومین سطرش از توابع اسکالر تشکیل شده است ، ولی این راه ساده‌ای برای به‌خاطر آوردن طرف‌راست فرمول (۱) است . توجه‌کنید که عمل کرل‌گیری یک میدان برداری را به میدان برداری دیگری تبدیل می‌کند .

مثال ۱ . $\mathbf{curl\ (grad}\,f)$ را درصورتی حساب کنید که f یک میدان اسکالر با مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد .

حل . چون

1- *Stokes*

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

از فرمول (۱) معلوم می‌شود که

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}.$$

اما عبارت داخل هر پرانتز در سمت راست صفر است (چرا؟)؛ و لذا،

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

یک‌میدان با کرل صفر، مانند هر میدان‌گرادیان به‌طور پیوسته‌مشتقپذیر، **غیردورانی** نام دارد (دلیلش ذیلاً آورده می‌شود). حال، با معرفی کرل میدان $\mathbf{F}$، می‌توان‌قضیهٔ *استوکس* را بیان کرد. این تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ گرین است به شکل زیر:

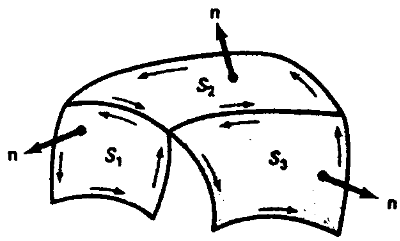
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA, \qquad (۲)$$

درست مثل قضیهٔ دیورژانس که تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ گرین به شکل

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dA$$

می‌باشد (بحث آغازین بخش ۵.۱۵ را به یاد آورید). در فرمول (۲)، منحنی مسطح بستهٔ سادهٔ C که ناحیهٔ R را محدود می‌کند در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود، که جهت مثبت به صورت تعریف شده در صفحهٔ۱۴۸۴است، به این معنی که R همواره سمت چپ ناظری است که در امتداد C در این جهت حرکت می‌کند. به طور کلی، اگر سطح هموار S مجهز به یک میدان از قائمهای یکهٔ $\mathbf{n}$ به یک منحنی *فضایی* بستهٔ ساده محدود شده باشد، جهت مثبت پیمایش C " القا شده به‌وسیلهٔ $\mathbf{n}$ " جهتی تعریف می‌شود که S همواره سمت چپ ناظری باشد که درحال پیمودن C سرش در جهت $\mathbf{n}$ باشد. اگر S هموار نبوده بلکه فقط قطعه قطعه هموار باشد، درنتیجه S از m زیر سطح‌هموار $S_1, \ldots S_m$ تشکیل شده باشد که در امتداد بخشهایی از منحنیهای مرزی $C_1, \ldots, C_m$ به‌هم‌وصل‌اند، انتساب قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ به‌زیر سطوح $S_1, \ldots, S_m$ چنان‌است‌که جهتهای القا شدهٔ $C_1, \ldots, C_m$ ویژگی زیر را دارا می‌باشند: هر قوس از $C_1, \ldots, C_m$ که دو زیر سطح مجاور در آن شریک‌اند دوبار پیموده می‌شود، در هر جهت یکبار، و قوسهای‌باقیمانده " باهم جور شده " منحنی C

تشکیل می‌دهند که سطح S را محدود می‌سازد (منحنی C بخشی از S درنظر گرفته‌می‌شود) این امر در شکل ۳۱ برای سه زیر سطح S_1 ، S_2 ، و S_3 توضیح داده شده است . توجه کنید هرگاه **n** یک قائم یکه به S باشد **n**–انتخاب دیگری از قائم یکه (و تنها انتخاب دیگر) می‌باشد .



یک سطح قطعه قطعه هموار
شکل ۳۱

قضیهٔ ۸ (قضیهٔ استوکس)[1] *. فرض‌کنیم S یک سطح قطعه قطعه هموار باشد که به منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C محدود شده است ،وقائم یکهٔ **n** به S را اختیار می‌کنیم. همچنین ،C درجهت‌مثبت (جهت‌القاشده‌به‌وسیلهٔ **n**)پیموده‌شده ،و $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر S باشد . در این صورت ،*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{۳}$$

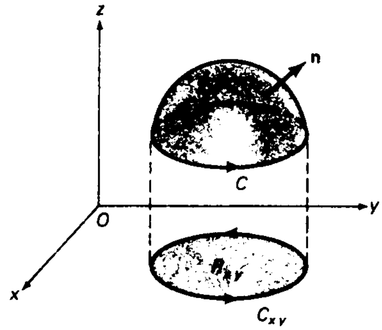
*در این صورت ، گردش **F** حول C مساوی شار کرل **F** در امتداد S می‌باشد .*

برهان ناقص (اختیاری) . برهان کامل قضیهٔ استوکس در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می‌شود ؛ و لذا ، قضیه را فقط در حالت خاص شکل ۳۲ ثابت می‌کنیم ، که در آن S نمودار تابعی چون $z=z(x,y)$ است با مشتقات جزئی دوم پیوسته که برناحیهٔ سادهٔ R_{xy} در صفحهٔ xy که مرزش منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C_{xy} است تعریف شده

---

۱ . *به افتخار سیر جرج گابریل استوکس* Sir George Gabriel Stokes *استاد ریاضیات دانشگاه کمبریج ، که قضیه را پس از اینکه در ۱۸۵۰ از سوی فیزیکدان برجسته ، ویلیام تامسون* William Thomson *که بیشتر به لرد کلوین* Lord Kelvin *معروف است ، به وی پیشنهاد شد مورد بررسی قرار داد .*

است . البته ، ناحیهٔ R_{xy} و منحنی مرزش C_{xy} تصاویر سطح S و مرزش منحنی C روی صفحهٔ xy اند . همچنین ، فرض است که n قائم یکهٔ *بالایی* به S می‌باشد .



شکل ۳۲

طرف چپ (۳) مساوی است با

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz. \tag{۴}$$

با استفاده از فرمول (۱۲) ، صفحهٔ ۱۴۷۵، به ازای curl F در جای F ، معلوم می‌شود که طرف راست (۳) برابر است با

$$\iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} \left[-(\text{curl }\mathbf{F})_1\frac{\partial z}{\partial x} - (\text{curl }\mathbf{F})_2\frac{\partial z}{\partial y} + (\text{curl }\mathbf{F})_3\right]dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right]dx\,dy. \tag{۵}$$

از مقایسهٔ (۴) و (۵) معلوم می‌شود که فرمول (۳) درصورتی برقرار است که نشان دهیم

$$\int_C F_1\,dx = -\iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{۶}$$

$$\int_C F_2\,dy = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right)dx\,dy, \tag{۷}$$

$$\int_C F_3\,dz = \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx\,dy, \tag{۸}$$

زیرا (۳) مجموع فرمولهای (۶) تا (۸) می‌باشد.

برای اثبات این فرمولها، فرض کنیم منحنی C_{xy} در جهت مثبت پیموده شده و به معادلات پارامتری $x = x(t),\ y = y(t)\ (a \le t \le b)$ باشد. در این صورت، C منحنی مرزی سطح S به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = x(t),\quad y = y(t),\qquad z = z(x(t), y(t)) \qquad (a \le t \le b),$$

و این نیز در جهت مثبت پیموده می‌شود. لذا، برحسب تابع مرکب $G(x, y) = F_1(x, y, z(x, y))$

$$\int_C F_1\,dx = \int_a^b F_1(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b G(x(t), y(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{C_{xy}} G\,dx. \qquad (۹)$$

بنابر قضیهٔ گرین (۱)، صفحهٔ ۱۴۸۰، به ازای $P = G$ ، $Q = 0$ ، $C = C_{xy}$ ، $R = R_{xy}$ ، و $dA = dx\,dy$ ، با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_{C_{xy}} G\,dx = -\iint_{R_{xy}} \frac{\partial G}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (۹')$$

از مقایسهٔ (۹) و (۹')، فرمول (۶) به دست می‌آید، و فرمول (۷) اساساً" به همین نحو ثابت می‌شود (شرح دهید).

حال، برای تکمیل برهان، فرمول (۸) را تحقیق می‌کنیم. در اینجا، برحسب تابع مرکب $H(x, y) = F_3(x, y, z(x, y))$ ،

$$\int_C F_3\,dz = \int_a^b F_3(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))\,\frac{dz(x(t), y(t))}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b H(x(t), y(t)) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt \qquad (۱۰)$$

$$= \int_{C_{xy}} H\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + H\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

مجدداً"، طبق قضیهٔ گرین، پس از اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\int_{C_{xy}} H\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + H\frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + H\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - H\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\right] dx\, dy \qquad (10')$$

$$= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy$$

(کجا در آن از فرض پیوسته بودن جزئیهای دوم $z(x, y)$ استفاده شد ؟) . از مقایسهٔ (۱۰) با (′۱۰) رابطهٔ (۸) به دست آمده ، بدین وسیله برهان قضیهٔ استوکس برای این حالت خاص کامل می‌شود .

برای آنکه قضیهٔ گرین به شکل برداری (۲) را از قضیهٔ استوکس (۳) به دست آوریم، سطح S را ناحیهٔ R در صفحهٔ xy می‌گیریم که مرز آن منحنی C بوده و دارای قائم یکهٔ بالایی ثابتی مساوی بردار پایهٔ $\mathbf{k}$ باشد ، و نیز $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ یک میدان به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر C در صفحه باشد . در این صورت ، جهت مثبت S خلاف عقربه‌های ساعت است ، کرل $\mathbf{F}$ به

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ساده می‌شود ، و $d\sigma = dA$ (چرا ؟) . لذا ، قضیهٔ استوکس فورا" به قضیهٔ گرین بدل می‌شود :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, d\sigma = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA .$$

مثال ۲ . قضیهٔ استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = -2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$ تحقیق کنید ، که‌در آن S عرقچین سهموی $z = 1 - x^2 - y^2$ $(z \geq 0)$ با قائم یکهٔ بالایی $\mathbf{n}$ است که مرزش C دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در صفحهٔ xy می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۹ ، صفحهٔ ۱۴۷۴) .

حل . چون

$$\text{curl}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

از فرمول (۵) نتیجه می‌شود که

$$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_R [(-4)(-2x) + 2(-2y) + 3]\, dx\, dy$$
$$= \iint_R (8x - 4y + 3)\, dx\, dy,$$

که در آن R قرص یکهٔ $x^2 + y^2 \leq 1$ می‌باشد . لذا ، با تبدیل به مختصات قطبی ، داریم

$$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (8r\cos\theta - 4r\sin\theta + 3)\, r\, dr$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{8}{3} r^3 \cos\theta - \frac{4}{3} r^3 \sin\theta + \frac{3}{2} r^2\right]_{r=0}^{1} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3}\cos\theta - \frac{4}{3}\sin\theta + \frac{3}{2}\right) d\theta = 3\pi.$$

و اما در مورد انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ، چون C دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در صفحهٔ xy است ، داریم

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -2z\, dx + 3x\, dy + 4y\, dz = \int_C 3x\, dy$$

$(z = dz = 0)$. لذا ، طبق نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ گرین (ر.ک. صفحهٔ ۱۴۸۲) ،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3\,(\text{مساحت } R) = 3\pi$$

و درنتیجه ، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ مساوی‌است‌با $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ ، که با قضیهٔ استوکس‌هماهنگی‌دارد .

مثال ۳ . قضیهٔ استوکس را برای میدان $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ تحقیق کنید ، کـه در آن S کره‌گون $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \geq 0)$ بوده و $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ بالایی S می‌باشد .

حل . این امر که $\mathbf{n}$ درامتداد لبهٔ S ، یعنی بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ درصفحهٔ xy ، افقی‌است،

به تبدیل مختصری از برهان ناقص قضیهٔ استوکس منجر می‌شود ، که‌در آن S با S_ε، یعنی‌نمودار

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad (z \geq \varepsilon > 0),$$

تعویض، محاسبات تکرار، و سپس فرض می‌شود که $\varepsilon \to 0$ ، ولی اعتبار قضیه خدشه‌دار نمی‌شود . چون

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x^3y^2 & z \end{vmatrix} = 3x^2y^2\mathbf{k},$$

از فرمول (۵) معلوم می‌شود که

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_R 3x^2y^2\, dx\, dy = 6 \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\, dy$$

$$= 6 \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3} x^2y^3\right]_{y=0}^{2\sqrt{1-x^2}} dx = 16 \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{3/2}\, dx,$$

که در آن R ناحیهٔ بیضوی $4x^2 + y^2 \leq 4$ در صفحهٔ xy است . با جانشانی $x = \sin t$ معلوم می‌شود که

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 32 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt. \tag{۱۱}$$

و اما راجع به انتگرال خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$، چون C بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ در صفحهٔ xy به‌معادلات پارامتری $x = \cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 0$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ است ، داریم

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C dx + x^3y^2\, dy + z\, dz = \int_0^{2\pi} (-\sin t + 8\cos^4 t \sin^2 t)\, dt \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 dt = 32 \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt \end{aligned} \tag{۱۱'}$$

(آخرین مرحله را توجیه کنید) . از مقایسهٔ (۱۱) و (۱۱') ، قضیهٔ استوکس‌در‌این‌حالت تأیید می‌شود ، و این کار بدون محاسبهٔ انتگرال $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t\, dt$ ، که به کمک مثال ۳، صفحهٔ ۶۱۷ ، می‌تواند دید مساوی $\pi/32$ است ، صورت گرفته است .

فرض کنیم $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیرباشد .

ما قبلاً از قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۱۴۵۱، که در آن به جای P، Q، و R بنویسیم F_1، F_2، و F_3، می‌دانیم هرگاه $\mathbf{F}$ میدان گرادیان باشد، آنگاه

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y},\qquad \frac{\partial F_3}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial z},\qquad \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x},$$

که با $\text{curl } \mathbf{F}=\mathbf{0}$ معادل است. به عکس، فرض کنیم در هر نقطه از قلمرو سه‌بعدی D، $\text{curl } \mathbf{F}=\mathbf{0}$؛ درنتیجه، $\mathbf{F}$ بر D غیردورانی است، و D را چنان می‌گیریم که هر مسیر بستهٔ سادهٔ C واقع در D مرز سطح قطعه قطعه‌هموار S باشد که در D جا دارد؛ یک چنین قلمرو را همبند *ساده* می‌نامیم[1]. در این صورت، بر S، $\text{curl } \mathbf{F}=\mathbf{0}$، و درنتیجه، بنابر قضیهٔ استوکس،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\text{curl } \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, d\sigma=\iint_S \mathbf{0}\cdot \mathbf{n}\, d\sigma=0.$$

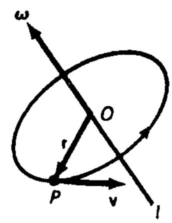
بنابراین، به ازای هر مسیر بستهٔ سادهٔ واقع در D، $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$. پس از تبصرهٔ صفحهٔ ۱۴۴۹ در مورد میدانهای دوبعدی و سه‌بعدی نتیجه می‌شود که انتگرال خط $\mathbf{F}$ بر D از مسیر مستقل است، یا معادلاً $\mathbf{F}$ بر D میدان گرادیان است. این صورت سه‌بعدی نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ گرین، صفحهٔ ۱۴۸۰، می‌باشد.

تعبیر فیزیکی کرل. برای توضیح معنی فیزیکی کرل، فرض کنیم ناحیه‌ای در فضا را با مایعی پر کرده باشیم که با تندی زاویه‌ای ثابت ω (ر.ک. ص۱۱۰۸) حول محور l دوران نماید (ر.ک. ص۱۱۰۸)، ومبداء O را مرکز دایرهٔ رسم شده توسط ذرهٔ چرخان P از مایع، مانند شکل ۳۳، می‌گیریم. اسکالر ω جهت دوران را به ما نمی‌گوید؛ ودرنتیجه، بردار $\boldsymbol{\omega}$ به‌اندازهٔ ω را معرفی می‌کنیم که در امتداد l بوده و در جهتی باشد که دوران در چشم ناظری‌واقع در نوک $\boldsymbol{\omega}$ خلاف جهت عقربه‌های‌ساعت باشد. سرعت معمولی (انتقالی) ذرهٔ P برحسب این بردار (به نام *سرعت زاویه‌ای*) مساوی است با

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}, \tag{12}$$

---

۱. *این تعریف اساساً همان تعریف قلمرو دوبعدی همبند ساده است که در صفحهٔ ۱۴۴۴ داده شده است (ناحیهٔ مسطح را مرکب از منحنی بستهٔ سادهٔ C و درونش به عنوان سطح با مرز C تجسم نمایید). اما یک قلمرو همبند ساده در فضا می‌تواند حفره داشته باشد؛ مثلاً، قلمرو بین دو کرهٔ متحدالمرکز همبند ساده است. به عنوان یک قلمرو سه‌بعدی همبند چندگانه (یعنی، همبند ساده نباشد)، می‌توان چنبره را درنظرگرفت.*



شکل ۳۳

که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع P می‌باشد . در واقع ، همانطور که از شکل واضح است ، $\mathbf{v}$ بر هر دوی $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ عمود بوده ، و بردارهای $\mathbf{v}$ ، $\boldsymbol{\omega}$ ، و $\mathbf{r}$ یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند (برای مشاهدهٔ این امر ، نقطهٔ شروع $\mathbf{v}$ را در O قرار دهید) . لذا ، $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ همجهت می‌باشند .ولی $\mathbf{v}$ و $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ هم‌اندازه نیز هستند ،زیرا $\boldsymbol{\omega}$ و $\mathbf{r}$ برهم عمودند؛ درنتیجه ، $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega|\mathbf{r}|$ ، و ما از صفحهٔ ۱۱۰۸ می‌دانیم که $|\mathbf{v}| = \omega|\mathbf{r}|$. این رابطهٔ (۱۲) را ثابت می‌کند ، و اگر O هر نقطهٔ دیگر محور l گرفته شود ، این فرمول بازهم برقرار است (چرا ؟) .

حال کرل میدان سرعت (۱۲) را حساب می‌کنیم . فرض کنیم

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$$

در این صورت ،

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$
$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}$$

درنتیجه ،

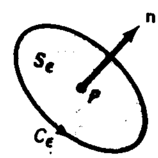
$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2\omega_1\mathbf{i} + 2\omega_2\mathbf{j} + 2\omega_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}\cdot$$

لذا ، کرل میدان سرعت یک مایع چرخان ، صرف نظر از عامل 2 ، همان سرعت زاویه‌ای مایع می‌باشد . این نشان می‌دهد که $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ " تمایل دورانی " میدان سرعت $\mathbf{v}$ را سنجیده ، و دلیل اینکه یک میدان با کرل صفر را " غیردورانی " نامند توضیح می‌دهد .

روش جالب دیگری نیز برای تعبیر کرل وجود دارد. فرض کنیم S_ε قرصی به شعاع ε باشد که در میدان سرعت حالت پایدار $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ فرورفته است، و مرکز S_ε در نقطهٔ P به بردار شعاعی $\mathbf{a}$ باشد. در این صورت، طبق قضیهٔ استوکس،

$$\iint_{S_\varepsilon} (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \qquad (۱۳)$$

که در آن S_ε قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ داشته و C_ε مرز مستدیر S_ε باشد که در جهت مثبت نسبت به $\mathbf{n}$ پیموده می‌شود (ر.ک. شکل ۳۴). فرض کنیم A_ε مساحت S_ε باشد. در این صورت، فرمول



شکل ۳۴

(۱۳) معادل است با

$$\frac{1}{A_\varepsilon}\iint_{S_\varepsilon} (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{A_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که در آن $\int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ گردش $\mathbf{v}$ حول C_ε بوده (صفحهٔ ۱۴۴۹ را به یاد آورید)، و عبارت سمت چپ مقدار میانگین یا متوسط $(\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ روی قرص S_ε است. اما وقتی $\varepsilon \to 0$، این متوسط به $[\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{n}$، یعنی مؤلفهٔ کرل $\mathbf{v}$ در P روی $\mathbf{n}$، نزدیک می‌شود. بنابراین،

$$[\text{curl } \mathbf{v}(\mathbf{a})] \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A_\varepsilon}\int_{C_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

که تعبیر *فارغ از مختصات* مؤلفهٔ کرل $\mathbf{v}$ در P روی $\mathbf{n}$ را به عنوان *گردش* $\mathbf{v}$ *بر واحد مساحت* در صفحهٔ مار بر P و عمود بر $\mathbf{n}$ به ما می‌دهد. این فرمول را با فرمول (۱۴)، صفحهٔ ۱۵۰۸، برای دیورژانس $\mathbf{v}$ در P مقایسه نمایید.

مسائل

کرل میدان برداری $\mathbf{F}$ را پیدا نمایید.

۱. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

۲. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{F} = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$

۶. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

۷. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

۸. $\mathbf{F} = z^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$

۹. $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

۱۰. $\mathbf{F} = (\sin y)\mathbf{i} + (\cos x)\mathbf{j} + (\sin xy)\mathbf{k}$

۱۱. $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F})$ را با فرض اینکه $\mathbf{F}$ مشتقات جزئی دوم پیوسته دارد حساب کنید.

۱۲. فرض کنید f یک‌میدان اسکالر مشتقپذیر و $\mathbf{F}$ یک‌میدان برداری‌مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{F}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{curl}\mathbf{F} = \nabla f \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F}$$

(به تشابه این با مثال ۲، صفحهٔ ۱۵۰۲، توجه کنید).

فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ توابع برداری مشتقپذیری باشند. نشان دهید که

۱۳. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{curl}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{curl}\mathbf{G}$

۱۴. $\operatorname{curl}(a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a \operatorname{curl}\mathbf{F} + b \operatorname{curl}\mathbf{G}$ (a و b ثابتهای اسکالر هستند)

قضیهٔ استوکس را برای میدان برداری $\mathbf{F}$ و سطح S داده شده تحقیق نمایید. در هرحالت، $\mathbf{n}$ را قائم یکهٔ بالایی بگیرید.

۱۵. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ، S نمودار $z = x$ روی مستطیل $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$ است

۱۶. $\mathbf{F} = (x^2 + x)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ ، S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z \ge 0)$ است

۱۷. $\mathbf{F} = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ ، S همان عرقچین سهموی مثال ۲ است

۱۸. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، S ناحیهٔ بیضویی است که در آن صفحهٔ $x + y + z = 2$ استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را قطع می‌کند

با استفاده از قضیهٔ‌استوکس، انتگرال $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را درصورتی‌حساب‌کنیدکه $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و C منحنی داده شده باشد.

۱۹. C مثلثی به رئوس $(0, 0, 3)$ ، $(1, 0, 3)$ ، و $(2, 1, 3)$ است که به همین ترتیب پیموده می‌شود

۲۰. C دایره‌ای است که در آن صفحهٔ $z = y$ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ قطع می‌کند و از محور z مثبت دیده می‌شود که پیمایش آن خلاف جهت عقربه‌های ساعت صورت می‌گیرد

فرض کنید f و g میدانهای اسکالر در فضا و با مشتقات جزئی دوم پیوسته بوده، و S ، C

و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ استوکس باشند. نشان دهید که

۲۱. $$\int_C f\,\nabla g\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

۲۲. $$\int_C (f\nabla g+g\nabla f)\cdot d\mathbf{r}=0$$

۲۳. فرض کنید C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار و مرز مشترک دو سطح قطعه قطعه هموار S_1 و S_2 با قائمهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ باشد، و نیز

$$I_1=\iint_{S_1}(\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}_1\,d\sigma,\qquad I_2=\iint_{S_2}(\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}_2\,d\sigma$$

که در آنها $\mathbf{F}$ یک میدان برداری بهطور پیوسته مشتقپذیر بر هر دوی S_1 و S_2 است. نشان دهید اگر جهت پیمایش C القا شده توسط $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ یکسان باشد، $I_1=I_2$؛ در غیر این صورت، $I_1=-I_2$.

۲۴. فرض کنید سطح S در قضیهٔ استوکس بسته باشد؛ درنتیجه، منحنی مرزی S_1 وجود ندارد. نشان دهید که در این حالت

$$\iint_S (\text{curl }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0.$$

۲۵. فرض کنید $\mathbf{F}=-y^2\mathbf{i}-xz\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$، و S سطح مکعبی شکل ۱۵، صفحهٔ ۱۴۷۰، باشد منتها وجه جلوی S_1 آن برداشته شده است، و $\mathbf{n}$ را قائم یکهٔ خارجی S بگیرید. شار کرل $\mathbf{F}$ در امتداد S را با محاسبهٔ گردش $\mathbf{F}$ حول مرز S مستقیماً" حساب کنید، ونیز، با استفاده از مسئلهٔ ۲۳، شار را به صورت انتگرالی روی وجه غایب بیان دارید.

۲۶. با فرض پیوسته بودن مشتقات جزئی دوم پیوستهٔ F، نشان دهید که

$$\text{curl (curl }\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\text{grad (div }\mathbf{F}) \qquad \text{(یک)}$$

(عبارت $\nabla^2\mathbf{F}=\nabla^2(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})$ را به صورت $\nabla^2F_1\mathbf{i}+\nabla^2F_2\mathbf{j}+\nabla^2F_3\mathbf{k}$ تعبیر نمایید).

۲۷. $\text{curl (curl }\mathbf{F})$ را به ازای $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}+2xz\mathbf{j}-3yz\mathbf{k}$ هم مستقیماً" و هم با استفاده از فرمول (یک) حساب کنید.

۲۸. فرض کنید T، S، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۰۲) بوده، و $\mathbf{G}$ یک میدان برداری بهطور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint_S \mathbf{n}\times\mathbf{G}\,d\sigma=\iiint_T \text{curl }\mathbf{G}\,dV.$$

راهنمایی . در قضیهٔ دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = \mathbf{G} \times \mathbf{c}$، که در آن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی است. انتگرالهای سطح و حجم میدانهای برداری را مؤلفه به مؤلفه تعبیر نمایید؛ مثلاً "،

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\sigma = \iint_S (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})\, d\sigma$$

$$= \left(\iint_S F_1\, d\sigma\right)\mathbf{i} + \left(\iint_S F_2\, d\sigma\right)\mathbf{j} + \left(\iint_S F_3\, d\sigma\right)\mathbf{k}.$$

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس
انتگرالهای خط نسبت به مختصات
منحنیهای قطعه قطعه هموار ، قلمروهای همبند ساده و چندگانه
انتگرالهای خط مستقل از مسیر ، میدانهای گرادیان
انرژی پتانسیل ، بقای انرژی ، میدانهای بقا
توصیف میدانهای گرادیان
مساحت سطح و انتگرالهای سطح
قائمهای یکه به سطح ، سطوح قطعه قطعه هموار
شار یک میدان برداری در امتداد سطح
قضیهٔ گرین و موارد استعمال آن
تبدیلات مختصات و ژاکوبیها
تغییر متغیر در انتگرالهای چندگانه
شکلهای برداری قضیهٔ گرین
دیورژانس و کرل یک میدان برداری
قضیهٔ دیورژانس و قضیهٔ استوکس

مسائل تکمیلی

انتگرال خط داده شده از نوع $\int_C f(\mathbf{r})\, ds$ را حساب کنید .

۱ . $\int_C xy\, ds$ ، که در آن C قوس بیضوی $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$ است

۲ . $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$ ، که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 2y$ است که یکبار در جهت خلاف

عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۳ . $\int_C x\sqrt{x^2 - y^2}\, ds$ ، که درآن C حلقهٔ راست‌لمنیسکات $r^2 = 4\cos 2\theta$ $(-\pi/4 \le \theta \le \pi/4)$ است

۴ . $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ ، که در آن C قوس مارپیچی $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ است

۵ . یک ذرهٔ متحرک درامتداددایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ به‌شعاع R و درجهت‌خلاف‌عقربه‌های ساعت تحت اثر نیروی ثابتی به اندازهٔ F که در امتداد محور مثبت است‌قراردارد . کار این نیرو بر ذره را وقتی ذره قوسی از دایره که در ربعهای اول و دوم است می‌پیماید پیدا نمایید . این کار وقتی ذره باشروع از نقطه‌ای یک‌دور کامل‌را می‌پیماید چقدر است ؟

۶ . اندازهٔ نیرویی با فاصلهٔ بین نقطهٔ اثرش و صفحهٔ xy نسبت عکس داشته وثابت تناسب a می‌باشد. فرض کنید نیرو همیشه از مبداء دور شود . کار این نیرو بر ذرهٔ متحرکی از $A = (1, 2, 2)$ تا نقطهٔ $B = (2, 4, 4)$ در امتداد پاره‌خط AB را بیابید .

۷ . $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را درصورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ و C پاره خط‌واصل بین مبداء و نقطهٔ (a, a, a) باشد .

۸ . انتگرال خط

$$\int_C \frac{x^2\, dy - y^2\, dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$$

را درصورتی حساب کنید که C ستاره‌گون $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ باشد که یک بار درجهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است .

۹ . انتگرال خط $\int_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$ را در صورتی حساب کنید که منحنی C $x = t, y = t^2, z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ باشد .

۱۰ . فرض کنید $f(x)$ بر $(-\infty, \infty)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد . نشان دهید که میدانهای برداری $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ و $\mathbf{G}(x, y) = f(xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ هر دو میدانهای بقا هستند .

آیا میدان برداری $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ به مؤلفه‌های داده شدهٔ $P = P(x, y)$ و $Q = Q(x, y)$ میدان گرادیان است ؟ اگر چنین است ، تابع U و قلمرو D را طوری بیابید که بر آن $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$.

۱۱ . $P = (x^2 + xy + y^2)x,\ Q = (x^2 - xy + y^2)y$

۱۲. $P = \cosh x + \cosh y, Q = x \sinh y$

۱۳. $P = e^{x+y} - \sin(x-y), Q = e^{x+y} + \sin(x-y)$

۱۴. $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, Q = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$

انتگرال خط داده شده را پس از تحقیق در استقلال از مسیر حساب کنید.

۱۵. $\int_{(0,0)}^{(1,-1)} \arctan x\, dx + \arctan y\, dy$

۱۶. $\int_{(-1,\pi/3)}^{(\pi/2,1)} (\sin xy)(y\,dx + x\,dy)$

۱۷. $\int_{(-1,1,-1)}^{(1,-1,\sqrt{3})} \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$

۱۸. $\int_{(-1,2,-2)}^{(3,-4,12)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

مساحت سطح S ذکر شده را بیابید.

۱۹. S بخشی از صفحهٔ $3x + 4y + 12z = 1$ است که داخل استوانهٔ $y^2 + z^2 = 1$ قراردارد

۲۰. S بخشی از مخروط $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانهٔ هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ و صفحات $y = \pm\sqrt{2}$ جدا می‌شود.

۲۱. S بخشی از مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ است که توسط استوانهٔ $x^2 + z^2 = a^2$ به شعاع a جدا می‌شود.

۲۲. همانطور که در صفحهٔ ۷۵۵ نشان دادیم، مساحت A سطح S حاصل ازدوران نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ حول محور x از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx\cdot$$

این فرمول را به کمک انتگرال سطح به دست آورید.

۲۳. انتگرال سطح

$$\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

را درصورتی حساب کنید که S بخشی از سهمی‌گون هذلولوی $z = xy$ باشد که توسط استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ جدا می‌شود.

۲۴. فرض کنید S سطح جانبی یک مخروط ناقص با چگالی یک، شعاع بالایی r_1، شعاع قاعدهٔ r_2، و ارتفاع h باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۱۱، صفحهٔ ۷۰۴). گشتاور ماند S حول محور تقارن آن را بیابید.

۲۵. میدان سرعت مایعی $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ به متربرثانیه است. چند متر مکعب بر ثانیه از مایع از سطح مثلثی S به رئوس $(1, 0, 0)$، $(0, 2, 0)$، و $(0, 0, 3)$ در جهت رو به بالا عبور می‌کند؟

۲۶. شار میدان $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ خارج از سطح بستهٔ S محدود به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و صفحهٔ $z = 1$ را بیابید.

۲۷. فرض کنید C کنتور مربعی به‌رئوس $(\pm 1, \pm 1)$ باشد که یکبار درجهت‌خلاف‌عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. انتگرال خط

$$\int_C (ye^{xy} - y^2 \sin x)\, dx + (xe^{xy} + 2y \cos x)\, dy$$

را با استفاده از قضیهٔ گرین حساب کنید.

۲۸. فرض کنید C یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار باشد. تعبیر هندسی انتگرال خط $\int_C (2xy - y)\, dx + x^2\, dy$ چیست؟

۲۹. فرض کنید توابع $f = f(x, y)$ و $g = g(x, y)$ بر ناحیهٔ R، که از منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار C و درونش تشکیل شده است، به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد. نشان دهید که

$$\int_C fg\, dx + fg\, dy = \iint_R \left[g\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dA.$$

۳۰. با استفاده از قضیهٔ گرین، نشان دهید که مساحت محصور به مسیر چندضلعی بستهٔ سادهٔ $P_1P_2P_3 \ldots P_nP_1$ به رئوس

$$P_i = (x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

مساوی نصف قدرمطلق مجموع

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_ny_1 - x_1y_n)$$

است. بخصوص، مسئلهٔ ۱۶، صفحهٔ ۱۲۱۰، را در مورد مساحت مثلث به رئوس (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، و (x_3, y_3) تحقیق نمایید.

راهنمایی. ابتدا نشان دهید که اگر L پاره خط از (x_1, y_1) تا (x_2, y_2) باشد، $\int_L x\, dy - y\, dx = x_1y_2 - x_2y_1$.

۳۱. با استفاده از مسئلهٔ ۳۰، مساحت محصور به چهار ضلعی با رئوس $(1, -1)$، $(2, -3)$، $(5, 1)$، و $(2, 6)$ را بیابید.

۳۲. انتگرال مضاعف

$$\iint_R \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\, dx\, dy$$

را درصورتی بیابید که R ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات و قوس سهموی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ باشد.

راهنمایی. از تبدیل $x = u\cos^4 v,\ y = u\sin^4 v$ استفاده کنید.

دیورژانس میدان برداری سه‌بعدی داده شده را درصورتی بیابید که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی بوده و $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

۳۳. $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ ۳۴. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{b}$ ۳۵. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$

۳۶. $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b}$ ۳۷. $(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}$ ۳۸. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r})$

۳۹. میدان $\mathbf{F} = (3x - y)\mathbf{i} + (2y - x^2)\mathbf{j} + (xy - cz)\mathbf{k}$ به‌ازای چه‌مقداری‌ازثابت c سولنوئیدی است؟

۴۰. فرض کنید T ، S ، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس بوده، و A مساحت سطح S باشد. نشان دهید که

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{n}\, dV = A.$$

۴۱. نشان دهید که قضیهٔ دیورژانس برای ناحیهٔ توپر T بین دو سطح بستهٔ S' و S'' در صورتی برقرار می‌ماند که انتگرال سطح $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ با مجموعی از انتگرالهای سطح‌روی S' و S'' با قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ در جهت دور شدن از T عوض شود.

۴۲. فرض کنید $\mathbf{F} = (q/r^2)\mathbf{u}$ یک میدان قانون عکس‌مجذور ناشی از جاذبه یا دافعه (مثلاً، ثقلی یا الکترواستاتیک) در مبداء باشد؛ در اینجا q یک ثابت مثبت یا منفی‌است، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، $r = |\mathbf{r}|$ ، و $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$. به کمک مسئلهٔ قبل، نشان دهید هرگاه S یک سطح بستهٔ قطعه قطعه هموار حول مبداء با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ باشد، آنگاه

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = 4\pi q,$$

نتیجه‌ای که به *قانون گاوس*[1] معروف است.

راهنمایی. پس از نشان دادن اینکه به ازای $r \neq 0$ ، $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ، از مسئلهٔ ۴۱ استفاده کنید.

۴۳ تا ۴۸. کرل هر یک از میدانهای برداری مسائل ۳۳ تا ۳۸ را بیابید.

راهنمایی. درمسائل ۴۶ تا ۴۸ از "قاعدهٔ بک ــ کب" استفاده کنید (ر.ک. مسئلهٔ ۴۸، صفحهٔ ۱۱۶۲).

---

1. *Gauss*

۴۹. فرض کنید f میدان اسکالری با مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته باشد. نشان دهید که میدان برداری ∇f غیردورانی است.

۵۰. فرض کنید T ، S ، و $\mathbf{n}$ همانند قضیهٔ دیورژانس بوده (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۰۲)، و f یک میدان اسکالر به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر T باشد. نشان دهید که

$$\iint_S f\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_T \operatorname{grad} f\,dV.$$

راهنمایی. در قضیهٔ دیورژانس قرار دهید $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$ ، که در آن $\mathbf{c}$ بردار ثابتی می‌باشد.

۵۱. فرض کنید S یک سطح بستهٔ قطعه قطعه هموار با قائم یکهٔ خارجی $\mathbf{n}$ باشد. نشان دهید که $\iint_S \mathbf{n}\,d\sigma = \mathbf{0}$.

۵۲. پدیده‌های الکترومغناطیس تحت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، به نام *معادلات ماکسول*[1]، عمل می‌کنند که شامل *میدان الکتریکی* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ و *میدان مغناطیسی* $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ است که هر دو تابع t و مختصات فضایی x ، y ، و z می‌باشند. در فضای تهی، معادلات ماکسول به شکل زیرند:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

که در آن $\mathbf{c}$ سرعت نور است. نشان دهید هر مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ در *معادلهٔ* موج

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

صدق می‌کند، که از این ماکسول وجود امواج الکترومغناطیس را که با سرعت نور حرکت می‌کنند نتیجه گرفت. امواج رادیویی، اشعهٔ $\mathbf{X}$ ، و خود نور همه امواجی الکترو-مغناطیس می‌باشند.

راهنمایی. به کمک فرمول (یک)، صفحهٔ ۱۵۲۳، نشان دهید که معادلات ماکسول روابط زیر را ایجاب می‌کنند:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \qquad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

---

1. *Maxwell*